Гармонический анализ на бесконечномерной унитарной группе*

Антон Осиненко

Аннотация

Задача гармонического анализа на бесконечномерной унитарной группе состоит в разложении некоторого семейства унитарных представлений, заменяющих несуществующее регулярное представление и зависящих от двух комплексных параметров (Ольшанский, 2003). Для нецелых значений параметров разлагающая мера допускает описание в терминах детерминантных точечных процессов (Бородин и Ольшанский, 2005). Цель работы — описание разложения для целых значений параметров; тогда спектр разложения резко меняется. Похожий результат был получен ранее для бесконечной симметрической группы (Вершик, Керов и Ольшанский, 2004), но случай унитарной группы оказывается существенно сложнее. Важной составляющей доказательства является формула суммирования многомерных гипергеометрических рядов (Густафсон, 1987).

0 Введение

Группа $U(\infty)$, элементами которой являются бесконечные унитарные матрицы $U = [U_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots$, для которых $U_{ij} = \delta_{ij}$ для достаточно большого $i + j$, наряду с группой $S(\infty)$, является примером „большой“ группы. Согласно идее, развиваемой в работах [4], [5], основной задачей гармонического анализа на такой группе является разложение наиболее „естественных“ унитарных представлений этой группы на неприводимые.

Пусть $G = U(\infty) \times U(\infty)$, K — диагональная подгруппа в G, изоморфная $U(\infty)$. Тогда (G, K) является парой Гельфанда. В работе [4] было построено семейство T_{zw} представлений, зависящее от двух комплексных параметров z и w, связанных условием $\mathrm{Re}(z + w) > -\frac{1}{2}$. Для любых таких z и w представление T_{zw} может быть представлено в виде прямого интеграла без кратностей от неприводимых сферических (т.е. обладающих выделенным циклическим K-инвариантным вектором) представлений группы G, которые параметризуются точками множества Ω, определяемого в разделе 1. Таким образом, класс эквивалентности представления T_{zw} полностью

*Работа поддержана грантом RFBR-CNRS 10-01-93114

определяется классом эквивалентности мер на Ω. Последний называется спектральным типом представления T_{zw}.

Спектральный тип T_{zw} существенно зависит от того, являются ли z и w целыми. Случай нецелых z и w был исследован в работе [1]. В настоящей работе разобран случай целых z и w. Представление T_{zw} разлагается в прямую сумму подпредставлений T_{pqrs}, которые мы называем блоками T_{zw}. В работе показано, что спектральный тип T_{zw} определяется набором мер на конечномерных гранях $\Omega(p,q;r,s) \subset \Omega$, определенных в разделе 1. Аналогичный результат для группы $S(\infty)$ и однопараметрического семейства представлений T_z для целого z был получен в работе [5].

Автор глубоко благодарен Г. И. Ольшанскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе и В. Горину за ценные замечания.

1 Характеры и граф Гельфанда-Цетлина

В этом разделе мы сформулируем некоторые утверждения, касающиеся характеров произвольных топологических групп и бесконечномерной унитарной группы в частности. Доказательства утверждений, приводимых в разделах 1 и 2, можно найти в [4] и ссылках внутри.

Определение 1. Пусть K — топологическая группа. Характером этой группы будем называть непрерывную комплекснозначную функцию χ на K, удовлетворяющую следующим трем условиям:

(1) χ центральна, т.е. постоянна на классах сопряженности K;

(2) χ положительно определена, т.е. для любого конечного числа элементов $g_1, \ldots, g_n$ группы K матрица $[\chi(g_j^{-1} g_i)]_{1 \le i,j \le n}$ эрмитова и неотрицательна;

(3) $\chi(e) = 1$, где e — единичный элемент группы K.

Множество всех характеров группы K обозначим через $\mathfrak{X}(K)$. Очевидно, что $\mathfrak{X}(K)$ является выпуклым множеством. Экстремальные точки этого множества называются экстремальными характерами.

В данной работе в качестве K будет выступать бесконечномерная унитарная группа $U(\infty) = \cup_{N \ge 1} U(N)$, являющаяся индуктивным пределом унитарных групп $U(N)$, состоящих из унитарных матриц размера $N \times N$. При этом вложение $U(N)$ в $U(N+1)$ устроено следующим образом: мы отождествляем $U(N)$ с подгруппой в $U(N+1)$ тех матриц, которые оставляют неподвижным $(N+1)$-ый базисный вектор. Таким образом, $U(\infty)$ есть группа бесконечных унитарных матриц $U = [U_{ij}]$, $i,j = 1,2,\ldots$, у которых лишь конечное число элементов U_{ij} отлично от δ_{ij}. Снабдим $U(\infty)$ топологией индуктивного предела. В этой топологии $U(\infty)$ не является локально компактной группой.

Классы сопряженных элементов группы $U(N)$ параметризуются спектром унитарных матриц, т.е. неупорядоченным набором комплексных чисел

$u_1, \ldots, u_N$ по модулю равных 1. Очевидно тогда, что классы сопряженных элементов группы $U(\infty)$ параметризуются счетными наборами комплексных чисел $(u_1, \ldots, u_n, \ldots)$, из которых лишь конечное число отлично от 1; упорядочивание u_i несущественно.

Обозначим через $\mathbb{R}^\infty$ произведение счетного числа копий $\mathbb{R}$ и положим

$$\mathbb{R}^{4\infty+2} = \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Обозначим через $\Omega \subset \mathbb{R}^{4\infty+2}$ подмножество таких шестерок

$$\omega = (\alpha^+, \beta^+; \alpha^-, \beta^-; \delta^+, \delta^-),$$

что

$$\alpha^\pm = (\alpha_1^\pm \geq \alpha_2^\pm \ldots \geq 0) \in \mathbb{R}^\infty, \;\; \beta^\pm = (\beta_1^\pm \geq \beta_2^\pm \ldots \geq 0) \in \mathbb{R}^\infty,$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm) < \infty, \;\; \beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1.$$

Положим

$$\gamma^\pm = \delta^\pm - \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm) \geq 0.$$

Для любого $\omega \in \Omega$ определим функцию $\chi^{(\omega)}$ на $U(\infty)$:

$$\chi^{(\omega)}(U) = \prod_{u \in \operatorname{Spec} U} \left\{ e^{\gamma^+(u-1)+\gamma^-(u^{-1}-1)} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+\beta_i^+(u-1)}{1-\alpha_i^+(u-1)} \frac{1+\beta_i^-(u^{-1}-1)}{1-\alpha_i^-(u^{-1}-1)} \right\},$$

где U — матрица из $U(\infty)$, а произведение берется по всем ее собственным значениям. Все кроме конечного числа собственных значений равны 1, поэтому произведение по u в действительности конечно. Произведение по i сходится, так как сумма параметров конечна. $\alpha_i^\pm$, $\beta_i^\pm$ и $\gamma^\pm$ (или $\delta^\pm$) называются параметрами Войкулеску (см. [6]).

Теорема 1.1. *Функции $\chi^{(\omega)}$, где ω пробегает множество Ω, есть в точности экстремальные характеры группы $U(\infty)$.*

Теорема 1.2. *Для любого характера χ группы $U(\infty)$ существует и единственна такая вероятностная мера P на топологическом пространстве Ω, что*

$$\chi(U) = \int_\Omega \chi^{(\omega)}(U) P(d\omega), \quad U \in U(\infty)$$

P называется спектральной мерой характера χ.

Пусть p, q, r, s — целые числа. Если все они неотрицательны, то обозначим через $\Omega(p, q; r, s) \subset \Omega$ подмножество тех $\omega \in \Omega$, для которых

$$\alpha^+_{p+1} = \alpha^+_{p+2} = \ldots = 0, \quad \beta^+_{q+1} = \beta^+_{q+2} = \ldots = 0,$$
$$\alpha^-_{r+1} = \alpha^-_{r+2} = \ldots = 0, \quad \beta^-_{s+1} = \beta^-_{s+2} = \ldots = 0,$$
$$\delta^+ = \sum(\alpha^+_i + \beta^+_i), \quad \delta^- = \sum(\alpha^-_i + \beta^-_i).$$

Если же $p, r, s \geq 0$, $q < 0$ и $s \geq -q$, то через $\Omega(p, q; r, s) \subset \Omega$ обозначим подмножество тех $\omega \in \Omega$, для которых

$$\alpha^+_{p+1} = \alpha^+_{p+2} = \ldots = 0, \quad \beta^+_1 = \beta^+_2 = \ldots = 0,$$
$$\alpha^-_{r+1} = \alpha^-_{r+2} = \ldots = 0, \quad \beta^-_1 = \ldots = \beta^-_{-q} = 1, \quad \beta^-_{s+1} = \beta^-_{s+2} = \ldots = 0,$$
$$\delta^+ = \sum(\alpha^+_i + \beta^+_i), \quad \delta^- = \sum(\alpha^-_i + \beta^-_i).$$

В случае $p, r, q \geq 0$, $s < 0$ и $q \geq -s$ определение $\Omega(p, q; r, s)$ дается аналогично. В любом случае размерность $\Omega(p, q; r, s)$ равна $p + q + r + s$.

Неприводимые представления группы $U(N)$ параметризуются упорядоченными наборами из N целых чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N$, которые называются сигнатурами. При этом N называется длиной сигнатуры λ. Множество всех сигнатур длины N обозначим через $\mathbb{GT}_N$. Графом Гельфанда-Цетлина называется градуированный граф $\mathbb{GT} = \sqcup_{N=0}^{\infty} \mathbb{GT}_N$. Две вершины $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$ соединены ребром, если $\lambda \prec \nu$, т.е. выполнено соотношение перемежаемости:

$$\nu_1 \geq \lambda_1 \geq \nu_2 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N \geq \nu_{N+1}.$$

При этом мы считаем, что $\mathbb{GT}_0$ состоит из одного элемента, обозначаемого через $\emptyset$, и что этот элемент соединен ребром со всеми $\lambda \in \mathbb{GT}_1$.

Соотношение перемежаемости $\lambda \prec \nu$ возникает в правиле ветвления Гельфанда-Цетлина для неприводимых характеров унитарных групп:

$$\chi^\nu|_{U(N)} = \sum_{\lambda:\ \lambda \prec \nu} \chi^\lambda,$$

где χ^λ — характер того неприводимого представления группы $U(N)$, которое отвечает сигнатуре λ. Размерность этого представления вычисляется по формуле Вейля:

$$\mathrm{Dim}_N \lambda = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}.$$

Для любых двух сигнатур $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$ положим

$$q(\lambda, \nu) = \begin{cases} \frac{\mathrm{Dim}_N \lambda}{\mathrm{Dim}_{N+1} \lambda}, & \lambda \prec \nu \\ 0, & \lambda \not\prec \nu. \end{cases}$$

При этом мы считаем, что $q(\emptyset, \lambda) = 1$ для любой сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}_1$. Числа $q(\nu, \lambda)$ называются копереходными вероятностями графа Гельфанда-Цетлина и удовлетворяют соотношению:

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} q(\lambda, \nu) = 1 \text{ для любой } \nu \in \mathbb{GT}_{N+1}.$$

Предположим, что для каждого $N = 0, 1, \dots$ задана вероятностная мера P_N на дискретном множестве $\mathbb{GT}_N$. Семейство $\{P_N\}$ называется когерентной системой мер, если

$$P_N(\lambda) = \sum_{\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}} q(\lambda, \nu) P_{N+1}(\nu), \quad N = 0, 1, \dots, \lambda \in \mathbb{GT}_N.$$

Теорема 1.3. *Существует взаимно-однозначное соответствие $\chi \leftrightarrow \{P_N\}$ между характерами группы $U(\infty)$ и когерентными системами мер на графе Гельфанда-Цетлина. Это соответствие задается сотношением*

$$\chi_N = \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} P_N(\lambda) \tilde{\chi}^\lambda, \quad \chi_N = \chi|_{U(N)}, \quad N = 1, 2, \dots,$$

где $\tilde{\chi}^\lambda(u) = \frac{\chi^\lambda(u)}{\chi^\lambda(e)}$ — нормированный характер.

Замечание 1.4. Пусть χ — произвольный характер. Тогда для любого целого k функция $\chi \otimes \det^k(\cdot)$, определенная как поточечное произведение $\chi(U) \det^k(U)$, также является характером. При этом, если χ экстремален, то и $\chi \otimes \det^k(\cdot)$ также экстремален. В терминах параметров Войкулеску умножение на $\det(\cdot)$ сводится к следующему преобразованию:

$$\beta^+ \to (1 - \beta_1^-, \beta_1^+, \beta_2^+, \dots), \quad \beta^- \to (\beta_2^-, \beta_3^-, \dots).$$

В терминах когерентных систем умножение на $\det(\cdot)$ эквивалентно преобразованию $P_N(\lambda) \to P_N(\lambda + (1, \dots, 1))$.

Для заданной сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ обозначим через λ^+ и λ^- ее положительную и отрицательную части. Они являются диаграммами Юнга, связанными условием $l(\lambda^+) + l(\lambda^-) \le N$, где $l(\cdot)$ — количество ненулевых строк в диаграмме Юнга. Для диаграммы Юнга μ обозначим через $d(\mu)$ количество клеток в диагонали μ и введем модифицированные координаты Фробениуса:

$$\bar{p}_i(\mu) = \mu_i - i + \frac{1}{2}, \quad \bar{q}_i(\mu) = \mu_i' - i + \frac{1}{2}, \quad i = 1, \dots, d(\mu),$$

где μ' — сопряженная к μ диаграмма Юнга. Положим

$$\bar{p}_i(\mu) = \bar{q}_i(\mu) = 0, \quad i = d(\mu) + 1, d(\mu) + 2, \dots.$$

Для любого $N = 1, 2, \dots$ вложим множество $\mathbb{GT}_N$ в Ω следующим образом:

$$\mathbb{GT}_N \ni \lambda \mapsto \omega = (\bar\alpha^+, \bar\alpha^-, \bar\beta^+, \bar\beta^-, \bar\delta^+, \bar\delta^-) \in \Omega,$$
$$\bar\alpha^\pm = \frac{\bar p_i(\lambda^\pm)}{N}, \quad \bar\beta^\pm = \frac{\bar q_i(\lambda^\pm)}{N} \ (i = 1, 2, \dots), \quad \bar\delta^\pm = \frac{|\lambda^\pm|}{N},$$

где $|\mu|$ обозначает количество клеток в диаграмме Юнга μ. Данное вложение обозначим через $\bar\iota_N$.

Теорема 1.5. *Пусть χ — произвольный характер $U(\infty)$, P — его спектральная мера и $\{P_N\}$ — когерентная система, соответствующая χ. Тогда образы мер P_N при вложении $\bar\iota_N$ слабо сходятся к мере P.*

Пусть $G = U(\infty)\times U(\infty)$, K — диагональная подгруппа в G, канонически изоморфная $U(\infty)$, и T — унитарное представление группы G в некотором гильбертовом пространстве H. Вектор $\xi \in H$ называется циклическим, если линейная оболочка всех векторов $T(g)\xi$, $g \in G$, плотна в H. Если вектор ξ является циклическим, инвариантным относительно действия подгруппы K и $||\xi|| = 1$, то пара (T, ξ) называется сферическим представлением. При этом вектор ξ называется сферическим вектором.

Обозначим через Φ множество всех непрерывных функций на G, являющихся положительно определенными, K-биинвариантными и нормированными в единице e группы G. Такие функции называются сферическими функциями. Если (T, ξ) — сферическое представление пары (G, K), то матричный коэффициент

$$\varphi(g) = (T(g)\xi, \xi), \quad g \in G,$$

соответствующий сферическому вектору, является сферической функцией. Отображение $(T, \xi) \mapsto \varphi$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие между классами эквивалентности сферических представлений и сферическими функциями. При этом экстремальным сферическим функциям соответствуют неприводимые сферические представления.

Между множеством характеров $\mathfrak{X}(K) = \mathfrak{X}(U(\infty))$ и множеством сферических функций Φ также существует взаимно-однозначное соответствие, заданное следующим образом:

$$\chi(U) = \varphi(U, 1), \quad \varphi(U_1, U_2) = \chi(U_1U_2^{-1}), \quad U, U_1, U_2 \in U(\infty).$$

При этом биекция $\chi \leftrightarrow \varphi$ является также изоморфизмом выпуклых множеств. Таким образом, экстремальным характерам соответствуют экстремальные сферические функции.

Так как (G, K) является парой Гельфанда, то для любого неприводимого унитарного представления T группы G пространство K-инвариантных векторов имеет размерность 0 или 1. Значит, если T обладает ненулевым K-инвариантным вектором ξ, то ξ единственен с точностью до умножения на число. При этом этот вектор ξ автоматически является циклическим, так как представление T неприводимо и $\xi \neq 0$. Таким образом, выбирая $||\xi|| = 1$, получаем сферическое представление (T, ξ). Неединственность выбора вектора ξ заключается только в возможности его умножения на число по модулю равное 1, что не влияет на сферическую функцию $\varphi(g) = (T(g)\xi, \xi)$. Из всего вышесказанного следует, что неприводимые сферические представления пары (G, K) параметризуются точками $\omega \in \Omega$.

2 Конструкция представлений T_{zw}

Введем следующие обозначения:

$$G(N) = U(N) \times U(N) \subset G, \quad K(N) = \operatorname{diag} U(N) \subset K, \quad N = 1, 2, \ldots .$$

$G(N)$ действует на $U(N)$ по правилу:

$$(U, (U_1, U_2)) \mapsto U_2^{-1} U U_1, \quad U \in U(N), \quad (U_1, U_2) \in G(N).$$

Пусть $N \geq 2$. Матрицу $U \in U(N)$ запишем в блочном виде, соответствующем разбиению $N = (N-1) + 1$:

$$U = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

т.е. $D = U_{NN}$ — комплексное число, A — матрица размера $(N-1) \times (N-1)$. Положим

$$p_N(U) = \begin{cases} A - B(1+D)^{-1}C, & D \neq -1 \\ A, & D = -1. \end{cases}$$

Лемма 2.1. *Отображение p_N определяет проекцию $U(N) \to U(N-1)$, коммутирующую с действием $G(N-1)$, т.е. с левыми и правыми сдвигами на элементы $U(N-1)$.*

Мы будем называть p_N канонической проекцией. p_N непрерывна на открытом подмножестве $U(N)$, состоящем из тех матриц U, для которых $U_{NN} \neq -1$, но не является непрерывной на всей группе $U(N)$. Тем не менее, p_N является борелевским отображением, поэтому для любой борелевской меры на $U(N)$ определен ее образ при отображении p_N, являющийся борелевской мерой на $U(N-1)$.

Пусть μ_N — нормированная мера Хаара на $U(N)$. Тогда из леммы 2.1 следует, что образ μ_N при отображении p_N является инвариантной вероятностной мерой на $U(N-1)$, а значит, совпадает с μ_{N-1}.

Пусть $\mathfrak{D} = \{D \in \mathbb{C} \colon |D| \leq 1\}$ — замкнутый единичный круг. Определим отображение

$$\varepsilon_N \colon U(N) \to \mathfrak{D}, \quad U \mapsto D = U_{NN}.$$

Обозначим через ν_N образ меры μ_N при этом отображении. Тогда ν_N — вероятностная мера на $\mathfrak{D}$.

Лемма 2.2.
$$\nu_N(dD) = const(1-|D|^2)^{N-2} l(dD),$$
где l — мера Лебега на $\mathfrak{D}$.

Объединим p_N и ε_N в одно отбражение:
$$\tilde{p}_N \colon U(N) \to U(N-1) \times \mathfrak{D}.$$

Лемма 2.3. *Образ μ_N при отображении $\tilde{p}_N$ совпадает с $\mu_{N-1} \times \nu_N$.*

Положим $H^N = L^2(U(N), \mu_N)$ и обозначим через Reg^N бирегулярное представление группы $G(N)$ в H^N:
$$(\mathrm{Reg}^N(g)f)(U) = f(U_2^{-1} U U_1), \quad f \in H^N,\ U \in U(N), \quad g = (U_1, U_2) \in G(N).$$
Пусть $H_0^N \subset H^N$ — подпространство функций, зависящих только от $\tilde{p}_N(\cdot)$.

Лемма 2.4. *H_0^N является $G(N-1)$-инвариантным подпространством. Существует естественная изометрия*
$$H_0^N \simeq H^{N-1} \otimes W^N, \quad W^N = L^2(\mathfrak{D}, \nu_N).$$

Из леммы 2.4 следует, что любой единичный вектор $v \in W^N$ определяет вложение $\mathrm{Reg}^{N-1} \to \mathrm{Reg}^N$:
$$H^{N-1} \ni f \mapsto f \otimes v \in H_0^N \subset H^N.$$

Пусть $U(N)' \subset U(N)$ — подмножество тех унитарных матриц, множество собственных значений которых не содержит -1. Для любых комплексных чисел z и w функция
$$f_{z,w;N}(U) = \det((1+U)^z (1+U^{-1})^w)$$
корректно определена на $U(N)'$. При этом, если $u_1, \dots, u_N$ — собственные значения U, то
$$f_{z,w;N}(U) = \prod_{k=1}^{N} (1+u_k)^z (1+\bar{u}_k)^w.$$
На дополнении к $U(N)'$, являющимся множеством меры нуль относительно меры Хаара, доопределим эту функцию нулем.

Лемма 2.5. *Образ $U(N)'$ при отображении p_N совпадает с $U(N-1)'$.*

Лемма 2.6. *Для любой матрицы $U \in U(N)'$ имеет место следующая формула:*
$$f_{z,w;N}(U) = f_{z,w;N-1}(p_N(U))(1+D)^z(1+\bar{D})^w,$$
где $D = U_{NN} = \varepsilon_N(U) \in \mathfrak{D} \setminus \{-1\}$.

Лемма 2.7. *Функция* $v_{z,w;N}(D) = (1+D)^z(1+\bar{D})^w$ *принадлежит пространству* $L^2(\mathfrak{D},\nu_N)$, *если* $2\operatorname{Re} z + 2\operatorname{Re} w + N > 0$. *При этом*

$$||v_{z,w;N}||^2 = \int_{\mathfrak{D}} |(1+D)^z(1+\bar{D})^w|^2 \nu_N(dD) = \frac{\Gamma(N)\Gamma(N+z+\bar{z}+w+\bar{w})}{\Gamma(N+z+\bar{w})\Gamma(N+\bar{z}+w)}.$$

Лемма 2.8. *Пусть* $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$. *Тогда функция* $f_{z,w;N}$ *принадлежит пространству* $H^N = L^2(U(N),\mu_N)$, *и*

$$||f_{z,w;N}||^2 = \prod_{k=1}^{N} \frac{\Gamma(k)\Gamma(k+z+\bar{z}+w+\bar{w})}{\Gamma(k+z+\bar{w})\Gamma(k+\bar{z}+w)}.$$

Зафиксируем произвольные z, $w \in \mathbb{C}$. При достаточно большом N ($N > -2\operatorname{Re} z - 2\operatorname{Re} w$) вектор $v_{z,w;N} \in W^N$ корректно определен. Положим

$$v'_{z,w;N} = \frac{v_{z,w;N}}{||v_{z,w;N}||}.$$

Тогда $||v'_{z,w;N}|| = 1$, и, пользуясь леммой 2.4, можно определить изометрическое вложение $L^N_{z,w} \colon H^{N-1} \to H^N$:

$$H^{N-1} \ni f \mapsto f \otimes v'_{z,w;N} \in H^N,$$

коммутирующее с действием $G(N-1)$. Значит, существует гильбертово пространство H, являющееся индуктивным пределом $H = \varinjlim H^N$, и унитарное представление $\varinjlim \operatorname{Reg}^N$ в пространстве H. Обозначим это представление через $T_{z,w}$.

Если $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$, то все функции $f_{z,w;N} \in H^N$, и мы можем нормировать их:

$$f'_{z,w;N} = \frac{f_{z,w;N}}{||f_{z,w;N}||}.$$

Тогда существует выделенный вектор

$$\xi_0 = \varinjlim f'_{z,w;N} \in H.$$

Он является K-инвариантным, так как все функции $f_{z,w;N}$ постоянны на классах сопряженности. Отметим, что определение выделенного вектора имеет смысл только при $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$.

Лемма 2.9. *Пусть* $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$. *Тогда*

$$f'_{z,w;N} = \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} a_{z,w;N}(\lambda)\chi^\lambda,$$

где

$$a_{z,w;N}(\lambda) = C_{z,w;N} \operatorname{Dim}_N \lambda \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(z-\lambda_i+i)\Gamma(w+N+1+\lambda_i-i)}, \qquad (1)$$

где

$$C_{z,w;N}=\prod_{i=1}^{N}\sqrt{\frac{\Gamma^2(z+w+i)\Gamma^2(i)\Gamma(i+\bar z+w)\Gamma(i+z+\bar w)}{\Gamma(i)\Gamma(i+z+\bar z+w+\bar w)}}.$$

Лемма 2.10.

$$\chi_{z,w}|_{U(N)}=\sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N}P_N(\lambda\,|\,z,w)\tilde\chi^\lambda,$$

где $P_N(\lambda\,|\,z,w)=|a_{z,w;N}(\lambda)|^2$.

Доказательство.

$$\chi_{z,w}(U)=(T_{z,w}(U,1)\xi_0,\xi_0)=\int_{U(N)}f'_{z,w;N}(VU)\overline{f'_{z,w;N}(V)}\mu_N(dV)=$$

$$=\sum_{\lambda,\mu}a_{z,w;N}(\lambda)\overline{a_{z,w;N}(\mu)}\int_{U(N)}\chi^\lambda(VU)\overline{\chi^\mu(V)}\mu_N(dV)=\sum_\lambda|a_{z,w;N}(\lambda)|^2\tilde\chi^\lambda(U)$$

□

Замечание 2.11. Нетрудно видеть, что

$$P_N(\lambda+(1,\dots,1)\,|\,z+1,w-1)=P_N(\lambda\,|\,z,w).$$

Значит, согласно замечанию 1.4 имеем $\chi_{z+1,w-1}=\chi_{z,w}\otimes\det(\cdot)$.

3 Коммутант и разложение на блоки

Пусть $P_N:H\to H^N$ — ортопроектор на H^N, $H(\lambda)\subset H^N$ — пространство представления $\pi^\lambda\times(\pi^\lambda)^*$ и $P(\lambda):H\to H(\lambda)$ — ортопроектор на $H(\lambda)$. Проекторы $P(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{GT}_N$, попарно ортогональны, и их сумма равна P_N. Обозначим через $\mathcal{A}$ коммутант представления T_{zw}, т.е. алгебру всех ограниченных операторов в H, коммутирующих с представлением T_{zw}.

Предложение 3.1. *Коммутант $\mathcal{A}$ является коммутативной алгеброй.*

Доказательство. Пусть A, $B\in\mathcal{A}$. Для любого N операторы P_NAP_N и P_NBP_N, рассматриваемые как операторы в пространстве H^N, коммутируют с представлением Reg^N. Поскольку кратность вхождения каждого неприводимого представления в Reg^N равна 1, то коммутант представления Reg^N коммутативен. Следовательно,

$$P_NAP_NBP_N=P_NBP_NAP_N\quad\text{для всех } N=1,2,\dots. \tag{2}$$

Проекторы P_N сильно сходятся к 1 при $N\to\infty$. Так как операция умножения непрерывна в сильной оперторной топологии на каждом операторном шаре, а нормы операторов в равенстве (2) не превосходят максимума из чисел 1, $||A||$, $||B||$, то, переходя в (2) к пределу при $N\to\infty$, получаем, что $AB=BA$. □

Отождествим изометрическое вложение $L^N_{zw} : H^N \to H^{N+1}$ с частично изометрическим оператором $L^N_{zw} P_N$ в H. Для любых $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$ таких, что $\lambda \prec \nu$, зафиксируем изометрическое вложение $E(\lambda, \nu) : H(\lambda) \to H(\nu)$, коммутирующее с действием группы $G(N)$. Выбор $E(\lambda, \nu)$ единственен с точностью до множителя по модулю равного 1. Отождествим $E(\lambda, \nu)$ с частично изометрическим оператором $E(\lambda, \nu) P(\lambda)$, действующим во всем пространстве H.

Для любой пары сигнатур $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$ рассмотрим оператор $P(\nu) L^N_{zw} P(\lambda)$. Этот оператор сплетает представления $\pi^\lambda \times (\pi^\lambda)^*$ и $(\pi^\nu \times (\pi^\nu))^*|_{G(N)}$. Значит, он равен 0, если $\lambda \not\prec \nu$. Если $\lambda \prec \nu$, то этот оператор пропорционален $E(\lambda, \nu)$:

$$P(\nu) L^N_{zw} P(\lambda) = \alpha_{zw}(\lambda, \nu) E(\lambda, \nu), \quad \lambda \prec \nu.$$

Положим

$$p_{zw}(\lambda, \nu) = |\alpha_{zw}(\lambda, \nu)|^2, \quad \lambda \prec \nu.$$

Очевидно, что эта функция не зависит от выбора $E(\lambda, \nu)$. Для любого $\xi \in H(\lambda)$ имеем

$$||P(\nu)\xi||^2 = \begin{cases} p_{zw}(\lambda, \nu) ||\xi||^2, & \text{если } \lambda \prec \nu \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как проекторы $P(\nu)$, $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$ попарно ортогональны и в сумме дают P_{N+1}, то

$$\sum_{\nu \succ \lambda} p_{zw}(\lambda, \nu) = 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{GT}_N.$$

Мы будем называть $p_{zw}(\lambda, \nu)$ переходной функцией представления T_{zw}.

Теорема 3.2. *Имеет место следующая формула для переходной функции представления T_{zw}:*

$$p_{zw}(\lambda, \nu) = \frac{|a_{zw}(\nu)|^2}{|a_{zw}(\lambda)|^2} \frac{\dim \lambda}{\dim \nu}.$$

Доказательство. Обозначим через ξ_λ, $\lambda \in \mathbb{GT}_N$, вектор в $H(\lambda) \subset H^N \subset H$, соответствующий χ^λ при отождествлении $H^N \cong L^2(U(N), \mu^N_1)$. Он имеет единичную длину и $K(N)$-инвариантен. Покажем, что для любой сигнатуры $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$ вектор ξ_ν допускает разложение

$$\xi_\nu = \sum_{\lambda \prec \nu} \xi_{\lambda\nu},$$

где векторы $\xi_{\lambda\nu}$ попарно ортогональны, $K(N)$-инвариантны,

$$(\xi_{\lambda\nu}, \xi_{\lambda\nu}) = \frac{\dim \lambda}{\dim \nu}$$

и $\xi_{\lambda\nu}$ под действием $G(N)$ порождает представление $\pi^\lambda \times (\pi^\lambda)^*$.

Действительно, пусть $H(\pi^\nu)$ — пространство представления π^ν группы $U(N+1)$, а $\operatorname{End} H(\pi^\nu)$ — алгебра операторов в этом пространстве со скалярным произведением

$$(A, B) = \frac{\operatorname{tr} AB^*}{\dim \nu}$$

Определим действие группы $G(N+1)$ на $\operatorname{End} H(\pi^\nu)$ формулой:

$$g \cdot A = \pi^\nu(g_1) A \pi^\nu(g_2^{-1}), \ A \in \operatorname{End} H(\pi^\nu), \ g = (g_1, g_2) \in G(N+1).$$

Отображение $\widehat{\ }$: $\operatorname{End} H(\pi^\nu) \to H(\nu)$, ставящее в соответствие оператору $A \in \operatorname{End} H(\pi^\nu)$ функцию $\widehat{A}(u) = \operatorname{tr}(A\pi^\nu(u))$, сохраняет скалярное произведение и коммутирует с действием $G(N+1)$.

Обозначим через 1_ν тождественный оператор в пространстве $H(\pi^\nu)$. Его образ при отображении $A \mapsto \widehat{A}$ совпадает с вектором ξ_ν. Для любой сигнатуры $\lambda \prec \nu$ обозначим через $1_{\lambda\nu} \in \operatorname{End} H(\pi^\nu)$ ортопроектор на подпространство тех векторов, которые под действием $U(N) \subset U(N+1)$ преобразуются согласно представлению π^λ. Определим $\xi_{\lambda\nu}$ как образ оператора $1_{\lambda\nu}$ при отображении $A \mapsto \widehat{A}$. Очевидно, что векторы $\xi_{\lambda\nu}$ удовлетворяют всем требуемым свойствам.

Пусть $z \notin \mathbb{Z}$, $w \notin \mathbb{Z}$. Тогда $a_{z,w;N}(\lambda) \neq 0$ для любой $\lambda \in \mathbb{GT}_N$. Рассмотрим разложения вектора ξ_0 по ξ_λ, $\lambda \in \mathbb{GT}_N$, и по ξ_ν, $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$:

$$\xi_0 = \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} a_{zw}(\lambda) \xi_\lambda = \sum_{\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}} a_{zw}(\nu) \xi_\nu.$$

Заменяя ξ_ν на $\sum_{\lambda \prec \nu} \xi_{\lambda\nu}$, получаем, что

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} a_{zw}(\lambda) \xi_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} \sum_{\nu \succ \lambda} a_{zw}(\nu) \xi_{\lambda\nu}.$$

Сравнивая компоненты в обеих частях равенства, которые преобразуются согласно заданному неприводимому представлению $G(N) \subset G(N+1)$, мы видим, что

$$a_{zw}(\lambda) \xi_\lambda = \sum_{\nu \succ \lambda} a_{zw}(\nu) \xi_{\lambda\nu}, \quad \text{для любой} \lambda \in \mathbb{GT}_N.$$

Значит,

$$P_\nu \xi_\lambda = \frac{a_{zw}(\nu)}{a_{zw}(\lambda)} \xi_{\lambda\nu}, \quad \nu \succ \lambda,$$

следовательно,

$$p_{zw}(\lambda, \nu) = \frac{|a_{zw}(\nu)|^2}{|a_{zw}(\lambda)|^2} ||\xi_{\lambda\nu}|| = \frac{|a_{zw}(\nu)|^2}{|a_{zw}(\lambda)|^2} \frac{\dim \lambda}{\dim \nu}.$$

□

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}$ пространство всех ограниченных комплекснозначных функций $A(\lambda)$ на множестве вершин графа $\mathbb{GT}\backslash\{\emptyset\}$, удовлетворяющих условию

$$A(\lambda) = \sum_{\nu \succ \lambda} p_{zw}(\lambda, \nu) A(\nu) \quad \text{для всех } \emptyset \neq \lambda \in \mathbb{GT}. \tag{3}$$

$\widetilde{\mathcal{A}}$ является банаховым пространством с нормой $||A|| = \sup_\lambda |A(\lambda)|$.

Предложение 3.3. *Коммутант $\mathcal{A}$ представления T_{zw} как банахово пространство с обычной операторной нормой изометричен пространству $\widetilde{\mathcal{A}}$.*

Доказательство. Для любого оператора $A \in \mathcal{A}$ и любого $N = 1, 2, \ldots$ имеем

$$A_N := P_N A P_N = \sum_{\lambda, \mu \in \mathbb{GT}_N} P(\lambda) A P(\mu)$$

Оператор $P(\lambda)AP(\mu)$ сплетает представления $\pi^\mu \times (\pi^\mu)^*$ и $\pi^\lambda \times (\pi^\lambda)^*$. Следовательно, он может быть ненулевым только при $\lambda = \mu$. В этом случае оператор $P(\lambda)AP(\lambda)$ пропорционален $P(\lambda)$. Обозначая коэффициент пропорциональности через $A(\lambda)$ получаем, что

$$P_N A P_N = \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} A(\lambda) P(\lambda).$$

Отсюда очевидно следует, что

$$||P_N A P_N|| = \sup_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} |A(\lambda)|,$$

откуда

$$||A|| = \sup_N ||P_N A P_N|| = \sup_{\lambda \in \mathbb{GT}} |A(\lambda)| = ||A(\cdot)||.$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{GT}_N$, $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$. Оператор $P(\nu)$ коммутирует с действием группы $G(N) \subset G(N+1)$. Следовательно, оператор $P(\lambda)P(\nu)P(\lambda)$, коммутирующий с неприводимым представлением $\pi^\lambda \times (\pi^\lambda)^*$ группы $G(N)$, пропорционален $P(\lambda)$. Для того, чтобы найти коэффициент пропорциональности, заметим, что для любого вектора $\xi \in H(\lambda)$ имеем $P(\lambda)\xi = \xi$, а значит,

$$(P(\lambda)P(\nu)P(\lambda)\xi, \xi) = (P(\nu)\xi, \xi) = (P(\nu)\xi, P(\nu)\xi) = \begin{cases} p_{zw}(\lambda, \nu)(\xi, \xi), & \lambda \prec \nu \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

по определению переходной функции. Так как $(P(\lambda)\xi, \xi) = (\xi, \xi)$, то искомый коэффициент пропорциональности равен $p_{zw}(\lambda, \nu)$, если $\lambda \prec \nu$, и 0 в противном случае, т.е.

$$P(\lambda)P(\nu)P(\lambda) = \begin{cases} p_{zw}(\lambda, \nu) P(\lambda), & \text{если } \lambda \prec \nu \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как $P(\lambda)P(\nu)P(\mu) = 0$, если λ, $\mu \in \mathbb{GT}_N$ и $\mu \neq \lambda$, то

$$P_N P(\nu) P_N = \sum_{\lambda \prec \nu} p_{zw}(\lambda, \nu) P(\lambda) \quad \forall \nu \in \mathbb{GT}_{N+1}.$$

Значит, выполнена следующая цепочка равенств:

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} A(\lambda)P(\lambda) = A_N = P_N A_{N+1} P_N = P_N \left(\sum_{\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}} A(\nu)P(\nu) \right) P_N =$$
$$= \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} P(\lambda) \sum_{\nu \succ \lambda} A(\nu) p_{zw}(\lambda, \nu),$$

откуда

$$A(\lambda) = \sum_{\nu \succ \lambda} A(\nu) p_{zw}(\lambda, \nu).$$

Таким образом, построено изометрическое вложение $\mathcal{A}$ в пространство $\widetilde{\mathcal{A}}$. Обратно, для любой функции $A(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ положим

$$A_N = \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} A(\lambda) P(\lambda).$$

Тогда из условия (3) получаем, что

$$A_N = P_N A_{N+1} P_N,$$

а из условия $||A(\cdot)||$ следует, что

$$\sup_N ||A_N|| = ||A(\cdot)|| < \infty.$$

Значит, существует ограниченный оператор

$$A = \mathrm{w} - \lim_{N \to \infty} A_N,$$

где w-lim обозначает предел в слабой операторной топологии. Так как A_N коммутирует с действием группы $G(N)$, то оператор A содержится в коммутанте $\mathcal{A}$.

□

Для четверки целых чисел $(p, q; r, s)$ определим подмножество

$$\mathbb{GT}(p, q; r, s) = \{\lambda \in \mathbb{GT} \,|\lambda_p \geq q,\ \lambda_{p+1} < q+1)$$
$$\lambda_{N-r+1} \leq -s,\ \lambda_{N-r} > -s-1\} \subset \mathbb{GT}.$$

$\mathbb{GT}(p, q; r, s)$ является связным подграфом в графе Гельфанда-Цетлина. Далее, пусть A_{pqrs} — характеристическая функция множества $\mathbb{GT}(p, q; r, s)$.

Теорема 3.4. *Пусть $q-p=k$, $s-r=l$, $p,r\geq 0$, $k+l\geq 0$. Тогда*

(1) Функция $A_{pqrs}(\cdot)$ удовлетворяет соотношению (3) для $z=k$, $w=l$. Следовательно, она определяет оператор A_{pqrs} в коммутанте представления T_{kl}.

(2) Оператор A_{pqrs} является ортогональным проектором на некоторое подпространство $H_{pqrs}\subset H$. Подпространства H_{pqrs} попарно ортогональны, и их прямая сумма есть все пространство H. Таким образом, они определяют разложение представления T_{kl} в прямую сумму подпредставлений:

$$T_{kl}=\bigoplus_{q-p=k,s-r=l,p\geq 0,r\geq 0} T_{pqrs}$$

(3) Обозначим через Reg^N_{pqrs}, где N достаточно велико, подпредставление регулярного представления Reg^N, которое является объединением тех компонент $\pi^\lambda\times(\pi^\lambda)^*$, для которых $\lambda\in\mathbb{GT}(p,q;r,s)$. Пусть H^N_{pqrs} — соответствующее подпространство в H^N. Тогда изометрическое вложение $L^N_{kl}:H^N\to H^{N+1}$ отображает H^N_{pqrs} в H^{N+1}_{pqrs}, и представление $T_{pqrs}\subset T_{kl}$ совпадает с индуктивным пределом представлений Reg^N_{pqrs}.

Доказательство. (1) Для любой сигнатуры $\lambda\in\mathbb{GT}_N(p,q;r,s)$ имеем

$$A_{pqrs}(\lambda)=1=\sum_{\nu\succ\lambda}p_{kl}(\lambda,\nu)=\sum_{\nu\succ\lambda}p_{kl}(\lambda,\nu)A_{pqrs}(\nu),$$

так как $p_{kl}(\lambda,\nu)=0$, если $\nu\notin\mathbb{GT}_{N+1}(p,q;r,s)$.

Таким образом, функция $A_{pqrs}(\cdot)$ удовлетворяет условию (3) и ограничена. Из предложения 3.3 следует, что она определяет оператор A_{pqrs}, лежащий в коммутанте представления T_{kl}.

(2) Из предложения 3.3 и определения функции A_{pqrs} следует, что для всех $N=1,2,\dots$

$$P_N A_{pqrs} P_N=\sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N(p,q;r,s)} P(\lambda). \tag{4}$$

Поскольку $P_N A_{pqrs} P_N$ является ортопроектором для любого N, то оператор A_{pqrs} также является ортопроектором. Аналогично доказывается, что проекторы A_{pqrs} попарно ортогональны и их сумма равна единичному оператору.

(3) Так как все три оператора P_N, A_{pqrs} и $P_N A_{pqrs} P_N$ являются ортопроекторами, то P_N и A_{pqrs} коммутируют. Отсюда и из (4) следует, что оператор $P_N A_{pqrs}=A_{pqrs}P_N$ проецирует H^N на инвариантное подпространство H^N_{pqrs}.Так как $P_{N+1}\geq P_N$, то H^N_{pqrs} является подпространством в H^{N+1}_{pqrs}. □

4 Построение вектора v_{pqrs}

В этом разделе мы покажем, что для произвольных z и w пространство V_{zw} K-инвариантных векторов изоморфно пространству $\mathcal{F}_{zw}$ функций на

$\mathbb{GT}$, удовлетворяющих условию псевдогармоничности и условию типа Харди, причем в случае целых z и w этот изоморфизм хорошо согласован с разложением представления T_{zw} на блоки, полученным в разделе 3. В этом случае с помощью этого изоморфизма мы построим K-инвариантный вектор v_{pqrs} в каждом из блоков T_{pqrs}. В разделе 5 будет доказана цикличность этих векторов.

Предложение 4.1. *Для любых $N \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$*

$$(\xi_\lambda, \xi_\nu) = \begin{cases} \frac{a_{zw}(\nu)}{a_{zw}(\lambda)} \cdot \frac{\operatorname{Dim}_N \lambda}{\operatorname{Dim}_{N+1} \nu}, & \lambda \prec \nu, \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим через Q_λ проектор, действующий в гильбертовом пространстве H, на изотипическую компоненту $\pi^\lambda \times (\pi^\lambda)^*$ представления $T_{zw}|_{G(n)}$. Заметим, что $P_\lambda \leq Q_\lambda$ и $Q_\lambda \xi_\lambda = \xi_\lambda$. Из доказательства теоремы 3.2 следует, что

$$(Q_\lambda \xi_\nu, Q_\lambda \xi_\nu) = \begin{cases} \dim \lambda / \dim \nu, & \text{если } \lambda \prec \nu, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В частности, если условие $\lambda \prec \nu$ не выполнено, то $Q_\lambda \xi_\nu = 0$ и $(\xi_\lambda, \xi_\nu) = 0$. Применяя оператор Q_λ к разложению

$$\xi_0 = \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} (\xi_0, \xi_\lambda) \xi_\lambda = \sum_{\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}} (\xi_0, \xi_\nu) \xi_\nu,$$

получаем, что

$$Q_\lambda \xi_0 = (\xi_0, \xi_\lambda) = \sum_{\nu \succ \lambda} (\xi_0, \xi_\nu) Q_\lambda \xi_\nu.$$

Зафиксируем $\nu \succ \lambda$. Умножая последнее равенство скалярно на ξ_ν, получим

$$(\xi_0, \xi_\lambda)(\xi_\lambda, \xi_\nu) = (\xi_0, \xi_\nu)(Q_\lambda \xi_\nu, \xi_\nu),$$

где мы воспользовались тем, что $(Q_\lambda \xi_{\nu'}, \xi_\nu) = 0$ для любой $\nu' \neq \nu$, что в свою очередь следует из того, что $Q_\lambda H(\nu) \subset H(\nu)$ для любой $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$. Так как

$$(Q_\lambda \xi_\nu, \xi_\nu) = (Q_\lambda \xi_\nu, Q_\lambda \xi_\nu) = \frac{\dim \lambda}{\dim \nu},$$

$(\xi_0, \xi_\lambda) = a_{zw}(\lambda)$ и $(\xi_0, \xi_\nu) = a_{zw}(\nu)$, то

$$(\xi_\lambda, \xi_\nu) = \frac{a_{zw}(\nu)}{a_{zw}(\lambda)} \cdot \frac{\operatorname{Dim}_N \lambda}{\operatorname{Dim}_{N+1} \nu}.$$

□

Следствие 4.2. *Для любых $N \geq 1$, целых z и w, $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$*

$$(\xi_\nu, \xi_\lambda) = C_{z,w;N,N+1} \frac{\prod_{i=1}^{N} \Gamma(z - \lambda_i + i)\Gamma(w + N + 1 + \lambda_i - i)}{\prod_{i=1}^{N+1} \Gamma(z - \nu_i + i)\Gamma(w + N + 2 + \nu_i - i)},$$

где
$$C^2_{z,w;N,N+1}=\frac{C^2_{z,w;N+1}}{C^2_{z,w;N}}=\frac{(N+z+w)!^4N!}{(N+2z+2w)!}.$$

Замечание 4.3. Целые числа $z-\lambda_i+i$ и $z-\nu_i+i$ могут быть неположительными, и тогда соответствующие гамма-функции обращаются в бесконечность. Так как $\lambda \prec \nu$, то $z-\lambda_i+i \geq z-\nu_i+i$ при любом $1 \leq i \leq N$. Поэтому отношение $\frac{\Gamma(z-\lambda_i+i)}{\Gamma(z-\nu_i+i)}$ может быть корректно определено. Также мы полагаем $\frac{1}{\Gamma(z-\nu_{N+1}+N+1)}$ равным 0, если $z-\nu_{N+1}+N+1 \leq 0$. Аналогично определяется $\frac{\prod_{i=1}^{N}\Gamma(w+N+1+\lambda_i-i)}{\prod_{i=1}^{N+1}\Gamma(w+N+2+\nu_i-i)}$.

Определение 2. Обозначим через $\mathcal{F}_{zw}$ пространство комплекснозначных функций $f(\lambda)$ на вершинах $\lambda \neq \emptyset$ графа Гельфанда-Цетлина, удовлетворяющих следующим двум свойствам.

(1) Псевдогармоничность: для всех $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ выполнено соотношение:
$$f(\lambda)=\sum_{\nu\succ\lambda} f(\nu)(\xi_\nu,\xi_\lambda). \tag{5}$$

(2) Условие типа Харди: для любого $N=1,2,\dots$
$$||f||^2 := \sup_N \sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N} |f(\lambda)|^2<\infty.$$

На самом деле, как видно из доказательства следующего утверждения, для псевдогармоничной функции сумма $\sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N}|f(\lambda)|^2$ не убывает при $N\to\infty$, поэтому
$$||f||^2 := \lim_{N\to\infty} \sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N} |f(\lambda)|^2.$$

Предложение 4.4. *Отображение*
$$v\mapsto f_v, \quad f_v(\lambda)=(v,\xi_\lambda)$$
является линейным сохраняющим норму изоморфизмом пространств V_{zw} K-инвариантных векторов представления T_{zw} и пространства $\mathcal{F}_{zw}$.

Доказательство. Пусть V^N — подпространство $K(N)$-инвариантных векторов в H^N. Отметим, что V^N не содержится в V_{zw}, но $P_N V_{zw} \subseteq V^N$ и $P_N V^{N+1} \subseteq V^N$, где P_N — ортопроектор из H на H^N. Векторы $\xi_\lambda,\ \lambda\in\mathbb{GT}_N$, образуют ортонормированный базис в V^N. Для двух векторов
$$v_N=\sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N} a(\lambda)\xi_\lambda \in V^N \quad \text{и} \quad v_{N+1}=\sum_{\nu\in\mathbb{GT}_{N+1}} b(\nu)\xi_\nu \in V^{N+1}$$
имеем
$$v_N=P_N v_{N+1} \Longleftrightarrow a(\lambda)=\sum_{\nu\succ\lambda} b(\nu)(\xi_\nu,\xi_\lambda)\ \ \forall\lambda\in\mathbb{GT}_N. \tag{6}$$

Заметим, что из этих соотношений следует, что

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N}|a(\lambda)|^2=||v_N||^2\le||v_{N+1}||^2=\sum_{\nu\in\mathbb{GT}_{N+1}}|b(\nu)|^2.$$

Предположим теперь, что $v\in V_{zw}$ и $v_N=P_Nv$ при $N=1,2,\ldots$. Тогда

$$f_v(\lambda)=(v,\xi_\lambda)=(v_N,\xi_\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{GT}_N.$$

Из (6) следует, что функция f_v удовлетворяет условию псевдогармоничности и

$$||f_v||^2:=\sup_N||v_N||^2=\lim_{N\to\infty}||v_N||^2=||v||^2<\infty,$$

следовательно $f_v\in\mathcal{F}_{zw}$. Значит, отображение $v\mapsto f_v$ является изометрическим вложением $V_{zw}\to\mathcal{F}_{zw}$.

Теперь докажем, что это отображение является сюръективным. Для произвольной функции $f\in\mathcal{F}_{zw}$ положим

$$v_N=\sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N}f(\lambda)\xi_\lambda,\quad N=1,2,\ldots.$$

Тогда $v_N\in V^N$, $v_N=P_Nv_{N+1}$ и

$$\lim_{n\to\infty}||v_N||^2=\sup_N||v_N||^2=||f||^2.$$

Поэтому векторы v_N сходятся к некоторому вектору $v\in H$. Для любого натурального M вектор v является $K(M)$-инвариантным, поскольку векторы v_N обладают этим свойством при всех $N\ge M$. Значит, $v\in V_{zw}$ и $f=f_v$. $\square$

Обозначим через $V_{pqrs}=V\cap H_{pqrs}$ пространство всех K-инвариантных векторов в блоке H_{pqrs} и через $\mathcal{F}_{pqrs}$ подпространство $\mathcal{F}_{kl}$ функций, носитель которых содержится в $\mathbb{GT}(p,q;r,s)$. Разложение

$$\mathcal{F}_{kl}=\bigoplus_{q-p=k,s-r=l,p\ge0,r\ge0}\mathcal{F}_{pqrs}$$

согласовано с разложением

$$V_{kl}=\bigoplus_{q-p=k,s-r=l,p\ge0,r\ge0}V_{pqrs}.$$

Так как выделенный вектор ξ_0 лежит в пространстве H^N при любом N и является K-инвариантным, то функция $a_{zw}(\lambda)=(\xi_0,\xi_\lambda)$ лежит в пространстве $\mathcal{F}_{zw}$. Для любых целых чисел k и l таких, что $k+l\ge0$, и сигнатуры $\lambda\in\mathbb{GT}(p,q;r,s)$, где $p+r\ge1$, $q-p=k$ и $s-r=l$, $a_{kl}(\lambda)=0$. При этом при фиксированной сигнатуре λ

$$a_{zw}(\lambda)=(z-k)^p(w-l)^r\tilde a_{zw}(\lambda),$$

где $\tilde{a}_{zw}(\lambda) \neq 0$. Таким образом, $a_{kl} \in \mathcal{F}_{0k0l}$.

Зафиксируем целые z и w, удовлетворяющие условию $z+w \geq 0$. Пусть p и r — неотрицательные числа, $q = z+p$, $s = w+r$ и $N \geq r+p$. Для сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}(p,q;r,s) \cap \mathbb{GT}(N)$ определим $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\lambda^1 &= (\lambda_1 - q, \ldots, \lambda_p - q, 0, \ldots, 0) \\
\lambda^2 &= (\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{N-r}) \\
\lambda^3 &= (-\lambda_N - s, \ldots, -\lambda_{N-r+1} - s, 0, \ldots, 0)
\end{aligned}$$

При этом λ^1 и λ^3 мы будем рассматривать как сигнатуры с $N+w+q$ и $N+z+s$ строками соответственно. Заметим, что если $\lambda \prec \nu$, то $\lambda^i \prec \nu^i$, $i = 1,2,3$, и для любых функций g_1, g_2 и g_3 выполнено равенство

$$\sum_{\nu \succ \lambda} g_1(\nu^1) g_2(\nu^2) g_3(\nu^3) = \left(\sum_{\nu^1 \succcurlyeq \lambda^1} g_1(\nu^1) \right) \left(\sum_{\nu^2 \succ \lambda^2} g_2(\nu^2) \right) \left(\sum_{\nu^3 \succcurlyeq \lambda^3} g_3(\nu^3) \right), \tag{7}$$

где $\nu \succcurlyeq \lambda$ означает, что $\nu \succ \lambda$ и ν имеет столько же ненулевых компонент, сколько и λ.

Теорема 4.5. *Пусть $q - p = z$, $s - r = w$, $p, r \geq 0$. Тогда в пространстве H_{pqrs} существует K-инвариантный вектор такой, что соответствующая ему функция $f_{pqrs}(\lambda) = f_{v_{pqrs}}(\lambda)$ в пространстве $\mathcal{F}_{pqrs}$ функций на $\mathbb{GT}(p,q;r,s)$ равна*

$$f(\lambda) = D_N f_1(\lambda^1) f_2(\lambda^2) f_3(\lambda^3),$$

где

$$\begin{aligned}
f_1(\lambda^1) &= B_{-p;N+w+q}(\lambda^1), \\
f_3(\lambda^3) &= B_{-r;N+z+s}(\lambda^3), \\
f_2(\lambda^2) &= a_{q,s;N-r-p}(\lambda^2),
\end{aligned}$$

$$B_{-p;N}(\lambda) := C_{-p,0;N} \frac{(-1)^{|\lambda|}(N-1)^{\downarrow p}(N-2)^{\downarrow p} \ldots (N-p)^{\downarrow p} \operatorname{Dim}_p \lambda}{(N+\lambda_1)^{\uparrow p}(N+\lambda_2-1)^{\uparrow p} \ldots (N+\lambda_p-p+1)^{\uparrow p}}$$

и D_N выбраны так, что

$$\begin{aligned}
\frac{D_N}{D_{N+1}} = &\frac{C_{z,w;N,N+1}}{C_{q,s;N-r-p,N-r-p+1} C_{-p,0;N+w+q,N+w+q+1} C_{-r,0;N+z+s,N+z+s+1}} \times \\
&\times \frac{1}{(N+w+q)^{\downarrow p}(N+z+s)^{\downarrow r}}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Пусть $\varphi_{pqrs}(g)$ — сферическая функция на группе G, соответствующая вектору v_{pqrs},

$$\varphi_{pqrs}(g) = \frac{(T_{zw}(g) v_{pqrs}, v_{pqrs})}{||v_{pqrs}||^2} = \frac{(T_{pqrs}(g) v_{pqrs}, v_{pqrs})}{||v_{pqrs}||^2},$$

и σ_{pqrs} — спектральная мера на Ω, соответствующая функции φ_{pqrs}.

Тогда носителем меры σ_{pqrs} является множество $\Omega(p,q;r,s)$, и эта мера имеет плотность

$$\frac{V^2(\{\alpha_i^+\})V^2(\{\alpha_k^-\})V^2(\{\beta_j^+\})V^2(\{\beta_l^-\})\prod(1-\beta_j^+-\beta_l^-)^2}{\prod(1+\alpha_i^+)^{2p}\prod(1+\alpha_k^-)^{2r}}$$

относительно меры Лебега на $\Omega(p,q;r,s)$. Здесь и далее, если не оговорено противное, индексы i, j, k и l меняются в следующих пределах:

$$1\le i\le p,\quad 1\le j\le q,\quad 1\le k\le r,\quad 1\le l\le s$$

в случае неотрицательных q и s и в пределах:

$$1\le i\le p,\quad 1\le j\le q,\quad 1\le k\le r,\quad -q+1\le l\le s$$

в случае отрицательного q (случай отрицательного s рассматривается аналогично), а $V(x)$ для конечного набора чисел $x=x_1,\dots,x_n$ обозначает определитель Вандермонда:

$$V(x)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j).$$

Замечание 4.6. Так как для любых z и w, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} z+\operatorname{Re} w>-1/2$, $a_{zw}(\lambda)=a_{(z+k)(w-k)}(\lambda+(k,\dots,k))$, то

$$f_{pqrs}(\lambda)=f_{p(q+k)r(s-k)}(\lambda+(k,\dots,k)).$$

Прежде чем доказывать теорему, докажем сначала несколько лемм. Обозначим через $\mathbb{GT}_N(p)\subset\mathbb{GT}_N$ множество таких сигнатур $\lambda\in\mathbb{GT}_N$, что $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\ldots\ge\lambda_p\ge 0$, $\lambda_{p+1}=\ldots=\lambda_N=0$.

Лемма 4.7. *Функция $a_{-p,0;N}=\frac{\prod_\lambda(-p-c(b))}{\prod_\lambda(N+c(b))}\cdot\operatorname{Dim}_N\lambda\cdot C_{-p,0;N}$ удовлетворяет условию*

$$\frac{a_{-p,0;N}(\lambda)}{C_{-p,0;N,N+1}}=\sum_{\nu\succ\lambda}a_{-p,0;N}(\nu)\prod_{\nu\setminus\lambda}(-p-c_\nu(b))\frac{\prod_\lambda(N+c_\lambda(b))}{\prod_\nu(N+1+c_\nu(b))},\qquad(9)$$

где $N\ge 2p$, $\lambda\in\mathbb{GT}_N(p)$, $\nu\in\mathbb{GT}_{N+1}(p)$ и

$$C_{-p,0;N}=\left(\frac{(2p-1)!(2p-2)!\dots p!}{(N-p)^{\downarrow p}(N-p+1)^{\downarrow p}\dots(N-1)^{\downarrow p}(p-1)!(p-2)!\dots 0!}\right)^{1/2},$$

а запись $\prod_\lambda$ здесь и далее обозначает произведение по всем клеткам $b\in\lambda$. Содержание $c_\lambda(b)$ клетки $b=(i,j)$ определяется как $j-i$.

Замечание 4.8. Функция $a_{z,w;N}$ была определена в лемме 2.9 только при $\operatorname{Re} z+\operatorname{Re} w>-\frac{1}{2}$. Однако, переходя к пределу при $z\to -p$ и $w=0$ в выражении (1), мы получаем функцию $a_{-p,0;N}$, определенную выше, и поэтому сохраняем для нее обозначение $a_{z,w;N}$.

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned}a_{-p,0;N}(\lambda) &= \frac{\prod_\lambda(-p-c(b))}{\prod_\lambda(N+c(b))}\cdot \mathrm{Dim}_N\lambda\cdot C_{-p,0;N} = \\ &= (-1)^{|\lambda|}\cdot\frac{\prod_\lambda(p+c(b))}{\prod_\lambda(N+c(b))}\cdot\frac{\prod_\lambda(N+c(b))}{\prod_\lambda h(b)}\cdot C_{-p,0;N} = \\ &= (-1)^{|\lambda|}\cdot\frac{\prod_\lambda(p+c(b))}{\prod_\lambda h(b)}\cdot C_{-p,0;N} = (-1)^{|\lambda|}C_{-p.0;N}\mathrm{Dim}_p\lambda, \qquad (10)\end{aligned}$$

где $h(b)$ — длина крюка клетки b, т.е. $h(b)=\lambda_i+\lambda'_j-i-j+1$, где $b=(i,j)$, а λ' — транспонированная к λ диаграмма Юнга. Значит, условие (9) переписывается в виде:

$$(-1)^{|\lambda|}\mathrm{Dim}_p\lambda = \sum_{\nu\succcurlyeq\lambda}(-1)^{|\nu|}\mathrm{Dim}_p\nu\prod_{\nu\setminus\lambda}(-p-c(b))\frac{\prod_\lambda(N+c(b))}{\prod_\nu(N+1+c(b))}C^2_{-p,0;N,N+1} \qquad (11)$$

При этом $C^2_{-p,0;N,N+1}=\frac{(N-p)\ldots(N-2p+1)}{N\ldots(N-p+1)}$. Для доказательства формулы (11) мы воспользуемся теоремой Густафсона (см. [3, Theorem 1.11]).

Теорема 4.9. *Пусть $K=1,2,\ldots$, $\varkappa=(\varkappa_j)$ пробегает $\mathbb{Z}^K$, $\alpha=(\alpha_r)\in\mathbb{C}^{K+1}$, $\beta=(\beta_r)\in\mathbb{C}^{K+1}$, $\varepsilon=(\varepsilon_j)\in\mathbb{C}^K$ и выполнены следующие условия:*

(i) $Re(\sum\beta_r-\sum\alpha_r)>K$,

(ii) числа ε_j, где $j=1,\ldots,K$, попарно различны,

(iii) числа $\alpha_r+\varepsilon_j$ и $1-\beta_r-\varepsilon_j$ не являются целыми положительными ни для каких r и j.

Тогда

$$\begin{aligned}&\sum_{\varkappa\in\mathbb{Z}^K}\prod_{1\le i<j\le K}\left(\frac{(\varkappa_i+\varepsilon_i)-(\varkappa_j+\varepsilon_j)}{\varepsilon_i-\varepsilon_j}\right)\prod_{r=1}^{K+1}\prod_{j=1}^{K}\frac{(\alpha_r+\varepsilon_j)^{\uparrow\varkappa_j}}{(\beta_r+\varepsilon_j)^{\uparrow\varkappa_j}}\\ &=\frac{\Gamma(-K+\sum_{r=1}^{K+1}(\beta_r-\alpha_r))\prod_{r=1}^{K+1}\prod_{j=1}^{K}\Gamma(1-\alpha_r-\varepsilon_j)\Gamma(\beta_r+\varepsilon_j)}{\prod_{r,s=1}^{K+1}\Gamma(\beta_r-\alpha_s)\prod_{1\le i<j\le K}\Gamma(1-\varepsilon_i+\varepsilon_j)\Gamma(1+\varepsilon_i-\varepsilon_j)}\end{aligned} \qquad (12)$$

Выберем следующую специализацию параметров формулы (12):

$$\begin{gathered}K=p,\quad \varkappa_j=\nu_j-\lambda_j,\quad \varepsilon_j=\lambda_j-j\theta,\quad j=1,\ldots,p\\ \alpha_r=-\lambda_r+(r+1)\theta,\quad \beta_r=-\lambda_r+r\theta+1,\quad r=1,\ldots,p\\ \alpha_{p+1}=p+1,\quad \beta_{p+1}=N+2\end{gathered} \qquad (13)$$

Проверим условия теоремы Густафсона. Условие (i) записывается в виде $\mathrm{Re}(p(1-\theta))+N-p+1>p$, а это верно при $\mathrm{Re}\,\theta<1$. Условие (ii) очевидно выполнено. Проверим теперь третье условие.

$$\alpha_r+\varepsilon_j=-\lambda_r+\lambda_j+(r+1)\theta-j\theta$$

Это выражение принимает целое значение при всех θ только при $j = r+1$, но тогда

$$\alpha_r + \varepsilon_{r+1} = \lambda_{r+1} - \lambda_r \leq 0$$

Также это выражение является целым при некоторых r и j при конечном числе значений θ, но нас интересует предел при $\theta \to 1$, поэтому это не представляет проблем. Далее,

$$1 - (\beta_r + \varepsilon_{r+1}) = 1 - (1 + r\theta - \lambda_r + \lambda_j - j\theta) = \lambda_r - \lambda_j + j\theta - r\theta$$

Это выражение принимает целое значение при всех θ только при $j = r$, но тогда оно равно 0. Также снова приходится исключить конечное число значений θ. Таким образом, все условия выполнены при $\operatorname{Re}\theta < 1$ за исключением конечного числа значений θ.

Так как $\alpha_r + \varepsilon_{r+1} = \lambda_{r+1} - \lambda_r$ является целым неположительным числом, то $(\alpha_r + \varepsilon_{r+1})_{\varkappa_{r+1}} = 0$ при $\varkappa_{r+1} > \lambda_r - \lambda_{r+1}$, т.е. при $\nu_{r+1} > \lambda_r$. Далее, так как $\beta_r + \varepsilon_r = 1$, то $\frac{1}{(\beta_r+\varepsilon_r)_{\varkappa_r}} = 0$ при $\varkappa_r < 0$, т.е. при $\nu_r < \lambda_r$.

Таким образом, суммирование в формуле Густафсона с параметрами (13) будет происходить по сигнатурам $\nu \succcurlyeq \lambda$, имеющим не более p ненулевых компонент. Так как $1 - \varepsilon_j = 1 - \lambda_j + j\theta = \beta_j$, то

$$\frac{\prod_{r=1}^{K}\prod_{j=1}^{K}\Gamma(1-\alpha_r-\varepsilon_j)\Gamma(\beta_r+\varepsilon_j)}{\prod_{r,s=1}^{K}\Gamma(\beta_r-\alpha_s)\prod_{1\leq i<j\leq K}\Gamma(1-\varepsilon_i+\varepsilon_j)\Gamma(1+\varepsilon_i-\varepsilon_j)} =$$
$$= \frac{\prod_{r=1}^{K}\prod_{j=1}^{K}\Gamma(\beta_j-\alpha_r)\Gamma(1+\varepsilon_j-\varepsilon_r)}{\prod_{r,s=1}^{K}\Gamma(\beta_r-\alpha_s)\prod_{i,j=1,\, i\neq j}^{K}\Gamma(1-\varepsilon_i+\varepsilon_j)} = \prod_{i=j=1}^{K}\Gamma(1-\varepsilon_i+\varepsilon_j) = 1$$

и

$$\frac{\prod_{j=1}^{K}\Gamma(1-\alpha_{K+1}-\varepsilon_j)}{\prod_{r=1}^{K}\Gamma(\beta_r-\alpha_{K+1})} = 1.$$

Таким образом, при данной специализации формула (12) переписывается в виде

$$\sum_{\nu\succ\lambda}\prod_{1\leq i<j\leq p}\frac{\nu_i-\nu_j+(j-i)\theta}{\lambda_i-\lambda_j+(j-i)\theta}\prod_{r=1}^{p}\prod_{j=1}^{p}\frac{(\lambda_j-\lambda_r+(r+1-j)\theta)^{\uparrow(\nu_j-\lambda_j)}}{(\lambda_j-\lambda_r+(r-j)\theta+1)^{\uparrow(\nu_j-\lambda_j)}}\times$$
$$\prod_{j=1}^{p}\frac{(p+1+\lambda_j-j\theta)^{\uparrow(\nu_j-\lambda_j)}}{(N+2+\lambda_j-j\theta)^{\uparrow(\nu_j-\lambda_j)}} = \frac{\Gamma(N-2p+1+p(1-\theta))\Gamma(N+2+\lambda_j-j\theta)}{\Gamma(N+2+\lambda_j-j\theta)\Gamma(N-p+1)}$$

Так как, очевидно, ряд в левой части сходится равномерно по θ на отрезке $[\frac{1}{2}; 1]$, то можно перейти к пределу при $\theta \to 1$. Нетрудно заметить, что мы получаем при этом нужную нам формулу. $\square$

Так как равенство (11) верно для любого N, то можно подставить $N+p$

вместо N. Воспользовавшись тем, что

$$\frac{\prod_\lambda (N+p+c(b))}{\prod_\nu (N+p+1+c_(b))} C^2_{-p,0;N+p,N+p+1} =$$
$$= \frac{\frac{(N+\lambda_1)^{\uparrow p}(N+\lambda_2-1)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+1)^{\uparrow p}\prod_\lambda(N+c(b))}{(N+p-1)^{\downarrow p}(N+p-2)^{\downarrow p}\dots N^{\downarrow p}}}{\frac{(N+1+\nu_1)^{\uparrow p}(N+\nu_2)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+2)^{\uparrow p}\prod_\nu(N+1+c(b))}{(N+p)^{\downarrow p}(N+p-1)^{\downarrow p}\dots(N+1)^{\downarrow p}}} \cdot C^2_{-p,0;N+p,N+p+1} =$$
$$= \frac{(N+\lambda_1)^{\uparrow p}(N+\lambda_2-1)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+1)^{\uparrow p}\prod_\nu(N+1+c(b))}{(N+1+\nu_1)^{\uparrow p}(N+\nu_2)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+2)^{\uparrow p}\prod_\nu(N+1+c(b))},$$

получаем, что

$$\frac{(-1)^{|\lambda|}\mathrm{Dim}_p\lambda}{(N+\lambda_1)^{\uparrow p}(N+\lambda_2-1)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+1)^{\uparrow p}} =$$
$$= \sum_{\nu\succcurlyeq\lambda} \frac{(-1)^{|\nu|}\mathrm{Dim}_p\nu\prod_{\nu\setminus\lambda}(-p-c(b))}{(N+1+\nu_1)^{\uparrow p}(N+\nu_2)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+2)^{\uparrow p}} \frac{\prod_\lambda(N+c(b))}{\prod_\nu(N+1+c(b))}.$$

Так как,

$$C^2_{-p,0;N,N+1}\frac{N^{\downarrow p}(N-1)^{\downarrow p}\dots(N-p+1)^{\downarrow p}}{(N-1)^{\downarrow p}(N-2)^{\downarrow p}\dots(N-p)^{\downarrow p}} = 1,$$

то

$$C_{-p,0;N}\frac{(-1)^{|\lambda|}(N-1)^{\downarrow p}(N-2)^{\downarrow p}\dots(N-p)^{\downarrow p}\mathrm{Dim}_p\lambda}{(N+\lambda_1)^{\uparrow p}(N+\lambda_2-1)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+1)^{\uparrow p}} =$$
$$= \sum_{\nu\succcurlyeq\lambda} C_{-p,0;N+1}\frac{(-1)^{|\nu|}N^{\downarrow p}(N-1)^{\downarrow p}\dots(N-p+1)^{\downarrow p}\mathrm{Dim}_p\nu}{(N+1+\nu_1)^{\uparrow p}(N+\nu_2)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+2)^{\uparrow p}} \times$$
$$\times \prod_{\nu\setminus\lambda}(-p-c(b))\frac{\prod_\lambda(N+c(b))}{\prod_\nu(N+1+c_(b))} C^2_{-p,0;N,N+1}.$$

Таким образом, доказана следующая

Лемма 4.10. *Функция*

$$B_{-p;N}(\lambda) := C_{-p,0;N}\frac{(-1)^{|\lambda|}(N-1)^{\downarrow p}(N-2)^{\downarrow p}\dots(N-p)^{\downarrow p}\,\mathrm{Dim}_p\,\lambda}{(N+\lambda_1)^{\uparrow p}(N+\lambda_2-1)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+1)^{\uparrow p}}$$

удовлетворяет соотношению

$$\frac{B_{-p;N}(\lambda)}{C_{-p,0;N,N+1}} = \sum_{\nu\succcurlyeq\lambda} B_{-p;N+1}(\nu)\prod_{\nu\setminus\lambda}(-p-c_\nu(b))\frac{\prod_\lambda(N+c_\lambda(b))}{\prod_\nu(N+1+c_\nu(b))}. \qquad (14)$$

Лемма 4.11.

$$\sup_N \sum_{\lambda\in\mathbb{GT}(p;N)} |B_{-p;N}(\lambda)|^2 < \infty$$

Доказательство. Оценим $|B_{-p;N}(\lambda)|^2$:

$$|B_{-p;N}(\lambda)|^2 = \mathrm{const}\frac{\prod\limits_{1\le i<j\le p}(\lambda_i-\lambda_j+j-i)^2(N-1)^{\downarrow p}(N-2)^{\downarrow p}\dots(N-p)^{\downarrow p}}{\left((N+\lambda_1)^{\uparrow p}(N+\lambda_2-1)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+1)^{\uparrow p}\right)^2}$$
$$\le \mathrm{const}\frac{\lambda_1^{2(p-1)}\cdot\lambda_2^{2(p-2)}\cdot\ldots\cdot\lambda_p^0\cdot N^{p^2}}{(N+\lambda_1)^{2p}(N+\lambda_2)^{2p-2}\dots(N+\lambda_p)^2(N+\lambda_2)^2\dots(N+\lambda_p)^{2p-2}},$$

где const зависит только от p. Пользуясь тем, что

$$\sum_{\lambda_i=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^{2p-2i}}{(N+\lambda_i)^{2p-2i+2}}\le\frac{1}{N},$$

получаем, что

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{GT}(p;N)}|B_{-p;N}(\lambda)|^2\le\mathrm{const}\frac{N^{p^2}}{N^pN^{2+4+\ldots+(2p-2)}}=\mathrm{const}$$

□

Лемма 4.12. *Существует предел D_N при $n\to\infty$.*

Доказательство.

$$\frac{D_{N+1}^2}{D_N^2}=\frac{(N+2z+2w)!(N+w+q-p)^{\downarrow p}(N+z+s-r)^{\downarrow r}}{(N+z+w)!^4N!(N+w+q)^{\downarrow p}(N+z+s)^{\downarrow r}}\times$$
$$\frac{\left((N+w+q)^{\downarrow p}(N+z+s)^{\downarrow r}\right)^2(N-r-p)!(N-r-p+q+s)!}{(N-r-p+2q+2s)!}=$$
$$=\frac{(N+2z+2w)!(N-r-p)!(N+w+q)^{\downarrow 2p}(N+z+s)^{\downarrow 2r}}{N!(N-r-p+2q+2s)!}=$$
$$=\frac{(N+w+q)^{\downarrow 2p}(N+z+s)^{\downarrow 2r}}{N^{\downarrow(p+r)}(N-r-p+2q+2s)^{\downarrow(p+r)}}=\frac{N^M+AN^{M-1}+\ldots}{N^M+BN^{M-1}+\ldots},$$

где

$$A=p(2w+2q-2p+1)+r(2z+2s-2r+1)=(p+r)(2z+2w+1),$$
$$B=\frac{(p+r)(4z+4w+p+r+1)}{2}+\frac{(p+r)(-r-p+1)}{2}=A.$$

Таким образом, $B=A$, а значит

$$\frac{D_{N+1}}{D_N}=1+O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

поэтому сходится бесконечное произведение

$$\frac{D_2}{D_1}\cdot\frac{D_3}{D_2}\cdot\ldots,$$

откуда и следует сходимость D_N. □

Лемма 4.13. *Функция f_{pqrs}, определенная ранее, удовлетворяет условию псевдогармоничности (5) с параметрами $z = q - p$, $w = s - r$.*

Доказательство. Пусть λ, $\nu \in \mathbb{GT}(p, q; r, s)$. Тогда

$$\prod_{i=1}^{p} \frac{\Gamma(z - \lambda_i + i)\Gamma(w + N + 1 + \lambda_i - i)}{\Gamma(z - \nu_i + i)\Gamma(w + N + 2 + \nu_i - i)} = \prod_{i=1}^{p} \frac{(z - \lambda_i + i - 1)^{\downarrow(\nu_i - \lambda_i)}}{(w + N + 1 + \nu_i - i)^{\downarrow(\nu_i - \lambda_i + 1)}} =$$

$$= \prod_{\nu^1 \setminus \lambda^1} (-p - c(b)) \frac{\prod_{\lambda^1}(N + w + q + c(b))}{\prod_{\nu^1}(N + 1 + w + q + c(b))(N + w + q)^{\downarrow p}}.$$

Аналогично,

$$\frac{\prod\limits_{i=N-r+1}^{N} \Gamma(z - \lambda_i + i)\Gamma(w + N + 1 + \lambda_i - i)}{\prod\limits_{i=N-r+2}^{N+1} \Gamma(z - \nu_i + i)\Gamma(w + N + 2 + \nu_i - i)} =$$

$$= \prod_{\nu^3 \setminus \lambda^3} (-r - c(b)) \frac{\prod_{\lambda^3}(N + z + s + c(b))}{\prod_{\nu^3}(N + 1 + z + s + c(b))(N + z + s)^{\downarrow r}}.$$

Далее,

$$\frac{\prod\limits_{i=p+1}^{N-r} \Gamma(z - \lambda_i + i)\Gamma(w + N + 1 + \lambda_i - i)}{\prod\limits_{i=p+1}^{N-r+1} \Gamma(z - \nu_i + i)\Gamma(w + N + 2 + \nu_i - i)} =$$

$$\frac{\prod\limits_{i=p+1}^{N-r} \Gamma(z + p - \lambda_i^2 + i)\Gamma(w + r + N + 1 + \lambda_i^2 - i)}{\prod\limits_{i=p+1}^{N-r+1} \Gamma(z + p - \nu_i^2 + i)\Gamma(w + r + N + 2 + \nu_i^2 - i)} = \frac{(\xi_{\nu^2}, \xi_{\lambda^2})_{q,s}}{C_{q,s;N-r-p,N-r-p+1}},$$

где $(\xi_{\nu^2}, \xi_{\lambda^2})_{q,s}$ означает скалярное произведение векторов ξ_{ν^2} и ξ_{λ^2}, рассматриваемых, как векторы представления T_{qs}. Значит, пользуясь этими равенствами и равенством (7), получаем, что

$$\sum_{\nu \succ \lambda} f(\nu)(\xi_\nu, \xi_\lambda) = \frac{D_{N+1} C_{z,w;N,N+1}}{C_{q,s;N-r-p,N-r-p+1}} \sum_{\nu^2 \succ \lambda^2} f_2(\nu^2)(\xi_{\nu^2}, \xi_{\lambda^2})_{q,s} \times$$

$$\times \frac{1}{(N + w + q)^{\downarrow p}} \sum_{\nu^1 \succcurlyeq \lambda^1} f_1(\nu^1) \prod_{\nu^1 \setminus \lambda^1} (-p - c_{\nu^1}(b)) \frac{\prod_{\lambda^1}(N + w + q + c_{\lambda^1}(b))}{\prod_{\nu^1}(N + 1 + q + w + c_{\nu^1}(b))} \times$$

$$\times \frac{1}{(N + z + s)^{\downarrow r}} \sum_{\nu^3 \succcurlyeq \lambda^3} f_3(\nu^3) \prod_{\nu^3 \setminus \lambda^3} (-r - c_{\nu^3}(b)) \frac{\prod_{\lambda^3}(N + s + z + c_{\lambda^3}(b))}{\prod\limits_{\nu^3}(N + 1 + s + z + c_{\nu^3(b)})} = *$$

Используя лемму 4.10, а также псевдогармоничность функции $a_{q,s;N}(\lambda)$, получаем, что

$$* = \frac{D_{N+1}C_{z,w;N,N+1}f_1(\lambda^1)f_2(\lambda^2)f_3(\lambda^3)}{C_{-p,0;N+w+q,N+w+q+1}C_{q,s;N-r-p,N-r-p+1}C_{-r,0;N+z+s,N+z+s+1}}\times$$
$$\times\frac{1}{(N+w+q)^{\downarrow p}(N+z+s)^{\downarrow r}} = D_N f_1(\lambda^1)f_2(\lambda^2)f_3(\lambda^3) = f_{pqrs}(\lambda).$$

□

Лемма 4.14. *Функция f_{pqrs}, определенная ранее, удовлетворяет условию типа Харди. Таким образом, $f_{pqrs} \in \mathcal{F}_{pqrs}$.*

Доказательство.

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{GT}(N)} |f_{pqrs}(\lambda)|^2 = D_N^2 \left(\sum |f_1(\lambda^1)|^2\right)\left(\sum |f_3(\lambda^3)|^2\right)\left(\sum |f_2(\lambda^2)|^2\right),$$

где суммы берутся по $\lambda^1 \in \mathbb{GT}(p; N+w+q)$, $\lambda^3 \in \mathbb{GT}(r; N+z+s)$ и $\lambda^2 \in \mathbb{GT}_{N-r-p}(0,q;0,s)$ соответственно. При этом коэффициент D_N имеет предел, первые две суммы ограничены по лемме 4.11, а третья ограничена, так как функция $a_{q,s;N-r-p}(\lambda) \in \mathcal{F}_{0q0s}$, а значит, удовлетворяет условию типа Харди. Таким образом, сумма $\sum_{\lambda\in\mathbb{GT}(N)} |f_{pqrs}(\lambda)|^2$ ограничена, что и требовалось доказать. □

Первая часть теоремы 4.5 доказана. Докажем теперь вторую часть. Для этого сравним два семейства вероятностных мер на $\mathbb{GT}_N$. Первое семейство является когерентной системой мер, соответствующей спектральной функции φ_{pqrs}, определенной в теореме 4.5:

$$M_{pqrs}^{(N)}(\lambda) = \frac{||Q_\lambda v_{pqrs}||^2}{||v_{pqrs}||^2}, \quad \lambda \in \mathbb{GT}_N.$$

По теореме 1.5 спектральная мера σ_{pqrs} является слабым пределом мер $\bar{\iota}_N(M_{pqrs}^{(N)})$.

Второе семейство мер имеет вид

$$\overline{M}_{pqrs}^{(N)}(\lambda) = \frac{||Q_\lambda v_{pqrs}^{(N)}||^2}{||v_{pqrs}^{(N)}||^2} = \frac{|f_{pqrs}(\lambda)|^2}{||v_{pqrs}^{(N)}||^2}, \quad \lambda \in \mathbb{GT}_N,$$

где $v_{pqrs}^{(N)} = P_N v_{pqrs}$ — проекция вектора v_{pqrs} на H^N. Носителем меры $\overline{M}_{pqrs}^{(N)}$ является множество $\mathbb{GT}_N(p.q;r,s)$.

Лемма 4.15.

$$||M_{pqrs}^{(N)} - \overline{M}_{pqrs}^{(N)}|| \to 0, \quad n \to \infty,$$

где $||\mu||$ — полная вариация меры μ.

Доказательство. Для упрощения обозначений положим

$$\xi_1 = ||v_{pqrs}||^{-1} v_{pqrs}, \quad \xi_2 = ||v_{pqrs}^{(N)}||^{-1} v_{pqrs}^{(N)}$$

и для произвольного подмножества $V \subset \mathbb{GT}_N$ положим

$$Q_X = \sum_{\lambda \in X} Q_\lambda.$$

Так как операторы Q_λ при $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ попарно ортогональны и сумма по всем $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ равна 1, то $||Q_X|| \leq 1$ для любого X. Для любых двух вероятностных мер μ_1, μ_2 на одном борелевском пространстве выполнено

$$||\mu_1 - \mu_2|| \leq 2 \sup_X |\mu_1(X) - \mu_2(X)|,$$

где супремум берется по произвольным борелевским подмножествам. Применяя это неравенство к мерам $\mu_1 = M_{pqrs}^{(N)}$ и $\mu_2 = \overline{M}_{pqrs}^{(N)}$, получаем, что

$$||M_{pqrs}^{(N)} - \overline{M}_{pqrs}^{(N)}|| \leq 2 \sup_{X \subset \mathbb{GT}_N} |(Q_X \xi_1, \xi_1) - (Q_X \xi_2, \xi_2)| \leq 4 ||\xi_1 - \xi_2|| \to 0$$

□

Для любой сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}(p, q; r, s)$ положим

$$\begin{gathered}
a_1^+ = \lambda_1^1, \ldots, a_p^+ = \lambda_p^1; \quad a_1^- = \lambda_1^3, \ldots, a_r^- = \lambda_r^3; \\
b_1^+ = (\lambda^{2+})_1', \ldots, b_q^+ = (\lambda^{2+})_q'; \\
b_1^- = (\lambda^{2-})_1', \ldots, b_s^- = (\lambda^{2-})_s'; \\
\alpha_i^\pm = \frac{a_i^\pm}{N}; \quad \beta_i^\pm = \frac{b_i^\pm}{N}; \\
\imath_N(\lambda) = (\alpha_1^+, \ldots, \alpha_p^+; \beta_1^+, \ldots, \beta_q^+; \alpha_1^-, \ldots, \alpha_r^-; \beta_1^-, \ldots, \beta_s^-).
\end{gathered}$$

Мы будем отождествлять $\imath_N(\lambda)$ с точкой множества $\Omega(p, q; r, s)$, определенного в разделе 1.

Лемма 4.16. *Меры $\imath_N(\overline{M}_{pqrs}^{(N)})$ на $\Omega(p, q; r, s)$ слабо сходятся к вероятностной мере, которая абсолютно непрерывна относительна меры Лебега и имеет плотность, как в формулировке теоремы 4.5.*

Доказательство. Заметим, что меры $\imath_N(\overline{M}_{pqrs}^{(N)})$ равномерно плотны, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт K, что $\imath_N(\overline{M}_{pqrs}^{(N)})(K) < \varepsilon$ для достаточно большого N. Доказательство этого факта мы опускаем, поскольку оно аналогично доказательству леммы 5.5, приведенному в разделе 6.

Далее, нетрудно видеть, что

$$B^2_{-p;N+w+q}(\lambda^1) = \mathrm{const}\frac{V^2(\{\alpha_i^+\})}{\prod(1+\alpha_i^+)^{2p}}(1+O(\frac{1}{N}))N^{-p}$$

$$B^2_{-r;N+z+s}(\lambda^3) = \mathrm{const}\frac{V^2(\{\alpha_k^-\})}{\prod(1+\alpha_k^-)^{2r}}(1+O(\frac{1}{N}))N^{-r}$$

$$a^2_{q,s;N-r-p}(\lambda^2) = \mathrm{const}\, V^2(\beta_j^+)V^2(\beta_l^-)\prod(1-\beta_j^+-\beta_l^-)^2(1+O(\frac{1}{N}))N^{-(q+s)}$$

Здесь $O(1/N)$ равномерно по λ, где $\imath_N(\lambda) \in K$. Перемножая эти выражения и учитывая то, что D_N имеет предел, размерность $\Omega(p,q;r,s)$ равна $p+q+r+s$ и равномерную плотность мер $\imath_N(\overline{M}^{(N)}_{pqrs})$, получаем требуемое утверждение. $\square$

Лемма 4.17. *Меры $\bar\imath_N(\overline{M}^{(N)}_{pqrs})$ сходятся к той же предельной мере.*

Доказательство. Сравним два отображения:

$$\bar\imath_N\colon \mathbb{GT}(p,q;r,s) \to \Omega \quad \text{и} \quad \imath_N\colon \mathbb{GT}(p,q;r,s) \to \Omega(p,q;r,s) \subset \Omega.$$

Из их определений следует, что

$$\alpha_i^\pm = \beta_i^\pm = \bar\alpha_i^\pm = \bar\beta_i^\pm = 0$$

для $i > \max(p,q,r,s)$ и

$$|\alpha_i^\pm - \bar\alpha_i^\pm| \le \frac{\mathrm{const}}{N}, \quad |\beta_i^\pm - \bar\beta_i^\pm| \le \frac{\mathrm{const}}{N},$$

где const не зависит от λ. Из этих оценок и следует утверждение леммы. $\square$

5 Цикличность вектора v_{pqrs}

Зафиксируем p, q, r и s такие, что $q-p=z$, $s-r=w$. В этом разделе мы докажем следующую теорему:

Теорема 5.1. *Вектор v_{pqrs}, построенный ранее, является циклическим вектором представления T_{pqrs}.*

Так как $z+w \ge 0$, то только одно из чисел q или s может быть отрицательным. В дальнейшем мы будем считать, что они оба неотрицательны. Случаи отрицательных q или s рассматривается аналогично.

Обозначим через $\mathcal{A}^+_{pqrs}$ подмножество неотрицательных эрмитовых операторов в $\mathcal{A}_{pqrs}$, где $\mathcal{A}_{pqrs}$ — коммутант представления T_{pqrs}. Образ этого подмножества при изоморфизме $\mathcal{A}_{pqrs} \to \widetilde{\mathcal{A}}_{pqrs}$ содержится в множестве $\widetilde{\mathcal{A}}^+_{pqrs} \subset \widetilde{\mathcal{A}}_{pqrs}$ функций с неотрицательными значениями, где $\widetilde{\mathcal{A}}_{pqrs} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$ — множество функций из $\widetilde{\mathcal{A}}$ (т.е. удовлетворяющих условию (3)), равных нулю вне множества $\mathbb{GT}(p,q;r,s)$. Обозначим через $\lambda_{\min}$ сигнатуру длины $p+r$, у который первые p компонент равны q, а последние r равны $-s$.

Лемма 5.2. *Пусть* $A \in \widetilde{\mathcal{A}}^+_{pqrs}$ *и* $A(\lambda_{\min}) = 0$. *Тогда* $A \equiv 0$.

Доказательство. Заметим, что из соотношения

$$A(\lambda) = \sum_{\nu \succ \lambda} A(\nu) p_{zw}(\lambda, \nu)$$

и неотрицательности $A(\cdot)$ и $p_{zw}(\cdot,\cdot)$ следует, что если $A(\lambda) = 0$, то $A(\nu) = 0$ для всех $\nu \succ \lambda$. Значит, в этом случае $A(\nu) = 0$ для всех ν, для которых существует пусть из λ в ν. Но все вершины из $\mathbb{GT}_{2(p+r)}(p,q;r,s)$ обладают этим свойством. Таким образом, $A(\nu) = 0$ для всех $\nu \in \mathbb{GT}_{2(p+r)}(p,q;r,s)$. Пользуясь снова основным соотношением для функции A, получаем требуемое утверждение. □

Определим функцию $\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)$ на графе $\mathbb{GT}(p,q;r,s)$ рекуррентным соотношением

$$\mathfrak{M}_{pqrs}(\nu) = \sum_{\lambda : \lambda \prec \nu} \mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda) p_{zw}(p,q;r,s)$$

с начальным условием

$$\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda_{\min}) = 1.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}^{(N)}_{pqrs}$ меру на $\mathbb{GT}_N(p,q;r,s)$ с весом $\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)$ в вершине $\lambda \in \mathbb{GT}_N(p,q;r,s)$. Так как

$$\sum_{\nu \succ \lambda} p_{zw}(\lambda, \nu) = 1,$$

то все $\mathfrak{M}^{(N)}_{pqrs}(\lambda)$ являются вероятностными мерами.

Далее вплоть до леммы 5.10 мы предполагаем, что q и s неотрицательны.

Лемма 5.3. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{GT}(p,q;r,s)$. *Тогда*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dim}_N \lambda = \frac{\prod (a_i^+ + N - r + q + s - i)! \prod (a_k^- + N - p + q + s - k)!}{\prod (a_i^+ + p - i)! \prod (a_k^- + r - k)! \prod (b_j^+ + q - j)! \prod (b_l^- + s - l)!} \times \\
\times \frac{V(\{a_i^+ - i\}) V(\{a_k^- - k\}) \prod (a_i^+ + a_k^- + N + q + s - k - i + 1)}{\prod (a_i^+ + b_j^+ + p - i + q - j + 1) \prod (a_i^+ - b_l^- + N + q - r + l - i)} \times \\
\times \frac{V(\{b_j^+ - j\}) V(\{b_l^- - l\}) \prod (N - r - p - 1 - b_j^+ - b_l^- + l + j)}{\prod (a_k^- + b_l^- + r - k + s - l + 1) \prod (a_k^- - b_j^+ + N + s - p + j - k)} \times \\
\frac{1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot (N - r - p + q + s - 1)!}{\prod (N - r - p - b_l^- + q + l - 1)! \prod (N - r - p - b_j^+ + s + j - 1)! 1! \ldots (N-1)!}
\end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим правую часть этой формулы через $\widetilde{\mathrm{Dim}}_N \lambda$. Докажем формулу индукцией по $p + r$. Сначала проверим справедливость индукционного перехода. Пусть $p + r \geq 1$. Без ограничения общности можно считать, что $p \geq 1$. Воспользуемся формулой Вейля для размерности:

$$\mathrm{Dim}_N \lambda = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} = \prod_{2 \leq j \leq N} \frac{\lambda_1 - \lambda_j + j - 1}{j - 1} \mathrm{Dim}_{N-1} \widetilde{\lambda},$$

где $\widetilde{\lambda}$ обозначает сигнатуру $\lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \lambda_N$, получаемую из λ отбрасыванием первой строки. Значит,

$$\frac{(N-1)!\,\mathrm{Dim}_N\,\lambda}{\mathrm{Dim}_{N-1}\,\widetilde{\lambda}} = \prod_{2\leq j\leq N} \frac{\lambda_1-\lambda_j+j-1}{j-1} = \prod_{j=2}^{p}(q+a_1^+-q-a_j+j-1)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{q}(a_1^++p+j-1+b_{q-j+2}^+)^{\uparrow(b_{q-j+1}^+-b_{q-j+2}^+)}\times(a_1^++b_1^++p+q)^{\uparrow F}\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{s}(q+a_1^++N-b_j^--r+j)^{\uparrow(b_j^--b_{j+1}^-)}\prod_{j=1}^{r}(q+a_1^++s+a_j^-+N-j),$$

где $F=N-p-b_1^+-b_1^--r$ и $b_{q+1}^+=b_{s+1}^+=0$. Далее,

$$\frac{\widetilde{\mathrm{Dim}}_N\,\lambda}{\widetilde{\mathrm{Dim}}_{N-1}\,\widetilde{\lambda}} = \frac{(a_1^++N-r+q+s-1)!\prod_{j=2}^{r}(a_1^+-a_j^++j-1)}{(a_1^++p-1)!\prod_{j=1}^{q}(a_1^++b_j^++p-1+q-j+1)}\times$$
$$\times\frac{\prod_{k=1}^{r}(a_1^++a_k^-+N+q+s-k-1+1)}{(N-1)!\prod_{l=1}^{s}(a_1^+-b_l^-+n+q-r+l-1)} = \frac{\mathrm{Dim}_N\,\lambda}{\mathrm{Dim}_{N-1}\,\widetilde{\lambda}}.$$

Так как $\widetilde{\lambda}\in\mathbb{GT}(p-1,q;r,s)$, то $\widetilde{\mathrm{Dim}}_{N-1}\widetilde{\lambda}=\mathrm{Dim}_{N-1}\,\widetilde{\lambda}$ по предположению индукции. Значит, $\widetilde{\mathrm{Dim}}_N\lambda=\mathrm{Dim}_N\,\lambda$. При $p=r=0$ формула аналогичным образом доказывается индукцией по $q+s$. □

Лемма 5.4. *Для функции $\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)$ имеет место следующая явная формула:*

$$\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda) = C(p,q;r,s)\frac{(N-r-p)!\cdot\ldots\cdot(N-r-p+q+s-1)!}{(N-r-p+q+s)!\cdot\ldots\cdot(N-2r-2p+2q+2s-1)!}$$
$$\times\frac{V^2(\{a_i^+-i\})V^2(\{a_k^--k\})\prod(a_i^++a_k^-+N+q+s-k-i+1)}{\prod(a_i^++b_j^++p-i+q-j+1)\prod(a_i^+-b_l^-+N+q-r+l-i)}\times$$
$$\times\frac{V^2(\{b_j^+-j\})V^2(\{b_l-l\})\prod(N-r-p-1-b_j^+-b_l^-+l+j)^2}{\prod(a_k^-+b_l^-+r-k+s-l+1)\prod(a_k^--b_j^++N+s-p+j-k)}\times$$
$$\times\frac{1}{\prod(a_i^++N-r-p-1+i)^{\uparrow(p+q+s)}\prod(a_k^-+N-r-p-1+k)^{\uparrow(r+q+s)}}\times$$
$$\times\frac{1}{(N-2r-p)!\cdot\ldots\cdot(N-r-p-1)!(N-2p-r)!\cdot\ldots\cdot(N-r-p-1)!},$$

где

$$C(p,q;r,s) = \frac{(q+s)!^2\dots(q+r+s-1)!^2(q+s)!^2\dots(q+p+s-1)!^2}{0!^3 1!^3\dots(p-1)!^3 0!^3 1!^3\dots(p-1)!^3(q+s+p)^{\uparrow r}\dots(q+s+1)^{\uparrow r}}$$
$$\times\frac{(2q+2s-2r-2p)!\dots(2q+2s-r-p-1)!}{(q+s-r-p)!^4\dots(q+s-1)!^4}$$

Доказательство. $\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)$ удовлетворяет соотношению:

$$\mathfrak{M}_{pqrs}(\nu) = \sum_{\lambda \prec \nu} \mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda) \left| \frac{a_{zw}(\nu)}{a_{zw}(\lambda)} \right|^2 \frac{\operatorname{Dim}_N \lambda}{\operatorname{Dim}_{N+1} \nu}.$$

Положим

$$\mathfrak{M}'_{pqrs}(\lambda) = \frac{\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda) \operatorname{Dim}_N \lambda}{|a_{zw}(\lambda)|^2}.$$

Тогда для этой новой функции имеем более простое рекуррентное соотношение:

$$\mathfrak{M}'_{pqrs}(\nu) = \sum_{\lambda \prec \nu} \mathfrak{M}'_{pqrs}(\lambda).$$

Его решение имеет вид

$$\mathfrak{M}'_{pqrs}(\lambda) = \mathrm{const} \cdot \operatorname{Dim}(\lambda_{\min}, \lambda),$$

где $\operatorname{Dim}(\lambda_{\min}, \lambda)$ обозначает количество путей в графе $\mathbb{GT}(p,q;r,s)$ из $\lambda_{\min}$ в λ. Очевидно, что

$$\operatorname{Dim}(\lambda_{\min}, \lambda) = \operatorname{Dim}_{N-r-p} \lambda^1 \operatorname{Dim}_{N-r-p} \lambda^2 \operatorname{Dim}_{N-r-p} \lambda^3.$$

Пользуясь предыдущей леммой, получаем требуемый результат. Константа находится из соотношения $\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda_{\min}) = 1$. $\square$

В дальнейшем нам понадобятся три технические леммы, доказательство которых будет дано ниже.

Лемма 5.5. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $E > 0$ такое, что*

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N(p,q;r,s);\ \max(a_1^+, a_1^-) > EN} \mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda) \leq \varepsilon$$

для всех достаточно больших N.

Лемма 5.6. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что*

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N(p,q;r,s):\ \max(a_p^+ + b_q^+, a_p^+ + N - b_1^-) \leq \delta N} \mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda) \leq \varepsilon$$

для всех достаточно больших N.

Лемма 5.7. *Функция*

$$G_{pqrs} = \frac{V^2(\{\alpha_i^+\}) V^2(\{\alpha_k^-\}) \prod(\alpha_i^+ + \alpha_k^- + 1)}{\prod(\alpha_i^+ + \beta_j^+) \prod(\alpha_i^+ - \beta_l^- + 1) \prod(1 + \alpha_i^+)^{p+q+s} \prod(1 + \alpha_k^-)^{r+q+s}} \times$$
$$\times \frac{V^2(\{\beta_j^+\}) V^2(\{\beta_l^-\}) \prod(1 - \beta_j^+ - \beta_l^-)^2}{\prod(\alpha_k^- + \beta_l^-) \prod(\alpha_k^- - \beta_j^+ + 1)}$$

на $\Omega(p,q;r,s)$ интегрируема относительно меры Лебега $d\omega$.

Пусть $\widehat{\mathfrak{M}}^{(N)}_{pqrs} = \imath_N(\mathfrak{M}^{(N)}_{pqrs})$ — образ меры $\mathfrak{M}^{(N)}_{pqrs}$ при отображении $\imath_N$. Из лемм 5.5, 5.6 и 5.7 и равенства

$$\mathfrak{M}^{(N)}_{pqrs}(\lambda) = \frac{C(p,q;r,s)N^{-(p+q+r+s)}V^2(\{\alpha_i^+ + O(1/N)\})V^2(\{\alpha_k^- + O(1/N)\})}{\prod(\alpha_i^+ + \beta_j^+ + O(1/N))\prod(\alpha_i^+ - \beta_l^- + 1 + O(1/N))}$$
$$\times\frac{\prod(\alpha_i^+ + \alpha_k^- + 1 + O(1/N))}{\prod(1+\alpha_i^+ + O(1/N))^{p+q+s}\prod(1+\alpha_k^- + O(1/N))^{r+q+s}}\times$$
$$\times\frac{V^2(\{\beta_j^+ + O(1/N)\})V^2(\{\beta_l^- + O(1/N)\})\prod(1-\beta_j^+ - \beta_l^- + O(1/N))^2}{\prod(\alpha_k^- + \beta_l^- + O(1/N))\prod(\alpha_k^- - \beta_j^+ + 1 + O(1/N))}$$

следует

Лемма 5.8. *Меры $\widehat{\mathfrak{M}}^{(N)}_{pqrs}$ на $\Omega(p,q;r,s)$ слабо сходятся к вероятностной мере $\mathfrak{M}^{(\infty)}_{pqrs}$, которая абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и имеет плотность $C(p,q;r,s)G_{pqrs}$.*

Следствие 5.9.

$$\int_{\Omega(p,q;r,s)} G(p,q;r,s)d\omega = \frac{1}{C(p,q;r,s)}$$

Лемма 5.10. *Пусть $A \in \mathcal{A}^+_{pqrs}$ и $A \neq 0$. Тогда*

$$\frac{(Av_{pqrs}, v_{pqrs})}{(v_{pqrs}, v_{pqrs})} > 0.$$

Доказательство. Докажем сначала лемму в предположении, что q и s неотрицательны. Положим

$$A^{(N)} = P_N A P_N, \quad v^{(N)}_{pqrs} = P_N v_{pqrs}.$$

При $N \to \infty$ оператор $P_N A P_N$ сильно сходится к A, поэтому

$$(Av_{pqrs}, v_{pqrs}) = \lim_{N\to\infty}(P_N A P_N v_{pqrs}, v_{pqrs}) = \lim_{N\to\infty}(A^{(N)}v^{(N)}_{pqrs}, v^{(N)}_{pqrs}).$$

Из предложения 3.3 следует, что

$$A^{(N)} = \sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N(p,q;r,s)} A(\lambda)P(\lambda),$$

где $A(\lambda)$ — это функция из $\widetilde{\mathcal{A}}^+_{pqrs}$, соответствующая оператору A. По определению вектора v_{pqrs}

$$v^{(N)}_{pqrs} = \sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N(p,q;r,s)} f_{pqrs}(\lambda)\xi_\lambda.$$

Поэтому

$$(A^{(N)}v^{(N)}_{pqrs}, v^{(N)}_{pqrs}) = \sum|f_{pqrs}(\lambda)|^2 A(\lambda) = \sum A(\lambda)\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)\frac{|f_{pqrs}(\lambda)|^2}{\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)}, \quad (15)$$

где суммы в обоих случаях берутся по $\lambda \in \mathbb{GT}_N(p,q;r,s)$. Из явных формул для $f_{pqrs}(\lambda)$ и $\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)$ видно, что $\frac{|f_{pqrs}(\lambda)|^2}{\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)}$ при $N \to \infty$ сходится к некоторой непрерывной положительной почти всюду функции h_{pqrs}, причем равномерно на $\imath_N^{-1}(K)$, где K — произвольный компакт в $\Omega(p,q;r,s)$.

Обозначим через $\mathfrak{N}_{pqrs}^{(N)}$ меру на $\mathbb{GT}_N(p,q;r,s)$:

$$\mathfrak{N}_{pqrs}^{(N)}(\lambda) = A(\lambda)\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{GT}_N(p,q;r,s).$$

Тогда

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N(p,q;r,s)} \mathfrak{N}_{pqrs}^{(N)}(\lambda) = \sum_{\lambda} A(\lambda)\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda) = \sum_{\lambda}\sum_{\nu \succ \lambda} A(\nu) p_{zw}(\lambda,\nu)\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda) =$$
$$= \sum_{\nu} A(\nu) \sum_{\lambda \prec \nu} p_{zw}(\lambda,\nu)\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda) = \sum_{\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}(p,q;r,s)} \mathfrak{N}_{pqrs}^{(N+1)}(\nu).$$

Таким образом, мера $\mathfrak{N}_{pqrs}^{(N)}$ множества $\mathbb{GT}_N(p,q;r,s)$ не зависит от N. Так как по лемме 5.2 $A(\lambda_{\min}) \neq 0$, то все меры $\mathfrak{N}_{pqrs}^{(N)}$ ненулевые. Из леммы 5.5 и ограниченности $A(\cdot)$, следует, что семейство мер $\widetilde{\mathfrak{N}}_{pqrs}^{(N)} := \bar{\imath}_N(\mathfrak{N}_{pqrs}^{(N)})$ равномерно плотно. Значит, можно выбрать подпоследовательность индексов $N_1 < N_2 < \dots$ такую, что меры $\widetilde{\mathfrak{N}}_{pqrs}^{(N_i)})$ слабо сходятся на $\Omega(p,q;r,s)$ к некоторой ненулевой мере $\widetilde{\mathfrak{N}}_{pqrs}^{(\infty)}$.

Из ограниченности $A(\cdot)$ получаем, что

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_{pqrs}^{(N)} \le ||A||\widetilde{\mathfrak{M}}_{pqrs}^{(N)}.$$

По лемме 5.8 меры $\widetilde{\mathfrak{M}}_{pqrs}^{(N)}$ слабо сходятся к мере $\widetilde{\mathfrak{M}}_{pqrs}^{(\infty)}$, которая абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $\Omega(p,q;r,s)$. Так как

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_{pqrs}^{(\infty)} \le ||A||\widetilde{\mathfrak{M}}_{pqrs}^{(\infty)},$$

то мера $\widetilde{\mathfrak{N}}_{pqrs}^{(\infty)}$ также абсолютно непрерывна.

$$(Av_{pqrs}, v_{pqrs}) = \lim_{N\to\infty} \sum A(\lambda)\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)\frac{|f_{pqrs}(\lambda)|^2}{\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)} = \left\langle \widetilde{\mathfrak{N}}_{pqrs}^{(\infty)}, g_{pqrs}\right\rangle > 0,$$

так как ненулевая мера $\widetilde{\mathfrak{N}}_{pqrs}^{(\infty)}$ абсолютно непрерывна, а функция g_{pqrs} непрерывна и положительна почти всюду на $\Omega(p,q;r,s)$.

Теперь пусть одно из чисел q или s отрицательно. Так как $q+s \ge 0$, то существует такое целое число k, что $q+k \ge 0$, $s-k \ge 0$. Тогда в силу равенства (15) и замечания 4.6

$$(A^{(N)}v_{pqrs}^{(N)}, v_{pqrs}^{(N)}) = \sum |f_{pqrs}(\lambda)|^2 A(\lambda) =$$
$$= \sum |f_{p(q+k)r(s-k)}(\lambda + (k,\dots,k))|^2 A^*(\lambda+(k,\dots,k)), \quad (16)$$

где $A^*(\lambda) = A(\lambda - (k, \dots, k))$. Из цепочки равенств

$$A^*(\lambda) = A(\lambda - (k, \dots, k)) = \sum_{\nu \succ \lambda} p_{zw}(\lambda - (k, \dots, k), \nu - (k, \dots, k)) =$$

$$\sum_{\nu \succ \lambda} \left| \frac{a_{zw}(\nu - (k, \dots, k))}{a_{zw}(\lambda - (k, \dots, k))} \right|^2 \frac{\mathrm{Dim}_N(\lambda - (k, \dots, k))}{\mathrm{Dim}_{N+1}(\nu - (k, \dots, k))} = \sum_{\nu \succ \lambda} p_{z+k, w-k}(\lambda, \nu) A^*(\nu)$$

следует, что $A^*(\cdot) \in \widetilde{A}^+_{p(q+k)r(s-k)}$. Значит, можно применить уже доказанное для неотрицательных $q + k$ и $s - k$ к равенству (16) и получить требуемое утверждение. $\square$

Из этой леммы следует теорема 5.1. Действительно, пусть v_{pqrs} не является циклическим вектором. Тогда линейная оболочка векторов $T_{pqrs}(g)$, $g \in G$, не является всем пространством H_{pqrs}. Тогда проектор P_{pqrs} на ортогональное дополнение к этой линейной оболочке лежит в $\mathcal{A}^+_{pqrs}$ и не равен 0, но $(P_{pqrs} v_{pqrs}, v_{pqrs}) = 0$, что противоречит лемме 5.10. Теорема доказана.

6 Доказательство лемм 5.5, 5.6 и 5.7

Доказательство леммы 5.5. Разобьем сумму в условии леммы на две: в одной будут слагаемые, для которых $a_1^+ \geq a_1^-$, а во второй — слагаемые, для которых $a_1^+ < a_1^-$. Ограничимся рассмотрением первой из этих сумм. Обозначим через $\widetilde{\lambda}$ сигнатуру, получаемую из λ отбрасыванием первой строки. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda) = \mathfrak{M}_{(p-1)qrs}(\widetilde{\lambda}) \cdot \frac{C(p, q; r, s)}{C(p-1, q; r, s) \prod_{i=2}^p (a_i^+ + N + q + s - r - 3 + i)} \\ \times \frac{(N - 2r - 2p + 2q + 2s)! \prod_{i=2}^p (a_i^+ + N - r - p - 2 + i)}{(a_1^+ + N - r - p - 1 + i)^{\uparrow (p+q+s)} \prod_{i=2}^p (a_i^+ + N + q + s - r - 2 + i)} \times \\ \times \frac{\prod_{i=2}^p (a_1^+ - a_i^+ + i - 1) \prod (a_1^+ + a_k^- + N + q + s - k)}{(N - 2p - r)! \prod (a_1^+ + b_j^+ + p + q - j) \prod (a_1^+ - b_l^- + N + q - r + l - 1)} = \\ = L \cdot \mathfrak{M}_{(p-1)qrs}(\widetilde{\lambda}).\end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned}L \leq \frac{(a_1^+)^{2(p-1)} (2a_1^+ + N + q + s)^r (N + 2z + 2w)^{2q+2s-r}}{N^{p-1} (a_1^+ + N - r - p)^{p+q+s} (a_1^+)^q (a_1^+)^s} \leq \\ \leq \frac{2^r (N + 2z + 2w)^{2q+2s-r-p} N}{(a_1^+)^2 (a_1^+)^{2q+2s-r-p}} \leq \frac{E^{-p} N}{(a_1^+)^2}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N(p,q;r,s);\ a_1^+>EN, a_1^+\ge a_1^-} \mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda) \le$$

$$\le \sum_{a_1^+>EN} \frac{E^{-p}N}{(a_1^+)^2} \sum_{\widetilde{\lambda}\in\mathbb{GT}_{N-1}(p-1,q;r,s);\widetilde{a_1}^+\le a_1^+} \mathfrak{M}_{(p-1)qrs}(\widetilde{\lambda}) \le$$

$$\le \frac{E^{-p}N}{EN} \sum_{\widetilde{\lambda}\in\mathbb{GT}_{N-1}(p,q;r,s)} \mathfrak{M}_{(p-1)qrs}(\lambda) \le E^{-(p+1)},$$

где мы воспользовались тем, что

$$\sum_{\widetilde{\lambda}\in\mathbb{GT}_{N-1}(p-1,q;r,s)} \mathfrak{M}_{(p-1)qrs}(\widetilde{\lambda}) = 1,$$

так как $q-(p-1)+(s-r)=z+w+1\ge 0$. $\square$

Для доказательства леммы 5.6 нам понадобится обобщение тождества Коши:

$$\det\left[\frac{1}{x_i+y_j}\right]_{i,j=1}^m = \frac{V(x)V(y)}{\prod_{i,j}(x_i+y_j)}$$

на случай, когда количество переменных x_i и y_j может быть различным.

Пусть $x=(x_1,\dots,x_p)$, $y=(y_1,\dots,y_q)$ и $q\ge p$. Обозначим символом $y=y'\sqcup y''$ произвольное разбиение множества переменных $y=(y_1,\dots,y_q)$ на два непересекающихся подмножества, содержащие $q-p$ и p переменных соответственно:

$$y'=(y'_1,\dots,y'_{q-p})=(y_{i_1},\dots,y_{i_{q-p}}),$$
$$y''=(y''_1,\dots,y''_p)=(y_{j_1},\dots,y_{j_p}),$$

где

$$i_1<\ldots<i_{q-p},\ j_1<\ldots<j_p,$$
$$\{i_1,\dots,i_{q-p}\}\cup\{j_1<\ldots<j_p\}=\{1,\dots q\}.$$

Лемма 6.1 ([5, Lemma 7.6.1])**.**

$$\frac{V(x_1,\dots,x_p)V(y_1,\dots,y_q)}{\prod(x_i+y_j)} =$$
$$= \sum_{y=y'\sqcup y''} \operatorname{sgn}(y',y'')V(y'_1,\dots,y'_{q-p})\det\left[\frac{1}{x_i+y''_j}\right]_{i,j=1}^p, \quad (17)$$

где знак $\operatorname{sgn}(y',y'')$ *полагается равным* ±1 *в зависимости от четности перестановки* $(i_1,\dots,i_{q-p},j_1,\dots,j_p)$ *чисел* $1,\dots,q$.

Доказательство леммы 5.6. Разобьем сумму в условии леммы на две: в одной будут слагаемые, для которых $a_p^+ + b_q^+ \le a_p^+ + N - b_1^-$, а во второй — слагаемые, для которых $a_p^+ + N - b_1^- < a_p^+ + b_q^+$. Ограничимся рассмотрением первой из этих сумм. Выберем E такое, что сумма в лемме 5.5 $\le \varepsilon/2$. Покажем, что существует такое δ, что сумма по тем λ, для которых $a_p^+ + b_q^+ \le a_p^+ + N - b_1^-$, $a_p^+ + b_q^+ \le \delta N$ и $\max(a_1^+, a_1^-) < EN$, меньше чем $\varepsilon/2$, откуда и будет следовать утверждение леммы. Обозначим множество таких сигнатур λ через $\Delta(E,\delta)$. Для $\lambda \in \Delta(E,\delta)$ имеем

$$\prod (a_i^+ + a_k^- + N + q + s - k - i + 1) \le (2E+2)^{pr} N^{pr} = \mathrm{const}_1 N^{pr}.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{\prod (a_i^+ + N - r - p - 1 + i)^{\uparrow(p+q+s)} \prod (a_k^- + N - r - p - 1 + k)^{\uparrow(r+q+s)}} \le \\ \le \mathrm{const}_2 N^{-p(p+q+s) - r(r+q+s)}$$

и

$$\frac{(N-r-p)! \cdot \ldots \cdot (N-r-p+q+s-1)!}{(N-r-p+q+s)! \cdot \ldots \cdot (N-2r-2p+2q+2s-1)!} \times \\ \times \frac{1}{(N-2r-p)! \cdot \ldots \cdot (N-r-p-1)!(N-2p-r)! \cdot \ldots \cdot (N-r-p-1)!} \le \\ \le \mathrm{const}_3 \cdot N^{\frac{(-2r-2p+q+s-1)(q+s)}{2} + \frac{(3r+2p+1)r}{2} + \frac{(3p+2r+1)p}{2} - \frac{(3q+3s-3r-3p-1)(q+s-r-p)}{2}} = \\ = \mathrm{const}_3 \cdot N^{-q^2 - s^2 - 2qs - pr + 2(r+p)(q+s)}.$$

Положим

$$x_i^+ = a_i^+ + p - i, \quad 1 \le i \le p; \quad y_j^+ = b_j^+ + q - j, \quad 1 \le j \le q;$$
$$x_k^- = a_k^- + r - k, \quad 1 \le k \le r; \quad y_l^- = b_l^- + s - l, \quad 1 \le l \le s.$$

Тогда, учитывая приведенные выше неравенства, для $\lambda \in \Delta(E,\delta)$ получаем, что

$$\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda) \le \frac{V^2(x_i^+) V^2(y_j^+) V^2(x_k^-) V^2(y_l^-) \prod (N + z + w - 1 - y_j^+ - y_l^-)^2}{\prod (x_i^+ + y_j^+ + 1) \prod (x_i^+ - y_l^- + N + z + w)} \times \\ \times \frac{\mathrm{const} N^F}{\prod (x_k^- + y_l^- + 1) \prod (x_k^- - y_j^+ + N + z + w)}.$$

Для каждой сигнатуры λ существуют такие натуральные числа $0 \le X \le q$ и $0 \le Y \le s$, что $y_j^+ \ge N/2$ при $j \le X$, $y_j^+ < N/2$ при $j > X$, $y_l^- \ge N/2$ при $l \le Y$, $y_l^- < N/2$ при $l > Y$. При фиксированных X и Y обозначим множество сигнатур $\lambda \in \Delta(E,\delta)$, удовлетворяющих этим условиям через

$\Delta(E,\delta,X,Y)$. Тогда для любой сигнатуры $\lambda\in\Delta(E,\delta,X,Y)$ имеем

$$\prod_{i=1\dots p,\, j=1\dots X}(x_i^+ + y_j^+ + 1)\ge (N/2)^{pX},$$
$$\prod_{i=1\dots p,\, l=Y+1\dots s}(x_i^+ - y_l^- + N+z+w)\ge (N/2)^{p(s-Y)},$$
$$\prod_{k=1\dots r,\, l=1\dots Y}(x_k^- + y_l^- + 1)\ge (N/2)^{rY},$$
$$\prod_{k=1\dots r,\, j=X+1\dots q}(x_k^- - y_j^+ + N+z+w)\ge (N/2)^{r(q-X)}.$$

Пользуясь этими неравенствами, а также неравенствами $b_j^\pm\le N$, $a_i^\pm\le EN$, получаем, что

$$\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)\le \frac{V(x_i^+)V(y_j^+)\big|_{j=X+1}^{q}V(y_l^-)\big|_{l=1}^{Y}\prod\limits_{j=X+1}^{q}\prod\limits_{l=1}^{Y}(N+z+w-1-y_j^+-y_l^-)}{\prod_{j=X+1}^{q}(x_i^+ + y_j^+ + 1)\prod_{l=1}^{Y}(x_i^+ - y_l^- + N+z+w)}$$
$$\mathrm{const}N^{F_1}\frac{V(x_k^-)V(y_j^+)\big|_{j=1}^{X}V(y_l^-)\big|_{l=Y+1}^{s}\prod\limits_{j=1}^{X}\prod\limits_{l=Y+1}^{s}(N+z+w-1-y_j^+-y_l^-)}{\prod_{l=Y+1}^{s}(x_k^- + y_l^- + 1)\prod_{j=1}^{X}(x_k^- - y_j^+ + N+z+w)}.$$

Значит,

$$\sum_{\lambda\in\Delta(E,\delta)}\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)/\mathrm{const}\le$$
$$\le\left(\sum\frac{V(x_i^+)V(y_j^+)\big|_{j=X+1}^{q}V(y_l^-)\big|_{l=1}^{Y}\prod\limits_{j=X+1}^{q}\prod\limits_{l=1}^{Y}(N+z+w-1-y_j^+-y_l^-)}{N^{F_2}\prod_{j=X+1}^{q}(x_i^+ + y_j^+ + 1)\prod_{l=1}^{Y}(x_i^+ - y_l^- + N+z+w)}\right)$$
$$\times\left(\sum\frac{V(x_k^-)V(y_j^+)\big|_{j=1}^{X}V(y_l^-)\big|_{l=Y+1}^{s}\prod\limits_{j=1}^{X}\prod\limits_{l=Y+1}^{s}(N+z+w-1-y_j^+-y_l^-)}{N^{F_3}\prod_{l=Y+1}^{s}(x_k^- + y_l^- + 1)\prod_{j=1}^{X}(x_k^- - y_j^+ + N+z+w)}\right),$$

где первая сумма берется по неотрицательным целым числам, удовлетворяющим условиям

$$\begin{gathered}EN>x_1^+>x_2^+>\ldots>x_p^+,\quad N/2>y_{X+1}^+>y_{X+2}^+>\ldots>y_q^+,\\ N>y_1^->y_2^->\ldots>y_Y^->N/2,\quad x_1^++y_q^+\le\delta N,\quad y_q^+\le N-y_1^-,\end{gathered}\tag{18}$$

а вторая сумма берется по неотрицательным целым числам $EN > x_1^- > x_2^- > \ldots > x_r^-$, $N/2 > y_{Y+1}^- > y_{Y+2}^- > \ldots > y_s^-$, $y_1^+ > y_2^+ > \ldots > y_X^+ > N/2$. При этом

$$F_2 = \frac{Y^2 - Y + p^2 - p + (q-X)^2 - (q-X)}{2} + \\ + (q-X)Y - p(q-X) - pY - p - (q-X) - Y$$

$$F_3 = \frac{X^2 - X + r^2 - r + (s-Y)^2 - (s-Y)}{2} + \\ + (s-Y)X - r(s-Y) - rX - r - (s-Y) - X.$$

Покажем, что первая имеет порядок $O(\delta)$. Предположим для определенности, что $p \le q + Y - X$ (случай $p > q + Y - X$ рассматривается аналогично). В этом случае, применяя к наборам переменных $x^+ = (x_1^+, \ldots, x_p^+)$ и $u = (y_{X+1}^+, \ldots y_q^+, N + z + w - 1 - y_1^-, \ldots, N + z + w - 1 - y_Y^-)$ лемму 6.1, используя то, что

$$V(u') = O(N^{\frac{1}{2}(Y+q-X-p)(Y+q-X-p-1)}) = O(N^{F_4}),$$

и раскрывая определитель в правой части равенства (17), получаем, что достаточно доказать следующую оценку:

$$N^{F_4 - F_2} \sum_{x^+, u} \frac{1}{(x_1^+ + u''_{\sigma_1} + 1) \ldots (x_p^+ + u''_{\sigma_p} + 1)} = O(\delta),$$

где разбиение переменных $u' \sqcup u'' = u$ и перестановка σ множества $\{1, \ldots, p\}$ фиксированы, а сумма берется по неотрицательным целым числам, удовлетворяющим условию (18). Есть три случая:

(1) u'' содержит y_q^+ и $u''_{\sigma(p)} = y_q^+$;

(2) u'' содержит y_q^+, но $u''_{\sigma(p)} \neq y_q^+$;

(3) u'' не содержит y_q^+.

Случай (3) сводится к случаю (1), поскольку замена $u''_{\sigma(p)}$ на $y_q^+ < u''_{\sigma(p)}$ только увеличивает сумму.

Случай (2) тоже может быть сведен к случаю (1). Действительно, поскольку u'' содержит y_q^+, то существует такое $i < p$, что $u''_{\sigma(i)} = y_p^+$. Так как для любых $A_1 > A_2 > 0$, $B_1 > B_2 > 0$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{(A_1 + B_2)(A_2 + B_1)} < \frac{1}{(A_1 + B_1)(A_2 + B_2)},$$

то если поменять местами $u''_{\sigma(i)}$ и $u''_{\sigma(p)}$, то сумма только увеличится.

В случае (1) перейдем к сумме по всем неотрицательным целым числам, удовлетворяющим условиям

$$EN > x_i^+, \quad N/2 > y_j^+, \quad N > y_k^- > N/2, \quad x_1^+ + y_q^+ \le \delta N,$$

от этого сумма может только увеличиться. Положим $t_i = x_i^+ + u''_{\sigma(i)}$, тогда $t_p = x_p^+ + y_q^+ \le \delta N$. Так как для каждого t_i есть ровно $t_i + 1$ способ разбить его в сумму целых неотрицательных слагаемых, то сумма ограничена количеством векторов $(u'_1, \ldots, u'_{q-X+Y-p}, t_1, \ldots, t_p) \in \mathbb{Z}_+^{q-X+Y}$ таких, что $t_p \le \delta N$. Но количество таких векторов имеет порядок $O(\delta) N^{q-X+Y}$. Учитывая то, что $F_4 - F_2 - (q - X + Y) = 0$, получаем требуемую оценку.

Аналогично доказывается, что вторая сумма

$$\sum \frac{V(x_k^-)V(y_j^+)\big|_{j=1}^{X} V(y_l^-)\big|_{l=Y+1}^{s} \prod_{j=1}^{X} \prod_{l=Y+1}^{s} (N + z + w - 1 - y_j^+ - y_l^-)}{N^{F_3} \prod_{l=Y+1}^{s}(x_k^- + y_l^- + 1) \prod_{j=1}^{X}(x_k^- - y_j^+ + N + z + w)}$$

ограничена некоторой константой, что и завершает доказательство.

$\square$

Доказательство леммы 5.7. Докажем утверждение индукцией по $p + r$. При $p + r = 0$ утверждение очевидно. Пусть $p + r \ge 1$. Разобьем интеграл в сумму интегралов по $\max(\alpha_1^+, \alpha_1^-) \ge 1$ и $\max(\alpha_1^+, \alpha_1^-) < 1$. Докажем сначала, что первый их этих интегралов сходится. Его в свою очередь разобьем в сумму интегралов по $\alpha_1^+ > \alpha_1^-$ и $\alpha_1^+ > \alpha_1^-$. Без ограничения общности рассмотрим только первый из этих интегралов. Заметим, что $G_{pqrs} = H_{pqrs} G_{(p-1)qrs}$, где

$$H_{pqrs} = \frac{\prod_{i=2}^{p}(\alpha_1^+ - \alpha_i^+)^2 \prod_{k=1}^{r}(1 + \alpha_1^+ + \alpha_k^-)}{\prod_{j=2}^{q}(\alpha_1^+ - \beta_j^+)^2 \prod_{l=1}^{s}(1 + \alpha_1^+ + \beta_l^-)(1 + \alpha_1^+)^{p+q+s} \prod_{i=2}^{p}(1 + \alpha_i^+)} \le$$

$$\le \frac{{\alpha_1^+}^{2(p-1)} 3^r {\alpha_1^+}^r}{{\alpha_1^+}^q {\alpha_1^+}^s {\alpha_1^+}^{p+q+s}} = \frac{3^r}{{\alpha_1^+}^2} \frac{1}{{\alpha_1^+}^{2q+2s-r-p}} \le \frac{3^r}{{\alpha_1^+}^2}.$$

Значит,

$$\int\limits_{\alpha_1^+ > \alpha_1^-,\, \alpha_1^+ > 1} G_{pqrs} d\omega \le \int\limits_{\alpha_1^+ \ge 1} \frac{3^r}{{\alpha_1^+}^2} d\alpha_1^+ \int G_{(p-1)qrs}.$$

Первый из интегралов в правой части очевидно сходится, а второй сходится по предположению индукции.

Докажем теперь, что

$$\int\limits_{\max(\alpha_1^+, \alpha_1^-) < 1} G_{pqrs} d\omega$$

сходится. Для каждого набора $(\alpha^\pm, \beta^\pm)$ существуют такие целые числа $0 \le X < q$ и $0 \le Y < s$, что $\beta_j^+ \ge 1/2$ при $j \le X$, $\beta_j^+ < 1/2$ при $j > X$,

$\beta_k^- \geq 1/2$ при $k \leq Y$, $\beta_k^- < 1/2$ при $k > Y$. Докажем сходимость каждого из интегралов при фиксированных X и Y. Проделывая операции, аналогичные проделанным в лемме 5.6, получаем, что достаточно доказать сходимость интеграла

$$\int \frac{d\omega}{(\alpha_1^+ + \beta_1^+)\dots(\alpha_p^+ + \beta_p^+)},$$

которая следует из интегрируемости функции $\frac{1}{x+y}$ по квадрату $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. $\square$

7 Дизъюнктность

Два представления T и T' называются дизъюнктными, если они не имеют эквивалентных ненулевых подпредставлений. В этом разделе мы докажем следующую теорему:

Теорема 7.1. *Пусть параметры z и w пробегают верхнюю полуплоскость ($\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Im} w \geq 0$), причем z и w являются либо одновременно целыми, либо одновременно нецелыми и* $\operatorname{Re}(z+w) > -1/2$. *Тогда представления $T_{z,w}$ попарно дизъюнктны.*

В случае нецелых z и w эта теорема была доказана в работе [2]. Дизъюнктность $T_{z,w}$ и $T_{z',w'}$ при различных парах целых параметров (z,w) и (z',w') следует из результатов предыдущих разделов и того факта, что дизъюнктность спектральных мер двух представлений влечет дизъюнктность этих представлений. Остается показать дизъюнктность $T_{z,w}$ и $T_{z',w'}$ при нецелых z и w и целых z' и w'. Для этого достаточно доказать, что каждая из граней $\Omega(p,q;r,s)$ является множеством меры нуль для $\sigma_{z,w}$, где $\sigma_{z,w}$ — спектральная мера представления $T_{z,w}$. В свою очередь этот факт мы докажем, используя взаимно-однозначное соответствие между вероятностыми мерами на Ω и центральными вероятностными мерами на пространстве путей $\mathcal{T}$ в графе Гельфанда-Цетлина.

Путем в графе $\mathbb{GT}$ называется конечная или бесконечная последовательность вершин $\tau = (\tau(n) \prec \tau(n+1) \prec \dots)$, $\tau(i) \in \mathbb{GT}_i$. Обозначим через $\mathcal{T}$ множество всех бесконечных путей, начинающихся с вершины $\emptyset$, оно является подмножеством в бесконечном произведении множеств $\prod_{N=0}^{\infty} \mathbb{GT}_N$. Снабдим $\mathcal{T}$ индуцированной топологией.

Обозначим через C_τ, $\tau = (\emptyset \prec \tau(1) \prec \dots \prec \tau(n))$, цилиндрическое подмножество в $\mathcal{T}$ тех путей, которые начинаются, как τ:

$$C_\tau = \{t \in \mathcal{T} : t(1) = \tau(1), \dots, t(n) = \tau(n)\}.$$

Мера на $\mathcal{T}$ называется центральной, если мера цилиндрического множества C_τ зависит только от $\tau(n)$. Существует взаимно-однозначное соответствие $\rho \leftrightarrow M$ между центральными мерами ρ на $\mathcal{T}$ и когерентными системами мер на $\mathbb{GT}$, задаваемое формулой

$$\rho(C_\tau) = \frac{M_n(\tau(n))}{\operatorname{Dim}_n(\tau(n))}.$$

С учетом теорем и получаем вышеупомянутую биекцию $\rho \leftrightarrow \sigma$ множества вероятностных центральных мер на $\mathcal{T}$ и множества вероятностных мер на Ω.

Лемма 7.2 ([2, Prop. 2]). *Если центральные меры ρ и ρ' дизъюнктны, то и соответствующие им спектральные меры σ и σ' также дизъюнктны.*

Обозначим через $\Gamma(p,q;r,s)$ множество таких сигнатур λ, что $\lambda_{p+1} \le q$ и $\lambda_{N-r-1} \ge -s$, и через $\mathcal{T}(p,q;r,s) \subset \mathcal{T}$ подмножество путей, все вершины которых лежат в множестве $\Gamma(p,q;r,s)$.

Лемма 7.3. *Если носитель меры σ содержится в $\Omega(p,q;r,s) \subset \Omega$, то носитель соответствующей центральной меры ρ содержится в $\mathcal{T}(p,q;r,s)$.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 8.3.1 в работе [5].

Лемма 7.4 ([2, Theorem 10]). *Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ и ρ_{zw} — центральная мера на $\mathcal{T}$, соответствующая спектральной мере σ_{zw} представления T_{zw}. Тогда $\rho_{zw}(\mathcal{T}(p,q;r,s)) = 0$ для любых чисел p, q, r, s.*

Доказательство оставшейся части теоремы 7.1 следует из лемм 7.2, 7.3 и 7.4.

Замечание 7.5. Фактически было доказано, что если $\mathrm{Re}(z+w) > -1/2$, $\mathrm{Re}(z'+w') > -1/2$, причем z не является целым, а z' и w' являются целыми, то представления T_{zw} и $T_{z'w'}$ дизъюнктны при любом w.

Список литературы

[1] A. Borodin, G. Olshanski, Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes, Ann. of Math. 161 (2005), no. 3, 1319–1422.

[2] V. Gorin, Disjointness of representations arising in harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group, Funct. Anal. Appl. , 44 (2010), no. 2, 92-105

[3] R. A. Gustafson, Multilateral summation theorems for ordinary and basic hypergeometric series in U(n). SIAM J.Math.Anal., 18, No. 6, 1576–1596 (1987).

[4] G. Olshanski, The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group, J. Funct. Anal. 205 (2003) 464–524.

[5] S. Kerov, G. Olshanski, A. Vershik, Harmonic analysis on the infinite symmetric group, Invent. math. 158, 551–642 (2004).

[6] D. Voiculescu, Representations factorielles de type II_1 de $U(\infty)$, J. Math. Pures et Appl. 55 (1976), 1-20.

МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: antoniosi@mail.ru