Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 389, 2011 г.

Е. Э. Лохару

НЕРАВЕНСТВО ГАЛЬЯРДО–НИРЕНБЕРГА ДЛЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ИЗМЕРЯЮЩИХ ГЛАДКОСТЬ

§1. Введение

В 1939 году А. Н. Колмогоровым в одномерном случае было получено неравенство

$$\|f^{(s)}\|_\infty \le C_{s,k}\|f\|_\infty^{1-\frac{s}{k}}\|f^{(k)}\|_\infty^{\frac{s}{k}}, \quad 0 \le s \le k.$$

Позднее Гальярдо и Ниренберг получили многомерный аналог неравенства для случая L_p-норм:

$$\|\nabla^s f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C_{s,k,n}\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{s}{k}}\|\nabla^k f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{s}{k}},$$

где $0 \le s < k$, $\frac{1}{q} = (1-\frac{s}{k})\frac{1}{r} + \frac{s}{k}\frac{1}{p}$, $1 \le r, p \le \infty$.

Поточечная оценка в неравенстве Гальярдо–Ниренберга не имеет места, однако можно получить поточечное неравенство, если перейти к максимальным функциям. В работе [5] было получено следующее неравенство:

$$M(\nabla^s f)(x) \le C(M(f-P)(x))^{1-\frac{s}{k}}(M(\nabla^k f)(x))^{\frac{s}{k}}. \tag{1}$$

Тут M обозначает максимальный оператор Харди–Литлвуда, а P некоторый многочлен степени не более k. Неравенство верно для всех функций f из пространства $W^k_{1,\mathrm{loc}}$, удовлетворяющих условию убывания на бесконечности:

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^s}\frac{1}{|B(aR,rR)|}\int\limits_{B(aR,rR)}|f|\,dx = 0. \tag{2}$$

Через $B(a,r)$ обозначен шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в точке a и радиусом r.

Ключевые слова: неравенство Гальярдо–Ниренберга, пространство Соболева, максимальная функция.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0026.

В дальнейшем неравенство Гальярдо–Ниренберга многократно обобщалось. В работе [6] в 2006 году доказывается следующий вариант:
$$\|\nabla f\|^2_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{\mathrm{BMO}}\,\|f\|_{W^2_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3}$$
Оценки такого плана для $p = 2$ были получены в [3] (2003 год). Одномерный вариант доказан в 1997 году в работе [4].

В данной работе будут рассматриваться максимальные функции следующего вида:
$$M_{k,p,s}f(x) = \sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}\inf_{\deg(\pi)\le k}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(y)-\pi|^p\right)^{1/p}.$$

Здесь в определении супремум берется по всем кубам Q, содержащим точку x, а инфимум берется по всем полиномам степени не более k. Подобные максимальные функции впервые появились в работе А. Кальдерона и Р. Скотта [2] в 1978. Более подробно и систематически они были рассмотрены в [1].

Оказывается, что многие мультипликативные интерполяционные неравенства выглядят особенно естественно в терминах именно таких максимальных функций. К примеру, некоторые неравенства типа Гальярдо–Ниренберга для них выполняются с константами, равными единице (лемма 3.6). В настоящей работе доказано следующее поточечное обобщение неравенства Гальярдо–Ниренберга:
$$M^b_{s,p}f(x) \le C_{k,s,n}\left(M_{s-1,p,0}f(x)\right)^{1-\frac{s}{k}}\left(M^{\#}_{k,p}f(x)\right)^{\frac{s}{k}}. \tag{4}$$
Тут $0 < s \le k$ и
$$M^b_{s,p}f(x) = M_{s-1,p,s}f(x), \quad M^{\#}_{k,p}f(x) = M_{k,p,k}f(x).$$
Это неравенство верно для всех функций f из пространства L^p_{loc}, которые некоторым образом “убывают” на бесконечности, а именно
$$\lim_{|Q|\to\infty}\frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}\inf_{\deg(\pi)<s}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f-\pi|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0. \tag{5}$$
Известно, что
$$|\nabla^s f(x)| \le M^b_{s,1}f(x) \le M(\nabla^s f)(x).$$

Кроме того,

$$M_{k,1}^{\#}f(x) \le M_{k,1}^{b}f(x), \quad M_{s-1,1,0}f(x) \le CMf(x).$$

Таким образом, из (4) легко получить классическое неравенство Гальярдо–Ниренберга. С другой стороны, при ограничении (5) неравенство (4) сильнее, чем (1). Это связано с тем, что функция $M_{k,p}^{\#}f$ может быть "меньше", чем величина $|\nabla^k f|$. К примеру, можно найти функцию $f \in L^p(\mathbb{R})$, для которой функция $M_{k,p}^{\#}f$ ограничена, в то время как $\|\nabla^k f\|_\infty = \infty$.

Другой важной особенностью доказанного неравенства является то, что оно позволяет в неравенстве (4) справа получать оценку через норму функции в пространстве BMO. Здесь эта оценка получается естественным образом, так как

$$M_{s-1,1,0}f(x) \le C\|f\|_{\mathrm{BMO}}\,,$$

где

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} M_{0,1}^{\#}f(x) = \sup_{Q} \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f - f_Q|,$$

$$f_Q = \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q f.$$

Таким образом, неравенство (4), в частности, представляет собой интересное обобщение неравенства (3).

§2. Определения и свойства

2.1. Основные обозначения. Мы будем обозначать размерность пространства через n. Кубы в пространстве $\mathbb{R}^n$ будем обозначать заглавными латинскими буквами K, Q и R. Через $l(Q)$ будем обозначать длину стороны куба Q. Для произвольного целого числа $k \ge 0$ обозначим через $\mathbb{P}_k$ множество всех полиномов степени не более k. Через $\mathbb{P}_k(Q)$ мы обозначаем соответствующее пространство сужений на куб Q. Единичный куб пространтсва $\mathbb{R}^n$ обозначается через I^n.

Мы будем говорить, что две функции сравнимы и писать $f \asymp g$, если найдутся константы A и B, для которых при любом x будет выполняться неравенство

$$Af(x) \le g(x) \le Bf(x).$$

2.2. Максимальные функции, измеряющие гладкость.

Определение 2.1. *Пусть функция f лежит в $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Для произвольного $s \geq 0$ и целого $k \geq 0$ положим*

$$M_{k,p,s}f(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(y) - (P_Q^k f)(y)|^p \right)^{1/p},$$

$$\widetilde{M}_{k,p,s}f(x) = \sup_{x \in Q} \inf_{\pi \in \mathbb{P}_k(Q)} \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(y) - \pi(y)|^p \right)^{1/p}.$$

Тут $P_Q^k f$ обозначает ортогональную проекцию функции f на подпространство $\mathbb{P}_k(Q) \subset L^2(Q)$. Супремум берется по всем кубам Q, содержащим точку x. Также, можно рассматривать не все кубы, а только те, у которых центр находится в точке x. В таком случае мы получим сравнимые величины.

В дальнейшем нам понадобятся несколько несложных фактов о многочленах в $\mathbb{R}^n$.

Утверждение 2.1. *Пусть $\pi \in \mathbb{P}_k$, тогда для любого куба $Q \subset \mathbb{R}^n$ с центром в точке x справедливы неравенства:*

1. $C_1 \|\pi\|_{L^\infty(Q)} \leq \|\pi\|_{L^p(Q,\, dx/|Q|)} \leq C_2 \|\pi\|_{L^\infty(Q)}$, $1 \leq p \leq \infty$.
2. *Если* $\pi(y) = \sum\limits_{|\mu| \leq k} a_\mu (y-x)^\mu$, *то*

$$C_3 \|\pi\|_{L^\infty(Q)} \leq \sum_{|\mu| \leq k} |a_\mu| |Q|^{\frac{|\mu|}{n}} \leq C_4 \|\pi\|_{L^\infty(Q)},$$

тут $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n), \quad |\mu| = \mu_1 + \cdots + \mu_n$.

Все константы зависят только от k и размерности пространтства, но не зависят от Q и $\pi \in \mathbb{P}_k$.

Для доказательства можно заметить, что все нормы на конечномерном пространстве $\mathbb{P}_k(I^n)$ эквивалентны, а после, с помощью растяжения – сжатия перейти на произвольный куб Q. Подробное доказательство этого несложного утверждения, а также другие свойства многочленов можно найти в [1].

Следующее утверждение показывает, что максимальные функции $M_{k,p,s}f$ и $\widetilde{M}_{k,p,s}f$ сравнимы. Нам будет удобнее работать с первой, так как коэффициенты многочлена $P_Q^k f$ можно вычислить явно.

Утверждение 2.2. *Для любой функции* $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *справедливо соотношение*

$$M_{k,p,s}f(x) \asymp \widetilde{M}_{k,p,s}f(x).$$

Доказательство. По неравенству треугольника для любого многочлена π степени не выше k имеем

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f - P_Q^k f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f - \pi|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |P_Q^k f - \pi|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (6)$$

В силу того, что $P_Q^k(\pi) = \pi$ для любого $\pi \in \mathbb{P}_k$, получим

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |P_Q^k f - \pi|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |P_Q^k (f - \pi)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь воспользуемся тем, что норма многочлена степени не выше k в $L^p(Q,\, dx/|Q|)$ сравнима с его нормой в $L^1(Q,\, dx/|Q|)$ (утверждение 2.1), и тогда

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |P_Q^k (f - \pi)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le C\|P_Q^k(f-\pi)\|_{L^1(Q,\, dx/|Q|)}.$$

Заметим, что проектор P_Q^k – непрерывный оператор из пространства $L^1(Q,\, dx/|Q|)$ в $L^\infty(Q,\, dx/|Q|)$ и его норма не зависит от куба Q (норма зависит только от k и размерности n). Это означает, что

$$\|P_Q^k(f-\pi)\|_{L^\infty(Q,\, dx/|Q|)} \le C\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f-\pi|.$$

Применим утверждение 2.1 для многочлена $P_Q^k(f-\pi)$. Отсюда

$$\|P_Q^k(f-\pi)\|_{L^1(Q,\, dx/|Q|)} \le C\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f-\pi| \le C\Big(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f - P_Q^k f|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Применяя данное неравенство, видим, что

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |P_Q^k f - \pi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le C\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |P_Q^k(f-\pi)| \le C\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f-\pi|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Сравнивая с (6), получаем

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f - P_Q^k f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le C\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f-\pi|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Домножим последнее неравенство на $|Q|^{-\frac{s}{n}}$ и перейдем к супремуму, тогда

$$M_{k,p,s}f(x) \le C\widetilde{M}_{k,p,s}f(x).$$

Обратное неравенство выполняется в силу определения функции $\widetilde{M}_{k,p,s}f$. □

2.3. Пространства Соболева и максимальные функции. Для любого мультииндекса $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ обозначим через $D^\mu f$ слабую производную функции f порядка $|\mu|$ (если она существует). Через W_p^s мы будем обозначать банахово пространство всех функций $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, имеющих все слабые производные $D^\mu f$ до порядка s включительно, принадлежащие $L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$W_p^s = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : D^\mu f \in L^p, |\mu| \le s\}.$$

Норма в пространстве $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ определяется следующим образом:

$$\|f\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\mu|\le s} \|D^\mu f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Мы будем рассматривать максимальные функции $M_{k,p,s}$ на пространствах Соболева W_p^l. Для того, чтобы функция $M_{k,p,s}f$ была локально суммируема для любой функции $f \in W_p^l$, необходимо, чтобы $s \le l$ и $k \ge s-1$. Чтобы исключить случай, когда $k < s-1$, достаточно взять финитную функцию, которая в окрестности точки 0 совпадает с многочленом степени $s-1$. Для такой функции величина $M_{k,p,s}f$ будет равна бесконечности в окрестности точки 0. Далее, можно доказать, что локальная суммируемость функции $M_{k,p,s}f$ при $k \ge s-1$

влечет существование всех слабых производных функции f до порядка s включительно. Из этого следует неравенство $s \le l$. Более того, для $f \in W_p^s$ справедливы неравенства

$$C_1|D^\mu f| \le M_{k,p,s} f \le C_2 (M|D^\mu f|^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$

Доказательство этих фактов можно найти в [1]. Следующая теорема показывает, что если $k \ge s$, то функция $M_{k,p,s}f$ сравнима с $M_{s,p,s}f$.

Теорема 2.1. *Для любых целых $s \ge 0$ и $k > s$ существует константа $C_{k,s,n}$ и многочлен π степени не более k такие, что справедлива поточечная оценка*

$$M_{s,p,s}(f-\pi)(x) \le C_{k,s,n} M_{k,p,s} f(x). \tag{8}$$

Обратное неравенство всегда выполняется в силу утверждения 2.2. В случае, когда $f \in L^1 \cap L^\infty$, доказательство теоремы можно найти в [1] (тут многочлен π равен 0). Многочлен π можно опустить в том случае, если функция f хоть как-то убывает на бесконечности или возрастает не очень сильно. Например, если $f \in L^q$ или $f \in L^\infty$.

В силу сделанных замечаний, естественно рассматривать две максимальные функции $M_{s,p,s}$ и $M_{s-1,p,s}$, которые корректно определены на пространстве W_p^s. Другие допустимые значения параметров s и k по теореме 2.1 дадут сравнимые величины. В связи с этим введем более простые обозначения для этих функций:

$$M_{s,p}^{\#} f = M_{s,p,s} f, \quad M_{s,p}^{b} f = M_{s-1,p,s}.$$

Таким образом,

$$M_{s,p}^{\#} f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f - P_Q^s f|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$M_{s,p}^{b} f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f - P_Q^{s-1} f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

В случае нулевой гладкости при $p = 1$, т.е. когда $s = 0$, мы получим максимальную функцию Харди–Литлвуда и максимальную функцию из определения BMO -нормы:

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f - f_Q| = \|M_{0,1}^{\#} f\|_\infty,$$

$$M^b_{0,1}f(x) = Mf(x),$$
$$M^{\#}_{0,1}f(x) = \sup_{Q\ni x} \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f - f_Q|, \quad f_Q = \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q f.$$

В терминах максимальной функции $M^b_{s,1}f$ характеризуются пространства Соболева W^s_q, а именно, имеет место следующий факт.

Утверждение 2.3. *Пусть $q > 1$. Функция $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству Соболева $W^s_q(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $M^b_{s,1}f \in L^q(\mathbb{R}^n)$:*

$$W^s_q(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^q(\mathbb{R}^n) : M^b_{s,1}f \in L^q(\mathbb{R}^n)\}.$$

Более того, справедливы неравенства

$$|\nabla^s f| \le M^b_{s,1}f \le CM(|\nabla^s f|).$$

Подробное доказательство утверждения можно найти в [1].

Следует отметить, что о связи максимальных функций $M^b_{s,p}f$ и $M^{\#}_{s,p}f$ известно немного. Из определения и утверждения 2.2 сразу следует оценка $M^{\#}_{s,p}f \le CM^b_{s,p}f$, и можно показать, что обратной поточечной оценки быть не может. Однако неизвестно, есть ли обратное неравенство с константой на нормы в L^q. В связи с этим мы можем сформулировать гипотезу.

Гипотеза 1. *Для любого целого $s > 0$ и любого $1 \le p < \infty$ существует константа $C_{s,n,p}$ такая, что для любой функции $f \in W^s_p$ справедлива оценка*

$$\|M^b_{s,p}f\|_p \le C_{s,n,p}\|M^{\#}_{s,p}f\|_p.$$

Известно, что $|f| \in W^s_p$, когда $f \in W^s_p$. Однако неизвестно, верно ли тоже самое для пространства функций $C^{\#}_{s,p} = \{f \in L^p : M^{\#}_{s,p}f \in L^p\}$.

Гипотеза 2. *Пространство $C^{\#}_{s,p}$ замкнуто относительно операции взятия модуля.*

§3. Неравенство типа Гальярдо–Ниренберга для максимальных функций $M^{\#}_{s,p}$ и $M^b_{s,p}$

Далее мы будем предполагать, что функция f не очень сильно растет на бесконечности, а именно

$$\lim_{|Q|\to\infty} \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f - P_Q^{s-1} f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0. \tag{9}$$

Это условие всегда будет выполнено, например, если $f \in L^q$ при некотором $0 < q \le \infty$. Теперь сформулируем основную теорему.

Теорема 3.1. *Пусть функция f лежит в $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет условию (9), а $k > s \ge 1$, тогда*

$$M^b_{s,p} f(x) \le C \left(M_{s-1,p,0} f(x) \right)^{1-\frac{s}{k}} \left(M^{\#}_{k,p} f(x) \right)^{\frac{s}{k}}. \tag{10}$$

В дальнейшем мы будем считать, что на единичном кубе $I^n = [-1,1]^n$ фиксирована система ортогональных полиномов ω_μ, причем $D^\mu(\omega_\mu) = C_\mu$. В качестве ω_μ мы возьмем многочлены $L^1_{\mu_1} \dots L^n_{\mu_n}$, где $L^j_{\mu_j}$ – полиномы Лежандра по переменной x_j. Для произвольного куба Q естественным образом возникает система ортогональных полиномов $\omega^Q_\mu(x) = \omega_\mu(\frac{x - x_Q}{l(Q)})$ (не нормированная). В качестве многочлена "почти наилучшего" приближения можно взять проекцию $P^s_Q f = \sum\limits_{|\mu| \le s} a^Q_\mu \omega^Q_\mu$. Заметим, что если $|\nu| = s$, то

$$D^\nu (P^s_Q f)(x_Q) = C_\nu \frac{a^Q_\nu}{|Q|^{\frac{|\nu|}{n}}}, \tag{11}$$

тут x_Q – центр куба Q.

Для доказательства теоремы нам понадобится ряд лемм. Введем следующие обозначения:

$$M^b_{s,p,Q} f = \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f - P^{s-1}_Q f|^p \right)^{1/p},$$

$$M^{\#}_{s,p,Q} f = \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f - P^{s}_Q f|^p \right)^{1/p}.$$

Лемма 3.1. *Пусть $Q \subset K$ и $|K| \le 8^n |Q|$. Тогда справедливо неравенство*

$$|M^b_{s,p,K} f - M^b_{s,p,Q} f| \le C \inf_Q M^{\#}_{s,p} f.$$

Доказательство. Предположим, что кубы Q и K удовлетворяют условию леммы. Применяя утверждение 2.1 к многочлену $P_Q^s f - P_K^s f$, а после прибавляя и вычитая f, получаем

$$\|P_Q^s f - P_K^s f\|_{L^\infty(Q)} \le C\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |P_Q^s f - P_K^s f|^p\right)^{1/p}$$

$$\le C\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |P_Q^s f - f|^p\right)^{1/p} + C\left(\frac{1}{|K|}\int\limits_K |P_K^s f - f|^p\right)^{1/p}$$

$$\le C|Q|^{\frac{s}{n}} \inf_Q M_{s,p}^{\#} f.$$

Следовательно,

$$|D^\mu(P_Q^s f) - D^\mu(P_K^s f)| \le C \inf_Q M_{s,p}^{\#} f.$$

Вспомним, что $D^\mu(P_Q^s f) = C_\mu \frac{a_\mu^Q}{|Q|^{\frac{|\mu|}{n}}}$, и тогда

$$\left|\frac{a_\mu^Q}{|Q|^{\frac{|\mu|}{n}}} - \frac{a_\mu^K}{|K|^{\frac{|\mu|}{n}}}\right| \le C \inf_Q M_{s,p}^{\#} f. \tag{12}$$

Заметим, что $P_Q^{s-1} f = P_Q^s f - \sum\limits_{|\mu|=s} a_\mu^Q \omega_\mu^Q$. По неравенству треугольника получим

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f - P_Q^s f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\ge \left|\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f - P_Q^{s-1} f|^p\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \left|\sum_{|\mu|=s} a_\mu^Q \omega_\mu^Q\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right|.$$

Домножим неравенство на $|Q|^{-\frac{s}{n}}$; тогда

$$\left|M_{s,p,Q}^b f - \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \left|\sum_{|\mu|=s} a_\mu^Q \omega_\mu^Q\right|^p\right)^{1/p}\right| \le M_{s,p,Q}^{\#} f, \tag{13}$$

аналогично

$$\left|M_{s,p,K}^b f - \frac{1}{|K|^{\frac{s}{n}}}\left(\frac{1}{|K|}\int\limits_K \left|\sum_{|\mu|=s} a_\mu^K \omega_\mu^K\right|^p\right)^{1/p}\right| \le M_{s,p,K}^{\#} f.$$

Таким образом,

$$|M^b_{s,p,Q}f - M^b_{s,p,K}f| \le \left| \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \left| \sum_{|\mu|=s} a^Q_\mu \omega^Q_\mu \right|^p \right)^{1/p} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{|K|^{\frac{s}{n}}} \left(\frac{1}{|K|} \int\limits_K \left| \sum_{|\mu|=s} a^K_\mu \omega^K_\mu \right|^p \right)^{1/p} \right| + M^{\#}_{s,p,K}f + M^{\#}_{s,p,Q}f. \tag{14}$$

Оценим правую часть. Для этого сделаем замену координат в выражении

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \left| \sum_{|\mu|=s} a^Q_\mu \omega^Q_\mu \right|^p \right)^{1/p} = \left(\int\limits_{I^n} \left| \sum_{|\mu|=s} \frac{a^Q_\mu}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \omega_\mu \right|^p \right)^{1/p}.$$

Наконец, в силу (12) мы можем написать оценку

$$\left| \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \left| \sum_{|\mu|=s} a^Q_\mu \omega^Q_\mu \right|^p \right)^{1/p} - \frac{1}{|K|^{\frac{s}{n}}} \left(\frac{1}{|K|} \int\limits_K \left| \sum_{|\mu|=s} a^K_\mu \omega^K_\mu \right|^p \right)^{1/p} \right|$$

$$= \left| \left(\int\limits_{I^n} \left| \sum_{|\mu|=s} \frac{a^Q_\mu}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \omega_\mu \right|^p \right)^{1/p} - \left(\int\limits_{I^n} \left| \sum_{|\mu|=s} \frac{a^K_\mu}{|K|^{\frac{s}{n}}} \omega_\mu \right|^p \right)^{1/p} \right|$$

$$\le \left(\int\limits_{I^n} \left| \sum_{|\mu|=s} \left(\frac{a^Q_\mu}{|Q|^{\frac{s}{n}}} - \frac{a^K_\mu}{|K|^{\frac{s}{n}}} \right) \omega_\mu \right|^p \right)^{1/p} \le C \sum_{|\mu|=s} \left| \frac{a^Q_\mu}{|Q|^{\frac{s}{n}}} - \frac{a^K_\mu}{|K|^{\frac{s}{n}}} \right|$$

$$\le C \inf_Q M^{\#}_{s,p} f.$$

Таким образом, используя (14), получим необходимое неравенство

$$|M^b_{s,p,Q}f - M^b_{s,p,K}f|$$

$$\le C \sum_{|\mu|=s} \left| \frac{a^Q_\mu}{|Q|^{\frac{s}{n}}} - \frac{a^K_\mu}{|K|^{\frac{s}{n}}} \right| + C \inf_Q M^{\#}_{s,p} f \le C \inf_Q M^{\#}_{s,p} f. \tag{15}$$

□

Лемма 3.2. *Пусть $k > s$ и $|\mu| = s$. Тогда для любого куба Q справедливо неравенство*

$$\left| D^\mu (P^k_Q f)(x_Q) - C_\mu \frac{a^Q_\mu}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \right| \le C \inf_Q M^{\#}_{s,p} f. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $|\mu| = s$. Заметим, что

$$D^\mu(P_Q^k f) = D^\mu(a_\mu^Q \omega_\mu^Q) + D^\mu\left(\sum_{|\nu|>|\mu|} a_\nu^Q \omega_\nu^Q\right),$$

а значит

$$\left|D^\mu(P_Q^k f) - D^\mu(a_\mu^Q \omega_\mu^Q)\right| \leq \left|D^\mu\left(\sum_{|\nu|>|\mu|} a_\nu^Q \omega_\nu^Q\right)\right|.$$

Из определения полинома ω_ν^Q видим, что

$$\left|D^\mu\left(\omega_\nu^Q\right)\right| = \left|D^\mu\left(\omega_\nu\left(\frac{x - x_Q}{l(Q)}\right)\right)\right| \leq C\frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}.$$

Тогда

$$\left|D^\mu(P_Q^k f) - D^\mu(a_\mu^Q \omega_\mu^Q)\right| \leq C\sum_{|\nu|>|\mu|} \frac{|a_\nu^Q|}{|Q|^{\frac{s}{n}}}. \tag{17}$$

Оценим величины a_ν^Q. Для этого воспользуемся представлением

$$a_\nu^Q = C_\nu \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q f(x)\omega_\nu^Q(x)\,dx = C_\nu\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q (f(x) - P_Q^s f(x))\omega_\nu^Q(x)\,dx.$$

Тут мы воспользовались ортогональностью полиномов $P_Q^s f$ и ω_ν^Q при $|\nu| > s$. Отсюда видно, что

$$|a_\nu^Q| \leq \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f - P_Q^s f||\omega_\nu^Q| \leq C_\nu |Q|^{\frac{s}{n}} \inf_Q M_{s,p}^{\#} f.$$

Сравнивая с (17) и суммируя, получаем (16). □

Лемма 3.3. *Пусть $f \in C^{(k)}(\mathbb{R}^n)$, $|\mu| = s < k$, тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство*

$$\lim_{|Q|\to 0} D^\mu(P_Q^k f)(x) = \lim_{|Q|\to 0} C_\mu \frac{a_\mu^Q}{|Q|^{\frac{s}{n}}} = A_\mu(D^\mu f)(x), \tag{18}$$

где предел берется по любой стягивающейся последовательности кубов с центром в точке x.

Доказательство. Возьмем произвольный куб Q с центром в точке x. Как и в лемме 3.2, можем написать

$$D^{\mu}(P_Q^k f) = D^{\mu}(a_{\mu}^Q \omega_{\mu}^Q) + D^{\mu}\left(\sum_{|\nu|>|\mu|} a_{\nu}^Q \omega_{\nu}^Q\right).$$

Для оценки второго слагаемого запишем тождество

$$a_{\nu}^Q = C_{\nu}\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q f(x)\omega_{\nu}^Q(x)\,dx = |Q|^{\frac{|\nu|}{n}}\int\limits_{I^n} f^{(\nu)}(x+l(Q)y)\left(1-y^2\right)^{\nu}\,dy.$$

Отсюда видно, что

$$|a_{\nu}^Q| \le C|Q|^{\frac{|\nu|}{n}}\|f^{(\nu)}\|_{L^{\infty}(Q)}.$$

Далее,

$$|D^{\mu}\omega_{\nu}^Q| \le C|Q|^{\frac{s}{n}}$$

и тогда

$$\left|D^{\mu}\left(\sum_{|\nu|>|\mu|} a_{\nu}^Q \omega_{\nu}^Q\right)\right| \le C\sum_{|\nu|>|\mu|}|Q|^{\frac{|\nu|-s}{n}}\|f^{(\nu)}\|_{L^{\infty}(Q)}.$$

Поэтому $\left|D^{\mu}\left(\sum\limits_{|\nu|>|\mu|} a_{\nu}^Q \omega_{\nu}^Q\right)\right| \to 0$, когда $|Q| \to 0$. Для завершения доказательства осталось показать, что $D^{\mu}(a_{\mu}^Q\omega_{\mu}^Q) \to C_{\mu}f^{(\mu)}(x)$. Действительно,

$$D^{\mu}(a_{\mu}^Q\omega_{\mu}^Q) = C_{\mu}|Q|^{-\frac{s}{n}}a_{\mu}^Q = C_{\mu}\int\limits_{I^n} f^{(\mu)}(x+l(Q)y)\left(1-y^2\right)^{\mu}\,dy.$$

Следовательно, переходя к пределу, когда $|Q| \to 0$, получаем $D^{\mu}(a_{\mu}^Q\omega_{\mu}^Q)$

$\to C_{\mu}f^{(\mu)}(x)$. □

Лемма 3.4. *Пусть $0 \le s < k$, $f \in C^{(s)}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого куба Q с центром в точке x и любого мультииндекса μ, $|\mu| = s$, справедлива оценка*

$$\left|D^{\mu}P_Q^k f(x) - C_{\mu}f^{(\mu)}(x)\right| \le C|Q|^{\frac{k-s}{n}}M_{k,p}^{\#}f(x) + C\inf_Q M_{s,p}^{\#}f.$$

Доказательство. Возьмем куб Q с центром в точке x и последовательность стягивающихся кубов $Q_j = 2^{-j}Q$ с центром в точке x. Тогда по неравенству треугольника получаем

$$\|P^k_{Q_j}f - P^k_{Q_{j+1}}f\|_{L^\infty(Q_{j+1})} \le C|Q_{j+1}|^{\frac{k}{n}} M^{\#}_{k,p}f(x).$$

Применим утверждение 2.1 для куба Q_{j+1} и тогда

$$\begin{aligned}\left|(D^\mu P^k_{Q_j}f)(x) - (D^\mu P^k_{Q_{j+1}}f)(x)\right| &\le C|Q_{j+1}|^{-\frac{s}{n}}\|P^k_{Q_j}f - P^k_{Q_{j+1}}f\|_{L^\infty(Q_{j+1})}\\ &\le C|Q_{j+1}|^{\frac{k-s}{n}} M^{\#}_{k,p}f(x).\end{aligned}$$

Из леммы 3.3 мы знаем, что последовательность $(D^\mu P^k_{Q_j}f)(x)$ сходится к $C_\mu f^{(\mu)}(x)$. Тогда, просуммировав последние неравенства, имеем нужную оценку

$$\begin{aligned}|(D^\mu P^k_Q f)(x) - A_\mu f^{(\mu)}(x)| &\le \sum_j \left|(D^\mu P^k_{Q_j}f)(x) - (D^\mu P^k_{Q_{j+1}}f)(x)\right|\\ &\le C\sum_j |Q_{j+1}|^{\frac{k-s}{n}} M^{\#}_{k,p}f(x) \le C|Q|^{\frac{k-s}{n}} M^{\#}_{k,p}f(x).\end{aligned}$$

□

Лемма 3.5. *Пусть функция f локально суммируема. Если ϕ_ϵ – аппроксимативная единица, то*

$$\varliminf_{\epsilon\to 0} M_{k,p,s}(f*\phi_\epsilon)(x) \asymp M_{k,p,s}f(x).$$

Доказательство. С одной стороны,

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f*\phi_\epsilon - P^k_Q(f*\phi_\epsilon)|^p\right)^{1/p} \le M_{k,p,s}(f*\phi_\epsilon)(x)$$

и, переходя к пределу, имеем

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f - P^k_Q(f)|^p\right)^{1/p} \le \varliminf_{\epsilon\to 0} M_{k,p,s}(f*\phi_\epsilon)(x).$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f*\phi_\epsilon - P^k_Q(f*\phi_\epsilon)|^p\right)^{1/p}$$

$$\leq C\frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f*\phi_\epsilon - P_Q^k(f)*\phi_\epsilon|^p\right)^{1/p}$$

$$\leq C\frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q_\epsilon}|f - P_Q^k(f)|^p\right)^{1/p} \leq CM_{k,p,s}f(x),$$

где Q_ϵ обозначает ϵ-окрестность куба Q. Отсюда

$$M_{k,p,s}(f*\phi_\epsilon)(x) \leq CM_{k,p,s}f(x).$$

Сравнивая оба неравенства, получаем утверждение леммы. □

В силу доказанной леммы, далее мы можем и будем считать, что все функции гладкие. Более того, если функция f удовлетворяет условию (9), то и любая свертка $f*\phi_\epsilon$ тоже удовлетворяет этому условию в силу последней оценки в лемме 3.5.

Лемма 3.6. *Пусть функция f лежит в пространстве $C^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет условию*

$$\lim_{|Q|\to\infty}\frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f - P_Q^k f|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0, \tag{19}$$

тогда для любого $k > s$ справедлива поточечная оценка

$$M_{s,p}^{\#}f \leq (M_{s-1,p,0}f)^{1-\frac{s}{k}}\left(M_{k,p}^{\#}f\right)^{\frac{s}{k}}. \tag{20}$$

Доказательство. Из условия леммы следует, что для каждой точки $x\in\mathbb{R}^n$ найдется куб Q, на котором достигается супремум в определении величины $M_{s,p}^{\#}f(x)$. Тогда

$$M_{k,p,s}f(x) = \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f - P_Q^k(f)|^p\right)^{1/p} \tag{21}$$

$$= |Q|^{\frac{k-s}{n}}\frac{1}{|Q|^{\frac{k}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f - P_Q^k(f)|^p\right)^{1/p} \leq |Q|^{\frac{k-s}{n}}M_{k,p}^{\#}f(x),$$

а значит

$$\frac{1}{|Q|} \leq \left(\frac{M^{\#}_{k,p} f(x)}{M_{k,p,s} f(x)} \right)^{\frac{n}{k-s}}.$$

С помощью этого неравенства оценим множитель $\frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}$ в (21), и тогда

$$M_{k,p,s} f(x) \leq \left(\frac{M^{\#}_{k,p} f(x)}{M_{k,p,s} f(x)} \right)^{\frac{s}{k-s}} M_{k,p,0} f(x);$$

заметим, что $M_{k,p,0} f(x) < C M_{s-1,p,0} f(x)$ и, преобразуя, приходим к (20). □

Доказательство теоремы 3.1. Возьмем точку $x \in \mathbb{R}^n$, для которой $M^b_{s,p} f(x) < \infty$. Пусть $\alpha = \frac{1}{2} M^b_{s,p} f(x)$. Предположим, что

$$M^{\#}_{s,p} f(x) > \beta\alpha,$$

тогда

$$M^b_{s,p} f(x) = 2\alpha < \frac{2}{\beta} M^{\#}_{s,p} f(x),$$

и по лемме 3.6 мы получаем необходимое неравенство (параметр β мы выберем позднее).

Теперь пусть $M^{\#}_{s,p} f(x) \leq \beta\alpha$. По условию

$$\lim_{|Q|\to\infty} \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f - P^{s-1}_Q f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Значит, мы можем выбрать куб Q, содержащий точку x, так, чтобы $M^b_{s,p,Q} f > \alpha$ и для любого большего куба $Q' \supset Q, |Q'| \geq 2^n |Q|$, выполнялось неравенство $M^b_{s,p,Q'} f \leq \alpha$. Аналогично выберем второй куб K, для которого $x \in K$, $M^b_{s,p,K} f > \alpha/2$ и $M^b_{s,p,K'} f \leq \alpha/2$ при любом $K' \supset K, |K'| \geq 2^n |K|$. Применим лемму 3.1 для кубов Q и $2Q$. Тогда

$$|M^b_{s,p,Q} f - M^b_{s,p,2Q} f| \leq C \inf_Q M^{\#}_{s,p} f \leq C\beta\alpha.$$

Так как по выбору $M^b_{s,p,2Q} f \leq \alpha$, получим неравенство

$$\alpha < M^b_{s,p,Q} f \leq (1 + C\beta)\alpha. \tag{22}$$

Аналогично

$$\frac{\alpha}{2} < M^b_{s,p,K} f \leq (1 + 2C\beta)\frac{\alpha}{2}. \tag{23}$$

Кубы Q и K содержат точку x, но, вообще говоря, не обязаны иметь общий центр. Однако, мы можем найти кубы $Q_1 \supset Q$ и $K_1 \supset K$, у которых общий центр находится в точке x и $|Q_1| \le 4^n|Q|$, $|K_1| \le 4^n|K|$. Применяя лемму 3.1 сначала для кубов Q и Q_1, а после для пары K и K_1, видим, что для них выполнены неравенства

$$|M^b_{s,p,Q}f - M^b_{s,Q_1}f| \le C\inf_Q M^\#_{s,p}f \le C\beta\alpha$$

и

$$|M^b_{s,p,K}f - M^b_{s,K_1}f| \le C\inf_K M^\#_{s,p}f \le C\beta\alpha.$$

Сравнивая эти неравенства с (22) и (23), получим оценки

$$(1 - C\beta)\alpha < M^b_{s,Q_1}f \le (1 + 2C\beta)\alpha, \tag{24}$$

$$(1 - 2C\beta)\frac{\alpha}{2} < M^b_{s,K_1}f \le (1 + 4C\beta)\frac{\alpha}{2}. \tag{25}$$

Вычтем второе неравенство из первого. Тогда

$$(1 - 6C\beta)\frac{\alpha}{2} < M^b_{s,Q_1}f - M^b_{s,K_1}f < (1 + 6C\beta)\frac{\alpha}{2}.$$

Оценим выражение $M^b_{s,Q_1}f - M^b_{s,K_1}f$. Так как кубы имеют общий центр, то один из них содержит другой. Мы будем считать, что $K_1 \subset Q_1$. Для оценки используем неравенство (15):

$$|M^b_{s,Q_1}f - M^b_{s,K_1}f| \le C\sum_{|\mu|=s}\left|\frac{a^{Q_1}_\mu}{|Q_1|^{\frac{s}{n}}} - \frac{a^{K_1}_\mu}{|K_1|^{\frac{s}{n}}}\right| + C\inf_{K_1} M^\#_{s,p}f.$$

По лемме 3.2,

$$\sum_{|\mu|=s}\left|\frac{a^{Q_1}_\mu}{|Q_1|^{\frac{s}{n}}} - \frac{a^{K_1}_\mu}{|K_1|^{\frac{s}{n}}}\right| \le C\sum_{|\mu|=s}\left|D^\mu P^k_{Q_1}f(x) - D^\mu P^k_{K_1}f(x)\right| + C\inf_{K_1} M^\#_{s,p}f.$$

Для оценки выражения $|D^\mu P^k_{Q_1}f(x) - D^\mu P^k_{K_1}f(x)|$ прибавим и вычтем $C_\mu f^{(\mu)}(x)$. Так как кубы Q_1 и K_1 имеют общий центр в точке x, то по лемме 3.4

$$\begin{aligned}&|D^\mu P^k_{Q_1}f(x) - D^\mu P^k_{K_1}f(x)|\\ &\le |D^\mu P^k_{Q_1}f(x) - C_\mu f^{(\mu)}(x) + C_\mu f^{(\mu)}(x) - D^\mu P^k_{K_1}f(x)|\\ &\le C|Q_1|^{\frac{k-s}{n}} M^\#_{k,p}f(x) + C\inf_{K_1} M^\#_{s,p}f.\end{aligned}$$

И тогда

$$|M^b_{s,Q_1}f - M^b_{s,K_1}f| \le C|Q_1|^{\frac{k-s}{n}} M^{\#}_{k,p}f(x) + C\inf_{K_1} M^{\#}_{s,p}f.$$

Таким образом,

$$(1 - C'\beta)\frac{\alpha}{2} \le M^b_{s,Q_1} - M^b_{s,K_1} \le C|Q_1|^{\frac{k-s}{n}} M^{\#}_{k,p}f(x) + C\inf_{K_1} M^{\#}_{s,p}f.$$

Мы знаем, что $M^{\#}_{s,p}f(x) \le \beta\alpha$, $|Q_1| \le 4^n|Q|$, и тогда

$$(1 - C''\beta)\frac{\alpha}{2} \le C_1|Q|^{\frac{k-s}{n}} M^{\#}_{k,p}f(x). \tag{26}$$

Оценим величину $|Q|$. В силу того, что $M^b_{s,p,Q}f > \alpha$, получим

$$|Q|^{\frac{s}{n}} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f - P^{s-1}_Q f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{1}{\alpha}\inf_Q M_{s-1,p,0}f \le \frac{1}{\alpha}M_{s-1,p,0}f(x).$$

Используя это неравенство, оценим множитель $|Q|^{\frac{k-s}{n}}$ в (26):

$$(1 - C''\beta)\frac{\alpha}{2} \le C\left(\frac{1}{\alpha}M_{s-1,p,0}f(x)\right)^{\frac{k-s}{s}} M^{\#}_{k,p}f(x).$$

Выражая из неравенства α, получим

$$\alpha^{\frac{k}{s}} \le \frac{C}{1 - C'\beta}\left(M_{s-1,p,0}f(x)\right)^{\frac{k-s}{s}} M^{\#}_{k,p}f(x)$$

и тогда

$$\alpha \le \left(\frac{C}{1 - C'\beta}\right)^{\frac{s}{k}} \left(M_{s-1,p,0}f(x)\right)^{1-\frac{s}{k}} \left(M^{\#}_{k,p}f(x)\right)^{\frac{s}{k}}. \tag{27}$$

Для завершения доказательства осталось вспомнить, что $M^b_{s,p}f(x) = 2\alpha$. Параметр β выберем так, чтобы $\frac{C}{1-C'\beta} = 1$. □

Автор хотел бы поблагодарить С. В. Кислякова за полезные обсуждения и большую помощь в подготовке текста работы.

Литература

1. R. DeVore, R. Sharpley, *Maximal functions measuring smoothness.* Memoirs Amer. Math. Soc. **47**, No. 293 (1984).
2. A. Calderon, R. Scott, *Sobolev type inequalities for* $p > 0$. — Studia Math. **62** (1978), 75–92.
3. Y. Meyer, T. Rivi'ere, *A partial regularity result for a class of stationary Yang–Mills fields.* — Rev. Mat. Iberoamericana **19** (2003), 195–219.
4. A. Kalamajska, A. Milani, *Anisotropic Sobolev spaces and parabolic equations.* Ulmer Seminare über Funktionalanalysis und Differentialgleichungen, Heft **2** (1997) 237–273.
5. A. Kalamajska, *Pointwise multiplicative inequalities and Nirenberg type estimates in weighted Sobolev spaces.* — Studia Math. **108**, No. 3 (1994), 275-290.
6. P. Strzelecki, *Gagliardo–Nirenberg inequalities with a* BMO *term.* — Bull. London Math. Soc. **38** (2006) 294–300.

Lokharu E. Gagliardo–Nirenberg inequality for maximal functions measuring smoothness.

We prove a Gagliardo–Nirenberg type pointwise interpolation inequality for special maximal functions, measuring smoothness in the multidimensional case. It turns out that the classical inequality follows from this one and it is also possible to use naturally BMO terms in the inequality.

СПбГУ, Лаборатория им. П. Л. Чебышева
199178, 14 линия В.О., д. 29Б
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lokharu@gmail.com

Поступило 9 июня 2011 г.