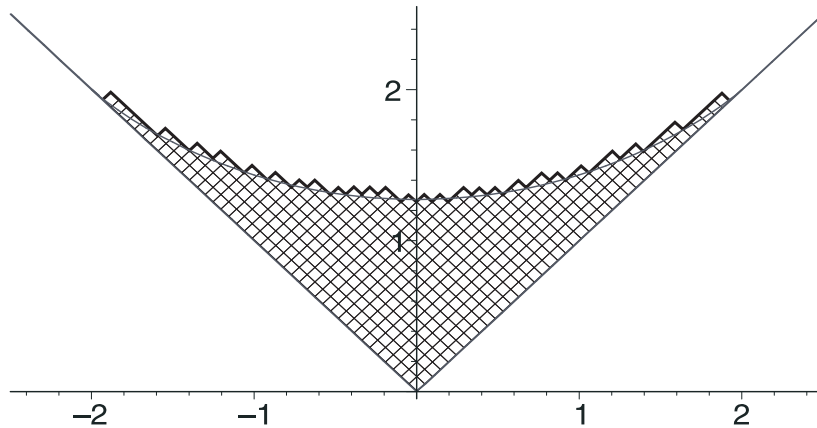


# Дисперсия линейной статистики планшерелевских диаграмм Юнга

К.Л. Толмачев

## 1 Введение

Диаграммой Юнга  $\lambda$  из  $n$  клеток называется таблица, строки которой сопоставляются разбиению числа  $n$  в сумму неубывающих натуральных слагаемых  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m > 0$ ,  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = n$ . Обозначим  $n = |\lambda|$ . Множество всех диаграмм Юнга из  $n$  клеток мы обозначаем  $\mathbb{Y}_n$ . Следуя Вершику и Керову, мы будем изображать диаграммы Юнга в виде повёрнутых на  $\frac{\pi}{4}$  треугольных табличек:



Построим по диаграмме  $\lambda$  последовательность  $(c_i(\lambda)) \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  по следующему правилу:

$$\begin{cases} c_k(\lambda) = 1, & k = \lambda_i - i, \text{ для какого-то } i; \\ c_k(\lambda) = 0, & \text{ иначе.} \end{cases}$$

Нас будет интересовать функция, график которой проходит по верхнему краю повёрнутой диаграммы. Это непрерывная кусочно-линейная функция, удовлетворяющая следующему условию:

$$\begin{cases} \Phi'_\lambda(x) = 1, & c_{[x]}(\lambda) = 0; \\ \Phi'_\lambda(x) = -1, & \text{ иначе.} \end{cases}$$

Снабдим  $\mathbb{Y}_n$  вероятностной мерой  $\mathbb{P}l^{(n)}$ , положив

$$\mathbb{P}l^{(n)}(\lambda) = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!},$$

где  $\dim \lambda$  - размерность неприводимого представления симметрической группы  $\mathbb{S}_n$ , соответствующего диаграмме  $\lambda$ . Эта мера называется *мерой Планшереля*.

В 1977 году Вершик и Керов [9] и, независимо, Логан и Шепп [10] показали, что относительно меры Планшереля “большие” диаграммы Юнга имеют предельную форму. А именно, для функции

$$\Omega(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(t \arcsin(t/2) + \sqrt{4-t^2}), & \text{если } |t| \leq 2; \\ |t|, & \text{если } |t| > 2, \end{cases}$$

и перенормированных изображений диаграмм Юнга верно следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}l^{(n)}\{\lambda \in \mathbb{Y}_n : \frac{1}{\sqrt{n}}|\Phi_\lambda(t) - \sqrt{n}\Omega(t/\sqrt{n})| < \varepsilon\} = 1.$$

В статьях [2] и [7] показано, что локально распределение  $c_i(\lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  задается дискретным синус-ядром. В [1], [6] и [8] в разных формах сформулирована центральная предельная теорема для отклонения диаграмм от предельной формы.

## 2 Основной результат

**Теорема 1** Для всех  $a, b \in (-2, 2)$  и всех последовательностей  $x_n, y_n$  таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{\sqrt{n}} = b$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = +\infty$ , выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}_{\mathbb{P}l^{(n)}}\left(\sum_{i=x_n}^{y_n} c_i(\lambda)\right)}{\log(y_n - x_n)} = \frac{1}{\pi^2}. \quad (1)$$

Для доказательства теоремы 1 мы воспользуемся техникой пуассонизации ([2], [7]).

### 2.1 Пуассонизация

Обозначим  $\mathbb{Y} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Y}_n$ , и введём на этом множестве *пуассонизацию меры Планшереля*:

$$\mathbb{P}l_\theta(\lambda) = e^{-\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \mathbb{P}l^{(k)}(\lambda), \quad \theta \in \mathbb{C},$$

считая, что  $\mathbb{P}l^{(k)}(\lambda) = 0$ , если  $|\lambda| \neq k$ . Бородин, Окуньков и Ольшанский в статье [2] и Йоханссон в статье [7], показали, что  $\mathbb{P}l_\theta$  задает на пространстве диаграмм Юнга *детерминантный точечный процесс* в следующем смысле: для произвольного набора различных  $\{x_1, \dots, x_s\} \subset \mathbb{Z}$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}l_\theta}(c_{x_1}(\lambda)c_{x_2}(\lambda)\dots c_{x_s}(\lambda)) = \det [J(x_i, x_j, \theta^2)]_{1 \leq i, j \leq s},$$

где  $J(x, y, \theta^2)$  - ядро Бесселя,

$$J(x, y, \theta^2) = \theta \frac{J_x(2\theta)J_{y+1}(2\theta) - J_{x+1}(2\theta)J_y(2\theta)}{x - y}.$$

(тут и далее дисперсия и математическое ожидание относительно  $\mathbb{P}l_\theta$  при  $\theta \in \mathbb{C}$  понимаются формально). Центральная предельная теорема для (непрерывного) процесса, задаваемого ядром Бесселя, получена в [12]. В [2], [7] показано, что локально при переходе к пределу при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  ядро Бесселя вырождается в синус-ядро. Центральная предельная теоремы для (непрерывного) синус-процесса получена в [5].

Следуя [4] и пользуясь хорошо известным тождеством

$$J(x, x, \theta^2) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} (J(x, y, \theta^2))^2,$$

перепишем пуассонизованную дисперсию из теоремы 1 следующим образом:

$$Var_\theta \left( \sum_x^y c_i(\lambda) \right) = \sum_{i \in [x_n, y_n]} \sum_{j \notin [x_n, y_n]} (J(i, j, \theta^2))^2,$$

где  $Var_\theta$  - дисперсия относительно пуассонизации меры Планшереля  $\mathbb{P}l_\theta$ . Сформулируем теперь пуассонизованную версию теоремы 1.

**Предложение 2.1** *Существует такая константа  $\gamma > 0$ , что для всех  $a, b \in (-2, 2)$ , и всех последовательностей  $x_n, y_n$  таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{\sqrt{n}} = b$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = \infty$ ,*

$$\left| \frac{Var_\theta \left( \sum_{i \in [x_n, y_n]} \sum_{j \notin [x_n, y_n]} (J(i, j, \theta^2))^2 \right)}{\log(y_n - x_n)} - \frac{1}{\pi^2} \exp(-\gamma|\sqrt{n} - \theta|) \right| = o(1). \quad (2)$$

Близкое утверждение для пуассонизованной дисперсии сформулировано в [1].

Вернуться от пуассонизованной меры к обычной можно при помощи *депуассонизационной леммы* (лемма 3.1 в [2]) и некоторых её усилений (леммы 3.1 - 3.2 в [4]).

Фиксируем  $0 < \alpha < 1/4$ .

**Депуассонизационная лемма 1** *Пусть  $\{f_n\}$  - последовательность целых функций,*

$$f_n = e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{nk}}{k!} z^k,$$

*и пусть существуют константы  $f_\infty$  и  $\gamma$  такие, что*

$$\max_{|z|=n} f_n(z) = O(e^{\gamma\sqrt{n}})$$

и

$$\max_{|z/n-1| \leq n^{-\alpha}} |f_n(z) - f_\infty| e^{-\gamma|z-n|/\sqrt{n}} = o(1)$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{nn} = f_\infty.$$

**Депуассонизационная лемма 2** Пусть  $\{f_n\}$  - последовательность целых функций,

$$f_n = e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{nk}}{k!} z^k,$$

и пусть существуют константы  $f_\infty, \gamma, C_1, C_2$  такие, что

$$\max_{|z|=n} |f_n(z)| \leq C_1 e^{\gamma\sqrt{n}},$$

$$\max_{|z/n-1| \leq n^{-\alpha}} |f_n(z) - f_\infty| e^{-\gamma|z-n|/\sqrt{n}} \leq C_2.$$

Тогда существуют константа  $C = C(\gamma, C_1, C_2)$  такая, что для всех  $n > 0$

$$|f_{nn} - f_\infty| < C.$$

**Депуассонизационная лемма 3** Пусть  $\delta > 0$ , и существуют такие константы  $f_\infty, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, C_1, \tilde{C}, C_2, C_3 > 0$ , что

$$\max_{|z|=n} |f_n(z)| \leq C_1 (e^{\gamma_1\sqrt{n}}),$$

$$\max_{|z/n-1| < n^{-\alpha}} |f_n(z)| e^{-\frac{\gamma_2|z-n|}{\sqrt{n}}} \leq C_2,$$

$$\max_{|z/n-1| < n^{\delta-1}} |f_n(z) - f_\infty| e^{-\frac{\gamma_3|z-n|}{\sqrt{n}}} \leq C_3.$$

Пусть  $a_n$  - последовательность положительных чисел,  $|a_n| < \tilde{C}$ , и

$$\max_{|z/n-1| < n^{\delta-1}} |f_n(z) - f_\infty| e^{-\frac{\gamma_1|z-n|}{\sqrt{n}}} \leq C_1 a_n.$$

Тогда существует константа  $C = C(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, C_1, \tilde{C}, C_2, C_3)$  такая, что для всех  $n > 0$

$$|f_{nn} - f_\infty| < C a_n.$$

## 2.2 Схема доказательства и структура работы

В разделе 3 анализируется асимптотика пуассонизованной дисперсии в левой части (1). В разделе 4 описывается переход к асимптотике по мере Планшереля (депуассонизация). Оценки ядра Бесселя, нужные в разделе 3, доказываются в разделе 5.

Для других локальных конфигураций несложно получить линейную верхнюю оценку сверху (она следует из общих свойств детерминантных процессов). В разделе 6 мы приводим явный пример локальной конфигурации, дающий линейную оценку снизу.

### 3 Асимптотика пуассонизованной дисперсии

#### 3.1 Оценки на ядро Бесселя

Для доказательства предложения 2.1 нам понадобятся следующие оценки ядра Бесселя в различных режимах (они будут доказаны в последнем разделе). Положим

$$u_x = x/\sqrt{n}, u_y = y/\sqrt{n}, \phi_x = \arccos(u_x/2), \phi_y = \arccos(u_y/2).$$

**Предложение 3.1** (*точки далеки от края диаграммы*) Пусть

$$|x| < 2\sqrt{n} - n^{\delta_1}, |y| < 2\sqrt{n} - n^{\delta_2}, \delta_1, \delta_2 > 1/6$$

Тогда

$$|J(x, y, \theta^2)| \leq \frac{C \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|)}{|e^{i\phi_x} - e^{i\phi_y}| \sqrt[4]{2 - u_x} \sqrt[4]{2 - u_y} \sqrt{n}} + \exp\left(-n^{c(-1/6 + \max(\delta_1, \delta_2))} + \gamma|\theta - \sqrt{n}|\right).$$

**Предложение 3.2** (*одна из точек на краю диаграммы*) Пусть

$$|x| < 2\sqrt{n} - n^\delta, 2\sqrt{n} - n^{1/6} < |y| < 2\sqrt{n} + n^{1/6}, \delta > 1/6.$$

Тогда

$$|J(x, y, \theta^2)| \leq \left( \frac{C}{n^{5/12} (2 - u_x)^{3/4}} + O(e^{-n^{c(\delta - 1/6)}}) \right) \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|).$$

**Предложение 3.3** (*одна из точек за краем диаграммы*) Пусть

$$|x| < 2\sqrt{n}, |y| > 2\sqrt{n} + n^\delta, \delta > 1/6,$$

тогда

$$|J(x, y, \theta^2)| \leq \left( C e^{-n^{c(\delta - 1/6)}} \right) \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|).$$

#### 3.2 Доказательство предложения 2.1

Перепишем оценку предложения 3.1.

$$\frac{C}{|e^{i\phi_x} - e^{i\phi_y}| \sqrt[4]{2 - u_x} \sqrt[4]{2 - u_y} \sqrt{n}} \leq \frac{C}{|\sqrt{2 - u_x} - \sqrt{2 - u_y}| \sqrt[4]{2 - u_x} \sqrt[4]{2 - u_y} \sqrt{n}},$$

Пользуясь тождеством

$$(a^2 - b^2)ab = (a^4 - b^4) \frac{ab}{a^2 + b^2},$$

получим

$$J(x, y, \theta^2) \leq \frac{C \exp \gamma|\theta - \sqrt{n}|}{|x - y|} \left( \frac{\sqrt[4]{2 - u_x}}{\sqrt[4]{2 - u_y}} + \frac{\sqrt[4]{2 - u_y}}{\sqrt[4]{2 - u_x}} \right).$$

Разобьём область суммирования на три части:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid i \in (x + \delta, y - \delta), j \notin [x, y]\} \\
R_2 &= \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid (i \in [x, x + \delta], j \notin [i - \delta - 1, x - 1] \cup [x, y]) \vee \\
&\quad \vee (i \in [y - \delta, y], j \notin [y + 1, i + \delta + 1] \cup [x, y])\} \\
M &= \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid (i \in [x, x + \delta], j \in [i - \delta - 1, x - 1]) \vee \\
&\quad \vee (i \in [y - \delta, y], j \in [y + 1, i + \delta + 1])\}
\end{aligned}$$

где  $\delta = \varepsilon(x - y)$  выберем потом. Следуя [3], оценим сумму в областях  $R_1$  и  $R_2$ , и вычислим её в области  $M$ .

**Оценка в  $R_1$ :** Запишем сумму в  $R_1$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in (x + \delta, y - \delta)} \sum_{j \notin [x, y]} J^2(i, j, \theta^2) &= \sum_{i \in (x + \delta, y - \delta)} \sum_{j = -\infty}^{x-1} J^2(i, j, \theta^2) + \\
&\quad + \sum_{i \in (x + \delta, y - \delta)} \sum_{j = y+1}^{\infty} J^2(i, j, \theta^2). \quad (3)
\end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое в правой части, первое оценивается аналогично. Просуммируем сначала по  $j$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{j = y+1}^{\infty} J^2(i, j, \theta^2) &= \sum_{j = y+1}^{2\sqrt{\bar{n}} - n^{1/6}} J^2(i, j, \theta^2) + \\
&\quad + \sum_{j = 2\sqrt{\bar{n}} - n^{1/6}}^{2\sqrt{\bar{n}} + n^{1/6}} J^2(i, j, \theta^2) + \sum_{j = 2\sqrt{\bar{n}} + n^{1/6}}^{\infty} J^2(i, j, \theta^2). \quad (4)
\end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое в (4):

$$\begin{aligned}
\exp(-\gamma|\theta - \sqrt{\bar{n}}|) \sum_{j = y+1}^{2\sqrt{\bar{n}} - n^{1/6}} J^2(i, j, \theta^2) &\leq \\
&\leq \sum_{j = y+1}^{2\sqrt{\bar{n}} - n^{1/6}} \frac{C}{(j - i)^2} \left( \frac{\sqrt[4]{2 - u_i}}{\sqrt[4]{2 - u_j}} + \frac{\sqrt[4]{2 - u_j}}{\sqrt[4]{2 - u_i}} \right)^2 \leq \\
&\leq \sum_{j = y+1}^{2\sqrt{\bar{n}} - n^{1/6}} \frac{C}{(j - i)^2} \left( \frac{\sqrt{2 - u_i}}{\sqrt{2 - u_j}} + \frac{\sqrt{2 - u_j}}{\sqrt{2 - u_i}} \right) \leq
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_{y+1}^{2\sqrt{n}-n^{1/6}} \frac{1}{(t-i)^2} \left( \frac{\sqrt{2\sqrt{n}-i}}{\sqrt{2\sqrt{n}-t}} + \frac{\sqrt{2\sqrt{n}-t}}{\sqrt{2\sqrt{n}-i}} \right) dt = \\
&= -C \frac{1}{t-i} \frac{\sqrt{2\sqrt{n}-t}}{\sqrt{2\sqrt{n}-i}} \Big|_{y+1}^{2\sqrt{n}-n^{1/6}} = \\
&= -C \left( \frac{n^{1/6}}{(2\sqrt{n}-i-n^{1/6})\sqrt{2\sqrt{n}-i}} - \frac{\sqrt{2\sqrt{n}-y-1}}{(y+1-i)\sqrt{2\sqrt{n}-i}} \right) \leq \\
&\leq \frac{C}{y-i+1}. \quad (6)
\end{aligned}$$

Суммируем теперь по  $i$ :

$$\sum_{i \in (x+\delta, y-\delta)} \frac{C}{y-i+1} \leq C \ln\left(\frac{y-x}{\delta}\right).$$

Оценим второе слагаемое:

$$\sum_{j=2\sqrt{n}-n^{1/6}}^{2\sqrt{n}+n^{1/6}} J^2(i, j, \theta^2) \leq \sum_{j=2\sqrt{n}-n^{1/6}}^{2\sqrt{n}+n^{1/6}} \frac{C \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|)}{n^{5/6} (2-u_i)^{3/2}} = C \frac{\exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|) n^{1/12}}{(2\sqrt{n}-i)^{3/2}}.$$

Просуммируем эту оценку по  $i$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in (x+\delta, y-\delta]} \frac{n^{1/12}}{(2\sqrt{n}-i)^{3/2}} &\leq C n^{1/12} \int_x^y \frac{1}{(2\sqrt{n}-t)^{3/2}} dt = \\
&= C n^{1/12} \left( \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{n}-t}} \right) \Big|_x^y \leq \frac{C n^{1/12}}{\sqrt{2\sqrt{n}-y}} \leq \\
&\leq C n^{1/12-1/4} = o(1). \quad (7)
\end{aligned}$$

Третье слагаемое экспоненциально мало по предложению 3.3.

**Оценка в  $R_2$ :**

$$\sum_{i \in [y-\delta, y]} \sum_{j \notin [y+1, i+\delta+1]} J^2(x, y, \theta^2) \leq \sum_{i \in [y-\delta, y]} \frac{\exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|)}{\delta} = O(1) \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|).$$

**Асимптотика в  $M$ :** Из доказательства леммы 3.5 в [2] (часть про дебаевскую асимптотику) получаем:

$$J(x, y, \theta^2) = \frac{\sin^2(\phi_y(x-y))}{\pi(x-y)} + o(\exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|)),$$

откуда

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \in [y-\delta, y]} \sum_{j \in [y+1, i+\delta+1]} J^2(x, y, \theta^2) = \\
&= \sum_{i \in [y-\delta, y]} \sum_{j \in [y+1, i+\delta+1]} \frac{1}{\pi^2} \frac{\sin^2(\phi_y(i-j))}{(i-j)^2} (1 + o(1)) + o(e^{\gamma|n-\theta^2|/\sqrt{n}}), \quad (8)
\end{aligned}$$

Применим лемму 4.6 из [3] к нашему ядру, сделав замену параметров

$$i = \xi_1 + y - \delta, j = \xi_2 + y + 1.$$

Получим

$$\begin{aligned} \sum_{i \in [y-\delta, y]} \sum_{j \in [y+1, i+\delta+1]} \frac{1}{\pi^2} \frac{\sin^2(\phi(i-j))}{(i-j)^2} &= \\ &= \sum_{i \in [y-\delta, y]} \sum_{j \in [y+1, i+\delta+1]} \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{(i-j)^2} (1 + o(1)) = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \ln \delta (1 + o(1)). \quad (9) \end{aligned}$$

Положим теперь  $\delta = \frac{|x-y|}{\ln(|x-y|)}$ . При таком  $\delta$  сумма в  $R_1 \leq C \ln \ln(x-y)$ , что завершает доказательство предложения 2.1.

## 4 Децуассонизация

В этом разделе мы завершаем доказательство теоремы 1. Заметим, что описанная выше техника децуассонизации непосредственно применима только к величинам, линейным по мере. Поэтому сейчас мы найдём, следуя [4], линейную по мере величину с той же асимптотикой, что и у дисперсии (пуассонизованной и децуассонизованной). Для этого нам понадобятся лемма 6.3 из [4] и её децуассонизация:

**Предложение 4.1** *Существует  $\varepsilon_0 > 0$  для которого верно следующее. Для любого  $\delta_0 > \frac{1}{6}$  существуют константы  $C > 0$ ,  $\gamma > 0$  такие, что для всех  $n \in \mathbb{N}$ , всех  $x$ ,  $|x| < 2\sqrt{n} - n^{\delta_0}$  и всех  $\theta \in \mathbb{C}$  таких, что*

$$\left| \frac{\theta}{\sqrt{n}} - 1 \right| < \varepsilon_0$$

имеем

$$\left| J(x, x, \theta^2) - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{x}{2\sqrt{n}} \right| \leq \frac{\exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|)}{2\sqrt{n} - x}$$

**Предложение 4.2** *Для любого  $\delta_0 > \frac{1}{6}$  существует константа  $C$  такая, что*

$$\left| \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{(n)}}(c_x) - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{x}{2\sqrt{n}} \right| \leq \frac{C(2 - |u_x|)}{\sqrt{n}},$$

для всех  $x$ ,  $|x| < 2\sqrt{n} - n^{\delta_0}$ .

Запишем

$$\begin{aligned} \text{Var}_\theta \left( \sum_{i=k}^{k+l} c_i \right) &= \mathbb{E}_\theta \left( \sum_{i=k}^{k+l} c_i - \sum_{i=k}^{k+l} \mathbb{E}_\theta c_i \right)^2 = \\ &= \mathbb{E}_\theta \left( \sum_{i=k}^{k+l} c_i - \sum_{i=k}^{k+l} J(c_i, c_i, \theta^2) \right)^2. \quad (10) \end{aligned}$$



Положим

$$F_\lambda(t) = \Phi_\lambda(t) - \sqrt{n}\Omega(t/\sqrt{n}),$$

где  $\Phi_\lambda(t)$  - форма диаграммы. Запишем теперь

$$\begin{aligned} F_\lambda(k+1) - F_\lambda(k) &= 1 - 2c_k(\lambda) - \sqrt{n} \left( \Omega\left(\frac{k+1}{\sqrt{n}}\right) - \Omega\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) \right) = \\ &= 2 \left( \frac{\arccos \frac{k}{2\sqrt{n}}}{\pi} - c_k(\lambda) \right) + \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{k}{2\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n} \left( \Omega\left(\frac{k+1}{\sqrt{n}}\right) - \Omega\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) \right) = \\ &= 2 \left( J(k, k; \theta^2) - c_k(\lambda) \right) + 2 \left( \frac{\arccos \frac{k}{2\sqrt{n}}}{\pi} - J(k, k; \theta^2) \right) + \\ &\quad + \left( \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{k}{2\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n} \left( \Omega\left(\frac{k+1}{\sqrt{n}}\right) - \Omega\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) \right) \right). \end{aligned}$$

Из формулы Тейлора для  $\Omega$  получаем

$$\left| \sqrt{n} \left( \Omega\left(\frac{k+1}{\sqrt{n}}\right) - \Omega\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) \right) - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{k}{2\sqrt{n}}\right) \right| \leq \frac{10}{\sqrt{4n-k^2}}.$$

Суммируя оценки и применяя 4.1 получаем, что, после депуассонизации,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{l(n)}} (F_\lambda(k+l) - F_\lambda(k))^2}{\log l} = \frac{1}{\pi^2}.$$

Аналогично, применяя 4.2, получаем утверждение теоремы 1.

## 5 Доказательство оценок ядра Бесселя

**План доказательства** Воспользуемся интегральным представлением ядра Бесселя [11]:

$$J(x, y, \theta^2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \int_{|z| < |w|} \frac{\exp(\theta(z - \frac{1}{z} - w + \frac{1}{w}))}{(z-w)z^{x+1}w^{-y}} dz dw.$$

Положим

$$u_x = \frac{x}{\sqrt{n}}, \quad S(z, u) = z - \frac{1}{z} - u \ln z, \quad \phi_x = \arccos \frac{u_x}{2}.$$

Обозначим

$$\Phi(z, w, \theta) = \frac{\exp \theta \left( z - \frac{1}{z} - w + \frac{1}{w} \right)}{(z-w)z^{x+1}w^{-y}}.$$

Заметим теперь, что

$$|\Phi(z, w, \theta)| \leq \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|) |\Phi(z, w, \sqrt{n})| = \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|) \left| \frac{\exp \sqrt{n}(S(z, u_x) - S(z, u_y))}{z(z-w)} \right|.$$

Доказательство проводится методом перевала. Мы, следуя [11], деформируем изначальные контуры (изменяя результат интегрирования на вычет, подсчитанный в конце раздела), и затем оцениваем модуль интеграла, разбивая контуры на удобные части.

### 5.1 Доказательство предложения 3.1

Пусть, для определённости,  $x > y$ . Положим  $I_x = [-n^{-\beta_x}, n^{-\beta_x}]$ ,  $I_y = [-n^{-\beta_y}, n^{-\beta_y}]$ ,  $\beta_x$  и  $\beta_y$  определим позже.

Продеформируем контуры. Каждый из них разделим на 4 части: 2 отрезка, трансверсально пересекающие единичную окружность и 2 дуги окружностей, аналогично [4] (см. Рис. 1).

Отрезки параметризуем так:

$$\begin{aligned} I_x^+(t) &= e^{i\phi_x} + At, & I_x^-(t) &= e^{-i\phi_x} + At, \\ I_y^+(t) &= e^{i\phi_y} + Bs, & I_y^-(t) &= e^{-i\phi_y} + Bs, \\ & & t \in I_x, s \in I_y. \end{aligned}$$

Тут  $A, B \in \mathbb{C}$  не зависят от  $n$  и такие, что отрезки пересекают единичную окружность трансверсально.

Дуги обозначим  $C_x^\pm, C_y^\pm$  (- - внутри, + - снаружи), 0 - центр обеих окружностей, их радиусы  $1 \pm cn^{-\beta_x}, 1 \pm cn^{-\beta_y}$ .

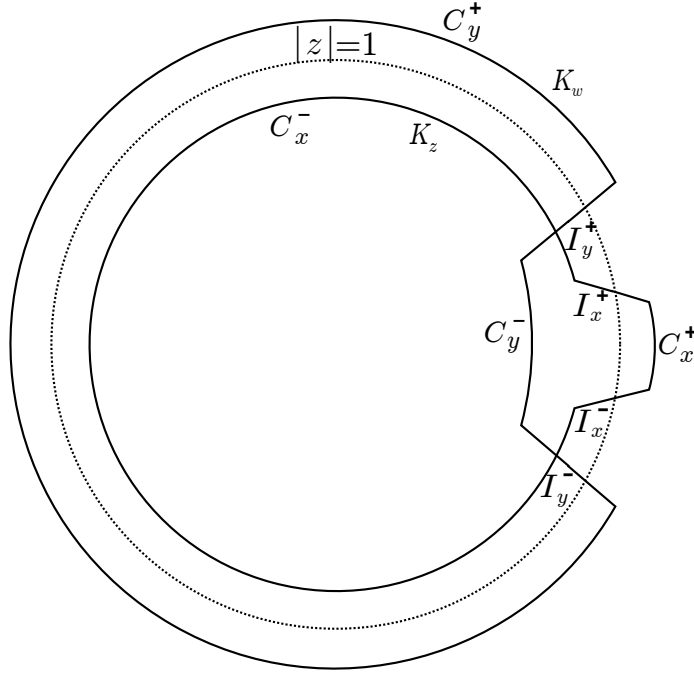


Рис. 1: деформированные контуры.

Выпишем выражение для  $S(z, t)$  во введённых на отрезках координатах:

$$S(z(t), u) = e^{i\phi_x} + At - \frac{1}{e^{i\phi_x} + At} - u_x \ln(e^{i\phi_x} + At),$$

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{t=0} = \left( A + \frac{A}{(e^{i\phi_x} + At)^2} - \frac{u_x A}{e^{i\phi_x} + At} \right) \Big|_{t=0} = 0,$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 S}{dt^2} \right|_{t=0} &= \left( -\frac{2A^2}{(e^{i\phi_x} + At)^3} + \frac{u_x A^2}{(e^{i\phi_x} + At)^2} \right) \Big|_{t=0} = A^2(u_x e^{i\phi_x} - 2)e^{-3i\phi_x} = \\ &= A^2 e^{-3i\phi_x} (u_x \cos \phi_x + i u_x \sin \phi_x - 2) = 2A^2 e^{-3i\phi_x} \sin \phi_x (i \cos \phi_x - \sin \phi_x) = \\ &= 2iA^2 e^{-2i\phi_x} \sin \phi_x. \quad (11) \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что  $u_x = 2 \cos \phi_x$ . Получаем, что

$$\left| \Re \left. \frac{d^2 S}{dt^2} \right|_{t=0} \right| \geq C\sqrt{2-u}.$$

Напомним, что  $f = \Theta(g) \iff f = O(g)$  и  $g = O(f)$ .

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^3 S}{dt^3} \right|_{t=0} &= \left( \frac{6A^3}{(e^{i\phi_x} + At)^4} - \frac{2u_x A^3}{(e^{i\phi_x} + At)^3} \right) \Big|_{t=0} = 6A^3 e^{-4i\phi_x} - 2u_x A^3 e^{-3i\phi_x} = \\ &= 2A^3 e^{-4i\phi_x} (3 - u_x e^{i\phi_x}) = \Theta(1). \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^4 S}{dt^4} \right|_{t=0} &= \left( -\frac{24A^4}{(e^{i\phi_x} + At)^5} + \frac{6u_x A^4}{(e^{i\phi_x} + At)^4} \right) \Big|_{t=0} = 24A^4 e^{-5i\phi_x} - 6u_x A^4 e^{-4i\phi_x} = \\ &= 6A^4 e^{-5i\phi_x} (-4 + u_x e^{i\phi_x}) = \Theta(1). \quad (13) \end{aligned}$$

Аналогично оцениваются производные  $I_y^\pm(s)$ .

**Круговые части.** Перейдём к полярным координатам  $z = (1+t)e^{i\phi}$ .

$$\begin{aligned} \Re S(z, u) &= (1+t-1+t-t^2) \cos \phi(t) - u(t-t^2/2) + O(t^3) = \\ &= (2 \cos \phi(t) - u)(t-t^2/2) + O(t^3) = (2 \cos(\arccos \frac{u}{2} + c_1 t) - u)(t-t^2/2) + O(t^3) = \\ &= 2ct(-\sin \arccos \frac{u}{2})t + O(t^3) = -2c\sqrt{1-\frac{u^2}{4}}t^2 + O(t^3) = \\ &= -c\sqrt{2-u}\sqrt{2+ut^2} + O(t^3), \quad (14) \end{aligned}$$

$$\sqrt{n} \Re S(z, u) \leq -c\sqrt{n}\sqrt{2-ut^2} + \sqrt{n}O(t^3).$$

Мы хотим продеформировать контуры таким образом, чтобы точки их пересечения находились достаточно далеко, где числитель  $\Phi(z, w, \theta)$  уже экспоненциально мал. Это обеспечивается следующими условиями (будем считать, что на концах отрезка  $t = n^{-\beta}$ ):

- 1)  $\sqrt{n(2-u)}t^2 \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ ,
- 2)  $\frac{t^3}{\sqrt{2-ut^2}} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,
- 3)  $n^{-\beta} \leq c|e^{i\phi_x} - e^{i\phi_y}|$

Проверим эти условия.  $\sqrt{2-u} \geq n^{\delta/2-1/4}$ , потому первое условие даёт

$$\delta/2 + 1/4 - 2\beta > 0 \implies \beta < \delta/4 + 1/8,$$

а второе

$$\delta/2 - 1/4 > -\beta \implies \beta > 1/4 - \delta/2.$$

Нужное  $\beta$  существует как раз когда

$$\delta/4 + 1/8 > 1/4 - \delta/2 \implies 3\delta/4 > 1/8, \delta > \frac{1}{6}.$$

Рассмотрим теперь условие 3). Пусть

$$x = 2\sqrt{n} - n^\delta + an^\alpha, y = 2\sqrt{n} - n^\delta + bn^\alpha, \delta > 1/6, \alpha < \delta.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |e^{i\phi_x} - e^{i\phi_y}| &= \Theta(|\sin \phi_x - \sin \phi_y|) = \Theta(|\sqrt{2-u_x} - \sqrt{2-u_y}|), \\ \sqrt{n^{\delta-1/2} + an^{\alpha-1/2}} - \sqrt{n^{\delta-1/2} + bn^{\alpha-1/2}} &= n^{\delta/2-1/4} \left( \sqrt{1+an^{\alpha-\delta}} - \sqrt{1+bn^{\alpha-\delta}} \right) = \\ &= \Theta(n^{\alpha-1/4-\delta/2}). \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$ , и в этом случае для некоторого  $C > 0$  выполняется неравенство

$$\frac{C}{|e^{i\phi_x} - e^{i\phi_y}| \sqrt[4]{2-u_x} \sqrt[4]{2-u_y} \sqrt{n}} \geq \frac{C}{(a-b)n^\alpha}.$$

Условие 3) тогда перепишем так:

$$\begin{aligned} n^{-\delta/4-1/8} &< n^{-\beta} < n^{\alpha-1/4-\delta/2}, \\ -\delta/4 - 1/8 &< \alpha - 1/4 - \delta/2, \\ \alpha &> 1/8 + \delta/4. \end{aligned}$$

Осталось разобрать случай, когда

$$\alpha < 1/8 + \delta/4.$$

Заметим, что в этом случае

$$\alpha - 1/4 - \delta/2 < -\alpha.$$

Оценим отдельно интеграл в окрестности точки пересечения контуров по отрезкам  $J_1, J_2$  длины порядка

$$n^{\alpha-1/4-\delta/2}$$

(отрезки  $AB$  и  $CD$  на Рис. 2).

$$\begin{aligned} \left| \int_{J_1} \int_{J_2} \Phi(z, w, \theta) dz dw \right| &\leq \int_{J_1} \int_{J_2} |\Phi(z, w, \theta)| dz dw \leq \\ &\leq \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|) \int_{J_1} \int_{J_2} |\Phi(z, w, \sqrt{n})| dz dw \leq \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|) \int_{J_1} \int_{J_2} \left| \frac{1}{\sqrt{c_1 s^2 + c_2 t^2}} \right| ds dt \leq \\ &\leq \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|) C \max(|J_1|, |J_2|) \leq C n^{-\alpha}. \quad (15) \end{aligned}$$

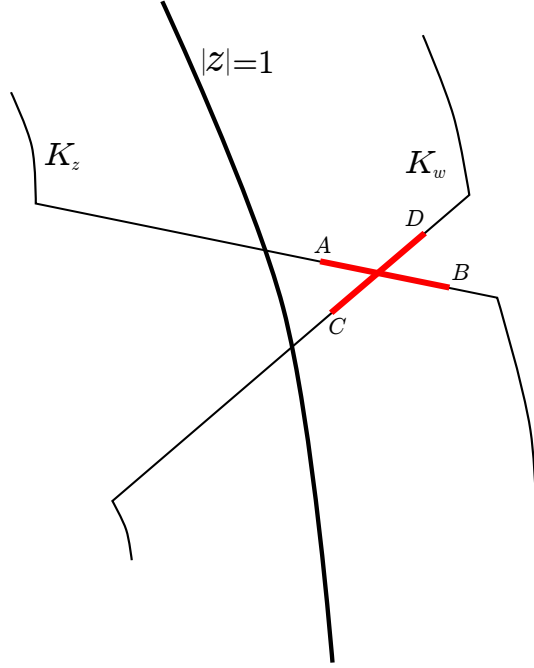


Рис. 2: отрезки  $AB$  и  $CD$  дают основной вклад в оценку интеграла.

**Основной вклад.**

$$\begin{aligned}
\left| \int_{I_x^+} \int_{I_y^+} \Phi(x, y, \theta) dz dw \right| &\leq \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|) \int_{I_x} \int_{I_y} \left| \frac{\exp(\sqrt{n}(S(z(t), u_x) - S(w(t), u_y)))}{e^{i\phi_x} - e^{i\phi_y} + At - Bs} \right| ds dt \leq \\
&\leq \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|) \frac{\int_{I_x} \int_{I_y} |\exp(\sqrt{n}(S(z(t), u_x) - S(w(t), u_y)))| ds dt}{|e^{i\phi_x} - e^{i\phi_y}|} = \\
&= \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|) \frac{\int_{I_x} \int_{I_y} |\exp \sqrt{n} (S_x''(0)t^2 - S_y''(0)s^2 + S_x^{(3)}(0)t^3 - S_y^{(3)}(0)s^3 + o(s^3, t^3))| ds dt}{|e^{i\phi_x} - e^{i\phi_y}|}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Сделаем замену

$$s = \frac{s'}{\sqrt[4]{n} \sqrt{|S_y''(0)|}}, t = \frac{t'}{\sqrt[4]{n} \sqrt{|S_x''(0)|}}.$$

Заметим, что  $\beta$  можно выбрать так, что после замены коэффициенты при третьих степенях в разложении Тейлора стремятся к 0 при  $n \rightarrow \infty$ . Действительно, новые отрезки интегрирования имеют длину

$$n^{-\beta+1/4} \sqrt[4]{2-u}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}t'^3}{n^{3/4} \left( \sqrt{|S''_x|} \right)^3} &\leq C n^{-1/4} n^{3/8-3\delta/4} n^{-3\beta+3/4+3\delta/4-3/8} = C n^{1/2-3\beta} \leq \\ &\leq C n^{1/2-3(1/8+\delta/4-\varepsilon)} = C n^{1/8-3\delta/4+3\varepsilon}. \end{aligned} \quad (17)$$

Получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{I_x^+} \int_{I_y^+} \Phi(x, y, \theta) dz dw \right| &\leq C \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|) \frac{|e^{i\phi_x} - e^{i\phi_y}|^{-1}}{\sqrt{n} \sqrt{|S''_x|} \sqrt{|S''_y|}} \leq \\ &\leq C \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|) \frac{|e^{i\phi_x} - e^{i\phi_y}|^{-1}}{\sqrt{n} \sqrt[4]{2-u_x} \sqrt[4]{2-u_y}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Точно так же оцениваются  $|\int_{I_x^-} \int_{I_y^-} \Phi(x, y, \theta) dz dw|$ ,  $|\int_{I_x^+} \int_{I_y^-} \Phi(x, y, \theta) dz dw|$ ,  $|\int_{I_x^-} \int_{I_y^+} \Phi(x, y, \theta) dz dw|$  (и интегралы по прямолинейным частям в случае  $\alpha \leq 1/8 + \delta/4$ ).

**Вычет.** Интеграл по деформированному контуру отличается от исходного на вычет:

$$|Res| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{r e^{-i\phi}}^{r e^{i\phi}} \frac{1}{w^{x-y+1}} dw \right| = \left| \frac{1}{2\pi i r^{x-y}} \int_{e^{-i\phi}}^{e^{i\phi}} \frac{1}{t^{x-y+1}} dt \right| = \left| \frac{1}{2\pi i r^{x-y}} K_{sin}(x-y, \phi) \right|.$$

Заметим теперь, что  $sgn(x-y) = sgn(r-1)$ .

## 5.2 Доказательство предложения 3.2

Контур деформируем аналогично проделанному при доказательстве предложения 3.1, с  $\beta_y = 1/6$ . В случае  $y > 2\sqrt{n}$  контур  $K_w$  - окружность с центром в 0 радиуса  $1 + n^{-\beta_y}$ . Отметим участки длины не более

$$\sqrt{|2-u_y|} < n^{-1/6}.$$

, прилегающие к  $I_x^\pm$  и  $I_y^\pm$  (при  $y > 2\sqrt{n}$  - дугу в окрестности вещественной оси) ( $AB, CD, EF$  и  $FG$  на Рис. 3).

Выпишем опять:

$$\Re S(z, u) = (2 \cos \phi(t) - u)(t - t^2/2) + O(t^3);$$

на этих участках  $\exp(n^{1/2} \Re S(z, u)) = O(1)$ , а вне их на круговых частях контура  $n^{1/2} \Re S(z, u)$  - бесконечно велико: при  $|2 \cos \phi(t) - u| > \sqrt{|2-u_y|}$

$$n^{1/2} \Re S(z, u) < -n^{1/6}.$$

Теперь перепишем вклад от интеграла по отрезкам, как в (16), но сделаем другую замену:

$$s = \frac{s'}{n^{1/6}}, t = \frac{t'}{\sqrt[4]{n} \sqrt{|S''_x|}},$$

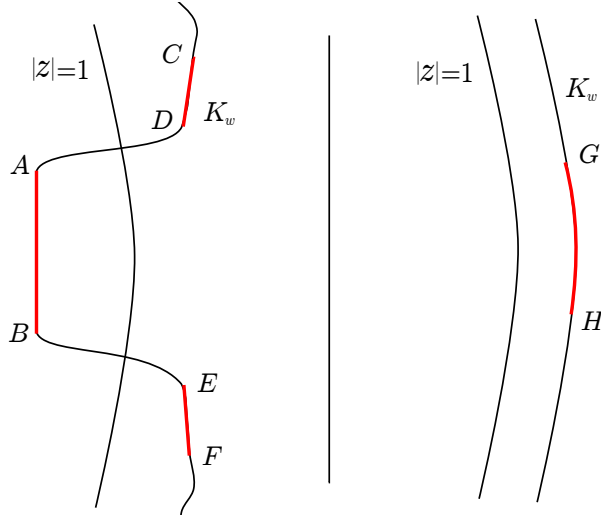


Рис. 3: деформация контура при  $y < 2\sqrt{n}$  и  $y > 2\sqrt{n}$  соответственно.

а

$$|z - w| > C|\sqrt{2 - u_x}|.$$

Вычет и интегралы по круговым частям контура оцениваются аналогично соответствующим разделам доказательства предложения 3.1.

### 5.3 Доказательство предложения 3.3

В этом случае контуры можно не деформировать: из доказательства предложения 3.1 (про круговые части) видно, что внешний контур можно выбрать так, что  $\Phi(z, w, \theta)$  на нём экспоненциально мало.

## 6 Дисперсия других локальных конфигураций

Пусть  $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{Z}$ . Обозначим  $c_{i+\vec{x}} = c_{i+x_1} c_{i+x_2} \cdots c_{i+x_k}$ .

**Предложение 6.1** Пусть  $\vec{x} \subset \mathbb{Z}$  - конечное подмножество,  $a, b \in (-2, 2)$ , а  $x_n, y_n, y_n > x_n$ , - последовательности целых чисел, такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n / \sqrt{n} = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n / \sqrt{n} = b,$$

и  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = +\infty$ . Тогда существует константа  $C > 0$  такая, что

$$\text{Var}_{\mathbb{P}^{(n)}} \left( \sum_{i=x_n}^{y_n} c_{i+\vec{x}} \right) \leq C(y_n - x_n).$$

Докажем сначала пуассонизованное утверждение:

$$\text{Var}_{\theta} \left( \sum_{i=x_n}^{y_n} c_{i+\vec{x}} \right) \leq (y_n - x_n) C \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|). \quad (19)$$

Действительно, перепишем нашу дисперсию следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Var}_\theta \left( \sum_{i=x_n}^{y_n} c_{i+\bar{x}} \right) &= \mathbb{E}_\theta \left( \sum_i c_{i+\bar{x}} \right) + \mathbb{E}_\theta \left( \sum_{i \neq j} c_{i+\bar{x}} c_{j+\bar{x}} \right) - \\ &\quad - \sum_i (\mathbb{E}_\theta c_{i+\bar{x}})^2 - \sum_{i \neq j} \mathbb{E}_\theta c_{i+\bar{x}} \mathbb{E}_\theta c_{j+\bar{x}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Оценим сумму в правой части (20).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta \left( \sum_i c_{i+\bar{x}} \right) - \sum_i (\mathbb{E}_\theta c_{i+\bar{x}})^2 &\leq C_1 (y_n - x_n) \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|); \\ \sum_{i,j:i+\bar{x} \cap j+\bar{x} \neq \emptyset} \mathbb{E}_\theta \left( \sum_{i \neq j} c_{i+\bar{x}} c_{j+\bar{x}} \right) - \sum_{i,j:i+\bar{x} \cap j+\bar{x} \neq \emptyset} \mathbb{E}_\theta c_{i+\bar{x}} \mathbb{E}_\theta c_{j+\bar{x}} &\leq C_2 (y_n - x_n) \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|). \end{aligned}$$

Заметим теперь, что если  $i + \bar{x} \cap j + \bar{x} = \emptyset$ , то

$$\mathbb{E}_\theta (c_{i+\bar{x}} c_{j+\bar{x}}) - \mathbb{E}_\theta c_{i+\bar{x}} \mathbb{E}_\theta c_{j+\bar{x}} \leq \frac{C_3 \exp(\gamma|\theta - \sqrt{n}|)}{(i-j)^2},$$

из детерминантного представления соответствующих матожиданий.

Суммируя последнее неравенство по  $i$  и  $j$  получаем пуассонизованное утверждение.

Депуассонизацию проведём аналогично депуассонизации в основном утверждении. А именно, из (19), дебаевской асимптотики ядра Бесселя и предложения 4.1 следует, что

$$\mathbb{E}_\theta \left( \sum_{i=x_n}^{y_n} c_{i+\bar{x}} - \mathbb{E}_n \left( \sum_{i=x_n}^{y_n} c_{i+\bar{x}} \right) \right)^2 \leq (y_n - x_n) C \exp \gamma|\theta - \sqrt{n}|.$$

Депуассонизуя и снова применяя дебаевскую асимптотику, получаем требуемое.

**Нижняя оценка** Приведём теперь пример локальной конфигурации с линейно растущей дисперсией.

Пусть  $u_x = 1$ ,  $\phi_x = \pi/2$ ,  $(y_n - x_n) = o(\sqrt{n})$  при  $n \rightarrow \infty$ . Покажем, что существуют  $c > 0$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$  такие, что

$$\text{Var}_{\mathbb{P}^{(n)}} \left( \sum_{i=x_n}^{y_n} c_i c_{i+1} \right) \geq c(y_n - x_n)$$

при  $n > n_0$ . Т.к. мы выбрали  $y_n$  и  $x_n$  такими, что  $(y_n - x_n) = o(\sqrt{n})$  вычисление производится для синус-ядра с фиксированным параметром.



$$\begin{aligned}
\text{Var}_{\mathbb{P}^{(n)}} \left( \sum_{i=x_n}^{y_n} c_i c_{i+1} \right) &\sim \sum_i \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{(n)}}(c_i c_{i+1}) - \sum_i \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{(n)}}(c_i c_{i+1})^2 + \\
&+ 2 \sum_i \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{(n)}}(c_i c_{i+1} c_{i+2}) - 2 \sum_i \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{(n)}}(c_i c_{i+1}) \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{(n)}}(c_{i+1} c_{i+2}) + \\
&+ \sum_{|i-j|>1} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{(n)}}(c_i c_{i+1} c_j c_{j+1}) - \sum_{|i-j|>1} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{(n)}}(c_i c_{i+1}) \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{(n)}}(c_j c_{j+1}). \quad (21)
\end{aligned}$$

Заметим теперь, что для синус-ядра

$$K_{\sin}(x, y, k) = \frac{\sin(k(x-y))}{\pi(x-y)}$$

в нашем режиме верно следующее:  $K_{\sin}(x, x, \pi/2) = 1/2$ ,  $K_{\sin}(x, y, \pi/2) = 0$  при  $x-y = 2k$ ,  $k \neq 0$ , и  $K_{\sin}(x, y, \pi/2) = \frac{(-1)^{(x-y-1)/2}}{x-y}$  при  $x-y = 2k+1$ . Получаем

$$\begin{aligned}
\text{Var}_{\mathbb{P}^{(n)}} \left( \sum_{i=x_n}^{y_n} c_i c_{i+1} \right) &\sim \frac{1}{\pi^2} \sum_i \left( \frac{\pi^2}{4} - 1 \right) - \frac{1}{\pi^4} \sum_i \left( \frac{\pi^2}{4} - 1 \right)^2 + \\
&+ 2 \frac{1}{\pi^3} \sum_i \left( \frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} \right) - 2 \frac{1}{\pi^4} \sum_i \left( \frac{\pi^2}{4} - 1 \right)^2 + \\
&+ \frac{1}{\pi^4} \sum_{|i-j|>1} \left( \frac{\sin^4(\frac{\pi}{2}(i-j))}{(i-j)^4} + \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}(i-j+1)) \sin^2(\frac{\pi}{2}(i-j-1))}{(i-j-1)^2 (i-j+1)^2} \right) - \\
&- \frac{1}{\pi^4} \sum_{|i-j|>1} \left( 2 \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}(i-j))}{(i-j)^2} (1 + \pi^2/4) + 2 \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(i-j+1)) \sin(\frac{\pi}{2}(i-j-1))}{(i-j-1)(i-j+1)} \right) - \\
&- \frac{1}{\pi^4} \sum_{|i-j|>1} \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}(i-j+1))}{(i-j+1)^2} + \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}(i-j-1))}{(i-j-1)^2} \right) \sim \left( \frac{1}{12} - \frac{3}{8\pi^2} \right) (y_n - x_n). \quad (22)
\end{aligned}$$

## Список литературы

- [1] Leonid Bogachev, Honggen Su, *Central limit theorem for random partitions under the Plancherel measure*, arXiv:math/0607635
- [2] Alexei Borodin, Andrei Okounkov, Grigori Olshanski, *Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups*, arXiv:math/9905032v2
- [3] Patrik L. Ferrari, Alexei Borodin, *Anisotropic KPZ growth in 2+1 dimensions: fluctuations and covariance structure*, arXiv:0811.0682v1
- [4] Alexander I. Bufetov, *On the Vershik-Kerov Conjecture Concerning the Shannon-Macmillan-Breiman Theorem for the Plancherel Family of Measures on the Space of Young Diagrams*, arXiv:1001.4275

- [5] Costin, O., Lebowitz, J. L. *Gaussian fluctuation in random matrices*. Phys. Rev. Lett. 75, 69–72. (doi:10.1103/PhysRevLett.75.69)
- [6] Vladimir Ivanov, Grigori Olshanski, *Kerov's central limit theorem for the Plancherel measure on Young diagrams*, arXiv:math/0304010v1
- [7] Kurt Johansson, The longest increasing subsequence in a random permutation and a unitary random matrix model, Math. Res. Letters, 5, 1998, 63–82.
- [8] S. Kerov, *Gaussian limit for the Plancherel measure of the symmetric group*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série I 316 (1993), 303–308
- [9] Vershik, A. M.; Kerov, S. V. *Asymptotic behaviour of the Plancherel measure of the symmetric group and the limit form of Young tableaux*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 233 (1977), no. 6, 1024–1027.
- [10] Logan, B. F.; Shepp, L. A. *A variational problem for random Young tableaux*. Advances in Math. 26 (1977), no. 2, 206–222.
- [11] Andrei Okounkov, *Symmetric functions and random partitions*, Symmetric functions 2001: surveys of developments and perspectives, 223–252, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 74, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [12] Alexander B. Soshnikov, *Gaussian fluctuation for the number of particles in Airy, Bessel, sine and other determinantal random point fields*, arXiv:math-ph/9907012