Неразрешимость элементарной теории полурешётки GLP-слов

Ф. Н. Пахомов

Аннотация

Алгебра Линдембаума арифметики Пеано PA может быть обогащена операторами n-непротиворечивости, которые сопоставляют данной формуле утверждение о её совместности с теорией PA, расширенной множеством всех истинных Π_n-предложений. В алгебре Линдембаума PA из $\mathbb{1}$ операторами n-непротиворечивости порождается нижняя полурешётка. Мы доказываем неразрешимость элементарной теории этой полурешётки и разрешимость элементарной теории её подполурешётки, порождённой лишь операторами 0-непротиворечивости и 1-непротиворечивости.

Библиография: 16 названий.

1 Введение

Ещё в 1949 году А. Тарский доказал разрешимость элементарной теории любой счётной безатомной булевой алгебры и тем самым элементарной теории алгебры Линдембаума $\mathfrak{L}(T)$ любой существенно неразрешимой теории T [13]. А. Гжегорчик [9] показал неразрешимость элементарной теории класса алгебр Гейтинга и элементарной теории алгебры замыкания пространства $\mathbb{R}^n$ для $n \geq 2$. В.В Рыбаковым была доказана неразрешимость элементарных теорий топобулевых и псевдодобулевых алгебр, соответствующих некоторым расширениям модальной логики $S4$ и интуиционистской логики Int [16].

Элементарные теории алгебр Магари, являющихся семантикой для логики доказуемости GL, изучались С.Н. Артёмовым и Л.Д. Беклемишевым [1]. Ими было показано, что элементарная теория свободной алгебры Магари порождённой n образующими разрешима, если и только если $n = 0$. В.Ю. Шавруковым [12] была показана неразрешимость элементарной теории алгебры Магари, полученной из алгебры Линденбаума арифметики Пеано PA добавлением оператора доказуемости в PA.

Напомним, что $\mathfrak{L}(PA)$ это — булева алгебра, носителем которой является множество арифметических предложений, факторизованное по отношению PA-доказуемой эквивалентности. Булевы операции на $\mathfrak{L}(PA)$ индуцированы соответствующими пропозициональными связками; например конъюнкция двух классов эквивалентности, порождённых предложениями A и B соответственно, полагается равной классу эквивалентности предложения $A \& B$. Кроме того напомним, что во всякой булевой алгебре имеется частичный порядок $\leq$ (такой порядок вводится и во всех нижних полурешётках): $x \leq y \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \wedge y = x$. Единичный элемент булевой алгебры (единственный максимальный элемент в смысле $\leq$) мы обозначаем символом $\mathbb{1}$.

Для каждого натурального числа n фиксируем выбранную естественным образом арифметическую формулу $Con_n(x)$, выражающую непротиворечивость расширения PA формулой с гёделевым номером x и множеством всех истинных в стандартной модели Π_n-предложений. Формулы $Con_n(x)$ индуцируют на $\mathfrak{L}(PA)$ операторы n-непротиворечивости $\langle n \rangle$, сопоставляющие классу эквивалентности формулы φ класс эквивалентности формулы $Con_n(\ulcorner\varphi\urcorner)$, где $\ulcorner\varphi\urcorner$ означает гёделев номер φ. (см.[14]).

Алгебра $\mathfrak{Gr}(PA) = (\mathfrak{L}(PA); \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \ldots)$ была введена в [2]. В силу результата Шаврукова элементарная теория этой алгебры неразрешима. Вопрос о разрешимости элементарной теории минимальной подалгебры C (подалгебры порождённой из $\mathbb{1}$) алгебры $\mathfrak{Gr}(PA)$, был поставлен Л.Д. Беклемишевым [5].

Кроме алгебры C интерес также представляют некоторые её подструктуры. В [2] было рассмотрено подмножество $W \subset \mathfrak{Gr}(PA)$, порождённое из $\mathbb{1}$ операторами $\wedge$ и $\langle n \rangle$ для каждого n. Мы будем рассматривать это подмножество, как полурешётку $\mathbb{W} = (W, =, \wedge)$ и как алгебру $\widehat{\mathbb{W}} = (W, =, \wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \ldots)$.

Как было отмечено в [2], на множестве W имеется естественное отношение строгого линейного порядка $<_0$, определяемое следующим образом: $x <_0 y \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} y \leq \langle 0 \rangle x$. Отметим, что различаются $\leq_0$ и стандартный частичный порядок на полурешётке $\leq$. Бинарное отношение $<_0$ является вполне упорядочением типа $\varepsilon_0 = \sup\{\underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}}_{n \text{ раз}} \mid n \in \omega\}$. Таким образом, структура $\widehat{\mathbb{W}}$ с определимым на ней порядком $<_0$ является конструктивной системой ординальных обозначений до ординала ε_0. Данная структура использовалась Л.Д. Беклемишевым для ординального анализа теории PA [2]. Для ординала ε_0 имеются и некоторые другие системы конструктивных обозначений [11]. Вопрос об их сравнении имеет значение в связи с проблемой каноничности систем ординальных обозначений в теории доказательств.

В этой работе мы доказываем неразрешимость элементарных теорий полурешётки $\mathbb{W}$ и алгебры $\widehat{\mathbb{W}}$. Фактически мы доказываем, что операции $\langle n \rangle$ выразимы в теории полурешётки $\mathbb{W}$. Кроме того, мы рассматриваем подмножество $W_1 \subset \mathfrak{Gr}(PA)$, порождённое из $\mathbb{1}$ операторами $\wedge$, $\langle 0 \rangle$ и $\langle 1 \rangle$; мы доказываем разрешимость элементарной теории $Th(W_1, =, \wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)$. В тоже время из наших результатов следует неразрешимость теории $Th(W_2, =, \wedge)$, где $W_2 \subset \mathfrak{Gr}(PA)$ порождено из $\mathbb{1}$ операторами $\wedge$, $\langle 0 \rangle$, $\langle 1 \rangle$ и $\langle 2 \rangle$.

2 Логика доказуемости GLP

Полимодальная логика доказуемости GLP была введена Г.К. Джапаридзе [15]; им же была доказана теорема об арифметической полноте и разрешимость этой логики. Нам далее потребуется другая форма теоремы об арифметической полноте логики GLP, которая позднее была сформулирована и доказана К.Н. Игнатьевым [10].

Язык логики GLP это — язык исчисления высказываний с логической константой $\top$(истина) и пропозициональными переменными $x_1, x_2, \ldots$, обогащённый семейством одноместных связок $\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \ldots$. Логика GLP задаётся следующими аксиомами и правилами вывода, в которых n и k пробегают всевозможные, в рамках указанных ниже ограничений, натуральные числа:

0. тавтологии исчисления высказываний;
1. $\langle n\rangle(A \vee B) \rightarrow (\langle n\rangle A \vee \langle n\rangle B)$;
2. $\neg\langle n\rangle\neg\top$;
3. $\langle n\rangle A \rightarrow \langle n\rangle(A \wedge \neg\langle n\rangle A)$;
4. $\langle n\rangle A \rightarrow \langle k\rangle A$, где $k \leq n$;
5. $\langle k\rangle A \rightarrow \neg\langle n\rangle\neg\langle k\rangle A$, где $k < n$;
6. $\dfrac{A \qquad A \rightarrow B}{B}$;
7. $\dfrac{A \rightarrow B}{\langle n\rangle A \rightarrow \langle n\rangle B}$.

Выводимость формулы A в этом исчислении мы будем обозначать $\vdash A$. Множество всех корректно построенных формул языка логики GLP мы обозначаем $L(GLP)$.

Арифметической оценкой называется функция v из множества всех формул языка GLP в множество арифметических предложений, обладающая следующими свойствами:

1. $v(A * B) = v(A) * v(B)$, где $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;
2. $v(\neg A) = \neg v(A)$;
3. $v(\langle n\rangle A) = Con_n(\ulcorner v(A)\urcorner)$;
4. $PA \vdash v(\top)$.

Теорема Джапаридзе об арифметической полноте утверждает, что в логике GLP выводимы те и только те формулы A, для которых при произвольной оценке v в PA выводимо предложение $v(A)$.

Алгеброй Линденбаума $\mathfrak{L}(GLP)$ *логики* GLP называется булева алгебра, носителем которой является множество $L(GLP)$, факторизованное по отношению GLP-доказуемой эквивалентности, а операции которой индуцированы соответствующими пропозициональными связками. Для каждого n на алгебру Линдембаума GLP индуцируются операторы $\langle n\rangle$. Рассмотрим подмножество $V \subset \mathfrak{L}(GLP)$, порождённое из единицы операторами $\wedge$ и $\langle n\rangle$ для всех n. Из теоремы Джапаридзе следует, что структуры $\mathbb{W}$ и $\widehat{\mathbb{W}}$ изоморфны структурам $(V, =, \wedge)$ и $(V, =, \wedge, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \ldots)$, соответственно. Тем самым мы переходим от исследования алгебры $\mathfrak{Gr}(PA)$ к исследованию алгебры $\mathfrak{L}(GLP)$.

3 Полурешётка GLP-слов

Мы будем обозначать слова в алфавите $\mathbb{N}$ строчным греческими буквами. Мы считаем слова α и β равными, если они графически совпадают. Говоря о символах слова $k_1k_2\dots k_n$, мы будем иметь ввиду числа k_1,k_2,…,k_n. Выражение $\alpha\beta$ будет обозначать конкатенацию слов α и β. Мы будем отождествлять всякое слово вида $k_1k_2\dots k_n$ с формулой $\langle k_1\rangle\langle k_2\rangle\dots\langle k_n\rangle\top \in L(GLP)$. В частности, пустое слово Λ мы отождествляем с формулой $\top$. Слова, таким образом отождествлённые с формулами, мы будем называть *GLP-словами.* Далее, допуская вольность речи, мы, говоря о словах, будем подразумевать GLP-слова. Отношение эквивалентности $\sim$ является сужением отношения GLP-эквивалентности на множество слов:

$$\alpha \sim \beta \overset{\text{def}}{\iff} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta.$$

Ниже мы увидим, что всякий класс эквивалентности из V порождён некоторым GLP-словом. Тем самым вместо элементов V мы часто будем иметь дело с соответствующими словами.

Введём следующие обозначения:

1. S — множество всех слов;

2. S_n — множество всех слов, любой символ которых $\geq n$;

3. $B_n = \{n\alpha \mid \alpha \in S_n\} \cup \{\top\}$;

4. $B = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_n$.

Для каждого натурального числа k определим бинарное отношение $<_k$ на множестве S:

$$\alpha <_k \beta \overset{\text{def}}{\iff} \vdash \beta \to \langle k\rangle\alpha.$$

Из определений следует, что для произвольных слов $\alpha_1 \sim \alpha_2$ и $\beta_1 \sim \beta_2$ мы имеем: $\alpha_1 <_k \beta_1 \iff \alpha_2 <_k \beta_2$. Таким образом, при всех k бинарное отношение $<_k$ переносится на множества $S/\sim$ и $S_k/\sim$.

Отметим некоторые результаты о словах, полученные в работах [2, 3].

Факт 1. *Для всякого натурального числа k бинарное отношение $<_k$ является вполне упорядочением порядкового типа ε_0 на множестве $S_k/\sim$.*

Заметим, что всякое слово $\alpha \in S_k$ может быть единственным образом представлено в виде $\alpha = \alpha_1 k\alpha_2 k\dots k\alpha_n$, где $\alpha_i \in S_{k+1}$. Одновременно для всех $k \in \mathbb{N}$ зададим функции $o_k\colon S_k \to \varepsilon_0$ следующей системой тождеств:

1. $o_k(\langle k\rangle^n\top) = n$;

2. $o_k(\alpha_1 k ... k\alpha_n) = \omega^{o_{k+1}(\alpha_n)} + ... + \omega^{o_{k+1}(\alpha_1)}$, где $\alpha_i \in S_{k+1}$ для каждого $i \in \{1,\dots n\}$ и существует $l \in \{1,\dots,n\}$ такое, что $\alpha_l \neq \top$.

Введём сокращение $o\colon S \to \varepsilon_0$ для функции o_0.

Факт 2. *[3, Лемма 15] [3, Следствие 7] Для всякого k функция o_k согласована с отношением эквивалентности $\sim$ и задаёт изоморфизм $(S_k/\sim, <_k)$ и ординала ε_0 со стандартным порядком $(\varepsilon_0, <)$.*

Определим множество NF всех слов, находящихся в нормальной форме. Зададим принадлежность слов к NF индукцией по длине.

1. $\top \in NF$.

2. Пусть минимальный символ слова $\alpha \neq \top$ равен k и $\alpha = \alpha_1 k \alpha_2 k \dots k \alpha_n$, где все $\alpha_i \in S_{k+1}$. Тогда $\alpha \in NF$, если и только если $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in NF$ и $\alpha_{i+1} \not<_{k+1} \alpha_i$ при i от 1 до $n-1$.

Факт 3. *[3, Следствие 5] Для каждого слова α существует единственное эквивалентное ему слово $\beta \in NF$. Такое β называется нормальной формой α.*

Приведём здесь без доказательства процедуру приведения слова к нормальной форме, которая является незначительно перестроенной процедурой из доказательства [3, Предложение 3]. Будем сводить построение нормальной формы слова к построению нормальных форм слов меньшей длины. Пустое слово уже приведено к нормальной форме. Перейдём к случаю непустого слова α. Пусть минимальный символ слова α равен k и оно имеет вид $\alpha = \alpha_1 k \dots k \alpha_n$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in S_{k+1}$. Приведём слова α_1 и $\alpha_2 k \dots k \alpha_n$ к нормальной форме — это будут слова β_1 и $\beta_2 k \dots k \beta_m$ соответственно, где $\beta_1, \dots, \beta_m \in S_{k+1}$. Положим $A = \{s \mid 2 \leq s \leq m, \beta_s \not<_{k+1} \beta_1\}$. Если множество A не пусто, то нормальная форма α равна $\beta_1 k \beta_l k \dots k \beta_m$, где $l = \min(A)$, иначе нормальная форма α равна β_1.

Замечание 1. *Если слово принадлежит S_k, то и его нормальная форма принадлежит S_k.*

Определим функцию $t\colon S \to (\mathbb{N} \cup \{-1\})$, переводящую слово в его первый символ:

1. $t(\top) = -1$;

2. $t(k_1 \dots k_n) = k_1$.

Факт 4. *[3, Лемма 1] Пусть слова α и β таковы, что $\alpha \in S_k$ и $t(\beta) < k$. Тогда $\vdash \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \alpha\beta$.*

В силу того, что в GLP верна теорема $\langle k \rangle \langle k \rangle A \to \langle k \rangle A$ мы получаем

Замечание 2. *Если $\alpha \in B_k$, то $\vdash \langle k \rangle \alpha \to \alpha$.*

Факт 5. *Пусть $\alpha, \beta \in B_k$. Тогда либо $\vdash \alpha \to \beta$, либо $\vdash \beta \to \alpha$. Притом $\alpha <_k \beta$ влечёт $\vdash \beta \to \alpha$.*

Доказательство. Из [3, Следствие 6] мы получаем, что либо $\vdash \alpha \to \beta$, либо $\vdash \beta \to \alpha$. Предположим, что $\alpha <_k \beta$. По определению $<_k$ мы имеем $\vdash \beta \to \langle k \rangle \alpha$. Тем самым с помощью замечания 2 мы получаем $\vdash \beta \to \alpha$. □

Факт 6. *[3, Лемма 9] Для любых слов $\alpha, \beta \in S_k$ эффективно строится слово $\gamma \in S_k$ такое, что $\vdash \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \gamma$.*

Для данного слова α обозначим через $[\alpha]$ класс эквивалентности: $[\alpha] = \{\beta \in S \mid \alpha \sim \beta\} \in S/{\sim}$.

Множество S вложено в $L(GLP)$, тем самым фактор множество $S/{\sim}$ каноническим образом вкладывается в $\mathfrak{L}(GLP)$: $[\alpha] \longmapsto \{A \in L(GLP) \mid GLP \vdash A \leftrightarrow \alpha\}$. В силу факта 6 такое вложение есть биекция между $S/{\sim}$ и V. Таким образом, с V на $S/{\sim}$ переносятся операции $\wedge$, $\langle 0 \rangle$, $\langle 1 \rangle$,.... Отметим, что структуры $\mathbb{W}$ и $\widehat{\mathbb{W}}$ изоморфны структурам $(S/{\sim}, =, \wedge)$ и $(S/{\sim}, =, \wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \ldots)$, соответственно.

Введём операцию конъюнкции слов. Пусть α и β — слова, а γ — единственное слово из NF такое, что $\vdash \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \gamma$. Положим $\alpha \wedge \beta = \gamma$. Отметим, что $[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$ и $\langle n \rangle [\alpha] = [n\alpha]$ при всех n.

4 Некоторые свойства полурешётки слов

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ зададим функцию $h_k \colon S \to S_k$. Заметим, что для всякого слова α существует и единственно его представление в виде $\alpha = \beta\gamma$, где $\beta \in S_k$, а $t(\gamma) < k$. Положим $h_k(\alpha) = \beta$.

Лемма 1. *Для всякого слова α*

$$t(\alpha) = \min(\{k \mid h_k(\alpha) \sim \top\}) - 1. \tag{4.1}$$

Доказательство. Заметим, что $h_k(\alpha) \neq \top$ тогда и только тогда, когда $k \leq t(\alpha)$. Также для всякого β: $\beta = \top \iff \beta \sim \top$. Отсюда мы получаем тождество (4.1). □

Лемма 2. *Пусть слова α и β таковы, что $\alpha \sim \beta$. Тогда для всякого k выполняется $h_k(\alpha) \sim h_k(\beta)$.*

Доказательство. Докажем, что $h_k(\alpha) \sim h_k(\beta)$ индукцией по k. Предположение индукции для $k = 0$ очевидно выполнено; перейдём к случаю $k > 0$.

Предположим, что $h_k(\alpha) \sim h_k(\beta)$ и докажем, что $h_{k+1}(\alpha) \sim h_{k+1}(\beta)$. Слово $h_k(\alpha)$ имеет вид $h_k(\alpha) = h_{k+1}(h_k(\alpha))k\alpha_1 k\alpha_2 k \ldots k\alpha_n$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S_{k+1}$. Заметим, что $h_{k+1}(\alpha) = h_{k+1}(h_k(\alpha))$ и тем самым $h_k(\alpha) = h_{k+1}(\alpha)k\alpha_1 k \ldots k\alpha_n$.

Пусть слово γ — нормальная форма слова $h_k(\alpha)$. Рассмотрим построение γ по описанной ранее процедуре. Пусть нормальная форма $\alpha_1 k\alpha_2 k \ldots k\alpha_n$ имеет вид $\gamma_1 k\gamma_2 k \ldots k\gamma_m$, где все $\gamma_i \in S_{k+1}$, а нормальная форма $h_{k+1}(\alpha)$ равна слову γ_0. Исходя из процедуры построения нормальной формы слова мы выводим, что либо $\gamma = \gamma_0 k\gamma_l k \ldots k\gamma_m$ для некоторого положительного натурального числа $l \leq m$, либо $\gamma = \gamma_0$. Следовательно, $h_{k+1}(\gamma) = \gamma_0 \sim h_{k+1}(\alpha)$.

Проведя аналогичное рассуждение для β и нормальной формы слова $h_k(\beta)$, равной δ, мы получим, что $h_{k+1}(\delta) \sim h_{k+1}(\beta)$. В силу единственности нормальной формы слова и предположения индукции $\gamma = \delta$. Тем самым $h_{k+1}(\alpha) \sim h_{k+1}(\beta)$, что завершает доказательство леммы. □

По лемме 2 правая часть тождества (4.1) сохраняет своё значение при замене слова α на эквивалентное, тем самым мы получаем

Следствие 1. *Если $\alpha \sim \beta$, то $t(\alpha) = t(\beta)$.*

Из замечания 1 и следствия 1 мы выводим

Следствие 2. *Если слово α принадлежит B_k, то и его нормальная форма принадлежит B_k.*

Лемма 3. *Для всякого натурального числа k и любых слов α и β*

$$h_k(\alpha \wedge \beta) \sim h_k(\alpha) \wedge h_k(\beta).$$

Доказательство. Найдём такое число $n > k$ и слова $\alpha_0, \beta_0 \in B_0$, $\alpha_1, \beta_1 \in B_1, \ldots$, $\alpha_n, \beta_n \in B_n$, что $\alpha = \alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_0$ и $\beta = \beta_n \beta_{n-1} \ldots \beta_0$. При i от 0 до n положим $\gamma_i = \alpha_i \wedge \beta_i$. Из факта 5 и следствия 2 мы для всех γ_i получаем, что $\gamma_i \in B_i$. Используя факт 4 мы последовательно получаем следующие соотношения:

$$\alpha \wedge \beta \sim \alpha_n \wedge \ldots \wedge \alpha_0 \wedge \beta_n \wedge \ldots \wedge \beta_0 \sim \gamma_n \wedge \ldots \wedge \gamma_0 \sim \gamma_n \ldots \gamma_0$$

$$h_k(\alpha) \wedge h_k(\beta) \sim \alpha_n \wedge \ldots \wedge \alpha_k \wedge \beta_n \wedge \ldots \wedge \beta_k \sim \gamma_n \wedge \ldots \wedge \gamma_k \sim \gamma_n \ldots \gamma_k$$

$$h_k(\alpha \wedge \beta) \sim h_k(\gamma_n \ldots \gamma_0) \sim \gamma_n \ldots \gamma_k \sim h_k(\alpha) \wedge h_k(\beta).$$

□

Следствие 3. *Пусть α и β слова. Тогда $t(\alpha \wedge \beta) = \max(t(\alpha), t(\beta))$.*

Доказательство. В силу леммы 3 при произвольном k: $h_k(\alpha \wedge \beta) \sim \top \iff h_k(\alpha) \sim \top$ и $h_k(\beta) \sim \top$. Таким образом, искомое следует из леммы 1. □

Назовём слово α *разложимым*, если существуют такие слова $\beta \nsim \alpha$ и $\gamma \nsim \alpha$, что $\beta \wedge \gamma \sim \alpha$.

Предложение 1. *Пусть слово $\alpha \in NF$. Тогда α неразложимо, если и только если $\alpha \in B$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \notin B$, докажем, что α разложимо. Представим α в виде $\alpha = h_{t(\alpha)}(\alpha)\beta$, где $\beta \neq \top$ и $t(\beta) < t(\alpha)$. Рассматривая процедуру приведения слова к нормальной форме, мы замечаем, что для всякого слова длина его нормальной формы не превосходит его собственной длины. Тем самым нормальные формы слов $h_{t(\alpha)}(\alpha)$ и β не совпадают со словом α. Следовательно $\alpha \nsim h_{t(\alpha)}(\alpha)$ и $\alpha \nsim \beta$, при том $\alpha \sim h_{t(\alpha)}(\alpha) \wedge \beta$. Таким образом, α разложимо.

Пусть $\alpha \in B$, докажем, что α неразложимо. Выберем такое натуральное число k, что $\alpha \in B_k$. Рассмотрим произвольные слова β и γ такие, что $\alpha \sim \beta \wedge \gamma$. Из леммы 3 мы выводим, что $h_k(\beta) \wedge h_k(\gamma) \sim h_k(\alpha) = \alpha$. Таким образом, в силу следствия 3 мы имеем $t(h_k(\beta)) \leq k$ и $t(h_k(\gamma)) \leq k$. Следовательно $h_k(\beta) \in B_k$ и $h_k(\gamma) \in B_k$. Тем самым в силу факта 5 либо $h_k(\beta) \wedge h_k(\gamma) \sim h_k(\beta)$, либо $h_k(\beta) \wedge h_k(\gamma) \sim h_k(\gamma)$. Без ограничения общности мы будем считать, что $h_k(\beta) \wedge h_k(\gamma) \sim h_k(\beta)$. Таким образом, мы имеем $\vdash \alpha \leftrightarrow h_k(\beta)$, $\vdash \beta \to h_k(\beta)$ и $\vdash \alpha \to \beta$. Следовательно $\alpha \sim \beta$. Последнее, в силу произвольности выбора слов β и γ, означает неразложимость слова α. □

Лемма 4. *Пусть для пары слов (α, β) выполняются следующие два условия:*

1. $\nvdash \alpha \to \beta$;

2. для всякого слова $\gamma \nsim \alpha$ такого, что $\vdash \gamma \to \alpha$ имеет место $\vdash \gamma \to \beta$.

Тогда $\alpha <_0 \beta$.

Доказательство. Представим слова α и β в виде $\alpha = h_1(\alpha)\alpha_1$, $\beta = h_1(\beta)\beta_1$. Заметим, что $\alpha_1, \beta_1 \in B_0$. В силу фактов 4 и 5 мы имеем

$$\begin{aligned}\vdash h_1(\alpha)0\alpha &\to h_1(\alpha)0h_1(\alpha)\alpha_1\\ &\to h_1(\alpha) \wedge \langle 0\rangle(h_1(\alpha)\alpha_1)\\ &\to h_1(\alpha) \wedge \langle 0\rangle(h_1(\alpha) \wedge \alpha_1)\\ &\to h_1(\alpha) \wedge \langle 0\rangle\alpha_1\\ &\to h_1(\alpha) \wedge \alpha_1\\ &\to \alpha.\end{aligned}$$

Поскольку $o(h_1(\alpha)0\alpha) > o(\alpha)$, мы имеем $h_1(\alpha)0\alpha \nsim \alpha$. Таким образом, пользуясь условием 2, мы получаем $\vdash h_1(\alpha)0\alpha \to \beta$. Тем самым мы имеем

$$h_1(\alpha) \sim h_1(h_1(\alpha)0\alpha) \sim h_1(h_1(\alpha)0\alpha \wedge \beta) \sim h_1(h_1(\alpha)0\alpha) \wedge h_1(\beta) \sim h_1(\alpha) \wedge h_1(\beta).$$

Предположим, что $\alpha \not<_0 \beta$. Так как $\alpha \nsim \beta$ и $<_0$ является отношением строгого линейного порядка мы имеем $\beta <_0 \alpha$. Используя факт 5 и то, что $\beta_1 <_0 0\beta$ мы получаем $\vdash \langle 0\rangle\beta \to \beta_1$. Поскольку $\vdash \alpha \to \langle 0\rangle\beta$, мы имеем $\vdash \alpha \to \beta_1$. Кроме того $\vdash \alpha \to h_1(\alpha)$ и $\vdash h_1(\alpha) \to h_1(\beta)$, следовательно $\vdash \alpha \to h_1(\beta)$. Так как $\beta \sim h_1(\beta) \wedge \beta_1$, мы имеем $\vdash \alpha \to \beta$, что противоречит условию 1. Соответственно $\alpha <_0 \beta$, что и требовалось доказать. □

Лемма 5. *Для всякого слова α пара $(\alpha, \langle 0\rangle\alpha)$ удовлетворяет условиям леммы 4.*

Доказательство. Докажем, что выполняется условие 1. С помощью факта 5 из $o(00\alpha) > o(0\alpha)$ мы получаем $\nvdash \langle 0\rangle\alpha \to \langle 0\rangle\langle 0\rangle\alpha$. Таким образом, $\nvdash \alpha \to \langle 0\rangle\alpha$.

Теперь покажем, что выполняется условие 2. Рассмотрим произвольное слово $\gamma \nsim \alpha$, что $\vdash \gamma \to \alpha$ и докажем, что $\vdash \gamma \to \langle 0\rangle\alpha$. Предположим, что $\gamma <_0 \alpha$. От сюда мы получаем

$$\begin{aligned}\vdash \alpha &\to \langle 0\rangle\gamma\\ &\to \langle 0\rangle\alpha.\end{aligned}$$

Мы показали, что $\alpha <_0 \alpha$, а это противоречит ирефлексивности $<_0$. Таким образом, $\alpha <_0 \gamma$, что и требовалось доказать. □

Замечание 3. *Пусть $\alpha, \beta \in S_k$. Тогда $\alpha <_k \beta$, если и только если $\alpha <_0 \beta$.*

Доказательство. Искомое следует из факта 2 и определений функций o_k и o. □

Лемма 6. *Для любого k и $\alpha \in S_k$ имеют место следующие факты:*

1. *$\alpha <_0 \langle k\rangle\alpha$;*

2. *если $\alpha \in B_k$, то $\forall\beta \in S_k(\alpha <_0 \beta \;\Rightarrow \vdash \beta \to \alpha)$;*

3. если $\vdash \langle k\rangle\alpha \to \alpha$*, то* $\alpha \in B_k$.

Доказательство. 1. Очевидно следует из аксиомы 4 логики GLP.

2. Пусть $\alpha \in B_k$, а β произвольное слово из S_k такое, что $\alpha <_0 \beta$. Докажем, что $\vdash \beta \to \alpha$. В силу замечания 3 мы имеем $\alpha <_k \beta$. Так как $\vdash \beta \to \langle k\rangle\alpha$ и $\vdash \langle k\rangle\alpha \to \alpha$ мы имеем требуемое $\vdash \beta \to \alpha$.

3. Пусть $\vdash \langle k\rangle\alpha \to \alpha$. С помощью следствия 3 мы получаем, что $t(\alpha) \leq t(k\alpha) = k$. Следовательно либо α начинается с k, либо $\alpha = \top$. Тем самым $\alpha \in B_k$. $\square$

5 Определимость в теории полурешётки слов

Рассмотрим полурешётку $\mathfrak{S} = (S/{\sim}, =, \wedge)$, которая, что уже было отмечено ранее, изоморфна полурешётке $\mathbb{W}$. Перед тем, как перейти к доказательству неразрешимости $Th(\mathfrak{S})$, мы покажем, что в этой теории можно выразить многие естественные понятия, относящиеся к классам эквивалентности слов.

При всех $k \in \mathbb{N}$ определим подмножества $\widehat{B}$, $\widehat{B_k}$, $\widehat{S_k}$ множества $S/{\sim}$. Для всякого k и $\alpha \in NF$: $[\alpha] \in \widehat{B}(\widehat{B_k}, \widehat{S_k}) \overset{\text{def}}{\iff} \alpha \in B(B_k, S_k)$. При всяком k функции o_k, t_k и предикат $<_k$ согласованны с отношением эквивалентности $\sim$ и таким образом могут быть перенесены на $\mathfrak{S}$. Кроме того, для каждого $k \in \mathbb{N}$ на $\mathfrak{S}$ индуцируется функция $h_k\colon S/{\sim} \to S/{\sim}$, определяемая следующим тождеством, имеющим место для всех $\alpha \in S$: $h_k([\alpha]) = [h_k(\alpha)]$.

Рассмотрим S^k — множество всех слов, любой символ которых меньше или равен k. Принадлежность к S^k, как видно из замечания 4, инвариантна относительно эквивалентных замен. Тем самым корректно следующее определение множества $\widehat{S^k} \subset S/{\sim}$:

$$[\alpha] \in \widehat{S^k} \overset{\text{def}}{\iff} \alpha \in S^k.$$

Замечание 4. *Пусть* α *— слово, а* k *— натуральное число. Тогда* $\alpha \in S^k$*, если и только если* $\alpha <_0 \langle k+1\rangle\top$.

Доказательство. Используя определения функции o, заметим, что наличие в α символов больших k равносильно тому, что $o(\alpha) \geq \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}}_{k+1 \text{ раз}} = o(\langle k+1\rangle\top)$. $\square$

Замечание 5. *В формулах конъюнкцию, как пропозициональную связку, мы будем обозначать символом &, а конъюнкцию, как функцию из сигнатуры полурешётки, мы будем обозначать символом* $\wedge$.

Предложение 2. *В теории* $Th(\mathfrak{S})$ *для всякого натурального числа* k *определимы следующие функции, бинарные отношения и классы:*

1. *класс* $\widehat{B}$*;*
2. *функция* $\langle 0\rangle$ *и бинарное отношение* $<_0$*;*
3. *классы* $\widehat{B_k}$*;*
4. *функции* h_k*;*

5. *классы* $\widehat{S_k}$*;*

6. *функции* $\langle k\rangle$ *и бинарные отношения* $<_k$*;*

7. *классы* $\widehat{S^k}$*.*

Доказательство. 1. Понятие неразложимого слова формализуется в языке рассматриваемой теории:

$$\alpha \text{ неразложимое слово } \iff \forall x\forall y([\alpha]=x\wedge y\leftrightarrow([\alpha]=x\vee[\alpha]=y)).$$

Таким образом, из предложения 1 мы получаем определимость класса $\widehat{B}$.

2. Для всяких слов α и β мы имеем

$$[\beta]\leq\langle 0\rangle[\alpha] \iff \vdash\beta\to\langle 0\rangle\alpha \iff [\alpha]<_0[\beta].$$

Тем самым нам осталось выразить функцию $\langle 0\rangle$. Для всякого слова α

$$\langle 0\rangle[\alpha]=\max_{\leq}\{x\in\mathfrak{S}\mid x\leq\langle 0\rangle[\alpha]\}=\max_{\leq}\{x\in\mathfrak{S}\mid[\alpha]<_0 x\}.$$

Зададим формулу $A(x,y)$ языка теории $Th(\mathfrak{S})$ такую, что всякая пара слов (β,γ) удовлетворяет условию леммы 4, если и только если $\mathfrak{S}\models A([\beta],[\gamma])$:

$$A(x,y)\overset{\text{def}}{\iff} x\not\leq y\&\forall z<x(z\leq y).$$

По лемме 4 множество $\{y\in\mathfrak{S}\mid A([\alpha],y)\}$ включено в множество $\{y\in\mathfrak{S}\mid [\alpha]<_0 y\}$. При том по лемме 5 максимум второго множества содержится в первом. Следовательно $\langle 0\rangle[\alpha]=\max_{\leq}(\{y\mid A([\alpha],y)\})$. Таким образом, функция $\langle 0\rangle$, а тем самым и отношение $<_0$ определимы в теории $Th(\mathfrak{S})$.

3. Последовательно, в порядке увеличения k, построим определения классов $\widehat{B_k}$. Пусть построены определения классов $\widehat{B_0}$, $\widehat{B_1}$,…,$\widehat{B_{k-1}}$. Построим определение класса $\widehat{B_k}$. Положим $\widehat{G_k}=\bigcup\limits_{i\geq k}\widehat{B_i}$. Ясно, что $\widehat{B_k}\subset\widehat{G_k}\subset\widehat{S_k}$. При том $\widehat{G_k}=(\widehat{B}\setminus\bigcup\limits_{0\leq i<k}\widehat{B_i})\cup\{[\top]\}$ и тем самым множество $\widehat{G_k}$ определимо. Пользуясь леммой 6 мы получаем, что

$$[\alpha]\in\widehat{B_k}\iff[\alpha]\in\widehat{G_k}\ \&\ \forall x\in\widehat{G_k}([\alpha]<_0 x\to x\leq[\alpha]).$$

4. Пусть α и β слова. Покажем, что утверждение $h_k([\alpha])=h_k([\beta])$ эквивалентно предложению:

$$\exists x_0\in\widehat{B_0}\ldots\exists x_{k-1}\in\widehat{B_{k-1}}([\alpha]\wedge x_{k-1}\wedge\ldots\wedge x_0=[\beta]\wedge x_{k-1}\wedge\ldots\wedge x_0). \qquad (5.1)$$

В силу леммы 3 и того, что для всякого $i<k$ и $x\in B_i$ имеет место $h_k(x)=[\top]$, мы получаем, что из предложения (5.1) следует $h_k([\alpha])=h_k([\beta])$.

Пусть теперь $h_k([\alpha])=h_k([\beta])$. Докажем, что имеет место (5.1). Рассмотрим такие слова $\alpha_0,\beta_0\in B_0$, …, $\alpha_{k-1},\beta_{k-1}\in B_{k-1}$, что $\alpha=h_k(\alpha)\alpha_{k-1}\ldots\alpha_0$, $\beta=h_k(\beta)\beta_{k-1}\ldots\beta_0$. С помощью следствия 2 мы получаем, что $[\alpha_i]\wedge[\beta_i]\in\widehat{B_i}$ при $i<k$. Заметим, что $[\alpha]\wedge\bigwedge\limits_{0\leq i<k}([\alpha_i]\wedge[\beta_i])=h_k([\alpha])\wedge\bigwedge\limits_{0\leq i<k}([\alpha_i]\wedge[\beta_i])=h_k([\beta])\wedge$

$\bigwedge\limits_{0\le i<k}([\alpha_i]\wedge[\beta_i]) = [\beta]\wedge \bigwedge\limits_{0\le i<k}([\alpha_i]\wedge[\beta_i])$. Тем самым, выбирая $[\alpha_i]\wedge[\beta_i]$ в качестве x_i, мы выводим предложение (5.1). Таким образом, мы доказали требуемую эквивалентность.

Заметим, что $h_k([\alpha]) = \max_{\le}\{x \in \mathfrak{S} \mid h_k(x) = h_k([\alpha])\}$. Таким образом, в силу доказанной выше эквивалентности функция h_k определима.

5. Заметим, что для всякого слова $\alpha \in NF$

$$\alpha \in S_k \iff \alpha = h_k(\alpha),$$

а следовательно

$$[\alpha] \in \widehat{S_k} \iff [\alpha] = h_k([\alpha]).$$

Тем самым класс $\widehat{S_k}$ определим.

6. Покажем, что выразима функция $x \mapsto \langle k\rangle h_k(x)$. Пусть α слово. Так как $h_k([\alpha]) \in \widehat{S_k}$ и на множестве $\widehat{S_k}$ отношения $<_0$ и $<_k$ совпадают мы получаем, что $\langle k\rangle h_k([\alpha]) = \min_{<_0}\{x \in \widehat{S_k} \mid h_k([\alpha]) <_0 x\}$. Тем самым мы показали искомую выразимость.

Пусть α слово и слова $\alpha_0 \in B_0 \cap NF, \dots, \alpha_{k-1} \in B_{k-1} \cap NF$ таковы, что $\alpha \sim h_k(\alpha) \wedge \alpha_{k-1} \wedge \dots \wedge \alpha_0$. Мы имеем $\langle k\rangle[\alpha] = [\langle k\rangle(h_k(\alpha) \wedge \alpha_{k-1} \wedge \dots \wedge \alpha_0)] = [\langle k\rangle h_k(\alpha)] \wedge [\langle k\rangle\alpha_{k-1}] \wedge \dots \wedge [\langle k\rangle\alpha_0] = [\langle k\rangle h_k(\alpha)] \wedge ([\langle k\rangle\top] \wedge [\alpha_{k-1}]) \wedge \dots \wedge ([\langle k\rangle\top] \wedge [\alpha_0]) = \langle k\rangle h_k([\alpha]) \wedge [\alpha_{k-1}] \wedge \dots \wedge [\alpha_0]$. Кроме того заметим, что для данного α существует по крайней мере один набор $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$, обладающий указанными выше свойствами. Тем самым мы можем выразить функцию $\langle k\rangle$ таким образом: $x = \langle k\rangle[\alpha] \iff \exists y_0 \in \widehat{B_0} \dots \exists y_{k-1} \in \widehat{B_{k-1}}(([\alpha] = h_k([\alpha]) \wedge y_{k-1} \wedge \dots \wedge y_0) \& (x = \langle k\rangle h_k([\alpha]) \wedge y_{k-1} \wedge \dots \wedge y_0))$. Порядок $<_k$ определяется через функцию $\langle k\rangle$: $[\alpha] <_k [\beta] \iff [\beta] \le \langle k\rangle[\alpha]$.

7. Из пунктов 2 и 6 этого предложения и замечания 4 следует, что в рассматриваемой теории класс $\widehat{S^k}$ может быть определён следующим образом:

$$[\alpha] \in \widehat{S^k} \iff [\alpha] <_0 \langle k+1\rangle([\top]).$$

□

Как известно, для всякого ординала $a > 0$ существует и единственно его представление в виде *канторовской нормальной формы*:

$$a = \omega^{a_1} + \omega^{a_2} + \dots + \omega^{a_n}, \text{ где } a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_n.$$

Определим функцию $r\colon On \to On$:

1. $r(0) = 0$;

2. пусть канторовская нормальная форма ординала $a > 0$ имеет вид $\omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_n}$, тогда $r(a) = a_n$.

По теореме о канторовской нормальной форме такое определение корректно.

Лемма 7. *[4, Лемма 3.3] Пусть a, b и c — ординалы. Если $b < a$ и $c < \omega^{r(a)}$, то $b + c < a$.*

Доказательство. Докажем, что если $b < a$, то $b + \omega^{r(a)} \leq a$ — из этого факта следует искомое. Пусть $b < a$ и канторовская нормальная форма a имеет вид $\omega^{a_1} + \cdots + \omega^{a_{n-1}} + \omega^{a_n}$. Если $b < \omega^{a_1} + \cdots + \omega^{a_{n-1}}$, то доказываемое очевидно. Таким образом, мы будем считать, что $b = \omega^{a_1} + \cdots + \omega^{a_{n-1}} + c$, где ординал таков, что $0 < c < \omega^{a_n}$. Пусть канторовская нормальная форма ординала c имеет вид $\omega^{c_1} + \cdots + \omega^{c_m}$. Заметим, что $c_1 < a_n$, а следовательно существует такой ординал $d \geq 1$, что $c_1 + d = a_n$. Таким образом, имеют место следующие соотношения:

$$c+\omega^{r(a)} = \omega^{c_1}+\cdots+\omega^{c_m}+\omega^{c_1+d} \leq \omega^{c_1}\cdot m+\omega^{c_1}\cdot\omega^d = \omega^{c_1}\cdot(m+\omega^d) = \omega^{c_1}\cdot\omega^d = \omega^{a_n}$$

$$b + \omega^{r(a)} = \omega^{a_1} + \cdots + \omega^{a_{n-1}} + c + \omega^{r(a)} \leq \omega^{a_1} + \cdots + \omega^{a_{n-1}} + \omega^{a_n} = a.$$

□

Из факта 2 и определения NF вытекает

Замечание 6. *Пусть слова $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ таковы, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S_{k+1} \cap NF$. Тогда $\alpha_1 k \alpha_2 k \ldots k \alpha_n \in NF$, если и только если $o_{k+1}(\alpha_1) \leq o_{k+1}(\alpha_2) \leq \ldots \leq o_{k+1}(\alpha_n)$.*

Простой проверкой мы получаем

Замечание 7. *Пусть натуральные числа $n \geq 1$, k, слово $\alpha \in S_k \setminus \{\top\}$ и слова $\alpha_1 \in S_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in S_{k+1}$ таковы, что $\alpha = \alpha_1 k \ldots k \alpha_n$. Тогда для всякого m от 1 до n имеет место $o_k(\alpha) = o_k(\alpha_m k \ldots k \alpha_n) + \omega^{o_{k+1}(\alpha_{m-1})} + \cdots + \omega^{o_{k+1}(\alpha_1)}$.*

Лемма 8. *Для всякого натурального числа k существует формула $In_k(x, y)$ языка теории $Th(\mathbb{W})$, обладающая следующими свойствами:*

1. *Для всякого $[\beta] \in \widehat{S_k}$ существует лишь конечное число классов эквивалентности $[\alpha] \in \widehat{S_{k+1}}$, для которых выполняется $In_k([\alpha], [\beta])$.*

2. *Для всякого конечного множества $A \subset \widehat{S_{k+1}}$ существует $[\beta] \in \widehat{S_k}$ такой, что всякий $[\alpha] \in \widehat{S_{k+1}}$ принадлежит A тогда и только тогда, когда $In_k([\alpha], [\beta])$.*

Доказательство. Определим $In_k(x, y)$:

$$In_k(x,y) \overset{\text{def}}{\iff} y \neq [\top] \;\&\; \exists z \in \widehat{S_k}(h_{k+1}(z) = x \;\&\; z \leq_k y <_k (x \wedge \langle k \rangle z)).$$

Установим, что для всякого слова $\beta \in S_k \cap NF$ вида $\alpha_1 k \ldots k \alpha_n$, где $\alpha_i \in S_{k+1} \cap NF$ при i от 1 до n, имеет место равенство $\{\alpha \in S_{k+1} \cap NF \mid In_k([\alpha], [\beta])\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Заметим, что отсюда следует выполнение обоих условий на предикат. Теперь докажем требуемое предложение. Если $\beta = \top$, то оба множества пусты. Покажем, что в случае $\beta \neq \top$ для всякого $\alpha \in S_{k+1} \cap NF$ мы имеем

$$\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \iff In_k([\alpha], [\beta]).$$

$\Rightarrow$: Пусть $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Покажем, что $In_k([\alpha], [\beta])$. Пусть m минимальный индекс из $\{1, \ldots, n\}$ такой, что $\alpha = \alpha_m$. В качестве слова, порождающего требуемый класс эквивалентности y, возьмём слово $\gamma = \alpha_m k \ldots k \alpha_n$. Таким образом, требуется доказать, что $h_{k+1}([\gamma]) = [\alpha]$, $[\gamma] \leq_k [\beta]$ и $[\beta] <_k ([\alpha] \wedge \langle k\rangle[\gamma])$. Выполнение первых двух условий очевидно. В силу замечания 6 и минимальности m для всякого i от 1 до $m-1$ мы имеем $o_{k+1}(\alpha_i) < o_{k+1}(\alpha_m)$. Следовательно, учитывая лемму 7, мы получаем $o_k(\beta) = o_k(\alpha_m k \dots k\alpha_n) + \omega^{o_{k+1}(\alpha_{m-1})} + \dots + \omega^{o_{k+1}(\alpha_1)} < o_k(\alpha_m k \dots k\alpha_n) + \omega^{o_{k+1}(\alpha_m)} = o_k(\alpha_m k\gamma) = o_k(\alpha \wedge \langle k\rangle\gamma)$. Таким образом, выполняется оставшееся условие $[\beta] <_k ([\alpha] \wedge \langle k\rangle[\gamma])$.

$\Leftarrow$: Возьмём слово $\alpha \in (S_{k+1} \cap NF) \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ и докажем, что не выполняется $In_k([\alpha], [\beta])$. Предположим противное. Таким образом, существует слово $\gamma \in S_k \cap NF$, что $h_{k+1}([\gamma]) = [\alpha]$, $[\gamma] \leq_k [\beta]$ и $[\beta] <_k ([\alpha] \wedge \langle k\rangle[\gamma])$. В силу замечания 6 существует натуральное число $s \leq n$ такое, что $\forall i \leq s (o_{k+1}(\alpha_i) < o_{k+1}(\alpha))$, а $\forall i > s (o_{k+1}(\alpha_i) > o_{k+1}(\alpha))$. Поскольку $[\gamma] \leq_k [\beta]$ и $o_k(\gamma) \geq o_k(\alpha)$, мы имеем $o_k(\alpha) \leq o_k(\beta)$. Следовательно $[\alpha] \leq_{k+1} [\alpha_n]$ и тем самым $s < n$. Разберём возможные варианты сравнения $o_k(\gamma)$ и $o_k(\alpha_{s+1} k \dots k\alpha_n)$:

1. $o_k(\gamma) < o_k(\alpha_{s+1} k \dots k\alpha_n)$. Учитывая, что $r(o_k(\alpha_{s+1} k \dots k\alpha_n)) = o_{k+1}(\alpha_{s+1})$ и лемму 7, мы имеем $o_k(\alpha \wedge \langle k\rangle\gamma) = o_k(\gamma) + \omega^{o_{k+1}(\alpha)} < o_k(\alpha_{s+1} k \dots k\alpha_n) \leq o_k(\beta)$. Тем самым мы пришли к противоречию с условием $[\beta] <_k ([\alpha] \wedge \langle k\rangle[\gamma])$.

2. $o_k(\gamma) = o_k(\alpha_{s+1} k \dots k\alpha_n)$. В этом случае мы имеем равенства $\alpha = h_{k+1}(\gamma) = h_{k+1}(\alpha_{s+1} k \dots k\alpha_n) = \alpha_{s+1}$, но $\alpha \in (S_{k+1} \cap NF) \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — противоречие.

3. $o_k(\gamma) > o_k(\alpha_{s+1} k \dots k\alpha_n)$. Учитывая лемму 7 и то, что $r(o_k(\gamma)) = o_{k+1}(\alpha)$, мы получаем $o_k(\beta) = o_k(\alpha_{s+1} k \dots k\alpha_n) + \omega^{o_{k+1}(\alpha_s)} + \dots + \omega^{o_{k+1}(\alpha_1)} < o_k(\gamma)$, а это противоречит условию $[\gamma] \leq_k [\beta]$.

Таким образом, ни один из случаев не возможен и мы пришли к противоречию, что завершает доказательство леммы. □

6 Неразрешимые теории

Для доказательства неразрешимости $Th(\mathfrak{S})$ нам потребуется рассмотреть другую неразрешимую теорию и построить её интерпретацию в $Th(\mathfrak{S})$.

Рассмотрим слабую монадическую теорию второго порядка *WS1S* (см.[6]). Для всякого множества F обозначим $\mathcal{P}_{fin}(F)$ множество всех конечных подмножеств F. Язык $\mathfrak{L}_0$ теории *WS1S* является языком исчисления предикатов с двумя сортами переменных. Переменные $x, y, z, \dots$ пробегают множество $\mathbb{N}$, переменные $X, Y, Z, \dots$ пробегают $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$. В языке $\mathfrak{L}_0$ имеется предикат равенства $x = y$ для натуральных чисел, функция следования $S(x) = x + 1$ из натуральных чисел в натуральные и предикат принадлежности $x \in Y$ числа x множеству Y. Таким образом, нами также была задана модель $\mathfrak{M}_0 = (\mathbb{N}, \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}), =, S, \in)$ языка $\mathfrak{L}_0$. Теория *WS1S* состоит из всех предложений языка $\mathfrak{L}_0$, истинных в модели $\mathfrak{M}_0$.

Определим теорию U, консервативно расширяющую $WS1S$. Язык $\mathfrak{L}_1$ теории U расширяет язык $\mathfrak{L}_0$ новым сортом переменных $\Gamma, \Delta, \Theta, \dots$, пробегающими множество $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}))$. Также язык $\mathfrak{L}_1$ содержит предикат $\in_1$ принадлежности элементов $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ элементам $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}))$. Таким образом, мы также задали модель $\mathfrak{M}_1 = (\mathbb{N}, \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}), \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})), =, \in, \in_1)$ языка $\mathfrak{L}_1$. Теория U состоит из всех предложений языка $\mathfrak{L}_1$, истинных в модели $\mathfrak{M}_1$.

Хорошо известно, что теория *WS1S* разрешима [6]. С другой стороны легко видеть, что теория U неразрешима. Для удобства читателя приведём простое рассуждение, показывающее это.

Лемма 9. *Теория U неразрешима.*

Доказательство. Рассмотрим обогащение теории $WS1S$ функцией $h(x) = 2x$. Эта теория, как известно, неразрешима [8]. Построим эффективную интерпретацию этой теории в U, тем самым мы получим неразрешимость U.

Мы будем считать двоичной записью числа n функцию $\zeta_n\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ такую, что для некоторого k при всех $l > k$ имеет место $\zeta_n(l) = 0$ и $\sum\limits_{i \le k} 2^i \zeta_n(i) = n$. Как несложно видеть, для всякого натурального числа его двоичная запись, в описанном выше смысле, существует и единственна.

Натуральные числа мы будем представлять элементами $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$:

$$n \mapsto n^I := \{k \mid \zeta_n(k) = 1\}.$$

Конечные множества натуральных чисел мы будем представлять множествами, составленными из представлений их элементов:

$$X \mapsto X^I := \{n^I \mid n \in X\}.$$

Несложно видеть, что для построения интерпретации нам осталось определить интерпретации $S^I(X)$ и $h^I(X)$ функций $S(x)$ и $h(x)$ соответственно. Выразим функцию $h^I(X)$:

$$h^I(X) = Y \overset{\text{def}}{\iff} 0 \notin Y \ \&\ \forall x (x \in X \leftrightarrow S(x) \in Y).$$

Рассмотрим функцию $\mathit{Tran}\colon \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$, задаваемую следующей эквивалентностью, выполненной для всех натуральных чисел n и k:

$$k \in \mathit{Tran}(n^I) \overset{\text{def}}{\iff} \zeta_n(k) \neq \zeta_{n+1}(k).$$

Заметим, что функция $\mathit{Tran}(X)$ определима в U:

$$\mathit{Tran}(X) = Y \iff 0 \in Y \ \&\ \forall x (S(x) \in Y \leftrightarrow x \in Y \ \&\ x \in X).$$

Теперь выразим функцию $S^I(X)$:

$$S^I(X) = Y \overset{\text{def}}{\iff} x \in Y \leftrightarrow (x \in X \ \&\ x \notin \mathit{Tran}(X)) \vee (x \notin X \ \&\ x \in \mathit{Tran}(X)).$$

□

Лемма 10. *Теория $Th(\mathfrak{S})$ неразрешима.*

Доказательство. Покажем, что теория U эффективно интерпретируется в теории $Th(\mathfrak{S})$ и тем самым по лемме 9 мы получим неразрешимость $Th(\mathfrak{S})$. Поставим в соответствие каждому натуральному числу n элемент $\langle 2 \rangle^n[\top]$. Заметим, что элементу $x \in \mathfrak{S}$ соответствует некоторое натуральное число тогда и только тогда, когда $x \in \widehat{S_2} \cap \widehat{S^2}$. Предикат равенства для натуральных чисел интерпретируется равенством для классов эквивалентности слов. Функция S интерпретируется функцией $\langle 2 \rangle$. Множества $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ и $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}))$ мы будем интерпретировать множествами $\widehat{S_1}$ и $\widehat{S_0}$ соответственно. Предикат $\in$ мы будем интерпретировать предикатом In_1. Зададим предикат $\in_1^I$, интерпретирующий $\in_1$:

$$y \in_1^I x \overset{\text{def}}{\iff} \exists z \in \widehat{S_1}(In_0(z,x) \& \forall w \in \widehat{S_2} \cap \widehat{S^2}(In_1(w,y) \leftrightarrow In_1(w,z))).$$

Определим функции $Ir_1 \colon \widehat{S_1} \to \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ и $Ir_2 \colon \widehat{S_0} \to \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}))$:

$$Ir_1(x) = \{n \in \mathbb{N} \mid In_1(\langle 2\rangle^n[\top], z)\}$$

$$Ir_2(x) = \{Ir_1(y) \mid y \in \widehat{S_1}, In_0(y,x)\}.$$

Заметим, что в силу леммы 8 функции Ir_1 и Ir_2 корректно определены и сюрьективны.

Рассмотрим некоторую формулу $A(x_1, \ldots, x_{n_1}, X_1, \ldots, X_{n_2}, \Gamma_1, \ldots \Gamma_{n_3})$ языка $\mathfrak{L}_1$, мы построили её интерпретацию $A^I(y_1, \ldots, y_{n_1}, z_1, \ldots, z_{n_2}, w_1, \ldots, w_{n_3})$ — формулу языка теории $Th(\mathfrak{S})$. Покажем, что для произвольных $s_1, \ldots, s_{n_1} \in \mathbb{N}$, $[\alpha_1], \ldots, [\alpha_{n_2}] \in \widehat{S_1}$ и $[\beta_1], \ldots, [\beta_{n_3}] \in \widehat{S_0}$ следующие два утверждения эквивалентны:

$$\mathfrak{S} \models A^I(\langle 2\rangle^{s_1}[\top], \ldots, \langle 2\rangle^{s_{n_1}}[\top], [\alpha_1], \ldots, [\alpha_{n_2}], [\beta_1], \ldots, [\beta_{n_3}])$$

$$\mathfrak{M}_1 \models A(s_1, \ldots, s_{n_1}, Ir_1([\alpha_1]), \ldots, Ir_1([\alpha_{n_2}]), Ir_2([\beta_1]), \ldots, Ir_2([\beta_{n_3}])).$$

Покажем требуемое индукцией по длине формулы A. Пользуясь определениями Ir_1 и Ir_2 мы получаем требуемое для атомарных A. Если A имеет вид $\neg B$ или $B * C$, где $* \in \{\&, \vee, \to\}$, то предположение индукции очевидно выполнено. Если A начинается с квантора, то для получения предположения индукции мы пользуемся сюрьективностью Ir_1 и Ir_2.

Тем самым, воспользовавшись доказанным фактом для замкнутых формул A, мы получаем корректность построенной нами интерпретации U в $Th(\mathfrak{S})$. $\square$

Используя изоморфизм структур $\mathfrak{S}$ и $\mathbb{W}$ мы получаем теорему 1.

Теорема 1. *Теории $Th(\mathbb{W})$ и $Th(\widehat{\mathbb{W}})$ неразрешимы.*

Теорема 1 может быть усилена.

Для натуральных чисел n и m, что $n \geq m \geq 0$, мы вводим обозначения:

1. $S_m^n = S_m \cap S^n$;
2. $B_m^n = B_m \cap S^n$;
3. $B^n = B \cap S^n$.

Теорема 2. *Теория $Th(W_2, =, \wedge)$ неразрешима.*

Доказательство. Не будем приводить здесь подробного доказательства. Перечислим необходимые изменения в доказательстве теоремы 1. Требуется доказать замкнутость S^2 относительно конъюнкции. Нужно изменить область действия кванторов с S на S^2 в определении разложимого слова, что не повлияет на доказательство предложения 1. В лемме 4 нужно потребовать, чтобы

$\alpha, \beta \in S^2$ и кроме того, чтобы в пункте 2 слово $\gamma \in S^2$. Аналогично подмножествам $\widehat{B}$, $\widehat{B_k}$, $\widehat{S_k}$ множества $S/{\sim}$ вводятся подмножества $\widehat{B^2}$, $\widehat{B^2_k}$, $\widehat{S^2_k}$ множества $S^2/{\sim}$. Модифицируется предложение 2: теперь оно говорит о выразимости в $Th(S^2/{\sim}, =, \wedge)$, теперь k пробегает значения из множества $\{0,1,2\}$, в пунктах 1, 3 и 5 множества $\widehat{B}$, $\widehat{B_k}$ и $\widehat{S_k}$ заменяются на множества $\widehat{B^2}$, $\widehat{B^2_k}$ и $\widehat{S^2_k}$, соответственно, пункт 7 становится не нужен. Далее заметим, что при изменении области действия кванторов все определения из предложения 2 сохраняются и для теории $Th(S^2/{\sim}, =, \wedge)$. В лемме 8 нужно ограничиться словами из S^2 и $k \in \{0,1\}$. Этих изменений достаточно для завершения доказательства теоремы 2. $\square$

7 Слова из двух символов

В силу замечания 4 множество S^1 замкнуто относительно эквивалентных замен слов. Покажем, что множество S^1 замкнуто относительно конъюнкции. Заметим, что всякое слово α принадлежит S^1 тогда и только тогда, когда оно имеет вид $\beta\gamma$, где $\beta \in B^1_1$, а $\gamma \in B^1_0$. Пусть $\alpha_1 = \beta_1\gamma_1$, $\alpha_2 = \beta_2\gamma_2$, где $\beta_1, \beta_2 \in B^1_1$, а $\gamma_1, \gamma_2 \in B^1_0$. Тогда $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \sim (\beta_1 \wedge \beta_2) \wedge (\gamma_1 \wedge \gamma_2) \sim \beta_i \wedge \gamma_j \sim \beta_i\gamma_j$, для некоторых $i, j \in \{1,2\}$. Следовательно $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in S^1$. Тем самым аналогично $S/{\sim}$ на $S^1/{\sim}$ вводятся функции $\wedge$, $\langle 0\rangle$, $\langle 1\rangle$. От сюда вместе с теоремой Джапаридзе об арифметической полноте логики GLP следует изоморфизм алгебр $(S^1/{\sim}, =, \wedge, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle)$ и $(W_1, =, \wedge, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle)$.

Для доказательства разрешимости теории $Th(W_1, =, \wedge, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle)$ мы далее построим интерпретацию теории $Th(S^1/{\sim}, =, \wedge, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle)$ в теории $Th(\omega^\omega, =, \le, +)$, которая, как известно разрешима [7].

Лемма 11. *В теории $Th(\omega^\omega, =, \le, +)$ определимы следующие функции и множества:*

1. *множество $\{\omega^x \mid 1 \le x < \omega\}$;*
2. *ограниченная на множестве $\{\omega^x \mid 1 \le x < \omega\}$, функция умножения на ω справа $x \mapsto x \cdot \omega$;*
3. *множество $\{x \in \omega^\omega \mid r(x) = 0\}$.*

Доказательство. 1. Докажем, что для всякого $a \in \omega^\omega$

$$a \in \{\omega^x \mid 1 \le x < \omega\} \iff a \ne 0 \;\&\; a \ne 1 \;\&\; \forall x < a(\forall y < a(x + y < a)).$$

Заметим, что если $a \in \{0,1\}$, то обе части рассматриваемой эквивалентности ложны. Тем самым мы переходим к случаю $a \notin \{0,1\}$.

Импликация слева направо имеется в силу леммы 7.

Докажем импликацию справа налево. Пусть $a \notin \{\omega^x \mid 1 \le x < \omega\}$. Найдём ординалы $b, c < a$ такие, что $b + c \ge a$. Рассмотрим канторовскую нормальную форму $a = \omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_n}$, где $a_1 \ge \ldots \ge a_n$ и $n \ge 2$. Заметим, что $(\omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_{n-1}}) + (\omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_{n-1}}) \ge \omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_{n-1}} + \omega^{a_1} \ge \omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_n} = a$. Тем самым мы можем положить $b = c = \omega^{a_1} + \ldots + \omega^{a_{n-1}}$.

2. $\omega^a \cdot \omega = b \iff b = \min(\{\omega^x \mid 1 \leq x < \omega\} \cap \{x | x > \omega^a\})$.
3. $r(a) = 0 \iff a = 0 \vee \exists x(a = x + 1)$.

$\square$

Теорема 3. *Теория* $Th(W_1, =, \wedge, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle)$ *разрешима.*

Доказательство. Докажем разрешимость теории $Th(S^1/{\sim}, =, \wedge, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle)$, построив её эффективную интерпретацию в теории $Th(\omega^\omega, =, \leq, +)$ и далее воспользовавшись разрешимостью последней. Для всякого $\alpha \in S$ представим $[\alpha]$ парой $(o(\alpha), o(h_1(\alpha)))$. Заметим, что таким образом мы построили инъекцию из $S^1/{\sim}$ в $\omega^\omega \times \omega^\omega$. Отметим, что множество всех пар ординалов, соответствующих словам, равно $\{(x + y, y) \mid r(x) = 0, y \in \{\omega^z \mid 1 \leq z < \omega\} \cup \{0\}\}$.

Зададим функции $\langle 0\rangle^I \colon (\omega^\omega \times \omega^\omega) \to (\omega^\omega \times \omega^\omega)$ и $\langle 1\rangle^I \colon (\omega^\omega \times \omega^\omega) \to (\omega^\omega \times \omega^\omega)$ следующими тождествами: $\langle 0\rangle^I(a, b) = (a + 1, 0)$, $\langle 1\rangle^I(a, b) = (a + (1 + b) \cdot \omega, (1 + b) \cdot \omega)$. Заметим, что $\langle 0\rangle^I$ и $\langle 1\rangle^I$ являются интерпретация функций $\langle 0\rangle$ и $\langle 1\rangle$ соответственно.

Определим бинарную операцию $\wedge^I \colon (\omega^\omega \times \omega^\omega)^2 \to (\omega^\omega \times \omega^\omega)$. Пусть ординалы $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \omega^\omega$. Если $a_2 > a_1$, то положим $(a_1, b_1) \wedge^I (a_2, b_2) = (a_2, b_2) \wedge^I (a_1, b_1)$. Тем самым мы далее считаем, что $a_1 \geq a_2$. Если $b_1 \geq b_2$, то положим $(a_1, b_1) \wedge^I (a_2, b_2) = (a_1, b_1)$, иначе положим $(a_1, b_1) \wedge^I (a_2, b_2) = (a_1 + b_2, b_2)$. Таким образом, мы определили операцию $\wedge^I$ на всех значениях аргументов.

Покажем, что коммутативно ограничение $\wedge^I$ на пары ординалов, являющиеся представлениями каких-то слов. Рассмотрим слова α_1, α_2 и соответствующие им пары ординалов $(a_1, b_1) = (o(\alpha_1), o(h_1(\alpha_1)))$, $(a_2, b_2) = (o(\alpha_2), o(h_1(\alpha_2)))$. Докажем, что $(a_1, b_1) \wedge^I (a_2, b_2) = (a_2, b_2) \wedge^I (a_1, b_1)$. Если $a_1 \neq a_2$, то получаем требуемое непосредственно из определения. Если $a_1 = a_2$, то $b_1 = o(h_1(\alpha)) = o(h_1(\beta)) = b_2$. Следовательно $(a_1, b_1) \wedge^I (a_2, b_2) = (a_1, b_1) = (a_2, b_2) = (a_2, b_2) \wedge^I (a_1, b_1)$.

Пусть пары (a_1, b_1), (a_2, b_2) и (a_3, b_3) представляют классы эквивалентности $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$ и $[\alpha] \wedge [\beta]$ соответственно. Покажем, что совпадают пары (a_3, b_3) и $(a_4, b_4) = (a_1, b_1) \wedge^I (a_2, b_2)$, тем самым мы покажем, что $\wedge^I$ интерпретирует конъюнкцию. Из леммы 3 и факта 5 следует, что $b_3 = b_4$. Перейдём к доказательству того, что $a_3 = a_4$. В силу коммутативности ограничения $\wedge^I$ мы без ограничения общности будем считать, что $o(\alpha_1) \geq o(\alpha_2)$. Пусть $\beta \in B_0^1$ таково, что $\alpha_2 = h_1(\alpha_2)\beta$. Заметим, что $o(\alpha_1) \geq o(\alpha_2) \geq o(\beta)$, а следовательно из пункта 2 леммы 6 мы получаем $\vdash \alpha_1 \to \beta$. Таким образом, $[\alpha_1] \wedge [\alpha_2] = [\alpha_1] \wedge [h_1(\alpha_2)]$.

Предположим, что $b_1 \geq b_2$. От сюда мы получаем, что $[\alpha_1] \leq [h_1(\alpha_1)] \leq [h_1(\alpha_2)]$. Следовательно $[\alpha_1] \wedge [\alpha_2] = [\alpha_1]$. Таким образом, в этом случае $a_3 = a_4$.

Теперь предположим, что $b_1 < b_2$. Пусть $\gamma \in B_0^1$ таково, что $\alpha_1 = h_1(\alpha_1)\gamma$. Мы имеем $[\alpha_1] \wedge [\alpha_2] = [\alpha_1] \wedge [h_1(\alpha_2)] = [h_1(\alpha_1)] \wedge [\gamma] \wedge [h_1(\alpha_2)] = [h_1(\alpha_2)] \wedge [\gamma] = [h_1(\alpha_2)\gamma]$. Заметим, что $o(h_1(\alpha_2)\gamma) = o(h_1(\alpha_2)0h_1(\alpha_1)\gamma)$. В силу замечания 7 имеется равенство $o([\alpha_1] \wedge [\alpha_2]) = o(h_1(\alpha_2)\gamma) = o(h_1(\alpha_2)0h_1(\alpha_1)\gamma) = o(\alpha_1) + \omega^{o_1(h_1(\alpha_2))} = o(\alpha_1) + o(h_1(\alpha_2))$. Таким образом, $a_3 = o([\alpha_1] \wedge [\alpha_2]) = o(\alpha_1) + o(h_1(\alpha_2)) = a_4$. Тем самым мы доказали, что $\wedge^I$ интерпретирует конъюнкцию на классах эквивалентности слов.

В силу леммы 11 все построенные выше определения формализуются в языке $Th(\omega^\omega, =, \leq, +)$. Тем самым была построена требуемая интерпретация, из чего следует разрешимость теорий $Th(S^1/\sim, =, \wedge, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle)$ и $Th(W_1, =, \wedge, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle)$. $\square$

Список литературы

[1] S.N. Artëmov and L.D. Beklemishev. On propositional quantifiers in provability logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 34:401–419, 1993.

[2] L.D. Beklemishev. Provability algebras and proof-theoretic ordinals, I. *Annals of Pure and Applied Logic*, 128:103–123, 2004.

[3] L.D. Beklemishev. Veblen hierarchy in the context of provability algebras. Logic Group Preprint Series 232, University of Utrecht, June 2004. `http://preprints.phil.uu.nl/lgps/`.

[4] L.D. Beklemishev, J. Joosten, and M. Vervoort. A finitary treatment of the closed fragment of Japaridze's provability logic. *Journal of Logic and Computation*, 15(4):447–463, 2005.

[5] L.D. Beklemishev and A. Visser. Problems in the logic of provability. In Dov M. Gabbay, Sergei S. Goncharov, and Michael Zakharyaschev, editors, *Mathematical Problems from Applied Logic I*, volume 4 of *International Mathematical Series*, pages 77–136. Springer New York, 2006.

[6] J.R. Büchi. Weak second-order arithmetic and finite automata. *Mathematical Logic Quarterly*, 6(1-6):66–92, 1960.

[7] J.R. Büchi. Decision methods in the theory of ordinals. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 71:767–770, 1965.

[8] C.C. Elgot and M.O. Rabin. Decidability and undecidability of extensions of second (first) order theory of (generalized) successor. *J. Symb. Log.*, 31:169–181, 1966.

[9] A. Grzegorczyk. Undecidability of some topological theories. *Fundamenta Mathematicae*, 38:137–152, 1951.

[10] K.N. Ignatiev. On strong provability predicates and the associated modal logics. *The Journal of symbolic logic*, 58(1):249–290, 1993. eng.

[11] G. Lee. A comparison of well-known ordinal notation systems for ε_0. *Annals of Pure and Applied Logic*, 147(1-2):48 – 70, 2007.

[12] V.Yu. Shavrukov. Undecidability in diagonalizable algebras. *The Journal of Symbolic Logic*, 62(1):79–116, 1997.

[13] A. Tarski. Arithmetical classes and types of boolean algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:63–64, 1949.

[14] Л.Д. Беклемишев. Схемы рефлексии и алгебры доказуемости в формальной арифметике. *Успехи Математических Наук*, 60(2):3–78, 2005. English translation in: *Russian Mathematical Surveys*, 60(2): 197–268, 2005.

[15] Г.К. Джапаридзе. Модально-логические средства исследования доказуемости. Дисс. канд. филос. наук, Москва, МГУ, 1986.

[16] В.В. Рыбаков. Элементарные теории свободных топобулевых и псевдобулевых алгебр. *Матем. Заметки*, 37(6):797–802, 1985.