Самоинъективные алгебры стабильной размерности Калаби-Яу три.

С. О. Иванов [1]

Введение

Одна из целей некоммутативной алгебраической геометрии заключается в том, чтобы понять как устроены $\mathbf{k}$-линейные триангулированные категории над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$, свойства которых близки к свойствам производных категорий $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh(X)})$ ограниченных комплексов когерентных пучков на проективном многообразии X над $\mathbf{k}$. Функтором Серра триангулированной $\mathbf{k}$-линейной Hom-конечной категории $\mathcal{T}$, вслед за А.И.Бондалом и М.М.Капрановым [1], назовем триангулированную автоэквивалентность $F:\mathcal{T}\to\mathcal{T}$ такую, что имеет место естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T,S)\cong D\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(S,F(T)).$$

(согласованный с функтором сдвига; см. [2]), где $D=\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(-,\mathbf{k})$. Если функтор Серра существует, то он единственен с точностью до изоморфизма. Тогда для гладкого проективного многообразия X размерности n и канонического пучка $\omega_X=\bigwedge^n\Omega_X$ классическая двойственность Серра

$$H^i(X,\mathscr{F})\cong D\mathrm{Ext}^{n-i}(\mathscr{F},\omega_X),$$

где $\mathscr{F}\in\mathrm{coh}(X)$, является следствием того, что $F=-\otimes\omega_X[n]$ – функтор Серра на производной категории ограниченных комплексов когерентных

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00635), а также при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ, ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (2010-1.1-111-128-033, госконтракт 14.740.11.0344). Кроме того, работа автора поддержана НИР 6.38.74.2011 Санкт-Петербургского государственного университета, “Структурная теория и геометрия алгебраических групп и их приложения в теории представлений и алгебраической К-теории”.

пучков $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh}(X))$. Если на $\mathbf{k}$-линейной Hom-конечной триангулированной категории $\mathcal{T}$ есть функтор Серра, то мы будем говорить, что $\mathcal{T}$ – триангулированная категория с двойственностью Серра.

Важным примером триангулированной категории с двойственностью Серра является производная категория $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\text{-}A)$, где $\mathrm{mod}\text{-}A$ – категория конечнопорожденных модулей над конечномерной $\mathbf{k}$-алгеброй A конечной глобальной размерности (см. [3]). Кроме того, в статье [4] дано полное описание нетеровых наследственных абелевых категорий $\mathscr{A}$ таких, что на производной категории $\mathscr{D}^b(\mathscr{A})$ имеется двойственность Серра. Таким образом, триангулированные категории с двойственностью Серра вызывают большой интерес.

Следуя Концевичу [5], триангулированную $\mathbf{k}$-линейную Hom-конечную категорию $\mathcal{T}$ назовем категорией Калаби-Яу, если существует такое n, что n-кратный функтор сдвига $[n]$ (рассматриваемый как триангулированный функтор) является функтором Серра. В этом случае наименьшее такое $n \geqslant 0$ называется размерностью Калаби-Яу категории $\mathcal{T}$ и обозначается $\mathrm{CYdim}(\mathcal{T})$; если категория $\mathcal{T}$ не является категорией Калаби-Яу, то положим $\mathrm{CYdim}(\mathcal{T}) = \infty$.

В том случае, когда конечномерная алгебра A самоинъективна, кроме производной категории $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\text{-}A)$ этой алгебре можно сопоставить еще одну триангулированную $\mathbf{k}$-линейную Hom-конечную категорию – стабильную категорию модулей $\underline{\mathrm{mod}}\text{-}A$, функтором сдвига в которой является обратный Ω_A^{-1} к функтору сизигии Хеллера Ω_A. В этом случае, следуя К.Эрдманн и А.Сковронски [6], определим стабильную размерность Калаби–Яу алгебры A, как размерность Калаби–Яу стабильной категории $\underline{\mathrm{mod}}\text{-}A$, и обозначим ее $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A)$. К.Эрдманн и А.Сковронски доказали, что $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) = n$ тогда и только тогда, когда n – наименьшее неотрицательное число, для которого $\Omega_A^{n+1} \cong \underline{\nu}^{-1}$, где $\underline{\nu}^{-1} : \underline{\mathrm{mod}}\text{-}A \to \underline{\mathrm{mod}}\text{-}A$ – функтор, индуцированный обратным функтором Накаямы $\nu^{-1} : \mathrm{mod}\text{-}A \to \mathrm{mod}\text{-}A$. Кроме того, они описали алгебры стабильной размерности Калаби–Яу $0, 1$ и 2, доказали, что для алгебр кватернионного типа $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) = 3$, и вычислили стабильные размерности Калаби–Яу для некоторых других классов алгебр.

В настоящей работе нас будут интересовать самоинъективные алгебры стабильной Калаби–Яу размерности три.

Как известно, над алгебраически замкнутым полем любая конечномерная алгебра Морита-эквивалентна некоторой алгебре путей колчана Q с соотношениями $\mathbf{k}Q/I$. Из определения следует, что стабильная

Калаби–Яу размерность является инвариантом Морита-эквивалентности, следовательно, в вопросах, связанных с со стабильной Калаби–Яу размерностью, достаточно ограничиваться только этими алгебрами.

Основная цель нашей статьи заключается в том, чтобы предъявить некоторое легко проверяемое свойство для самоинъективных алгебр путей колчана с соотношениями $A = \mathbf{k}Q/I$, которое удовлетворяет следующим условиям:

- Оно должно явно формулироваться на языке колчана Q и идеала соотношений I.
- Из этого условия должно следовать, что $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) = 3$.
- Этому условию должны удовлетворять все известные алгебры путей с соотношениями стабильной Калаби-Яу размерности три. В частности, все алгебры кватернионного типа из списка Эрдманн [7, сс. 303-306].

Таким свойством оказывается наличие у алгебры, так называемого, DTI-семейства соотношений, которое мы определяем в пункте 3.

В качестве предварительного результата, в первом пункте явно предъявляются первые два дифференциала минимальной проективной резольвенты бимодуля A в виде прямых сумм и матриц, используя при этом хорошо известные описания этих дифференциалов на другом языке [8, предложение 2.2.6], [9]. В пункте 2 мы вводим и исследуем функтор транспозиции на категории бимодулей $(-)^{t^e} : \mathrm{bimod}\text{-}A \to \mathrm{bimod}\text{-}A$, который аналогичен классическому функтору транспозиции $(-)^t = \mathrm{Hom}_A(-, A) : \mathrm{mod}\text{-}A \to A\text{-}\mathrm{mod}$. В пункте 4 мы доказываем основную теорему о том, что алгебра, допускающая DTI-семейство соотношений, за некоторым исключением, имеет стабильную Калаби-Яу размерность равную трем (Теорема 4.3). Пункты 5, 6, 7 посвящены различным примерам алгебр, допускающих семейство DTI-соотношений. В частности, в пункте 6 доказывается, что все алгебры кватернионного типа из списка Эрдманн [7, сс. 303-306] допускают DTI-семейство соотношений. Затем в пункте 8 мы предъявляем явно минимальную бимодульную резольвенту для самоинъективных алгебр с DTI-семейством соотношений (Теорема 8.6). Для этого в начале доказываются некоторые факты, касающиеся структуры фробениусовой алгебры на самоинъективной алгебре путей колчана с соотношениями. В частности, доказывается, что всегда можно выбрать такую фробениусову форму, что соответствующий автоморфизм Накаямы

$\tilde{\nu}$ удовлетворяет свойству $\tilde{\nu}(e_i) = e_j$, где e_i – идемпотенты, соответствующие вершинам колчана.

1 Начальные члены минимальной проективной бимодульной резольвенты алгебры.

Пусть $\mathbf{k}$ – поле и A – конечномерная $\mathbf{k}$-алгебра. Тогда через mod-A обозначим категорию конечнопорожденных правых A-модулей, через A-mod категорию конечнопорожденных левых A-модулей, и через bimod-A категорию конечнопорожденных A-бимодулей. Если не оговорено противное, будем считать все все модули правыми, и все модули и бимодули конечнопорожденными.

В этом пункте мы опишем как устроены первые три члена минимальной проективной резольвенты бимодуля A и дифференциалы между ними. В этом пункте не доказывается ничего нового, а только приводятся некоторые известные результаты в удобной для нас форме (см. [8, предложение 2.2.6], [9]).

Пусть Q – колчан, $\mathbf{k}Q$ – алгебра путей колчана Q. Произведение стрелок в этой алгебре мы записываем слева направо. Начало стрелки α обозначаем через $s(\alpha)$, конец через $t(\alpha)$. Через J обозначим идеал, порожденный стрелками $\alpha \in Q_1$. Нас будут интересовать алгебры путей колчана с соотношениями $A = \mathbf{k}Q/I$, где I – допустимый идеал. Образ идеала J в алгебре A – это радикал алгебры A, он будет обозначаться через J_A.

Через $\mathbf{k}Q_0$ обозначим подалгебру в $\mathbf{k}Q$, порожденную идемпотентами $\{e_i\}_{i\in Q_0}$; ясно, что $\mathbf{k}Q_0 \cong \mathbf{k}Q/J \cong A/J_A$. Эта алгебра изоморфна произведению $|Q_0|$ экземпляров поля $\mathbf{k}$, и поэтому она сепарабельна. Категория бимодулей над алгеброй $\mathbf{k}Q_0$ устроена очень просто. $\mathbf{k}Q_0$-бимодуль S полностью определяется набором векторных пространств $\{e_iSe_j\}$. И если S, T – $\mathbf{k}Q_0$-бимодули, то гомоморфизм бимодулей $f : S \to T$ – это линейное отображение, для которого $f(e_iSe_j) \subseteq e_iTe_j$.

Ненулевые элементы $\mathbf{k}Q_0$-бимодуля S, принадлежащие одному из пространств e_iSe_j, назовем направленными; для направленных элементов $x \in e_iSe_j$ вершину $s(x) := i$ назовем началом элемента x, вершину $t(x) := j$ – концом элемента x, а пару $(s(x), t(x))$ назовем направлением элемента x. Эти понятия обобщают соответствующие понятия для путей из алгебры $\mathbf{k}Q$. В этой терминологии гомоморфизм $\mathbf{k}Q_0$-бимодулей – это линейное отображение, которое сохраняет направление направленных элементов.

Легко видеть, что множество направленных элементов $\mathcal{B}$ порождает $\mathbf{k}Q_0$-бимодуль S тогда и только тогда, когда оно порождает его как векторное пространство. Назовем базис, составленный из направленных элементов, направленным базисом. Если $\mathcal{B}$ – направленный базис $\mathbf{k}Q_0$-бимодуля S, то для любого набора направленных элементов $\{t_b \in T\}_{b\in\mathcal{B}}$ таких, что направления b и t_b совпадают, существует единственный гомоморфизм $\mathbf{k}Q_0$-бимодулей $f : S \to T$ такой, что $f(b) = t_b$. Из этого описания легко видеть, что категория $\mathbf{k}Q_0$-бимодулей полупроста, и понятно, как явно строить расщепления мономорфизмов и эпиморфизмов.

Пусть $\alpha \in Q_1$, обозначим через $\frac{\partial}{\partial\alpha} : \mathbf{k}Q \to A\otimes A$ линейное отображение, заданное на путях по формуле

$$\frac{\partial(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)}{\partial\alpha} = \sum_{i\,:\,\alpha_i=\alpha} \alpha_1\dots\alpha_{i-1}e_{s(\alpha)} \otimes e_{t(\alpha)}\alpha_{i+1}\dots\alpha_n.$$

Например, если α и β – две петли вокруг вершины $i \in Q_0$, то

$$\frac{\partial\alpha^2\beta\alpha}{\partial\alpha} = e_i \otimes \alpha\beta\alpha + \alpha\otimes\beta\alpha + \alpha^2\beta\otimes e_i.$$

Легко видеть, что $\frac{\partial}{\partial\alpha}$ – дифференцирование.

Проективные неразложимые бимодули обозначим следующим образом: $P_{i,j} = Ae_i \otimes e_jA$, и будем считать их вложенными в обертывающую алгебру $A^e = A^{op}\otimes A$. Если есть два проективных неразложимых бимодуля $P_{i,j}$ и $P_{k,l}$, то любой гомоморфизм бимодулей $P_{i,j} \to P_{k,l}$ – это умножение слева на элемент пространства $e_iAe_k\otimes e_lAe_j \subseteq A^e$, и это сопоставление задает изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(P_{i,j}, P_{k,l}) \cong e_iAe_k \otimes e_lAe_j.$$

Мы будем отождествлять гомоморфизм и элемент, умножением на который он задается. Гомоморфизм между прямыми суммами проективных неразложимых бимодулей задается матрицей из таких элементов.

Если M – A-бимодуль, то его верхушкой назовем бимодуль $\mathrm{top}(M) = M/(J_AM + MJ_A)$. Гомоморфизм проекции на верхушку обозначим через $\pi_M : M \to \mathrm{top}(M)$. В частности, простой бимодуль соответствующий вершинам i, j описывается следующим образом: $S_{ij} = \mathrm{top}(P_{ij})$. Теперь рассмотрим идеал $I \triangleleft \mathbf{k}Q$ как $\mathbf{k}Q$-бимодуль. По аналогии положим

$$\mathrm{top}(I) = \frac{I}{JI + IJ}.$$

Введем обозначение для канонической проекции $\pi = \pi_I : I \to \mathrm{top}(I)$. ($\mathbf{k}Q$-бимодуль $\mathrm{top}(I)$ может не совпадать с верхушкой $\mathbf{k}Q$-бимодуля I с точки зрения общей теории колец и модулей. Но он совпадает с топологической верхушкой этого бимодуля, если рассматривать $\mathbf{k}Q$ как топологическую алгебру с топологией, порожденной идеалом J, и бимодуль I как топологический бимодуль.)

На протяжении всей статьи используется следующее обозначение. Если X – некоторое множество и $x, y \in X$, то

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y \\ 0, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Предложение 1.1. *Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$, и $\mathscr{R} = \{r_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ – направленное семейство элементов I, образ которого $\pi\mathscr{R}$ образует базис в $\mathrm{top}(I)$. Тогда следующая последовательность образует начало минимальной проективной резольвенты бимодуля A:*

$$\mathbf{P}_2^{\mathscr{R}} \xrightarrow{\mathbf{d}_2^{\mathscr{R}}} \mathbf{P}_1 \xrightarrow{\mathbf{d}_1} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{m} A \longrightarrow 0,$$

где

$$\mathbf{P}_0 = \bigoplus_{i\in Q_0} P_{i,i},\ \mathbf{P}_1 = \bigoplus_{\alpha\in Q_1} P_{s(\alpha),t(\alpha)},\ \mathbf{P}_2^{\mathscr{R}} = \bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} P_{s(r_i),t(r_i)},$$

$m = (m_i)_{i\in Q_0}^{\top}$, $m_i(a\otimes b) = ab$, *где* $a \in Ae_i, b \in e_iA$.
$\mathbf{d}_1 = (d_{i,\alpha})_{(i,\alpha)\in Q_0\times Q_1}$, $d_{i,\alpha} = \delta_{i,s(\alpha)}(e_{s(\alpha)}\otimes\alpha) - \delta_{i,t(\alpha)}(\alpha\otimes e_{t(\alpha)})$,
$\mathbf{d}_2^{\mathscr{R}} = \left(\frac{\partial r_i}{\partial\alpha}\right)_{(\alpha,i)\in Q_1\times\mathfrak{I}}$.

Доказательство. Для доказательства этого предложения нам потребуются некоторые вспомогательные определения и утверждения.

Пусть S – $\mathbf{k}Q_0$-бимодуль, тогда A-бимодуль $\mathscr{P}(S) = A\otimes_{\mathbf{k}Q_0} S\otimes_{\mathbf{k}Q_0} A$ – проективен. В [9, лемма 2.3] доказано, что если M – A-бимодуль, то

$$\sigma_M : \mathscr{P}(\mathrm{top}(M)) \twoheadrightarrow M,$$

$$\sigma_M(a\otimes m\otimes b) = a\cdot\iota(m)\cdot b$$

– проективное накрытие, где ι – произвольное расщепление эпиморфизма π_M в категории $\mathbf{k}Q_0$-бимодулей.

Рассмотрим линейное отображение $\Delta : \mathbf{k}Q \to \mathscr{P}(J/J^2)$, которое задается на путях следующим образом

$$\Delta(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \otimes \alpha_i \otimes \alpha_{i+1} \dots \alpha_n.$$

Оно является дифференцированием. Так как I лежит в аннуляторе бимодуля $\mathscr{P}(J/J^2)$, то из этого следует, что $\Delta|_I$ – гомоморфизм $\mathbf{k}Q$-бимодулей и $\Delta|_{I^2} = 0$.

В [8, предложение 2.2.6] доказано, что имеет место следующая точная последовательность A-бимодулей

$$0 \to I/I^2 \xrightarrow{c} \mathscr{P}(J/J^2) \xrightarrow{d} \mathscr{P}(\mathbf{k}Q_0) \xrightarrow{\mu} A \to 0,$$

где $\mu(a \otimes b \otimes c) = abc$, $\ d(1 \otimes \alpha \otimes 1) = 1 \otimes 1 \otimes \alpha - \alpha \otimes 1 \otimes 1$, а c индуцировано Δ.

Легко видеть, что $\operatorname{top}(I) \cong \operatorname{top}(I/I^2)$. Обозначим композицию проекции $\pi_{I/I^2} : I/I^2 \twoheadrightarrow \operatorname{top}(I/I^2)$ и этого изоморфизма через $\pi' : I/I^2 \to \operatorname{top}(I)$. Тогда отображение

$$\sigma' : \mathscr{P}(\operatorname{top}(I)) \twoheadrightarrow I/I^2,$$
$$\sigma'(a \otimes x \otimes b) = a \cdot \iota'(x) \cdot b$$

является проективным накрытием, где ι' – произвольное расщепление π' в категории $\mathbf{k}Q_0$-бимодулей. Пусть теперь $\mathscr{R} = \{r_i\}_{i \in \mathfrak{I}}$ – некоторое семейство направленных элементов из I такое, что их образы в $\operatorname{top}(I)$ образуют направленный базис. Тогда выберем $\iota' : \operatorname{top}(I) \to I/I^2$ так, что $\iota'(r_i + JI + IJ) = r_i + I^2$.

Если мы рассмотрим композицию $\tilde{c} = c \circ \sigma'$, то получим начало минимальной проективной бимодульной резольвенты

$$\mathscr{P}(\operatorname{top}(I)) \xrightarrow{\tilde{c}} \mathscr{P}(J/J^2) \xrightarrow{d} \mathscr{P}(\mathbf{k}Q_0) \xrightarrow{\mu} A \to 0.$$

Причем для любого $i \in \mathfrak{I}$ выполнено $\tilde{c}(1 \otimes r_i \otimes 1) = \Delta(r_i)$. (В этой записи сознательно допущена неточность. Иногда, когда это не будет вызывать путаницы, мы будем обозначать образ элемента при факторизации той же буквой, что и сам элемент.)

Для доказательства осталось построить изоморфизмы $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} P_{s(r_i),t(r_i)} \arrow[r, "\mathbf{d}_2^{\mathscr{R}}"] \arrow[d, "\varphi_2"] & \bigoplus_{\alpha\in Q_1} P_{s(\alpha),t(\alpha)} \arrow[r, "\mathbf{d}_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & \bigoplus_{i\in Q_0} P_{i,i} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\varphi_0"] & A \arrow[d, equal] \\
\mathscr{P}(\mathrm{top}(I)) \arrow[r, "\tilde{c}"] & \mathscr{P}(J/J^2) \arrow[r, "d"] & \mathscr{P}(\mathbf{k}Q_0) \arrow[r, "\mu"] & A
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Обозначим единообразно следующие $\mathbf{k}Q_0$-бимодули: $T_0 := \mathbf{k}Q_0$, $T_1 := J/J^2$, $T_2 := \mathrm{top}(I)$. Рассмотрим их направленные базисы: $\mathcal{B}_0 := \{e_i \in \mathbf{k}Q_0 \mid i \in Q_0\}$, $\mathcal{B}_1$ – образ Q_1 в J/J^2 и $\mathcal{B}_2 = \{\pi(r_i) \mid i \in I\}$. Определим гомоморфизм

$$\varphi_l : \bigoplus_{b\in\mathcal{B}_l} P_{s(b),t(b)} \to \mathscr{P}(T_l),$$

$$\varphi_l((x_b \otimes y_b)_b) = \sum_{b\in\mathcal{B}} x_b \otimes b \otimes y_b.$$

Чтобы доказать, что φ_l – изоморфизм, предъявим явно обратный гомоморфизм ψ_l. Обозначим через $\mathcal{B}_l^* = \{b^* \mid b \in \mathcal{B}_l\}$ сопряженный базис пространства $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(T_l, \mathbf{k})$. Тогда определим гомоморфизм

$$\psi_l : \mathscr{P}(T_l) \to \bigoplus_{b\in\mathcal{B}_l} P_{s(b),t(b)},$$

$$\psi_l(x \otimes t \otimes y) = \big(b^*(t) \cdot (xe_{s(b)} \otimes e_{t(b)}y)\big)_{b\in\mathcal{B}_l}.$$

Легко видеть, что этот гомоморфизм корректно определен и обратен φ_l.

Доказательство того, что полученная диаграмма коммутативна, оставляем читателю. □

2 Функтор $(-)^{t^e}$: bimod-A → bimod-A.

Пусть A – конечномерная алгебра. Функтором транспозиции над A назовем контравариантный функтор

$$\mathscr{T} = (-)^t = \mathrm{Hom}_A(-, A) : \text{mod-}A \to A\text{-mod}.$$

Для произвольных векторных пространств U, V обозначим через $\mathrm{tw} : U \otimes V \to V \otimes U$ отображение перестановки, действующее по формуле $\mathrm{tw}(v \otimes u) = u \otimes v$.

Построим контравариантный функтор транспозиции над $A^e = A^{op} \otimes A$ на категории A-бимодулей. Каждый A-бимодуль можно рассматривать, как правый модуль над обертывающей алгеброй $A^e = A^{op} \otimes A$, или как левый модуль над A^e по следующим правилам

$$m(a \otimes b) = amb = (b \otimes a)m.$$

Точнее говоря, имеется изоморфизм категорий

$$\text{bimod-}A \cong \text{mod-}A^e \cong A^e\text{-mod}.$$

Скомпоновав эти изоморфизмы с функтором двойственности относительно A^e, получим функтор

$$\mathscr{T}^e = (-)^{t^e} = \mathrm{Hom}_{A^e}(-, A \otimes A) : \text{bimod-}A \to \text{bimod-}A.$$

Другими словами, здесь подразумевается, что на пространстве $A \otimes A = A^e$ заданы две коммутирующие структуры A-бимодуля. Одна стандартная, которую мы будем называть внешней, индуцирована из структуры правого A^e-модуля на A^e:

$$a \cdot x \cdot b = x(a \otimes b) = ax_1 \otimes x_2 b,$$

где $x = x_1 \otimes x_2 \in A \otimes A$. Вторая, так называемая, внутренняя структура бимодуля на этом пространстве наследуется из структуры левого A^e-модуля на A^e. Ее мы обозначим следующим образом:

$$a \star x \star b = (b \otimes a)x = x_1 b \otimes a x_2 = \mathrm{tw}(a \cdot \mathrm{tw}(x) \cdot b).$$

Когда речь идет о гомоморфизмах бимодулей $f : M \to A \otimes A$, то подразумевается, что пространство $A \otimes A$ наделено внешней структурой бимодуля. А когда задается структура A-бимодуля на $\mathrm{Hom}_{A^e}(M, A \otimes A)$, то используется внутренняя структура бимодуля на пространстве $A \otimes A$. То есть если $f \in \mathrm{Hom}_{A^e}(M, A \otimes A)$, то $(afb)(m) = a \star f(m) \star b$.

Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – алгебра путей колчана с соотношениями. Выясним, как этот функтор действует на категории конечнопорожденных проективных бимодулей $\mathcal{P}$. Вначале построим меньшую категорию $\mathcal{P}_0$, которая будет эквивалентна $\mathcal{P}$, но которая для нас более удобна.

Пусть $\mathfrak{K}$ – некоторое конечное множество и $\{M_k\}_{k \in \mathfrak{K}}$ – семейство бимодулей. Положим

$$\bigoplus_{k \in \mathfrak{K}} M_k = \{x : \mathfrak{K} \to \bigcup_{k \in \mathfrak{K}} M_k \mid \forall k \in \mathfrak{K} \quad x(k) \in M_k\}.$$

Оснастим стандартным образом это множество структурой бимодуля. Будем называть этот бимодуль прямой суммой семейства $\{M_k\}_{k\in\mathfrak{K}}$. Его элементы будем записывать следующим образом $x = (x_k)_{k\in\mathfrak{K}}$, где $x_k = x(k)$. Обозначим через

$$\mathcal{P}_0 \subset \text{bimod-}A$$

полную подкатегорию в категории bimod-A, состоящую из проективных бимодулей вида $\bigoplus_{k\in\mathfrak{K}} P_{i_k,j_k}$, для конечных множеств $\mathfrak{K}$. Из теоремы Крулля-Шмидта следует эквивалентность категорий $\mathcal{P}_0 \simeq \mathcal{P}$. Любой морфизм $f : \bigoplus_{k\in\mathfrak{K}} P_{i_k,j_k} \to \bigoplus_{l\in\mathfrak{L}} P_{i_l,j_l}$ в категории $\mathcal{P}_0$ задается "матрицей" $(f_{lk})_{(l,k)\in\mathfrak{L}\times\mathfrak{K}}$, где $f_{lk} \in e_{i_k}Ae_{i_l} \otimes e_{j_l}Ae_{j_k}$, следующим образом $f((x_k)_{k\in\mathfrak{K}}) = (\sum_{k\in\mathfrak{K}} f_{lk}x_k)_{l\in\mathfrak{L}}$, с которой мы этот морфизм будем отождествлять. Когда это не будет вызывать путаницы, ради краткости множества индексов будем опускать.

Определим контравариантный функтор

$$\mathrm{TW} : \mathcal{P}_0 \to \text{bimod-}A,$$

$$\mathrm{TW}\Big(\bigoplus P_{i_k,j_k}\Big) = \bigoplus P_{j_k,i_k},$$

и если $f : \bigoplus P_{i_k,j_k} \to \bigoplus P_{i_l,j_l}$, где $f = (f_{lk})_{l,k}$, то

$$\mathrm{TW}(f) = (\mathrm{tw}(f_{lk}))_{k,l}.$$

Легко проверить, что TW – контравариантный функтор (это следует из того, что $\mathrm{tw} : A^e \to A^e$ – инволюция).

Предложение 2.1. $\mathscr{T}^e|_{\mathcal{P}_0} \cong \mathrm{TW}$.

Доказательство. Построим изоморфизм функторов $\Theta : \mathscr{T}^e|_{\mathcal{P}_0} \to \mathrm{TW}$. Построим его сначала на неразложимых бимодулях.

$$\Theta_{P_{i,j}} : \mathrm{Hom}_{A^e}(P_{i,j}, A \otimes A) \to P_{j,i},$$

$$\Theta_{P_{i,j}}(f) = \mathrm{tw}\big(f(e_i \otimes e_j)\big).$$

Легко видеть, что $\Theta_{P_{i,j}}$ – изоморфизм. Теперь определим его на произвольном бимодуле $P = \bigoplus P_{i_k,j_k}$ категории $\mathcal{P}_0$:

$$\Theta_P : P^{t^e} \cong \bigoplus P^{t^e}_{i_k,j_k} \xrightarrow{\oplus\Theta_{P_{i_k,j_k}}} \mathrm{TW}(P).$$

Непосредственно проверяется, что это естественное преобразование. □

3 DTI-семейство соотношений.

Основной целью настоящей статьи является изучение алгебр путей колчана с соотношениями $A = \mathbf{k}Q/I$ (где I – допустимый идеал), для которых существует семейство соотношений с некоторыми специальными свойствами.

Определение 3.1. Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – алгебра путей с соотношениями. Q_1-индексированное семейство $\mathscr{R} = \{r_\alpha\}_{\alpha\in Q_1}$, составленное из элементов идеала I, назовем DTI-семейством соотношений (дифференциально twist-инвариантным семейством соотношений), если выполнены следующие три условия.
`(DTI-1)` $r_\alpha \in e_{t(\alpha)} I e_{s(\alpha)}$ для всех $\alpha \in Q_1$.
`(DTI-2)` $\frac{\partial r_\beta}{\partial \alpha} = \mathrm{tw}\left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial \beta}\right)$ для всех $\alpha, \beta \in Q_1$.
`(DTI-3)` семейство $\pi\mathscr{R} = \{\pi(r_\alpha)\}_{\alpha\in Q_1}$ образует базис в $\mathrm{top}(I)$, где $\pi : I \to \mathrm{top}(I)$ – каноническая проекция.

Пункт `(DTI-1)` означает, что направление соотношения r_α противоположно направлению α. Из того, что семейство соотношений является DTI-семейством, не следует, что оно порождает идеал соотношений. Контрпримерами к этому являются алгебры кватернионного типа из списка Эрдманн, которые мы обсуждаем в пункте 6.

Замечание 3.2. Если у алгебры $A = \mathbf{k}Q/I$ есть DTI-семейство соотношений, то имеет место изоморфизм бимодулей

$$\mathrm{top}(I) \cong \bigoplus_{\alpha\in Q_1} S_{t(\alpha),s(\alpha)}.$$

Предложение 3.3. *Условие* `(DTI-3)` *в определении* DTI-*семейства соотношений, по модулю остальных условий, эквивалентно следующему условию* `(DTI-3′)=(DTI-3′a)∧(DTI-3′b)`*:*
`(DTI-3′a)` *семейство* $\pi\mathscr{R}_{i,j}$ *линейно независимо для любых* $i, j \in Q_0$, *где* $\mathscr{R}_{i,j} = \{r_\alpha\}_{\alpha:i\to j}$.
`(DTI-3′b)` $(\mathscr{R}) + JI + IJ = I$, *где* $(\mathscr{R})$ *– идеал, порожденный семейством* $\mathscr{R}$.

Замечание 3.4. В том случае, когда у колчана Q нет параллельных стрелок, условие `(DTI-3′a)` эквивалентно тому, что $\pi(r_\alpha) \neq 0$ для всех $\alpha \in Q_1$.

Доказательство предложения 3.3.

`(DTI-3)`$\Rightarrow$`(DTI-3′)`. Условие `(DTI-3′a)` очевидно. Так как $\pi\mathscr{R}$ порождает $\mathrm{top}(I)$ как векторное пространство, то оно его порождает и как $\mathbf{k}Q$-бимодуль. Следовательно,

$$I = \pi^{-1}(\langle\pi\mathscr{R}\rangle_{\mathbf{k}Q^e}) = \pi^{-1}(\pi(\langle\mathscr{R}\rangle_{\mathbf{k}Q^e})) = \langle\mathscr{R}\rangle_{\mathbf{k}Q^e} + \mathrm{Ker}(\pi) = (\mathscr{R}) + JI + IJ.$$

`(DTI-1)`$\wedge$`(DTI-2)`$\wedge$`(DTI-3′)`$\Rightarrow$`(DTI-3)`. Так как $\pi\mathscr{R}_{i,j}$ лежат в разных прямых слагаемых $\mathrm{top}(I) = \bigoplus e_i \mathrm{top}(I) e_j$, то из линейной независимости $\pi\mathscr{R}_{i,j}$ следует линейная независимость $\pi\mathscr{R}$.

Докажем, что $\pi\mathscr{R}$ порождает $\mathrm{top}(I)$ как векторное пространство. Из условия `(DTI-3′b)` следует, что $\pi\mathscr{R}$ порождает $\mathrm{top}(I)$ как $\mathbf{k}Q$-бимодуль. Так как идеал J лежит в аннуляторе бимодуля $\mathrm{top}(I)$, то из этого следует, что этот образ порождает его как $\mathbf{k}Q_0$-бимодуль. А так как $\pi\mathscr{R}$ состоит из направленных элементов, из этого следует, что оно порождает $\mathrm{top}(I)$ как векторное пространство. □

Предложение 3.5. *Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ и $\mathscr{R} = \{r_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ – семейство элементов идеала I, образ которого образует базис в $\mathrm{top}(I)$, и $d_2^{\mathscr{R}} : \mathbf{P}_2^{\mathscr{R}} \to \mathbf{P}_1$ – морфизм из предложения* 1.1. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *морфизм $d_2^{\mathscr{R}}$ инвариантен относительно функтора* TW *(в том смысле, что $\mathrm{TW}(\mathbf{P}_2^{\mathscr{R}}) = \mathbf{P}_1, \mathrm{TW}(\mathbf{P}_1) = \mathbf{P}_2^{\mathscr{R}}, \mathrm{TW}(d_2^{\mathscr{R}}) = d_2^{\mathscr{R}}$);*

2. *$\mathfrak{I} = Q_1$ и $\mathscr{R}$ –* DTI-*семейство соотношений.*

Доказательство. Напомним, что прямая сумма бимодулей $\bigoplus_{i\in\mathfrak{A}} M_i$ по конечному множеству индексов $\mathfrak{A}$ определяется как множество функций $\mathfrak{A} \to \bigcup_{i\in\mathfrak{A}} M_i$, для которых образ i лежит в M_i, с покоординатными действиями. Тогда из теоретико-множественного равенства двух прямых сумм следует, что множества индексов, по которым берется суммирование, совпадают. Таким образом, из того, что $\mathrm{TW}(\mathbf{P}_2^{\mathscr{R}}) = \mathbf{P}_1$ следует, что $\mathfrak{I} = Q_1$.

Будем теперь считать, что $\mathfrak{I} = Q_1$. Легко видеть, что равенства $\mathrm{TW}(\mathbf{P}_2^{\mathscr{R}}) = \mathbf{P}_1, \mathrm{TW}(\mathbf{P}_1) = \mathbf{P}_2^{\mathscr{R}}$ эквивалентны друг другу, поэтому достаточно следить только за одним из них. По определению имеем

$$\mathrm{TW}(\mathbf{P}_1) = \bigoplus_{\alpha\in Q_1} P_{t(\alpha),s(\alpha)}, \quad \mathbf{P}_2^{\mathscr{R}} = \bigoplus_{\alpha\in Q_1} P_{s(r_\alpha),t(r_\alpha)},$$

$$d_2^{\mathscr{R}} = \left(\frac{\partial r_\beta}{\partial \alpha}\right)_{(\alpha,\beta)\in Q_1\times Q_1}, \quad \mathrm{TW}(d_2^{\mathscr{R}}) = \left(\mathrm{tw}\left(\frac{\partial r_\beta}{\partial \alpha}\right)\right)_{(\beta,\alpha)\in Q_1\times Q_1}.$$

Из этого следует, что равенство $\mathrm{TW}(\mathbf{P}_1) = \mathbf{P}_2^{\mathscr{R}}$ эквивалентно (DTI-1), а равенство $\mathrm{TW}(d_2^{\mathscr{R}}) = d_2^{\mathscr{R}}$ эквивалентно (DTI-2). Свойство (DTI-3) дано по условию. □

4 Стабильная Калаби–Яу размерность алгебр с DTI-семейством соотношений.

Пусть A – конечномерная алгебра. Напомним, что функтором Накаямы называется функтор

$$\nu = D((-)^t) : \text{mod-}A \to \text{mod-}A.$$

Он является автоэквивалентностью тогда и только тогда, когда A самоинъективна, и изоморфен тождественному тогда и только тогда, когда A – симметрическая алгебра. В дальнейшем мы будем предполагать, что алгебра A самоинъективна.

Алгебра A называется фробениусовой, если задано отображение $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$ такое, что композиция

$$A \otimes A \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k}$$

$$a \otimes b \mapsto \varepsilon(ab)$$

является невырожденной билинейной формой. В этом случае ε называется фробениусовой формой. Фробениусовы алгебры самоинъективны.

Автоморфизмом Накаямы фробениусовой алгебры A называется отображение $\tilde{\nu} : A \to A$, которое задается соотношением $\varepsilon(ab) = \varepsilon(b\tilde{\nu}(a))$, для любых $a, b \in A$. Как легко видеть, это отображение является автоморфизмом алгебры A. Автоморфизм Накаямы алгебры A непосредственно связан с функтором Накаямы. Хорошо известно, что отображение $A \to D(A)$, $a \mapsto a\varepsilon$ задает изоморфизм левых модулей. Причем из определения автоморфизма Накаямы следует, что $\varepsilon a = \tilde{\nu}(a)\varepsilon$. Откуда получаем, что имеет место изоморфизм бимодулей $A_{\tilde{\nu}} \cong D(A)$, где $A_{\tilde{\nu}}$ – бимодуль, подлежащее векторное пространство которого и умножение слева совпадают с бимодулем A, а умножение справа задается по формуле: $m * a = m\tilde{\nu}(a)$. Но известно, что $\nu \cong - \otimes_A D(A)$, следовательно,

для фробениусовых алгебр функтор Накаямы связан с автоморфизмом Накаямы следующим образом
$$\nu \cong (-)_{\tilde{\nu}},$$
где $(-)_{\tilde{\nu}} : \mathrm{mod}\text{-}A \to \mathrm{mod}\text{-}A$ – функтор, который не меняет подлежащее векторное пространство модуля, а умножение меняется следующим образом: $m * a = m\tilde{\nu}(a)$.

Если $F : \mathrm{mod}\text{-}A \to \mathrm{mod}\text{-}A$ – $\mathbf{k}$-линейный функтор, который переводит проективные модули в проективные модули, то он индуцирует функтор на стабильной категории, который мы обозначим следующим образом: $\underline{F} : \underline{\mathrm{mod}}\text{-}A \to \underline{\mathrm{mod}}\text{-}A$.

Лемма 4.1. *Если A – конечномерная самоинъективная алгебра и $\Omega^{n+1}_{A^e}(A) \cong A^{t^e}$, то $\Omega^{n+1}_A \cong \underline{\nu}^{-1}$; в частности, $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) \leqslant n$.*

Доказательство. В [12] доказано, что
$$\nu^{-1} \cong - \otimes_A A^{t^e}. \tag{4.1}$$
Кроме того, легко проверить, что имеется изоморфизм функторов в стабильной категории $\Omega^{n+1}_A \cong \underline{- \otimes_A \Omega^{n+1}_{A^e}(A)}$, что и завершает доказательство. □

Обозначим через $A^{Nak}_{n,m}$ следующую алгебру путей колчана с соотношениями

$$\begin{tikzcd}
Q: & & 0 \arrow[r, "\alpha_0"] & 1 \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\
& n-1 \arrow[ur, "\alpha_{n-1}"] & & & 2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& \vdots \arrow[u, "\alpha_{n-2}"] & & & \vdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{gathered} \ldots \qquad \ldots \\ \alpha_i \ldots \alpha_{i+m-1} = 0. \end{gathered}$$

В последнем соотношении индексы рассматриваются по модулю n. Это связная алгебра Накаямы длины Лоэва m, имеющая n простых модулей. В [6] показано, что если $A = \mathbf{k}Q/I$ – связная самоинъективная алгебра путей колчана с соотношениями, то $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $A \cong A^{Nak}_{n,2}$.

Предложение 4.2. *Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – связная самоинъективная алгебра путей колчана с соотношениями, не изоморфная алгебрам $\mathbf{k}[x]/(x^n)$ и $A^{Nak}_{3,2}$. Тогда если $\Omega^4_{A^e}(A) \cong A^{t^e}$, то $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) = 3$.*

Доказательство. Из предыдущей леммы следует, что $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) \leqslant 3$. Нам нужно доказать, что $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) = 3$. Предположим обратное, пусть $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) \leqslant 2$.

Пусть $\Omega^3_A \cong \underline{\nu}^{-1}$. Тогда из соотношений $\Omega^3_A \cong \underline{\nu}^{-1}$ и $\Omega^4_A \cong \underline{\nu}^{-1}$ следует, что $\Omega_A \cong \mathrm{Id}$, откуда вытекает $\underline{\nu}^{-1} \cong \Omega^3_A \cong \mathrm{Id}$, а значит $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) = 0$. Таким образом, $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A)$ может быть равно только 0 или 1.

Если $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) = 1$, то из [6, предложение 2.2] следует, что $A \cong \mathbf{k}[x]/(x^n)$, что запрещено по условию.

Если $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) = 0$, то $A \cong A^{Nak}_{n,2}$, причем $\underline{\nu}^{-1} \cong \Omega_A$. Из соотношений $\underline{\nu}^{-1} = \Omega_A$ и $\Omega^4_A \cong \underline{\nu}^{-1}$ следует, что $\Omega^3_A \cong \mathrm{Id}$. Откуда следует, что $\nu^3 \cong \Omega^{-3}_A \cong \mathrm{Id}$. Алгебра $A^{Nak}_{n,2}$ является фробениусовой алгеброй, автоморфизм Накаямы которой $\tilde{\nu} : A^{Nak}_{n,2} \to A^{Nak}_{n,2}$ индуцируется поворотом колчана по часовой стрелке на угол $\frac{2\pi}{n}$. Так как для фробениусовых алгебр $\nu(M) \cong M_{\tilde{\nu}}$, то из соотношения $\underline{\nu}^3 \cong \mathrm{Id}$ следует соотношение $\tilde{\nu}^3 = \mathrm{id}$, откуда получаем, что $n = 3$ или $n = 1$. В первом случае $A \cong A^{Nak}_{3,2}$, а во втором $A \cong A^{Nak}_{1,2} \cong \mathbf{k}[x]/(x^2)$, и то, и другое запрещено по условию. $\square$

Теорема 4.3. *Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – самоинъективная алгебра путей колчана с соотношениями.*

1. *Если у алгебры A есть* DTI*-семейство соотношений, то $\Omega^4_{A^e}(A) \cong A^{t^e}$.*
2. *Если, кроме того, аглебра A связна и не изоморфна алгебрам $\mathbf{k}[x]/(x^n)$ и $A^{Nak}_{3,2}$, то $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) = 3$.*

Доказательство. Ясно, что пункт (2) следует из пункта (1) и предложения 4.2. Докажем пункт (1).

Пусть $\mathscr{R}$ – DTI-семейство соотношений. По предложению 1.1 последовательность

$$\mathbf{P}_2^{\mathscr{R}} \xrightarrow{\mathbf{d}_2^{\mathscr{R}}} \mathbf{P}_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{m} A \longrightarrow 0$$

является началом минимальной проективной резольвенты бимодуля A. Так как алгебра A самоинъективна, то и алгебра A^e самоинъективна, следовательно, функтор $(-)^{t^e}$ точен и переводит проективные бимодули в проективные бимодули. Таким образом, после его применения к началу проективной резольвенты A получим начало инъективной резольвенты бимодуля A^{t^e}. Воспользовавшись тем, что $(-)^{t^e}|_{\mathcal{P}_0} \overset{\Theta}{\cong} \mathrm{TW}$, тем, что $\mathrm{TW}(\mathbf{P}_0) = \mathbf{P}_0$, и предложением 3.5, получаем, что последовательность

$$0 \longrightarrow A^{t^e} \xrightarrow{\Theta \circ m^{t^e}} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{\mathrm{TW}(\mathbf{d}_1)} \mathbf{P}_2^{\mathscr{R}} \xrightarrow{\mathbf{d}_2^{\mathscr{R}}} \mathbf{P}_1$$

является минимальной инъективной резольвентой бимодуля A^{t^e}. Откуда получаем, что следующая последовательность точна:

$$0 \to A^{t^e} \xrightarrow{m'} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{\mathbf{d}_3} \mathbf{P}_2^{\mathscr{R}} \xrightarrow{\mathbf{d}_2^{\mathscr{R}}} \mathbf{P}_1 \xrightarrow{\mathbf{d}_1} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{m} A \to 0, \tag{4.2}$$

где $\mathbf{d}_3 = \mathrm{TW}(\mathbf{d}_1)$, и $m' = \Theta \circ m^{t^e}$. Следовательно, $\Omega^4_{A^e}(A) \cong A^{t^e}$. □

5 Алгебры Накаямы $A^{Nak}_{n,m}$ при $n \mid m+1$.

В этом пункте мы исследуем, в каких случаях у алгебр Накаямы $A^{Nak}_{n,m}$, определенных в пункте 4, есть DTI-семейство соотношений.

Предложение 5.1. *Алгебра $A^{Nak}_{n,m}$ допускает* DTI-*семейство соотношений тогда и только тогда, когда $n \mid m+1$.*

Следствие 5.2. *Если $m > 2$ и $n \mid m+1$, то* $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A^{Nak}_{n,m}) = 3$.

Доказательство предложения 5.1. Обозначим соотношения следующим образом $r_{\alpha_i} = \alpha_{i+1} \dots \alpha_{i+m}$, и семейство, составленное из них, обозначим через $\mathscr{R} = \{r_\alpha\}_{\alpha \in Q_1}$. Соотношение r_{α_i} направлено и начинается в вершине $i+1$, а заканчивается в вершине $i+m+1$. Эти соотношения порождают идеал I. Кроме того, легко видеть, что все соотношения r_{α_i} не лежат в $JI + IJ$, следовательно, выполнено условие `(DTI-3′)`.

Из замечания 3.2 следует, что для алгебр с DTI-семейством соотношений пространство $e_i(\mathrm{top}(I))e_j$ не равно 0 тогда и только тогда, когда $i = t(\alpha)$ и $j = s(\alpha)$, для некоторого $\alpha \in Q_1$. Но мы имеем $e_1 r_{\alpha_0} e_{m+1} = r_{\alpha_0}$, откуда получаем $e_1(\mathrm{top}(I))e_{m+1} \neq 0$. Следовательно, если $m+1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)$, то у алгебры $A^{Nak}_{n,m}$ нет DTI-семейства соотношений.

Пусть теперь $n \mid m+1$. Докажем, что смейство $\mathscr{R}$ является DTI-семейством соотношений для алгебры $A^{Nak}_{n,m}$. Действительно, в этом случае $r_{\alpha_i} \in e_{i+1} I e_i$, следовательно, `(DTI-1)` выполняется. И, как мы уже заметили, выполняется (`DTI-3′`). Остается проверить (`DTI-2`), то есть то, что $\frac{\partial r_{\alpha_j}}{\partial \alpha_i} = \mathrm{tw}\left(\frac{\partial r_{\alpha_i}}{\partial \alpha_j}\right)$. Это проверяется прямым вычислением.

$\square$

6 Алгебры кватернионного типа.

Пусть теперь $\mathbf{k}$ – алгебраически замкнутое поле. Следуя [7], конечномерную алгебру назовем алгеброй кватернионного типа, если A – связная, симметрическая, ручная, ее матрица Картана невырожденна и ее стабильный AR-колчан Γ_A^s состоит только из трубок ранга не больше 2. Этот класс алгебр содержит все блоки групповых алгебр конечных групп, у которой группа дефекта является обобщенной группой кватернионов. К.Эрдманн доказала, что любая алгебра кватернионного типа Морита-эквивалентна одной из алгебр, содержащихся в списке [7, сс. 303-306].

Теорема 6.1. *Алгебры кватернионного типа из списка К.Эрдманн* [7, сс. 303-306] *допускают* DTI-*семейство соотношений.*

Из этой теоремы, в частности, вытекает следующий известный факт [6, теорема 5.1].

Следствие 6.2. *Если A – алгебра кватернионного типа, то* $\underline{\mathrm{CY}}\dim(A) = 3$.

В следующей таблице для каждой алгебры из списка Эрдманн в последнем столбце предъявляются порождающие идеала соотношений соответствующей алгебры, причем в нем же обозначены соотношения r_α для $\alpha \in Q_1$, которые, как мы докажем, составляют DTI-семейство соотношений для этой алгебры.

$\mathscr{Q}^k(a,b)$ $k \geqslant 2$, $a, b \in \mathbf{k}$	$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$	$r_\alpha = \alpha^2 - (\beta\alpha)^{k-1}\beta - a\alpha^3$, $r_\beta = \beta^2 - (\alpha\beta)^{k-1}\alpha - b\beta^3$, $\alpha^4,\ \beta^4$.
$\mathscr{Q}^k(2\mathscr{A})(c)$ $k \geqslant 2$ $c \in \mathbf{k}$	$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \end{tikzcd}$	$r_\beta = \gamma\beta\gamma - (\gamma\alpha\beta)^{k-1}\gamma\alpha$, $r_\gamma = \beta\gamma\beta - (\alpha\beta\gamma)^{k-1}\alpha\beta$, $r_\alpha = \alpha^2 - (\beta\gamma\alpha)^{k-1}\beta\gamma - c\alpha^3$, $\alpha^2\beta,\ \alpha^4$.

$\mathscr{Q}^{k,s}(2\mathscr{B})_1(a,c)$ $k \geqslant 1, s \geqslant 3$ $k+s>4$ $a \in \mathbf{k}^*, c \in \mathbf{k}$	$\alpha \circlearrowright 0 \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} 1 \circlearrowleft \eta$	$r_\gamma = \beta\eta - (\alpha\beta\gamma)^{k-1}\alpha\beta,$ $r_\beta = \eta\gamma - (\gamma\alpha\beta)^{k-1}\gamma\alpha,$ $r_\alpha = \alpha^2 - a(\beta\gamma\alpha)^{k-1}\beta\gamma + c\alpha^3,$ $r_\eta = \gamma\beta - \eta^s,$ $\alpha^2\beta, \alpha^4.$
$\mathscr{Q}^{s}(2\mathscr{B})_2(a,c,p)$ $s>3,$ $a \in \mathbf{k}^*, c \in \mathbf{k}$ $p \in \mathbf{k}[t], p(0)=1.$	$\alpha \circlearrowright 0 \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} 1 \circlearrowleft \eta$	$r_\gamma = \alpha\beta - \beta\eta,\ r_\beta = \gamma\alpha - \eta\gamma,$ $r_\alpha = \beta\gamma - \alpha^2 p(\alpha),$ $r_\eta = \eta^2 p(\eta) + a\eta^{s-1} + c\eta^s - \gamma\beta,$ $\alpha^{s+1},\ \eta^{s+1},\ \gamma\alpha^{s-1},\ \alpha^{s-1}\beta.$
$\mathscr{Q}^{t}(2\mathscr{B})_3(a,c,d)$ $t \geqslant 3,$ $a \in \mathbf{k}^*, c,d \in \mathbf{k}$ $t=3 \Rightarrow a \neq 1$ $t \neq 3 \Rightarrow a = 1$	$\alpha \circlearrowright 0 \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} 1 \circlearrowleft \eta$	$r_\gamma = \alpha\beta - \beta\eta,\ r_\beta = \gamma\alpha - \eta\gamma,$ $r_\alpha = \beta\gamma - \alpha^2 + c\alpha^3,$ $r_\eta = a\eta^{t-1} + d\eta^t - \gamma\beta,$ $\alpha^4,\ \eta^{t+1},\ \gamma\alpha^2,\ \alpha^2\beta.$
$\mathscr{Q}^{a,b}(3\mathscr{A})_1(d)$ $a \geqslant b \geqslant 2,$ $d \in \mathbf{k}^*$ $a=b=2 \Rightarrow d \neq 1$ $a \geqslant b \geqslant 3 \Rightarrow d = 1.$	$0 \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} 1 \underset{\eta}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} 2$	$r_\gamma = \beta\delta\eta - (\beta\gamma)^{a-1}\beta,$ $r_\beta = \delta\eta\gamma - (\gamma\beta)^{a-1}\gamma,$ $r_\delta = \eta\gamma\beta - d(\eta\delta)^{b-1}\eta,$ $r_\eta = \gamma\beta\delta - d(\delta\eta)^{b-1}\delta,$ $\beta\delta\eta\delta,\ \eta\gamma\beta\gamma.$
$\mathscr{Q}^{k}(3\mathscr{A})_2$ $k \geqslant 2$	$0 \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} 1 \underset{\eta}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} 2$	$r_\gamma = \beta\gamma\beta - (\beta\delta\eta\gamma)^{k-1}\beta\delta\eta,$ $r_\beta = \gamma\beta\gamma - (\delta\eta\gamma\beta)^{k-1}\delta\eta\gamma,$ $r_\delta = \eta\delta\eta - (\eta\gamma\beta\delta)^{k-1}\eta\gamma\beta,$ $r_\eta = \delta\eta\delta - (\gamma\beta\delta\eta)^{k-1}\gamma\beta\delta,$ $\beta\gamma\beta\delta,\ \eta\delta\eta\gamma.$
$\mathscr{Q}^{k,s}(3\mathscr{B})$ $k \geqslant 1, s \geqslant 3$	$\alpha \circlearrowright 0 \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} 1 \underset{\eta}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} 2$	$r_\gamma = \alpha\beta - (\beta\delta\eta\gamma)^{k-1}\beta\delta\eta,$ $r_\beta = \gamma\alpha - (\delta\eta\gamma\beta)^{k-1}\delta\eta\gamma,$ $r_\delta = \eta\delta\eta - (\eta\gamma\beta\delta)^{k-1}\eta\gamma\beta,$ $r_\eta = \delta\eta\delta - (\gamma\beta\delta\eta)^{k-1}\gamma\beta\delta,$ $r_\alpha = \beta\gamma - \alpha^{s-1},$ $\alpha^2\beta,\ \beta\delta\eta\delta.$

$\mathscr{Q}^{k,s}(3\mathscr{C})$
$k \geqslant 2, s \geqslant 3$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[r, shift left, "\delta"] \arrow[loop below, "\rho"] & 2 \arrow[l, shift left, "\eta"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{gathered} r_\gamma = \beta\rho,\ r_\beta = \rho\gamma, \\ r_\rho = \delta\eta - \gamma\beta - \rho^{s-1}, \\ r_\delta = \eta\rho - (\eta\delta)^{k-1}\eta, \\ r_\eta = \rho\delta - (\delta\eta)^{k-1}\delta, \\ \eta\rho^2,\ \rho^2\delta, \\ (\beta\gamma)^{k-1}\beta\delta,\ (\eta\delta)^{k-1}\eta\gamma. \end{gathered}$$

$\mathscr{Q}^{k,s,t}(3\mathscr{D})$
$k \geqslant 1,\ s, t \geqslant 3$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[r, shift left, "\delta"] & 2 \arrow[l, shift left, "\eta"] \arrow[loop right, "\xi"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{gathered} r_\alpha = \beta\gamma - \alpha^{s-1}, \\ r_\beta = \gamma\alpha - (\delta\eta\gamma\beta)^{k-1}\delta\eta\gamma, \\ r_\gamma = \alpha\beta - (\beta\delta\eta\gamma)^{k-1}\beta\delta\eta, \\ r_\xi = \eta\delta - \xi^{t-1}, \\ r_\eta = \delta\xi - (\gamma\beta\delta\eta)^{k-1}\gamma\beta\delta, \\ r_\delta = \xi\eta - (\eta\gamma\beta\delta)^{k-1}\eta\gamma\beta, \\ \alpha^2\beta,\ \delta\eta\delta. \end{gathered}$$

$\mathscr{Q}^{a,b,c}(3\mathscr{K})$
$a \geqslant b \geqslant c \geqslant 2$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[rr, shift left, "\beta"] \arrow[dr, shift left, "\kappa"] & & 1 \arrow[ll, shift left, "\gamma"] \arrow[dl, shift left, "\delta"] \\ & 2 \arrow[ul, shift left, "\lambda"] \arrow[ur, shift left, "\eta"] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{gathered} r_\lambda = \beta\delta - (\kappa\lambda)^{a-1}\kappa, \\ r_\kappa = \eta\gamma - (\lambda\kappa)^{a-1}\lambda, \\ r_\beta = \delta\lambda - (\gamma\beta)^{b-1}\gamma, \\ r_\gamma = \kappa\eta - (\beta\gamma)^{b-1}\beta, \\ r_\delta = \lambda\beta - (\eta\delta)^{c-1}\eta, \\ r_\eta = \gamma\kappa - (\delta\eta)^{c-1}\delta, \\ \gamma\beta\delta,\ \delta\eta\gamma,\ \lambda\kappa\eta. \end{gathered}$$

Замечание 6.3. Для первых трех алгебр: $\mathscr{Q}^k(a,b)$, $\mathscr{Q}^k(2\mathscr{A})(c)$, $\mathscr{Q}^{k,s}(2\mathscr{B})_1(a,c)$, наши порождающие идеала соотношений отличаются от тех, которые выписаны в [7], но легко проверить, что они порождают тот же идеал.

Доказательство теоремы 6.1. Для доказательства теоремы нам нужно для каждой алгебры $A = \mathbf{k}Q/I$ из нашего списка доказать, что предъявленное в таблице семейство соотношений $\mathscr{R} = \{r_\alpha\}_{\alpha \in Q_1}$ является DTI-семейством соотношений. В каждом из рассматриваемых случаев ясно, что $r_\alpha \in e_{t(\alpha)} I e_{s(\alpha)}$, и прямым вычислением проверяется, что $\frac{\partial r_\beta}{\partial \alpha} = \mathrm{tw}\left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial \beta}\right)$ для всех $\alpha, \beta \in Q_1$. Таким образом, выполняются условия `(DTI-1)` и `(DTI-2)`. Осталось проверить свойство `(DTI-3′)=(DTI-3′a)`$\wedge$`(DTI-3′b)`.

`(DTI-3′a)`. Длину пути $w \in \mathbf{k}Q$ обозначим через $|w|$, длину идемпотентов e_i положим равной нулю. Для элемента $r = \sum \lambda_w w \in \mathbf{k}Q$ рассмотрим множество $\mathscr{W}(r) = \{w \mid \lambda_w \neq 0\}$, а также множество $\sigma(r) = \{w \in \mathscr{W}(r) \mid \forall w' \in \mathscr{W}(r) \;\; |w| \leqslant |w'|\}$ кратчайших путей из $\mathscr{W}(r)$. Длину кратчайших путей r обозначим $\ell_\sigma(r)$. Кратчайшим путем множества $T \subseteq \mathbf{k}Q$ назовем любой кратчайший путь множества $\bigcup_{t \in T} \mathscr{W}(t)$. Множество кратчайших путей T обозначим через $\sigma(T)$. Таким образом,

$$\sigma(T) = \bigcup \{\sigma(t) \mid \forall t' \in T \;\, \ell_\sigma(t) \leqslant \ell_\sigma(t')\}.$$

Длину кратчайших путей множества T обозначим $\ell_\sigma(T)$.

Лемма 6.4. *Пусть $\{r_i\}$ – семейство элементов $\mathbf{k}Q$, T – идеал $\mathbf{k}Q$ такой, что $\ell_\sigma(r_i) \leqslant \ell_\sigma(T)$ и*

$$\sigma(r_i) \setminus \Big(\bigcup_{i \neq j} \sigma(r_j) \cup \sigma(T)\Big) \neq \varnothing \quad \textit{для всех} \;\; i.$$

Тогда семейство $\{r_i + T\}$ линейно независимо в $\mathbf{k}Q/T$.

Заметим, что если есть произвольная линейная комбинация $\sum \lambda_k r_k$, тогда из того, что $\lambda_i \neq 0$, следует включение $\sigma(r_i) \setminus \big(\bigcup_{j \neq i} \sigma(r_j)\big) \subseteq \sigma(\sum \lambda_k r_k)$.

Докажем лемму. Предположим противное: пусть $\sum \lambda_k r_k \in T$, и $\lambda_i \neq 0$ для некоторого i. Тогда из того, что $\varnothing \neq \sigma(r_i) \setminus \big(\bigcup_{j \neq i} \sigma(r_j)\big) \subseteq \sigma(\sum \lambda_k r_k)$, следует, что некоторый кратчайший путь элемента r_i является кратчайшим путем элемента $\sum \lambda_k r_k \in T$, следовательно, $\ell_\sigma(r_i) = \ell_\sigma(\sum \lambda_k r_k) \geqslant \ell_\sigma(T)$. Но по условию $\ell_\sigma(r_i) \leqslant \ell_\sigma(T)$, следовательно, $\ell_\sigma(r_i) = \ell_\sigma(\sum \lambda_k r_k) = \ell_\sigma(T)$. Из этого следует, что $\sigma(\sum \lambda_k r_k) \subseteq \sigma(T)$. Откуда получаем

$$\sigma(r_i) \setminus \Big(\bigcup_{i \neq j} \sigma(r_j) \cup \sigma(T)\Big) \subseteq \sigma\left(\sum \lambda_k r_k\right) \setminus \sigma(T) = \varnothing,$$

что противоречит условию.

Вернемся к доказательству теоремы 6.1. Если $\mathfrak{T}$ – множество образующих идеала T, то легко проверить, что $\sigma(T) = \sigma(\mathfrak{T})$. Следовательно, $\sigma(I)$ – это объединение множеств кратчайших путей образующих r с наимеьшим $\ell_\sigma(r)$ идеала I. А множество $\sigma(JI + IJ)$ состоит из элементов вида $\alpha w, w\alpha$ где $\alpha \in Q_1$, и $w \in \sigma(I)$. Таким образом, для каждой алгебры из списка легко можно выписать множества $\sigma(r_\alpha)$ и $\sigma(JI + IJ)$, проверить, что $\ell_\sigma(r_\alpha) \leqslant \ell_\sigma(JI + IJ)$, и, что все эти множества не пересекаются, а, следовательно, выполнено условие леммы, и семейство $\pi\mathscr{R}$ линейно независимо.

`(DTI-3′b)`. Очевидно, что $(\mathscr{R})+JI+IJ\subseteq I$. Таким образом, необходимо доказать включение $I\subseteq(\mathscr{R})+JI+IJ$. Эта задача сводится к тому, чтобы для каждого элемента t из образующих идеала I, не лежащих в $\mathscr{R}$, доказать, что $t\in(\mathscr{R})+JI+IJ$.

Доказывать это будем следующим образом. Предъявим для каждой алгебры несколько элементов $t_1,\dots,t_l\in I$, среди которых есть все образующие идеала I, не лежащие в семействе $\mathscr{R}$, соответствующем данной алгебре. После чего докажем, что они выражаются через себя по модулю идеала $(\mathscr{R})$ следующим образом $t_k=\sum a_it_ib_i(\mathrm{mod}(\mathscr{R}))$, где $a_i\in J$ или $b_i\in J$ для каждого i. Из этого будет следовать, что $t_i\in(\mathscr{R})+J^n$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Следовательно, так как I – допустимый идеал, $t_i\in(\mathscr{R})+JI+IJ$.

Таким образом, предъявление этого набора $t_1,\dots,t_l$, и равенств $t_k=\sum a_it_ib_i(\mathrm{mod}(\mathscr{R}))$ таких, что $a_i\in J$ или $b_i\in J$ для каждого i, завершает доказательство. Ниже предъявлены соответствующие равенства для каждой алгебры из списка, в которых элементы t_i подчеркнуты, и над каждым равенством $\mathrm{mod}(\mathscr{R})$ написано, из какого соотношения r_α оно следует.

$$\mathscr{Q}^k(a,b).$$

$$\underline{\alpha^4}\overset{r_\alpha}{=\!=}(\beta\alpha)^{k-1}\underline{\beta\alpha^2}+a\alpha\underline{\alpha^4},$$
$$\underline{\beta\alpha^2}\overset{r_\alpha}{=\!=}\underline{\beta^2\alpha}\beta(\alpha\beta)^{k-2}+a\beta\underline{\alpha^2\alpha},$$
$$\underline{\beta^2\alpha}\overset{r_\beta}{=\!=}(\alpha\beta)^{k-2}\alpha\underline{\beta\alpha^2}+b\beta\underline{\beta^2\alpha},$$

$$\underline{\beta^4}\overset{r_\beta}{=\!=}(\alpha\beta)^{k-1}\underline{\alpha\beta^2}+b\beta\underline{\beta^4},$$
$$\underline{\alpha\beta^2}\overset{r_\beta}{=\!=}\underline{\alpha^2\beta}\alpha(\beta\alpha)^{k-2}+b\underline{\alpha\beta^2}\beta,$$
$$\underline{\alpha^2\beta}\overset{r_\alpha}{=\!=}(\beta\alpha)^{k-2}\beta\underline{\alpha\beta^2}+a\alpha\underline{\alpha^2\beta}.$$

$$\mathscr{Q}^k(2\mathscr{A})(c).$$

$$\underline{\alpha^2\beta}\overset{r_\alpha}{=\!=}(\beta\gamma\alpha)^{k-2}\beta\gamma\underline{\alpha\beta\gamma\beta}+c\alpha\underline{\alpha^2\beta},$$
$$\underline{\alpha\beta\gamma\beta}\overset{r_\gamma}{=\!=}\underline{\alpha^2\beta}(\gamma\alpha\beta)^{k-1},$$

$$\underline{\alpha^4}\overset{r_\alpha}{=\!=}(\beta\gamma\alpha)^{k-1}\beta\underline{\gamma\alpha^2}+c\alpha\underline{\alpha^4},$$
$$\underline{\gamma\alpha^2}\overset{r_\alpha}{=\!=}\underline{\gamma\beta\gamma\alpha}\beta\gamma(\alpha\beta\gamma)^{k-2}+c\gamma\alpha\underline{\alpha^4},$$
$$\underline{\gamma\beta\gamma\alpha}\overset{r_\beta}{=\!=}(\gamma\alpha\beta)^{k-1}\underline{\gamma\alpha^2}.$$

$$\mathscr{Q}^{k,s}(2\mathscr{B})_1(a,c).$$

$$\underline{\alpha^2\beta}\overset{r_\alpha}{=\!=}a(\beta\gamma\alpha)^{k-1}\beta\gamma\beta+c\alpha^3\beta\overset{r_\eta}{=\!=}a(\beta\gamma\alpha)^{k-1}\beta\eta^s+c\alpha^3\beta\overset{r_\gamma}{=\!=}a(\beta\gamma\alpha)^{k-1}(\alpha\beta\gamma)^{k-1}\alpha\beta\eta^{s-1}+$$

$$+c\alpha^3\beta\overset{r_\gamma}{=\!=}a(\beta\gamma\alpha)^{k-1}(\alpha\beta\gamma)^{k-1}\underline{\alpha^2\beta}(\gamma\alpha\beta)^{k-1}\eta^{s-2}+c\alpha\underline{\alpha^2\beta},$$

$$\underline{\alpha^4}\overset{r_\alpha}{=\!=}a\underline{\alpha^2\beta}\gamma(\alpha\beta\gamma)^{k-1}+c\alpha\underline{\alpha^4}.$$

$$\mathscr{Q}^s(2\mathscr{B})_2(a,c,p).$$

Пусть $p(t) = 1 - t\cdot q(t), q_1(t) = q(t) - at^{s-4} - ct^{s-3}$.

$\underline{\alpha^{s+1}} \xlongequal{r_\alpha} \underline{\alpha^{s-1}\beta}\gamma + \underline{\alpha^{s+1}}\alpha q(\alpha)$,

$\underline{\eta^{s+1}} \xlongequal{r_\eta} \eta^{s+1}\eta q_1(\eta) + \eta^{s-1}\gamma\beta \xlongequal{r_\beta} \underline{\eta^{s+1}}\eta q_1(\eta) + \gamma\underline{\alpha^{s-1}\beta}$,

$\underline{\alpha^{s-1}\beta} \xlongequal{r_\gamma} \beta\eta^{s-1} \xlongequal{r_\eta} -a^{-1}\beta\eta^2 p(\eta) - a^{-1}c\beta\eta^s + a^{-1}\beta\gamma\beta \xlongequal{r_\alpha} -a^{-1}\beta\eta^2 p(\eta) - a^{-1}c\beta\eta^s + a^{-1}\alpha^2 p(\alpha)\beta \xlongequal{r_\gamma} -a^{-1}c\beta\eta^s \xlongequal{r_\gamma} -a^{-1}c\alpha\underline{\alpha^{s-1}\beta}$,

$\underline{\gamma\alpha^{s-1}} \xlongequal{r_\beta} \eta^{s-1}\gamma \xlongequal{r_\eta} -a^{-1}\eta^2 p(\eta)\gamma - a^{-1}c\eta^s\gamma + a^{-1}\gamma\beta\gamma \xlongequal{r_\alpha} -a^{-1}\eta^2 p(\eta)\gamma - -a^{-1}c\eta^s\gamma + a^{-1}\gamma\alpha^2 p(\alpha) \xlongequal{r_\beta} -a^{-1}c\eta^s\gamma \xlongequal{r_\beta} -a^{-1}c\underline{\gamma\alpha^{s-1}}\alpha$.

$$\mathscr{Q}^t(2\mathscr{B})_3(a,c,d), t = 3, a \neq 1.$$

Рассмотрим равенства по модулю идеала $(\mathscr{R})$.

$\gamma\alpha^2 \xlongequal{r_\alpha} \gamma\beta\gamma + c\gamma\alpha^3 \xlongequal{r_\eta} a\eta^2\gamma + d\eta^3\gamma + c\gamma\alpha^3 \xlongequal{r_\beta} a\gamma\alpha^2 + (d+c)\gamma\alpha^3$,
$\alpha^2\beta \xlongequal{r_\alpha} \beta\gamma\beta + c\alpha^3\beta \xlongequal{r_\eta} a\beta\eta^2 + d\beta\eta^3 + c\alpha^3\beta \xlongequal{r_\gamma} a\alpha^2\beta + (d+c)\alpha^3\beta$.

Из них следуют первые два равенства по модулю $(\mathscr{R})$ в следующем списке.

$\underline{\gamma\alpha^2} = \frac{d+c}{1-a}\cdot\underline{\gamma\alpha^2}\alpha$, $\quad \underline{\alpha^2\beta} = \frac{d+c}{1-a}\cdot\alpha\underline{\alpha^2\beta}$, $\quad \underline{\alpha^4} \xlongequal{r_\alpha} \beta\underline{\gamma\alpha^2} + c\underline{\alpha^4}\alpha$,
$\underline{\eta^4} \xlongequal{r_\eta} a^{-1}\gamma\beta\eta^2 - a^{-1}d\eta^5 \xlongequal{r_\gamma} a^{-1}\gamma\underline{\alpha^2\beta} - a^{-1}d\underline{\eta^4}\eta$.

$$\mathscr{Q}^t(2\mathscr{B})_3(a,c,d), t \geqslant 4, a = 1.$$

$\underline{\gamma\alpha^2} \xlongequal{r_\alpha} \gamma\beta\gamma + c\gamma\alpha^3 \xlongequal{r_\eta} \eta^{t-1}\gamma + d\eta^t\gamma + c\gamma\alpha^3 \xlongequal{r_\beta} \underline{\gamma\alpha^2}(\alpha^{t-3} + d\alpha^{t-2} + c\alpha)$,
$\underline{\alpha^2\beta} \xlongequal{r_\alpha} \beta\gamma\beta + c\alpha^3\beta \xlongequal{r_\eta} \beta\eta^{t-1} + d\beta\eta^t + c\alpha^3\beta \xlongequal{r_\gamma} (\alpha^{t-3} + d\alpha^{t-2} + c\alpha)\underline{\alpha^2\beta}$,
$\underline{\alpha^4} \xlongequal{r_\alpha} \beta\underline{\gamma\alpha^2} + c\underline{\alpha^4}\alpha$,
$\underline{\eta^{t+1}} \xlongequal{r_\eta} \gamma\beta\eta^2 - d\eta^{t+2} \xlongequal{r_\gamma} \gamma\underline{\alpha^2\beta} - d\underline{\eta^{t+1}}\eta$.

$$\mathscr{Q}^{a,b}(3\mathscr{A})_1(d), a = b = 2, d \neq 1.$$

Рассмотрим равенства по модулю $(\mathscr{R})$.

$\beta\delta\eta\delta \xlongequal{r_\alpha} \beta\gamma\beta\delta \xlongequal{r_\eta} d\beta\delta\eta\delta, \qquad \eta\gamma\beta\gamma \xlongequal{r_\delta} d\eta\delta\eta\gamma \xlongequal{r_\beta} d\eta\gamma\beta\gamma.$

Из них следуют равенства по модулю $(\mathscr{R})$ в следующем списке.

$\underline{\beta\delta\eta\delta} = 0, \ \ \underline{\eta\gamma\beta\gamma} = 0.$

$$\mathscr{Q}^{a,b}(3\mathscr{A})_1(d), a \geqslant b \geqslant 3, d = 1.$$

$\underline{\beta\delta\eta\delta} \xlongequal{r_\alpha} (\beta\gamma)^{a-2}\beta\gamma\beta\delta \xlongequal{r_\eta} (\beta\gamma)^{a-2}\underline{\beta\delta\eta\delta}(\eta\delta)^{b-2},$
$\underline{\eta\gamma\beta\gamma} \xlongequal{r_\delta} (\eta\delta)^{b-2}\eta\delta\eta\gamma \xlongequal{r_\beta} (\eta\delta)^{b-2}\underline{\eta\gamma\beta\gamma}(\beta\gamma)^{a-2}.$

$$\mathscr{Q}^{k}(3\mathscr{A})_2.$$

$\underline{\beta\gamma\beta\delta} \xlongequal{r_\gamma} (\beta\delta\eta\gamma)^{k-1}\beta\delta\eta\delta \xlongequal{r_\eta} (\beta\delta\eta\gamma)^{k-1}\underline{\beta\gamma\beta\delta}(\eta\gamma\beta\delta)^{k-1},$
$\underline{\eta\delta\eta\gamma} \xlongequal{r_\delta} (\eta\gamma\beta\delta)^{k-1}\eta\gamma\beta\gamma \xlongequal{r_\beta} (\eta\gamma\beta\delta)^{k-1}\underline{\eta\delta\eta\gamma}(\beta\delta\eta\gamma)^{k-1}.$

$$\mathscr{Q}^{k,s}(3\mathscr{B}).$$

$\underline{\alpha^2\beta} \xlongequal{r_\gamma} \alpha\beta\delta\eta(\gamma\beta\delta\eta)^{k-1} \xlongequal{r_\gamma} (\beta\delta\eta\gamma)^{k-1}\underline{\beta\delta\eta\delta}\eta(\gamma\beta\delta\eta)^{k-1},$
$\underline{\beta\delta\eta\delta} \xlongequal{r_\eta} \beta\gamma\beta\delta(\eta\gamma\beta\delta)^{k-1} \xlongequal{r_\alpha} \alpha^{s-3}\underline{\alpha^2\beta}\delta(\eta\gamma\beta\delta)^{k-1}.$

$$\mathscr{Q}^{k,s}(3\mathscr{C}).$$

Рассмотрим равенство по модулю $(\mathscr{R})$.

$\beta\gamma\beta \xlongequal{r_\rho} \beta\delta\eta - \beta\rho^{s-1} \xlongequal{r_\gamma} \beta\delta\eta.$

Из него по индукции выводится, что $\beta(\gamma\beta)^i = \beta(\delta\eta)^i$ по модулю $(\mathscr{R})$, для любого $i \in \mathbb{N}$. Из него, в свою очередь, следует первое равенство по модулю $(\mathscr{R})$ в следующем списке.

$\underline{\beta(\gamma\beta)^{k-1}\delta} = \beta(\delta\eta)^{k-1}\delta \xlongequal{r_\eta} \beta\rho\delta \xlongequal{r_\gamma} 0,$
$\underline{(\eta\delta)^{k-1}\eta\gamma} \xlongequal{r_\delta} \eta\rho\gamma \xlongequal{r_\beta} 0,$

$$\underline{\eta\rho^2} \xlongequal{r_\delta} (\eta\delta)^{k-2}\eta\delta\eta\rho \xlongequal{r_\rho} (\eta\delta)^{k-2}\eta\gamma\beta\rho + (\eta\delta)^{k-2}\eta\rho^s \xlongequal{r_\beta} (\eta\delta)^{k-2}\underline{\eta\rho^2}\rho^{s-2},$$
$$\underline{\rho^2\delta} \xlongequal{r_\eta} \rho\delta\eta\delta(\eta\delta)^{k-2} \xlongequal{r_\rho} \rho\gamma\beta\delta(\eta\delta)^{k-2} + \rho^s(\eta\delta)^{k-2} \xlongequal{r_\beta} \rho^{s-2}\underline{\rho^2\delta}(\eta\delta)^{k-2}.$$

$$\mathscr{Q}^{k,s,t}(3\mathscr{D}).$$

$$\underline{\alpha^2\beta} \xlongequal{r_\gamma} \alpha\beta\delta\eta(\gamma\beta\delta\eta)^{k-1} \xlongequal{r_\gamma} (\beta\delta\eta\gamma)^{k-1}\beta\underline{\delta\eta\delta}\eta(\gamma\beta\delta\eta)^{k-1},$$
$$\underline{\delta\eta\delta} \xlongequal{r_\xi} \delta\xi^{t-1} \xlongequal{r_\eta} (\gamma\beta\delta\eta)^{k-1}\gamma\beta\delta\xi^{t-2} \xlongequal{r_\eta} (\gamma\beta\delta\eta)^{k-1}\underline{\gamma\beta\gamma}\beta(\delta\eta\gamma\beta)^{k-1}\xi^{t-3},$$
$$\underline{\gamma\beta\gamma} \xlongequal{r_\alpha} \gamma\alpha^{s-1} \xlongequal{r_\beta} (\delta\eta\gamma\beta)^{k-1}\delta\eta\gamma\alpha^{s-2} \xlongequal{r_\beta} (\delta\eta\gamma\beta)^{k-1}\underline{\delta\eta\delta}\eta(\gamma\beta\delta\eta)^{k-1}\alpha^{s-3}.$$

$$\mathscr{Q}^{a,b,c}(3\mathscr{K}).$$

$$\underline{\gamma\beta\delta} \xlongequal{r_\lambda} \gamma(\kappa\lambda)^{a-1}\kappa \xlongequal{r_\eta} (\delta\eta)^{c-2}\delta\underline{\eta\delta\lambda}\kappa(\lambda\kappa)^{a-2},$$
$$\underline{\eta\delta\lambda} \xlongequal{r_\beta} \eta(\gamma\beta)^{b-1}\gamma \xlongequal{r_\kappa} (\lambda\kappa)^{a-2}\lambda\underline{\kappa\lambda\beta}\gamma(\beta\gamma)^{b-2},$$
$$\underline{\kappa\lambda\beta} \xlongequal{r_\delta} \kappa(\eta\delta)^{c-1}\eta \xlongequal{r_\gamma} (\beta\gamma)^{b-2}\beta\underline{\gamma\beta\delta}\eta(\delta\eta)^{c-2},$$
$$\underline{\delta\eta\gamma} \xlongequal{r_\kappa} \delta(\lambda\kappa)^{a-1}\lambda \xlongequal{r_\beta} (\gamma\beta)^{b-2}\gamma\underline{\beta\gamma\kappa}\lambda(\kappa\lambda)^{a-2},$$
$$\underline{\beta\gamma\kappa} \xlongequal{r_\eta} \beta(\delta\eta)^{c-1}\delta \xlongequal{r_\lambda} (\kappa\lambda)^{a-2}\kappa\underline{\lambda\kappa\eta}\delta(\eta\delta)^{c-2},$$
$$\underline{\lambda\kappa\eta} \xlongequal{r_\gamma} \lambda(\beta\gamma)^{b-1}\beta \xlongequal{r_\delta} (\eta\delta)^{c-2}\eta\underline{\delta\eta\gamma}\beta(\gamma\beta)^{b-2}.$$

$\square$

7 Еще один пример алгебры, допускающей DTI-семейство соотношений.

Этот пункт посвящен тому, чтобы привести еще один простой пример алгебры, допускающей DTI-семейство соотношений. Этот пример показывает, что класс алгебр, допускающих DTI-семейство соотношений, не сводится к объединению классов описанных в предыдущих двух пунктах.

Рассмотрим алгебру $A = \mathbf{k}Q/I$, порожденную следующим колчаном и соотношениями. Сразу введем обозначения для соответствующих соотношений $r_a, a \in Q_1$.

$$Q:\ \begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \end{tikzcd} \qquad\qquad I:\ \begin{array}{l} r_\alpha = \beta\gamma - \alpha^2, \\ r_\beta = \gamma\alpha, \\ r_\gamma = \alpha\beta. \end{array}$$

Предложение 7.1.

- *Идеал I допустим.*
- *$A = \mathbf{k}Q/I$ – самоинъективная алгебра.*
- *Семейство $\mathscr{R} = \{r_a\}_{a\in Q_1}$ является* DTI*-семейством соотношений для алгебры A.*
- *Алгебра A не Морита-эквивалентна ни одной из алгебр, упомянутых в двух предыдущих пунктах.*

Доказательство. Для того, чтобы доказать, что идеал I допустим, докажем, что любой путь длины три лежит в I. Все пути длины три, кроме путей $\alpha^3, \beta\gamma\beta, \gamma\beta\gamma$ содержат подпути вида $\gamma\alpha, \alpha\beta$, значит достаточно доказать, что $\alpha^3, \beta\gamma\beta, \gamma\beta\gamma \in I$. Это вытекает из следующих равенств, выполняющихся по модулю I :

$$\alpha^3 = \alpha\beta\gamma = 0, \quad \beta\gamma\beta = \alpha^2\beta = 0, \quad \gamma\beta\gamma = \gamma\alpha^2 = 0.$$

Таким образом, $J^3 \subseteq I \subseteq J^2$. Следовательно, идеал I допустим и алгебра A конечномерна.

Легко видеть, что следующие наборы векторов образуют базис проективных неразложимых модулей:

$$e_0A = \langle e_0, \alpha, \beta, \alpha^2\rangle, \quad e_1A = \langle e_1, \gamma, \gamma\beta\rangle. \tag{7.1}$$

Цоколи проективных неразложимых модулей одномерны: $\mathrm{soc}(e_0A) = \langle\alpha^2\rangle$, $\mathrm{soc}(e_1A) = \langle\gamma\beta\rangle$. Следовательно, алгебра A самоинъективна.

Докажем, что семейство $\mathscr{R} = \{r_a\}_{a\in Q_1}$ является DTI-семейством соотношений. Свойство `(DTI-1)` очевидно, свойство `(DTI-2)` проверяется простым вычислением, а свойство `(DTI-3′b)` выполняется, так как $\mathscr{R}$ порождает I. Осталось проверить свойство `(DTI-3′a)`. По замечанию 3.4 его доказательство сводится к проверке того, что $r_a \notin JI + IJ$ для всех $a \in Q_1$. Но это очевидно, так как кратчайшие пути элементов $JI + IJ$

имеют длину не меньше трех, а кратчайшие пути соотношений r_a имеют длину равную двум.

Хорошо известно, что если две базисные алгебры Морита-эквивалентны, то они изоморфны. Кроме того, если две алгебры путей колчана с соотношениями изоморфны, то их колчаны совпадают. Поэтому среди алгебр, упомянутых в предыдущих двух пунктах, алгебра A могла бы быть изоморфна только алгебре $\mathscr{Q}^k(2\mathscr{A})(c)$. Докажем, что они не изоморфны, сравнив их матрицы Картана. Матрица Картана алгебры A вычисляется благодаря тому, что мы явно знаем базисы проективных неразложимых модулей (7.1):

$$\mathrm{CartanMatrix}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

А матрица Картана алгебры $\mathscr{Q}^k(2\mathscr{A})(c)$ выписана в таблице [7, сс. 303-306]:

$$\mathrm{CartanMatrix}(\mathscr{Q}^k(2\mathscr{A})(c)) = \begin{pmatrix} 4k & 2k \\ 2k & k+2 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что определитель матрица Картана алгебры $\mathscr{Q}^k(2\mathscr{A})(c)$ – четное число для любого k, а определитель матрицы Кртана алгебры A равен 5. Следовательно, эти алгебры не изоморфны. $\square$

8 Резольвента самоинъективной алгебры с DTI-семейством соотношений.

Целью этого пункта является явное предъявление минимальной проективной резольвенты бимодуля A для самоинъективных алгебр путей колчана с соотношениями с DTI-семейством соотношений. Для того, чтобы это сделать, нам потребуется некоторый инструмент, связанный с понятием фробениусовой алгебры и дополнительными структурами, на ней возникающими, а именно, автоморфизмом Накаямы и структурой коалгебры на A.

8.1 Фробениусовость.

Пусть A – фробениусова $\mathbf{k}$-алгебра, ε – фробениусова форма на ней и $\tilde{\nu}$ – соответствующий автоморфизм Накаямы. Кроме автоморфизма Накаямы, с фробениусовой формой можно связать еще одну дополнительную структуру – структуру коалгебры. Рассмотрим некоторый базис $\mathcal{B}$ алгебры A, возьмем двойственный базис $\mathcal{B}^* = \{b^* \mid b \in \mathcal{B}\}$ относительно билинейной формы $\varepsilon\mu$, то есть такой, что $\varepsilon(b \cdot c^*) = \delta_{b,c}$ для всех $b, c \in \mathcal{B}$. Тогда рассмотрим элемент

$$\varrho_1 = \sum_{b \in \mathcal{B}} b^* \otimes b \in A \otimes A.$$

В [10, предложение 2.3.22] доказывается, что если A – фробениусова алгебра с фробениусовой формой $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$, то существует единственный гомоморфизм бимодулей

$$\varrho : A \to A \otimes A$$

такой, что $(A, \varrho, \varepsilon)$ является коалгеброй. Причем задается он по формуле $\varrho(a) = a\varrho_1$. В частности, из этого вытекает, что ϱ_1 не зависит от выбора базиса $\mathcal{B}$. Коумножение ϱ назовем фробениусовым коумножением, соответствующим фробениусовой форме ε.

В дальнейшем нам потребуются некоторые технические утверждения, касающиеся этих структур. Напомним, что внутренняя структура бимодуля на пространстве $A \otimes A$ обозначается следующим образом.

$$a \star (x \otimes y) \star b = xb \otimes ay.$$

Лемма 8.1. *Справедливы следующие равенства:*

1. $\mathrm{tw}(\varrho_1) = (\mathrm{id} \otimes \tilde{\nu})(\varrho_1)$;
2. $a\varrho_1 = \varrho_1 a$ *для любого* $a \in A$;
3. $a \star \varrho_1 = \varrho_1 \star \tilde{\nu}(a)$ *для любого* $a \in A$.

Доказательство.

1. Пусть $\mathcal{B}$ – произвольный базис алгебры A. Рассмотрим двойственный к нему базис $\mathcal{B}^* = \{b^* \mid b \in \mathcal{B}\}$, то есть такой, что $\varepsilon(bc^*) = \delta_{b,c}$ для $b, c \in \mathcal{B}$, и двойственный к двойственному базису $\mathcal{B}^{**} = \{b^{**} \mid b \in \mathcal{B}\}$, то есть такой, что $\varepsilon(b^* c^{**}) = \delta_{b,c}$ для всех $b, c \in \mathcal{B}$. Заметим, что $\varepsilon(c^* \tilde{\nu}(b)) = \varepsilon(bc^*) = \delta_{b,c} = \varepsilon(c^* b^{**})$. Следовательно, в силу невырожденности $\varepsilon\mu$, получаем $\tilde{\nu}(b) = b^{**}$. Откуда вытекает, что $\mathrm{tw}(\varrho_1) = \sum b^* \otimes b^{**} = \sum b^* \otimes \tilde{\nu}(b) = (id \otimes \tilde{\nu})(\varrho_1)$.
2. Это доказано в [10].

3. Используя предыдущие пункты, получаем

$$a\cdot \mathrm{tw}(\varrho_1) = a((\mathrm{id}\otimes\tilde\nu)(\varrho_1)) = (\mathrm{id}\otimes\tilde\nu)(a\varrho_1) =$$
$$= (\mathrm{id}\otimes\tilde\nu)(\varrho_1 a) = ((\mathrm{id}\otimes\tilde\nu)(\varrho_1))\tilde\nu(a) = \mathrm{tw}(\varrho_1)\cdot\tilde\nu(a).$$

Применяя к полученному равенству $a\cdot \mathrm{tw}(\varrho_1) = \mathrm{tw}(\varrho_1)\cdot\tilde\nu(a)$, отображение tw, получаем

$$a\star\varrho_1 = \mathrm{tw}(a\cdot\mathrm{tw}(\varrho_1)) = \mathrm{tw}(\mathrm{tw}(\varrho_1)\cdot\tilde\nu(a)) = \varrho_1\star\tilde\nu(a).$$

□

8.2 Фробениусовость в случае самоинъективной алгебры путей колчана с соотношениями.

Хорошо известно, что самоиньективная алгебра путей колчана с соотношениями фробениусова. Это следует, например, из [11, определение 13.2.2, определение 13.5.4, теорема 13.5.7]. Но фробениусовых форм на алгебре может быть много. В этом пункте мы определим понятие Q_0-фробениусовой формы на самоинъективной алгебре путей колчана Q с соотношениями. Это фробениусова форма, обладающая некоторым дополнительным свойством. Мы докажем, что такая форма всегда существует и что автоморфизм Накаямы $\tilde\nu$ и коумножение ϱ, соответствующие ей, обладают некоторыми дополнительными свойствами.

Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – самоинъективная алгебра путей колчана с соотношениями, тогда обратный функтор Накаямы ν^{-1} задает перестановку на простых модулях, а, следовательно, и на вершинах колчана

$$\nu_0 : Q_0 \to Q_0,$$
$$\nu^{-1}(S_i) \cong S_{\nu_0(i)},$$

которую мы будем называть перестановкой Накаямы. Рассмотрим некоторую фробениусову форму $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$ и соответствующий ей автоморфизм Накаямы $\tilde\nu : A \to A$. Так как $\mathbf{k}Q_0 \cong A/J_A$, и $\tilde\nu(J_A) = J_A$, то автоморфизм Накаямы индуцирует автоморфизм на $\mathbf{k}Q_0$ и, следовательно, $\tilde\nu(e_i) = e_j + r$ для некоторых $j \in Q_0$ и $r \in J_A$. Учитывая то, что $\nu^{-1}(S_i) \cong (S_i)_{\tilde\nu^{-1}} \cong S_{\nu_0(i)}$, получаем, что $\tilde\nu(e_i)$ действует на $S_{\nu_0(i)}$ тождественно, а, следовательно,

$$\tilde\nu(e_i) = e_{\nu_0(i)} + r.$$

Известно [11, теорема 13.4.2], что для фробениусовых алгебр $\mathrm{soc}_A(A) = \mathrm{soc}_{A^{op}}(A) = \mathrm{soc}_{A^e}(A)$; модули $\mathrm{soc}_A(e_iA), \mathrm{soc}_{A^{op}}(Ae_i)$ просты, то есть в случае алгебр путей колчана с соотношениями одномерны; $\mathrm{soc}_A(e_iA) = \mathrm{soc}_{A^{op}}(Ae_j)$ для некоторого j; и легко проверить, что в этой формуле $j = \nu_0(i)$, то есть $\mathrm{soc}_A(e_iA) = \mathrm{soc}_{A^{op}}(Ae_{\nu_0(i)})$.

Для краткости положим $\mathrm{soc}(A) \coloneqq \mathrm{soc}_A(A)$.

Замечание 8.2. Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – самоинъективная алгебра путей колчана с соотношениями. Линейное отображение $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$ тогда и только тогда является фробениусовой формой, когда $\varepsilon|_{\mathrm{soc}(e_iA)} \neq 0$ для любого $i \in Q_0$.

Алгебра $\mathbf{k}Q_0$ – сепарабельна, следовательно, в любом $\mathbf{k}Q_0$-бимодуле любой его подбимодуль является прямым слагаемым. В частности, алгебру A можно рассмотреть, как $\mathbf{k}Q_0$-бимодуль, а $\mathrm{soc}(A)$ как $\mathbf{k}Q_0$-подбимодуль и, следовательно, существует $\mathbf{k}Q_0$-бимодульное дополнение $\mathrm{soc}(A)$ в A. То есть такой $\mathbf{k}Q_0$-подбимодуль $T \leqslant A$, что $A = \mathrm{soc}(A) \oplus T$.

Определение 8.3. Фробениусову форму $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$ назовем Q_0-фробениусовой формой, если $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ содержит некоторое $\mathbf{k}Q_0$-бимодульное дополнение $\mathrm{soc}(A)$ в A.

Легко видеть, что на самоинъективной алгебре $A = \mathbf{k}Q/I$ Q_0-фробениусова форма всегда существует. Достаточно взять некоторое $\mathbf{k}Q_0$-бимодульное дополнение к $\mathrm{soc}(A)$ в A и задать на нем ε равным нулю, а на $\mathrm{soc}(A)$ задать так, чтобы $\varepsilon|_{\mathrm{soc}(e_iA)} \neq 0$ для любого $i \in Q_0$.

Предложение 8.4. *Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – самоинъективная алгебра путей колчана с соотношениями, $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$ – Q_0-фробениусова форма на A, $\tilde{\nu} : A \to A$ – соответствующий автоморфизм Накаямы, и $\varrho : A \to A \otimes A$ – соответствующее фробениусово коумножение. Тогда $\tilde{\nu}(e_i) = e_{\nu_0(i)}$, и $\mathrm{Im}(\varrho) \leqslant \bigoplus_{i \in Q_0} P_{\nu_0(i),i}$, причем*

$$\varrho' : A \to \bigoplus_{i \in Q_0} P_{\nu_0(i),i},$$

где $\varrho'(a) = \varrho(a)$, – это инъективная оболочка бимодуля A.

Доказательство. Мы уже знаем, что $\tilde{\nu}(e_i) = e_{\nu_0(i)} + r$, где $r \in J_A$. Докажем, что $r = 0$. Предположим обратное, пусть $r \neq 0$. Тогда из невырожденности билинейной формы $\varepsilon\mu$ следует, что существует $a \in A$ такой, что $\varepsilon(ar) \neq 0$. Рассмотрим $T \leqslant A$ – некоторое $\mathbf{k}Q_0$-бимодульное дополнение $\mathrm{soc}(A)$, содержащееся в $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$. Тогда a можно представить в виде $a = t + s$, где $t \in T, s \in \mathrm{soc}(A)$. Так как $r \in J_A$, то $sr = 0$, следовательно, $\varepsilon(tr) = \varepsilon(ar) \neq 0$. Кроме того, $te_{\nu_0(i)} \in T$, значит $\varepsilon(te_{\nu_0(i)}) = 0$. Откуда получаем $0 \neq \varepsilon(tr) = \varepsilon(t\tilde{\nu}(e_i)) = \varepsilon(e_i t)$, что приводит нас к противоречию, так как $e_i t \in T$. Таким образом, $\tilde{\nu}(e_i) = e_{\nu_0(i)}$.

Теперь докажем, что $\mathrm{Im}(\varrho) \leqslant \bigoplus P_{\nu_0(i),i}$. Для этого достаточно доказать, что $\varrho_1 \in \bigoplus P_{\nu_0(i),i}$. Но это является следствием леммы 8.1, так как $e_i \star \varrho_1 = \varrho_1 \star e_{\nu_0(i)}$.

Морфизм коумножения в коалгебре с коединицей всегда является мономорфизмом, следовательно, $\varrho' : A \to \bigoplus P_{\nu_0(i),i}$ – мономорфизм в инъективный бимодуль. Причем размерности цоколей у обоих бимодулей совпадают и равны $|Q_0|$, следовательно, ϱ' индуцирует изоморфизм цоколей, а, следовательно, является инъективной оболочкой. $\square$

Замечание 8.5. В последнем предложении мы считали, что $\bigoplus P_{\nu_0(i),i} \leqslant A$, то есть воспринимали $\bigoplus P_{\nu_0(i),i}$ как внутреннюю прямую сумму в A. Иногда, нам будет полезно воспринимать $\bigoplus P_{\nu_0(i),i}$ как внешнюю прямую сумму, то есть записывать ее элементы в виде столбцов. Тогда отображение $\varrho' : A \to \bigoplus P_{\nu_0(i),i}$ запишется в виде

$$\varrho' = (\varrho'_i)_{i \in Q_0}, \text{ где } \varrho'_i(a) = a(e_i \star \varrho_1).$$

8.3 Резольвента.

Целью этого пункта является явное предъявление резольвенты для самоинъективных алгебр, допускающих DTI-семейство соотношений.

Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – самоинъективная алгебра путей колчана с соотношениями, и $\{r_\alpha\}_{\alpha \in Q_1}$ – DTI-семейство ее соотношений, $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$ – Q_0-фробениусова форма на A, $\tilde{\nu} : A \to A$ – соответствующий автоморфизм Накаямы, $\varrho : A \to A \otimes A$ – соответствующее фробениусово коумножение, и $\varrho_1 = \varrho(1)$. Положим

$$\mathbf{P}_{4n} = \mathbf{P}_{3+4n} = \bigoplus_{i \in Q_0} P_{i,\nu_0^n(i)}, \quad \mathbf{P}_{1+4n} = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} P_{s(\alpha),\nu_0^n(t(\alpha))}, \quad \mathbf{P}_{2+4n} = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} P_{t(\alpha),\nu_0^n(s(\alpha))},$$

$$\mathbf{d}_{1+4n} = ((\mathrm{id} \otimes \tilde{\nu}^n)(d_{i,\alpha}))_{(i,\alpha) \in Q_0 \times Q_1}, \; d_{i,\alpha} = \delta_{i,s(\alpha)}(e_{s(\alpha)} \otimes \alpha) - \delta_{i,t(\alpha)}(\alpha \otimes e_{t(\alpha)}),$$
$$\mathbf{d}_{2+4n} = \left((\mathrm{id} \otimes \tilde{\nu}^n)\left(\frac{\partial r_\beta}{\partial \alpha}\right)\right)_{(\alpha,\beta) \in Q_1 \times Q_1},$$
$$\mathbf{d}_{3+4n} = ((\mathrm{id} \otimes \tilde{\nu}^n)(\mathrm{tw}(d_{i,\beta})))_{(\beta,i) \in Q_1 \times Q_0},$$

$\mathbf{d}_{4+4n} = ((\mathrm{id} \otimes \tilde{\nu}^{n+1})((e_i \varrho_1) \star e_j)_{(j,i)\in Q_0\times Q_0},$
$m = (m_i)^{\top}_{i\in Q_0},\ m_i(a\otimes b) = ab,$

для $n \geqslant 0$, и $\mathbf{P}_n = 0$ при $n < 0$. Таким образом, возникает комплекс $\mathbf{P}_\bullet = (\mathbf{P}_n, \mathbf{d}_n : \mathbf{P}_n \to \mathbf{P}_{n-1})$ и гомоморфизм $m : \mathbf{P}_0 \to A$.

Теорема 8.6. *Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – самоинъективная алгебра, допускающая DTI-семейство соотношений. Тогда $m : \mathbf{P}_\bullet \to A$ – бимодульная резольвента.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуются несколько вспомогательных определений и лемм.

Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – алгебра путей колчана с соотношениями, а $\varphi, \psi : A \to A$ – два автоморфизма, для которых $\varphi(e_i) = e_{\varphi_0(i)}, \psi(e_i) = e_{\psi_0(i)}$, для некоторых перестановок $\varphi_0, \psi_0 : Q_0 \to Q_0$. Через $\mathcal{P}_0$, как и раньше, обозначим полную подкатегорию bimod-A, состоящую из бимодулей вида $\bigoplus P_{i_k,j_k}$, гомоморфизмы между которыми, как мы знаем, задаются матрицами. Тогда рассмотрим функтор

$$[\varphi\otimes\psi] : \mathcal{P}_0 \to \text{bimod-}A,$$

который действует следующим образом на объектах

$$[\varphi\otimes\psi]\Big(\bigoplus P_{i_k,j_k}\Big) = \bigoplus P_{\varphi_0(i_k),\psi_0(j_k)}$$

и следующим образом на морфизмах

$$[\varphi\otimes\psi](f_{i,j})_{ij} = ((\varphi\otimes\psi)(f_{ij}))_{i,j}.$$

Легко проверить, что это корректно определенный функтор.

С другой стороны, если $\varphi, \psi : A \to A$ – произвольные автоморфизмы, то можно рассмотреть функтор "подкручивания" на автоморфизмы

$${}_{\varphi}(-)_{\psi} : \text{bimod-}A \to \text{bimod-}A,$$

под действием которого подлежащее векторное пространство бимодуля остается тем же, но структура бимодуля меняется следующим образом: $a * m * b := \varphi(a) m \psi(b)$.

Лемма 8.7. *Если $\varphi,\psi : A \to A$ – два автоморфизма, для которых существуют перестановки $\varphi_0,\psi_0 : Q_0 \to Q_0$ такие, что $\varphi(e_i) = e_{\varphi_0(i)}, \psi(e_i) = e_{\psi_0(i)}$, то*

$$ {}_{\varphi}(-)_{\psi}|_{\mathcal{P}_0} \cong [\varphi^{-1} \otimes \psi^{-1}]. $$

Доказательство. Достаточно определить изоморфизм функторов на неразложимых модулях, дальше он продолжается по аддитивности (с учетом того, что для каждого модуля выбрано каноническое разложение в прямую сумму). Тогда зададим гомоморфизм

$$ \Xi_{P_{i,j}} : {}_{\varphi}\Big(P_{i,j}\Big)_{\psi} \to P_{\varphi_0^{-1}(i),\psi_0^{-1}(j)} $$

по формуле

$$ \Xi_{P_{i,j}}(x \otimes y) = (\varphi^{-1}(x) \otimes \psi^{-1}(y)). $$

Легко видеть, что он корректно определен и биективен. Проверку того, что он является гомоморфизмом бимодулей и того, что набор отображений $(\Xi_P)_{P\in\mathcal{P}_0}$ образует морфизм функторов, оставляем читателю. $\square$

Лемма 8.8. *Существует такой изоморфизм бимодулей $\theta : A_{\tilde{\nu}^{-1}} \to A^{t^e}$, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
A_{\tilde{\nu}^{-1}} \arrow[r, "(\varrho')_{\tilde{\nu}^{-1}}"] \arrow[d, "\theta"', "\cong"] & \Big(\bigoplus_{i\in Q_0} P_{\nu_0(i),i}\Big)_{\tilde{\nu}^{-1}} \arrow[d, "\iota\circ\Xi"', "\cong"] \\
A^{t^e} \arrow[r, "m'"] & \bigoplus_{i\in Q_0} P_{i,i}
\end{tikzcd}$$

коммутативна, где $\iota : \bigoplus_{i\in Q_0} P_{\nu_0(i),\nu_0(i)} \to \bigoplus_{i\in Q_0} P_{i,i}$ – изоморфизм, индуцированный перенумерацией $\iota\big((x_i)_{i\in Q_0}\big) = (x_{\nu_0^{-1}(i)})_{i\in Q_0}$, а m' – гомоморфизм из формулы (4.2).

Доказательство. Определим $\theta : A_{\tilde{\nu}^{-1}} \to A^{t^e}$ по формуле

$$ \theta(a)(b) = a \star (b\varrho_1). $$

Для корректности этого определения необходимо, чтобы $\theta(a)$ был гомоморфизмом бимодулей. Для этого достаточно доказать, что $b\big(\theta(a)(1)\big) = \theta(a)(b) = \big(\theta(a)(1)\big)b$. Это следует из леммы 8.1:

$$ b(a \star \varrho_1) = a \star (b\varrho_1) = a \star (\varrho_1 b) = (a \star \varrho_1)b. $$

Докажем, что $\theta : A_{\tilde{\nu}^{-1}} \to A^{t^e}$ – гомоморфизм бимодулей. Для этого достаточно доказать, что $\theta(a) = a \star \theta(1) = \theta(1) \star \tilde{\nu}(a)$. Это также следует из леммы 8.1:

$$a \star (b\varrho_1) = b(a \star \varrho_1) = b(\varrho_1 \star \tilde{\nu}(a)) = (b\varrho_1) \star \tilde{\nu}(a).$$

Из формулы (4.1) следует, что $A^{t^e} \cong \nu^{-1}(A)$, но для фробениусовых алгебр $\nu \cong (-)_{\tilde{\nu}}$, следовательно, $A^{t^e} \cong A_{\tilde{\nu}^{-1}}$.

Таким образом, чтобы доказать, что θ – изоморфизм, нам достаточно доказать, что он мономорфизм. Для этого докажем, что $\theta(a)(1) \neq 0$, для любого ненулевого $a \in A$. Воспользовавшись тем, что $\mathrm{tw}(\varrho_1) = (\mathrm{id} \otimes \tilde{\nu})(\varrho_1)$, получаем

$$\Big((\mathrm{id} \otimes \tilde{\nu}^{-1}) \circ \mathrm{tw}\Big)(\theta(a)(1)) = \Big((\mathrm{id} \otimes \tilde{\nu}^{-1}) \circ \mathrm{tw}\Big)(a \star \varrho_1) =$$

$$= (\mathrm{id} \otimes \tilde{\nu}^{-1})(a \cdot \mathrm{tw}(\varrho_1)) = a \cdot \Big((\mathrm{id} \otimes \tilde{\nu}^{-1})(\mathrm{tw}(\varrho_1))\Big) = a\varrho_1 = \varrho(a).$$

Но мы знаем, что ϱ – мономорфизм, следовательно, $\theta(a)(1) \neq 0$.

Осталось доказать, что $m' \circ \theta = \iota \circ \Xi \circ (\varrho')_{\tilde{\nu}^{-1}}$. Напомним, что $m' = \Theta \circ m^{t^e}$, где Θ – изоморфизм из предложения 2.1, и $m = (m_i)^\top : \bigoplus P_{i,i} \to A$ – гомоморфизм, индуцированный умножением $m_i(a \otimes b) = ab$, и $\Xi : (-)_{\tilde{\nu}^{-1}}|_{\mathcal{P}_0} \to [\mathrm{id} \otimes \tilde{\nu}]$ – изоморфизм из леммы 8.7. Чтобы проверить равенство этих двух гомоморфизмов, достаточно проверить, что они совпадают на $1 \in A_{\tilde{\nu}^{-1}}$.

$$(m' \circ \theta)(1) = (\Theta \circ m^{t^e} \circ \theta)(1) = \left(\mathrm{tw}\Big(\big((m^{t^e} \circ \theta)(1)\big)(e_i \otimes e_i)\Big)\right)_{i \in Q_0}.$$

Причем

$$\big((m^{t^e} \circ \theta)(1)\big)(e_i \otimes e_i) = \theta(1)(m_i(e_i \otimes e_i)) = \theta(1)(e_i) = e_i\varrho_1.$$

Таким образом,

$$(m' \circ \theta)(1) = \big(\mathrm{tw}(e_i\varrho_1)\big)_{i \in Q_0} = \big(e_i \star \mathrm{tw}(\varrho_1)\big)_{i \in Q_0}.$$

С другой стороны

$$(\iota \circ \Xi \circ (\varrho')_{\tilde{\nu}^{-1}})(1) = (\iota \circ \Xi)\Big((\varrho'_i(1))_{i \in Q_0}\Big) = (\iota \circ \Xi)\Big((e_i \star \varrho_1)_{i \in Q_0}\Big) =$$

$$= \Big((\mathrm{id} \otimes \tilde{\nu})(e_{\nu_0^{-1}(i)} \star \varrho_1)\Big)_{i \in Q_0} = \Big(e_i \star \big((\mathrm{id} \otimes \tilde{\nu})(\varrho_1)\big)\Big)_{i \in Q_0}.$$

Осталось заметить, что по лемме 8.1 $\mathrm{tw}(\varrho_1) = (\mathrm{id} \otimes \tilde{\nu})(\varrho_1)$, следовательно, $m' \circ \theta = \iota \circ \Xi \circ (\varrho')_{\tilde{\nu}^{-1}}$. □

Доказательство теоремы 8.6. Ввиду леммы 8.8 последовательность (4.2) примет вид:

$$0 \longrightarrow A_{\tilde{\nu}^{-1}} \xrightarrow{m'\circ\theta} \mathbf{P}_3 \xrightarrow{\mathbf{d}_3} \mathbf{P}_2 \xrightarrow{\mathbf{d}_2} \mathbf{P}_1 \xrightarrow{\mathbf{d}_1} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{m} A \longrightarrow 0.$$

Применим к ней функтор $(-)_{\tilde{\nu}^{-n}}$, и, воспользовавшись тем, что $(-)_{\tilde{\nu}^{-n}}|_{\mathcal{P}_0} \cong [\mathrm{id}\otimes\tilde{\nu}^n]$, получим точную последовательность

$$0 \longrightarrow A_{\tilde{\nu}^{-n-1}} \longrightarrow \mathbf{P}_{3+4n} \xrightarrow{\mathbf{d}_{3+4n}} \mathbf{P}_{2+4n} \xrightarrow{\mathbf{d}_{2+4n}} \mathbf{P}_{1+4n} \xrightarrow{\mathbf{d}_{1+4n}} \mathbf{P}_{4n} \xrightarrow{m_{\tilde{\nu}^{-1}}\circ\Xi^{-1}} A_{\tilde{\nu}^{-n}} \longrightarrow 0.$$

Умножив по Йонеде все эти точные последовательности, получим проективную резольвенту бимодуля A, члены которой совпадают с требуемыми. Обозначим дифференциалы полученного комплекса через $\mathbf{d}'_i$. Ясно, что $\mathbf{d}'_i = \mathbf{d}_i$, когда i не делится на 4. Докажем, что это верно для всех i, и тем самым докажем теорему.

Докажем, что $\mathbf{d}'_4 = \mathbf{d}_4$. Воспользовавшись леммой 8.8, и тем, что $\Xi : (-)_{\tilde{\nu}^{-1}} \to [\mathrm{id}\otimes\tilde{\nu}]$ является морфизмом функторов, получаем

$$\mathbf{d}'_4 = m'\circ\theta\circ m_{\tilde{\nu}^{-1}}\circ\Xi^{-1} = \iota\circ\Xi\circ(\varrho')_{\nu^{-1}}\circ m_{\tilde{\nu}^{-1}}\circ\Xi^{-1} =$$

$$= \iota\circ\Xi\circ(\varrho'\circ m)_{\tilde{\nu}^{-1}}\Xi^{-1} = \iota\circ[\mathrm{id}\otimes\tilde{\nu}](\varrho'\circ m).$$

Легко видеть, что

$$\varrho'\circ m = (\varrho'_i)_{i\in Q_1}\circ(m_j)^{\top}_{j\in Q_1} = (\varrho'_i\circ m_j)_{(i,j)} = (e_i\star(e_j\varrho_1))_{(j,i)}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{d}'_4 = \iota\circ[\mathrm{id}\otimes\tilde{\nu}]\Big((e_j\star(e_i\varrho_1))_{(j,i)}\Big) = \Big((\mathrm{id}\otimes\tilde{\nu})(e_{\nu_0^{-1}(j)}\star(e_i\varrho_1))\Big)_{(j,i)} =$$

$$= \Big((\mathrm{id}\otimes\tilde{\nu})((e_i\varrho_1)\star e_j)\Big)_{(j,i)} = \mathbf{d}_4.$$

Используя это, получаем, что и остальные дифференциалы совпадают:

$$\mathbf{d}'_{4+4n} = [\mathrm{id}\otimes\tilde{\nu}^n](\mathbf{d}'_4) = [\mathrm{id}\otimes\tilde{\nu}^n](\mathbf{d}_4) = \mathbf{d}_{4+4n}$$

для $n \geqslant 0$.

$\square$

Список литературы

[1] А. И. Бондал, М. М. Капранов, *Представимые функторы, функторы Серра и перестройки.* — Изв. АН СССР. Сер. матем., **53**: 6 (1989), 1183-1205.

[2] B. Keller, *Calabi–Yau triangulated categories.* — Trends in representation theory of algebras and related topics, A. Skowronski, editor, E.M.S., Zurich, 2008, 467–489.

[3] D. Happel, *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras.* — London Math. Soc. Lecture Note Series, 119, Cambridge Univ. Press, 1988.

[4] I. Reiten, M. van den Bergh, *Noetherian hereditary abelian categories satisfying Serre duality.* — J. Amer. Math. Soc., **15** (2002), 295–366.

[5] M. Kontsevich, *Triangulated categories and geometry,* Course at the École Normale Supérieure, Paris, Notes taken by J. Bellaiche, J.-F. Dat, I. Marin, G. Racinet and H. Randriambololona, 1998.

[6] K. Erdmann, A. Skowroński, *The stable Calabi-Yau dimension of tame symmetric algebras.* — J. Math. Soc. Japan **58** (2006), 97–123.

[7] K. Erdmann, *Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras, Lecture Notes in Math.,* **1428**, Springer, 1990.

[8] P.M. Cohn, *Algebra: Vol. 3 (Second Edition)*, Wiley (1991).

[9] M. C. R. Butler, A. D. King, *Minimal resolutions of algebras.* — J. Algebra **212** (1999), 323–362.

[10] J. Kock, *Frobenius algebras and 2D topological quantum field theories.* London Mathematical Society Student Texts **59**, Cambridge University Press: Cambridge, 2004.

[11] F. Kasch, *Modules and Rings.* LMS Monographs, 17, Academic Press, Inc., 1982.

[12] С. О. Иванов, *Функоры Накаямы и теоремы Эйленберга-Уотса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388**(2011), 179–188.