Центральная предельная теорема для экстремальных характеров бесконечной симметрической группы

Ал.И.Буфетов

Аннотация

В работе изучается предельное поведение длин первых строк и столбцов случайных диаграмм Юнга, соответствующих экстремальным характерам бесконечной симметрической группы. Мы рассматриваем линейно растущие строки и столбцы и доказываем для их длин, при некоторых ограничениях, центральную предельную теорему. Мы также устанавливаем более точное утверждение, связывающее рост строк и столбцов с простой моделью с независимыми испытаниями.

1 Введение

Пусть $\mathbb{Y}_n$ — множество диаграмм Юнга из n клеток. Определим градуированный граф Юнга $\mathbb{Y}$, множеством вершин которого служит $\cup_{n=1}^{\infty}\mathbb{Y}_n$, а ребро между диаграммами λ и μ проведено в том и только в том случае, если $\lambda \in \mathbb{Y}_n$, $\mu \in \mathbb{Y}_{n+1}$ и μ получается из λ добавлением одной клетки (в этом случае будем писать $\lambda \uparrow \mu$). Пусть $\dim \lambda$ — число различных кратчайших путей в $\mathbb{Y}$ от одноклеточной диаграммы Юнга до диаграммы λ.

Когерентной системой мер на $\mathbb{Y}$ называется последовательность $\{M_n\}$, где M_n — вероятностная мера на $\mathbb{Y}_n$, для которой выполнено соотношение

$$M_n(\nu) = \sum_{\lambda:\nu\uparrow\lambda} \frac{\dim \nu}{\dim \lambda} M_{n+1}(\lambda), \quad \text{для любого } \nu \in \mathbb{Y}_n.$$

Хорошо известно, что характеры бесконечной симметрической группы взаимно однозначно соответствуют когерентным системам мер на $\mathbb{Y}$.

По теореме Тома (см. [1]) экстремальные характеры описываются множеством параметров $\mathcal{P} = (\{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \gamma)$, где $\alpha_i, \beta_j, \gamma$ — вещественные числа, удовлетворяющие соотношениям

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \ldots \geq 0, \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i + \beta_i) + \gamma = 1.$$

Пусть $\{M_n^{\mathcal{P}}\}$ — когерентная система мер, соответствующая фиксированному набору параметров $\mathcal{P}$. Обозначим символом $\lambda_i^{\mathcal{P}}(n)$ длину i-ой строки случайной диаграммы Юнга, выбранной по мере $M_n^{\mathcal{P}}$, а символом $\lambda_j'^{\mathcal{P}}(n)$ — длину j-ого столбца этой диаграммы. Нашей основной задачей является изучение асимптотического поведения этих величин.

Известно (см. [3],[4],[5]), что для длин строк и столбцов выполнен закон больших чисел:

$$\frac{\lambda_i^{\mathcal{P}}(n)}{n} \xrightarrow[prob]{} \alpha_i, \quad \frac{\lambda_j'^{\mathcal{P}}(n)}{n} \xrightarrow[prob]{} \beta_j.$$

Центральная предельная теорема для случая $\alpha_i = (1-q)q^{i-1}$, $\beta_j = 0$,$\gamma = 0$ была установлена в [2]. Основным результатом данной статьи является центральная предельная теорема для случая строго монотонных последовательностей $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_j\}$. Точнее говоря, будем рассматривать множества параметров $\mathcal{P}$, для которых выполнено

$$\alpha_i > \alpha_{i+1} \text{ для всех } i \text{ таких, что } \alpha_i \neq 0, \qquad \beta_j > \beta_{j+1} \text{ для всех } j \text{ таких, что } \beta_j \neq 0. \quad (1.1)$$

Заметим, что условие неравенства параметров существенно: например, если $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \frac{1}{k}$, то флуктуации не являются гауссовыми (см. [13], [14]).

Теорема 1. *(***Центральная предельная теорема***) Пусть $\mathcal{P}$ — произвольный набор параметров, удовлетворяющий (1.1), и $K, L > 0$ таковы, что $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_K > 0$ и $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_L > 0$. Тогда:*

$$\Big(\frac{\lambda_1^{\mathcal{P}}(n) - \alpha_1 n}{\sqrt{n}}, \frac{\lambda_2^{\mathcal{P}}(n) - \alpha_2 n}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{\lambda_K^{\mathcal{P}}(n) - \alpha_K n}{\sqrt{n}}, \frac{\lambda_1'^{\mathcal{P}}(n) - \beta_1 n}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{\lambda_L'^{\mathcal{P}}(n) - \beta_L n}{\sqrt{n}}\Big) \xrightarrow[Law]{} Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_k, Z_1', \ldots, Z_L'),$$

где Z — многомерная гауссова случайная величина с моментами

$$\mathbf{E}Z_i = 0, \quad \mathbf{E}Z_i' = 0,$$
$$\mathbf{E}Z_i^2 = \alpha_i - \alpha_i^2, \quad \mathbf{E}Z_i'^2 = \beta_i - \beta_i^2,$$
$$\mathbf{E}Z_iZ_j = -\alpha_i\alpha_j, \quad \mathbf{E}Z_i'Z_j' = -\beta_i\beta_j, \quad \mathbf{E}Z_iZ_j' = -\alpha_i\beta_j.$$

Замечание 1. Пусть $\{X_i\}$, $\{Y_j\}$, Θ — независимые в совокупности гауссовы случайные величины с нулевым средним и дисперсиями

$$\mathbf{E}X_i^2 = \alpha_i, \quad \mathbf{E}Y_j^2 = \beta_j, \quad \mathbf{E}\Theta^2 = \gamma,$$

при этом X_i,Y_j определены для всех ненулевых α- и β- параметров. Тогда распределение $(Z_1, \dots, Z_K, Z_1', \dots, Z_L')$ совпадает с проекцией на первые $K+L$ координат условного распределения на гиперплоскости $X_1 + \dots + X_K + X_{K+1} + \dots + Y_1 + \dots + Y_L + Y_{L+1} + \dots + \Theta = 0$.

Замечание 2. Пусть $\widetilde{M}_\nu^{\mathcal{P}}$ — мера на $\mathbb{Y}$, являющаяся *пуассонизацией* последовательности мер $M_n^{\mathcal{P}}$:

$$\widetilde{M}_\nu^{\mathcal{P}}(\lambda) := e^{-\nu}\frac{\nu^{|\lambda|}}{|\lambda|!}M_{|\lambda|}^{\mathcal{P}}(\lambda),$$

где символом $|\lambda|$ обозначено число клеток в диаграмме λ, и $\tilde{\lambda}_i^{\mathcal{P}}(\nu)$, $\tilde{\lambda}_j'^{\mathcal{P}}(\nu)$ — длины i-ой строки и j-ого столбца случайной диаграммы Юнга, взятой по этой мере. В условиях теоремы 1 выполнено

$$\Big(\frac{\tilde{\lambda}_1^{\mathcal{P}}(\nu) - \alpha_1\nu}{\sqrt{\nu}}, \frac{\tilde{\lambda}_2^{\mathcal{P}}(\nu) - \alpha_2\nu}{\sqrt{\nu}}, \dots, \frac{\tilde{\lambda}_K^{\mathcal{P}}(\nu) - \alpha_K\nu}{\sqrt{\nu}}, \frac{\tilde{\lambda}_1'^{\mathcal{P}}(\nu) - \beta_1\nu}{\sqrt{\nu}},$$
$$\dots, \frac{\tilde{\lambda}_L'^{\mathcal{P}}(\nu) - \beta_L\nu}{\sqrt{\nu}}\Big) \xrightarrow[Law]{\nu\to\infty} (X_1, X_2, \dots, X_K, Y_1, \dots, Y_L)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Пусть $\mathcal{A}$ — алфавит, состоящий из дискретной части — множеств $L_e = \{x_1, x_2, \dots\}$ и $L_o = \{y_1, y_2, \dots\}$, и непрерывной части G, которую будем считать отрезком. Введем на $\mathcal{A}$ вероятностную меру μ_1, сопоставляя букве x_i вероятность α_i, букве y_j — вероятность β_j и считая, что на G задана мера Лебега с условием $\mu_1(G) = \gamma$; зададим на $\mathcal{A}^n$ бернуллиевскую меру $\mu_n = \mu_1^{\otimes n}$. Обозначим символом $N_{x_i}(n)$ случайную величину, равную числу букв x_i в случайном слове $w \in \mathcal{A}^n$, выбранном по мере μ_n, а символом $N_{y_j}(n)$ — число букв y_j в этом слове. Будем считать, что на $\mathcal{A}$ введено некоторое линейное упорядочение p. Как было показано в [6], с помощью обобщенного RSK-алгоритма можно построить отображение

$$\phi_p : \mathcal{A}^n \to \mathbb{Y}_n$$

такое, что мера μ_n под действием ϕ_p переходит в меру $M_n^{\mathcal{P}}$. В силу этого можно считать, что величины $\lambda_i^{\mathcal{P}}(n), \lambda_j'^{\mathcal{P}}(n)$ заданы на вероятностном пространстве $(\mathcal{A}^n, \mu_n)$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{P}$ — произвольный набор параметров, удовлетворяющий (1.1), и $K, L > 0$ таковы, что $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_K > 0$ и $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_L > 0$. Определим функции*

$$\begin{aligned}
&\epsilon_1(n) := \lambda_1^{\mathcal{P}}(n) - N_{x_1}(n),\\
&\epsilon_2(n) := \lambda_2^{\mathcal{P}}(n) - N_{x_2}(n),\\
&\vdots\\
&\epsilon_K(n) := \lambda_K^{\mathcal{P}}(n) - N_{x_K}(n),\\
&\epsilon_1'(n) := \lambda_1'^{\mathcal{P}}(n) - N_{y_1}(n),\\
&\vdots\\
&\epsilon_L'(n) := \lambda_L'^{\mathcal{P}}(n) - N_{y_L}(n).
\end{aligned}$$

Тогда существует константа $C = C(K, L)$ (не зависящая от n) такая, что

$$\mathbf{E}|\epsilon_i(n)| < C, \quad \mathbf{E}|\epsilon_j^{'}(n)| < C, \quad i = 1, \ldots, K, \quad j = 1, \ldots, L.$$

Теорема 1 является простым следствием теоремы 2.

Замечание 3. В определении величин $\lambda_i^{\mathcal{P}}(n)$ на пространстве $(\mathcal{A}^n, \mu_n)$ имеется неоднозначность, связанная с произвольностью выбора линейного упорядочения алфавита $\mathcal{A}$. Как будет показано в 2.2, величины $\lambda_i^{\mathcal{P}}(n) - N_{x_i}(n)$ имеют одинаковое распределение при любых упорядочениях.

Замечание 4. Пусть $\tilde{\mu}_\nu(w)$ — мера на словах произвольной длины из букв алфавита $\mathcal{A}$, определяемая по формуле

$$\tilde{\mu}_\nu(w) := \frac{\nu^{|w|}}{|w|!}\mu_{|w|}(w),$$

где $|w|$ — число букв в слове w. Будем обозначать символом $\tilde{N}_{x_i}(\nu)$ (соотв. $\tilde{N}_{y_j}(\nu)$) число букв x_i (соотв. y_j) в случайном слове w, взятом по мере $\tilde{\mu}_\nu$. В тех же предположениях утверждение теоремы 2 выполнено для разностей $\tilde{\lambda}_i^{\mathcal{P}}(\nu) - \tilde{N}_{x_i}(\nu)$, $\tilde{\lambda}_j'^{\mathcal{P}}(\nu) - \tilde{N}_{y_j}(\nu)$. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Замечание 5. Теорема 2 может быть переформулирована в терминах, не использующих RSK-алгоритм. Для этого величины $\lambda_i^{\mathcal{P}}(n), \lambda_j'^{\mathcal{P}}(n)$ следует определять на вероятностном пространстве, состоящем из $\mathcal{A}_p$-таблиц (см. определение в 2.1).

Автор глубоко благодарен Г.И.Ольшанскому и А.М.Бородину за постановку задачи и многочисленные полезные обсуждения. Автор благодарен Л.А.Петрову за замечания, способствовавшие улучшению текста.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Саймонса, фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса» и гранта РФФИ-НЦНИЛ–10-01-93114.

2 Основные леммы

2.1

В этом разделе мы перескажем часть материала из [6].

Пусть на алфавите $\mathcal{A}$ задано линейное упорядочение p. Будем писать $x \nearrow y$, если $x < y$ или $x = y \in L_e$, и $x \searrow y$, если $x > y$ или $x = y \in L_o \cup G$. Назовем слово $w = x_1 x_2 \dots x_n$ *возрастающим*, если $x_1 \nearrow x_2 \nearrow \dots \nearrow x_n$, и *убывающим*, если $x_1 \searrow x_2 \searrow \dots \searrow x_n$. Определим $\mathcal{A}_p$-таблицу формы λ как диаграмму Юнга λ, заполненную буквами из $\mathcal{A}$, при этом вдоль строк стоят возрастающие слова, а вдоль столбцов, читаемых снизу вверх, стоят убывающие слова (см. пример ниже). Обобщенный RSK-алгоритм сопоставляет слову $w \in \mathcal{A}^n$ пару $(R(w), S(w))$, где $R(w)$ — $\mathcal{A}_p$-таблица, а $S(w)$ — стандартная[1] таблица Юнга, при этом $R(w)$ и $S(w)$ имеют одну и ту же форму λ. Отображение

$$\phi_p \colon \mathcal{A}^n \to \mathbb{Y}_n$$

определяется как сопоставление слову w этой формы λ. Опишем действие обобщенного RSK-алгоритма.

Определим сначала алгоритм строчной вставки; по $\mathcal{A}_p$-таблице T и букве $x \in \mathcal{A}$ он строит новую $\mathcal{A}_p$-таблицу, которая обозначается как $x \to T$. Эта таблица содержит на одну клетку больше, чем T, а множество её элементов содержит те же элементы, что и в T, а также элемент x. Предположим, что $x \in L_e$. Тогда расстановка этих элементов определяется следующим образом: если x больше или равен каждого элемента из первой строки, то просто ставим его в новую клетку в конце первой строки. В противном случае находим самый маленький элемент первой строки, строго превосходящий x. Выбиваем этот элемент из клетки и ставим x на его место. Если же $x \in L_o$, то правило аналогично, только x может выбивать не только строго большие элементы, но и равные себе. С выбитым элементом повторяем те же действия относительно второй строчки. Продолжаем этот процесс, пока очередной выбитый элемент не

[1] Стандартной таблицей Юнга называется диаграмма λ, заполненная числами от 1 до $|\lambda|$, каждое из которых встречается ровно по одному разу, и вдоль всех строк и столбцов которой стоят возрастающие последовательности.

оказывается в конце очередной строчки или не выбивается из последней строки — в этом случае образуем новую строку из одного элемента.

Для $w = x_1 x_2 \dots x_n$ определим $R(w)$ формулой

$$R(w) := [(x_n \to (x_{n-1} \to (x_{n-2} \dots \to (x_2 \to (x_1 \to \emptyset)) \dots)]$$

На каждом шаге алгоритма к $R(w)$ присоединяется одна новая клетка. Таблица Юнга $S(w)$ определяется нумерацией клеток в порядке их присоединения к $R(w)$.

Пример. Пусть $x_1 < x_2 < y_1 < y_2$ и $L_e = \{x_1, x_2\}$, $L_o = \{y_1, y_2\}$. Тогда слово $w = x_1 y_1 y_1 y_2 x_2 x_1 y_1$ под действием обобщенного RSK-алгоритма перейдёт в пару таблиц:

x_1	x_1	y_1
x_2	y_2	
y_1		
y_1		

1	2	4
3	7	
5		
6		

Обозначим максимальное натуральное число, которое можно получить как сумму длин k непересекающихся возрастающих (соотв. убывающих) подпоследовательностей слова w, символом $r_k(w)$ (соотв. $c_k(w)$).

Утверждение 1. *a) Обобщенный RSK-алгоритм дает биекцию между $\mathcal{A}^n$ и парами (R, S), где R — $\mathcal{A}_p$-таблица, S — таблица Юнга и R, S имеют общую форму, состоящую из n клеток.*

b) Выполнены равенства:

$$r_k(w) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(\phi_p(w)) \ ; \quad c_k(w) = \sum_{j=1}^{k} \lambda'_j(\phi_p(w)).$$

Доказательство. Это утверждение является обобщением теоремы Шенстеда (см. [11]). Как указано в [6, Prop.1], доказательство аналогично доказательству теоремы Шенстеда (см., например, [10]). □

Пусть Λ — алгебра симметрических функций от бесконечного числа переменных (см. [7, Ch. 1.2]). Обозначим символом h_n полные однородные симметрические функции, а символом s_λ — функции Шура. Определим производящую функцию элементов h_n формулой

$$H(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n z^n$$

и пусть

$$\pi^{\mathcal{P}} : \Lambda \to \mathbb{C}$$

— гомоморфизм, задаваемый на базисе $\{h_n\}$ формулой

$$\pi^{\mathcal{P}}(H(z)) = e^{\gamma z} \prod_{i \geq 1} \frac{1 + \beta_i z}{1 - \alpha_i z}$$

Утверждение 2. *а) Пусть $P_{\mathcal{P}}(\lambda)$ — вероятность того, что заполнение диаграммы λ независимыми случайными буквами с распределением μ_1 окажется $\mathcal{A}_p$-таблицей. Тогда*

$$P_{\mathcal{P}}(\lambda) = \pi^{\mathcal{P}}(s_\lambda)$$

б) Пусть $\lambda \in \mathbb{Y}_n$. Тогда:

$$\mu_n(w : \phi_p(w) = \lambda) = \dim \lambda \pi^{\mathcal{P}}(s_\lambda) = M_n^{\mathcal{P}}(\lambda)$$

Доказательство. См. [6, Prop.3 и Th.1]. □

Существуют другие обобщения RSK-алгоритма (см. [9], [8]), сохраняющие свойства утверждений 1а) и 2б), но не удовлетворяющие утверждению 1б).

2.2

Будем называть множество $I \subset \mathcal{A}$ *интервалом*, если из неравенств:

$$a_1 < a < a_2, \quad a_1, a_2 \in I, a \in \mathcal{A}$$

следует, что $a \in I$. Для удобства в дальнейшем будем считать упорядочения алфавита $\mathcal{A}$ такими, что G образует интервал.

Обозначим символами $n_i(R)$, $n'_j(R)$ число букв x_i и y_j в $\mathcal{A}_p$-таблице R. Назовем типом $\mathcal{A}_p$-таблицы R совокупность чисел

$$type(R) := (\{n_i(R)\}, \{n'_j(R)\}, m),$$

где m — число букв из G, стоящих в клетках R.

Напомним, что различным порядкам на $\mathcal{A}$ соответствуют различные отображения

$$\phi_p : \mathcal{A}^n \to \mathbb{Y}_n.$$

Лемма 1. *Пусть зафиксированы набор чисел $(\{n_i\}; \{n'_j\}; m)$ и диаграмма $\lambda \in \mathbb{Y}_n$. Тогда величина*

$$\mu_n(w \in \mathcal{A}^n : \phi_p(w) = \lambda; type(R(w)) = (\{n_i\}; \{n'_j\}; m))$$

не зависит от упорядочения p.

Доказательство. Заметим, что вероятность совпадения двух букв из G в слове w равна 0, поэтому можно считать, что все буквы из G, входящие в слово w, различны. Пусть $g_1 < g_2 < \dots < g_m$ — произвольные буквы из G. Рассмотрим набор из $|\lambda|$ букв $\Omega = (\{x_i\}, \{y_j\}, g_1, \dots, g_m)$, в который буквы x_i входят n_i раз, а буквы y_j — n'_j раз. Будем заполнять клетки диаграммы λ буквами из Ω так, чтобы получалась $\mathcal{A}_p$-таблица. По [8, Th.3] число таких заполнений не зависит от упорядочения p. Обозначим это число символом $d(\{n_i\}; \{n'_j\}; m)$. Каждому заполнению в силу утверждения 1а) соответствует ровно $\dim\lambda$ слов w, составленных из набора букв Ω. Поэтому вероятность фиксированного заполнения диаграммы λ равна

$$\dim\lambda \prod_{i\geq 1} \alpha_i^{n_i} \prod_{j\geq 1} \beta_j^{n'_j} \frac{1}{m!},$$

где множитель $\frac{1}{m!}$ возникает из условия $g_1 < g_2 < \dots < g_m$. Следовательно, искомая величина выражается формулой, не зависящей от упорядочения p:

$$\mu_n(w \in \mathcal{A}^n : \phi_p(w) = \lambda; type(R(w)) = (\{n_i\}; \{n'_j\}; m)) = \\ \dim\lambda \frac{d(\{n_i\}; \{n'_j\}; m)}{m!} \prod_{i\geq 1} \alpha_i^{n_i} \prod_{j\geq 1} \beta_j^{n'_j}.$$

$\square$

Следствие 1. Распределение величин $\lambda_i^{\mathcal{P}}(n) - N_{x_i}(n)$, $\lambda_j'^{\mathcal{P}}(n) - N_{y_j}(n)$ не зависит от порядка p.

Зафиксируем на $\mathcal{A}$ порядок p и пусть I — интервал алфавита $\mathcal{A}$. Скажем, что алфавит $\mathcal{A}^*$ является *укрупнением* алфавита $\mathcal{A}$, если интервал I заменяется одной новой буквой $z \in \mathcal{A}^*$ (остальные буквы не меняются). Будем считать, что $z \in L_e$ (вне зависимости от того, каким из множеств L_e, L_o, G принадлежали буквы из I), и сопоставим букве z вероятность, равную $\mu_1(I)$. В этом случае отображение ϕ_p^* можно естественным образом определить как

$$\phi_p^* \colon \mathcal{A}^n \to \mathbb{Y}_n,$$

то есть на том же вероятностном пространстве, что и отображение ϕ_p. В силу этого можно сравнивать длины строк случайных диаграмм Юнга, порождаемых $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$.

Лемма 2. *Для любого $k > 0$ выполнено неравенство*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{\mathcal{P}}(n) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{\mathcal{P}^*}(n)$$

Доказательство. Вследствие утверждения 1b), имеем:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{\mathcal{P}}(n) = r_k(w);$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{\mathcal{P}^*}(n) = r_k(w^*).$$

Заметим, что любая возрастающая (в смысле нашего определения) подпоследовательность слова w из $\mathcal{A}$ переходит в возрастающую подпоследовательность соответствующего слова $w^* \in \mathcal{A}^*$, так как новая буква z принадлежит множеству L_e. Поэтому для любого w выполнено неравенство

$$r_k(w^*) \geq r_k(w).$$

□

Определим *транспонирующее* отображение, меняющее ролями строки и столбцы,

$$\phi_{p^t} \colon \mathcal{A}^n \to \mathbb{Y}_n,$$

следующим образом. Рассмотрим на $\mathcal{A}$ упорядочение, обратное p (будем обозначать его p^t), и будем считать, что:

$$L_e^t = L_o, \quad L_o^t = L_e.$$

Таким образом, параметры $\{\beta_j\}$ и $\{\alpha_i\}$ меняются местами; ϕ_{p^t} определяется обобщенным RSK-алгоритмом, примененным к порядку p^t и L_e^t, L_o^t, G. Будем обозначать λ^t диаграмму Юнга, транспонированную к λ.

Лемма 3.

$$\phi_p(w) = \phi_{p^t}(w)^t \text{ *для почти всех* } w.$$

Доказательство. Если все буквы из G, входящие в w, различны (это условие вызвано формальной несимметричностью отношений $x_1 \nearrow x_2$ и $x_1 \searrow x_2$) , то легко видеть, что возрастающая последовательность букв относительно p и $L_e \cup L_o$ — это убывающая последовательность относительно p^t,$L_e^t \cup L_o^t$. Таким образом, лемма следует из утверждения 1b). □

2.3

Пусть $q_1, q_2, q_3 \geq 0$, $q_1 < q_3$ и $q_1+q_2+q_3 = 1$. Рассмотрим случайное блуждание частицы по множеству $\{0, 1, 2 \ldots\}$, в котором шаг вправо делается с вероятностью q_1, а шаг влево — с вероятностью q_3, за исключением точки 0. Вначале частица находится в 0. Обозначим символом $\Psi_{q_3,q_1}(n)$ положение частицы после n-ого шага. Иначе говоря, $\Psi_{q_3,q_1}(n)$ — марковская цепь с переходной матрицей

$$D = \begin{pmatrix} q_3+q_2 & q_1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ q_3 & q_2 & q_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & q_3 & q_2 & q_1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

и начальным вектором $\vec{a}_0 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$.

Лемма 4. *Существует константа C, не зависящая от n, такая что*

$$\mathbf{E}\Psi_{q_3,q_1}(n) < C \qquad \textit{для любого } n$$

Доказательство. Определим вектор $\vec{a}$ формулой

$$\vec{a} = (2, 2\left(\frac{q_1}{q_3}\right), 2\left(\frac{q_1}{q_3}\right)^2, \ldots)$$

Легко видеть, что $\vec{a}D = \vec{a}$. Кроме того, вектор $\vec{a}$ покомпонентно больше, чем начальный вектор этой марковской цепи $\vec{a}_0 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$. Из неотрицательности элементов матрицы D следует, что и $\vec{a}D^n$ будет покомпонентно больше, чем $\vec{a}_0 D^n$ для любого n. Но $\vec{a}D^n = \vec{a}$, поэтому $\mathbf{E}\Psi_{q_3,q_1}(n)$ для любого n будет ограничено числом

$$2\sum_{i=0}^{\infty} i \left(\frac{q_1}{q_3}\right)^i$$

□

2.4

Зафиксируем порядок на $\mathcal{A}$. Пусть буквы $a, b \in L_e$, $a < b$, образуют интервал относительно этого порядка (т.е. a и b — соседние буквы) и $w \in \mathcal{A}^n$ — слово, подаваемое на вход RSK-алгоритма. Обозначим символом $w_{a,b}$ слово, полученное из w вычеркиванием всех букв, кроме a и b.

Назовем *возможным преобразованием* слова $w_{a,b}$ слово (обозначим его символом $d_w(w_{a,b})$), в которое записывается тот порядок букв a и

b, в котором они выбиваются из первой строчки в процессе действия обобщенного RSK-алгоритма на слове w; если какие-то буквы остались не выбитыми из первой строчки, то допишем их в конец слова $d_w(w_{a,b})$ в том порядке, в котором они стоят в первой строчке.

Будем называть суффиксом слова $w = z_1z_2\dots z_n$ любое слово вида $z_kz_{k+1}z_{k+2}\dots z_n$. Для всех суффиксов (включая пустой) слова $w_{a,b}$ определим разность числа букв b и числа букв a, входящих в них. Максимальную из этих разностей назовем *результатом* и обозначим символом $\rho(w_{a,b})$, а любой суффикс, на котором она достигается, будем называть *максимальным.*

Легко видеть, что если применять RSK-алгоритм непосредственно к слову $w_{a,b}$, то в первой строчке останутся не выбитыми ровно $\rho(w_{a,b})$ букв b.

Пример. Пусть $x_1 < x_2 < x_3 \in L_e$ и $w = x_2x_1x_3x_2x_1x_2x_3x_3x_2x_3x_1x_3x_2$. Тогда $w_{x_2x_3} = x_2x_3x_2x_2x_3x_3x_2x_3x_3x_2$, максимальный суффикс w_{x_2,x_3} состоит из 6 последних букв и $\rho(w_{x_2,x_3}) = 2$. При этом выполнено

$$d_w(w_{x_2,x_3}) = x_2x_3x_2x_3x_2x_3x_2x_2x_3x_3.$$

Лемма 5.

$$\rho(d_w(w_{a,b})) \le \rho(w_{a,b})$$

для любого w.

Доказательство. Шаг 1

Будем образовывать пары букв из слова $w_{a,b}$. В каждой паре будет одна буква b и одна буква a, причем буква a будет стоять в слове $w_{a,b}$ правее, чем буква b из этой пары. Составим эти пары следующим образом: первой возьмём самую правую букву a и поставим ей в соответствие ближайшую к ней слева букву b. Затем возьмём самую правую из ещё не выбранных букв a и поставим ей в пару самую ближнюю к ней слева букву b из числа ещё не выбранных. Проделаем эту процедуру максимально возможное число раз. Буквы b, не вошедшие в пары, будем называть черными, а вошедшие — белыми.

Для слова w_{x_2,x_3} из примера (см. выше) разбиение на пары будет выглядеть следующим образом:

$$x_2\ x_3\ x_2\ x_2\ x_3\ x_3\ x_2\ x_3\ x_3\ x_2$$

Шаг 2

Докажем, что ровно $\rho(w_{a,b})$ букв b не вошло в пары. Действительно, пусть число черных букв равно ρ'. Рассмотрим суффикс, начинающийся с самой левой из черных букв. Каждая буква a из этого суффикса должна быть сопоставлена с буквой b из этого же суффикса. Поэтому разность числа букв b и a для него равна ρ'. Значит, $\rho(w_{a,b}) \geq \rho'$. С другой стороны, в максимальном суффиксе должно быть как минимум $\rho(w_{a,b})$ черных букв. Поэтому $\rho' = \rho(w_{a,b})$.

Будем для удобства считать, что в ходе RSK-алгоритма выбивается сначала белая буква b, и только если такой нет — то черная. Понятно, что эта условность никак не влияет на ход алгоритма.

Шаг 3

Покажем, что в каждой паре буква b будет выбита раньше, чем соответствующая ей буква a. Будем доказывать это утверждение индукцией по числу пар. Рассмотрим самую левую пару. Буква b, входящая в нее, является первой белой буквой b в слове, поэтому буква a из этой пары обязана её выбить. Для k-ой слева пары рассуждение аналогично: в момент прихода буквы a из этой пары белые буквы b из предыдущих $k-1$ пары уже выбиты (по предположению индукции), поэтому пришедшая буква a обязана выбить букву b именно из своей пары (если она не была выбита раньше, что также возможно). Поэтому порядок в паре будет тот же и после любого возможного преобразования строки $w_{a,b}$.

Следовательно, в результат слова $d_w(w_{a,b})$ могут дать положительный вклад лишь чёрные буквы слова $w_{a,b}$, которых ровно $\rho(w_{a,b})$. Поэтому результат слова не увеличивается после возможного преобразования. $\square$

3 Доказательства теорем

3.1 Доказательство теоремы 2 для конечного $\mathcal{A}$

Докажем теорему 2 для частного случая, а именно: предположим, что среди α- и β-параметров имеется лишь конечное число ненулевых и что $\gamma = 0$. В этом случае теорему достаточно доказать для случая, когда K равно числу всех ненулевых α-параметров, а L равно числу всех ненулевых β-параметров. Таким образом, алфавит $\mathcal{A} = \{x_1, x_2, \ldots, x_K\} \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_L\}$.

В силу следствия из леммы 1, утверждения теоремы достаточно доказать для какого-то одного порядка. Упорядочим алфавит $\mathcal{A}$ следующим образом:

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_K < y_L < y_{L-1} < \cdots < y_2 < y_1.$$

Будем применять к случайному слову $w \in \mathcal{A}^n$ обобщенный RSK-алгоритм. Обозначим символом $\xi_j^i(n)$ число букв x_j в i-ой строчке получающейся $\mathcal{A}$-таблицы. Легко видеть, что при введенном порядке $\xi_j^i(n) =$

0, если $i > j$.

Последовательность случайных величин $\{\psi(n)\}$ назовём L-ограниченной, если существует константа C, не зависящая от n и такая, что

$$\mathbf{E}|\psi(n)| < C \quad \text{для любого } n$$

Будем обозначать любые последовательности L-ограниченных случайных величин символом $\{L(n)\}$. Заметим, что выполнены соотношения

$$\{L(n)\} + \{L(n)\} = \{L(n)\}, \quad \{L(n)\} - \{L(n)\} = \{L(n)\}.$$

Сначала докажем утверждение теоремы для строк. Будем вести индукцию по строкам.

1) Первая строка

Оценка снизу. Заметим, что все буквы x_1 стоят в первой строке. Поэтому

$$\lambda_1^{\mathcal{P}}(n) \geq N_{x_1}(n).$$

Оценка сверху. Посмотрим, по каким правилам меняется число $\xi_k^1(n)$ при $k \geq 2$. Увеличиваться оно может только в случае появления буквы x_k, что происходит с вероятностью α_k. Если же появляется x_{k-1}, что происходит с вероятностью $\alpha_{k-1} > \alpha_k$, и $\xi_k^1 \neq 0$, то ξ_k^1 обязано уменьшиться на 1. В силу леммы 4, это означает, что последовательность $\xi_k^1(n)$ L-ограничена. Из определения $\mathcal{A}$-таблицы следует, что в каждой строке не больше одной буквы y_j. Поэтому

$$\lambda_1^{\mathcal{P}}(n) = N_{x_1}(n) + \{L(n)\}$$

2) Зафиксируем $l \leq K$. Пусть утверждение теоремы верно для первых $l-1$ строк. Докажем его для l-ой.

Оценка снизу. Буква x_l не может попасть ниже l-ой строки. С другой стороны, по уже доказанному, выше l-ой строки может быть лишь L-ограниченное количество букв x_l. Поэтому

$$\lambda_l^{\mathcal{P}}(n) \geq N_{x_l}(n) - \{L(n)\}.$$

Оценка сверху. Обозначим символом w^0 слово на входе обобщенного RSK-алгоритма, и символами $w^1, w^2, \ldots$ — слова, в которые записываются буквы в том порядке, в котором они выбиваются из первой, второй, ... строчек.

Докажем L-ограниченность величины $\xi_k^l(n)$ при $k > l$. Заметим, что w_{x_{k-1},x_k}^{i-1} — это последовательность букв x_{k-1} и x_k поступающих в i-ую строку, а w_{x_{k-1},x_k}^{i} — последовательность букв x_{k-1} и x_k выбиваемых из

i-ой строки. Поэтому слово $w^i_{x_{k-1},x_k}$ является возможным преобразованием слова $w^{i-1}_{x_{k-1},x_k}$, из которого вычеркнуты те буквы x_{k-1} и x_k, которые остались не выбитыми из i-ой строки. Но таких букв, по предположению индукции, L-ограниченное число. Поэтому из леммы 5 следует, что:

$$\rho(w^i_{x_{k-1},x_k}) \le \rho(w^{i-1}_{x_{k-1},x_k}) + \{L(n)\}, \quad i = 1 \dots l-1. \tag{3.1}$$

Суммируя неравенства (3.1) по $i = 1 \dots l-1$, получаем

$$\rho(w^{l-1}_{x_{k-1},x_k}) \le \rho(w^0_{x_{k-1},x_k}) + \{L(n)\}.$$

Кроме того,

$$\rho(w^0_{x_{k-1},x_k}) = \{L(n)\}$$

в силу леммы 4. Рассуждая так же, как при доказательстве оценки сверху для первой строчки, приходим к неравенству

$$\xi^l_k(n) \le \rho(w^{l-1}_{x_{k-1},x_k}).$$

Следовательно, $\xi^l_k(n)$ — L-ограниченная величина для любого $k > l$. Как уже было замечено, в каждой строчке не может быть больше одной буквы y_j (для каждого j). Значит,

$$\lambda^{\mathcal{P}}_l(n) = N_{x_l}(n) + \{L(n)\}.$$

Для оценки величин $\lambda'^{\mathcal{P}}_1(n), \dots, \lambda'^{\mathcal{P}}_L(n)$ рассмотрим транспонирующее отображение. К мере, задаваемой параметрами $\mathcal{P}^t = (\{\beta_j\}, \{\alpha_i\}, \gamma)$, мы можем применить уже доказанные оценки для строчек. В силу леммы 3, получаем

$$\begin{aligned}
\lambda'^{\mathcal{P}}_1(n) &= \lambda^{\mathcal{P}^t}_1(n) = N_{y_1}(n) + \{L(n)\}, \\
&\vdots \\
\lambda'^{\mathcal{P}}_L(n) &= \lambda^{\mathcal{P}^t}_L(n) = N_{y_L}(n) + \{L(n)\}.
\end{aligned}$$

3.2 Доказательство теоремы 2 для общего случая

Пусть $\mathcal{P} = (\{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \gamma)$ — параметры, удовлетворяющие условию строгой монотонности (1.1). Докажем сначала теорему для длин строк — утверждение для столбцов получится отсюда с помощью транспонирующего отображения.

В силу следствия из леммы 1, оценки сверху и снизу на величину $\mathbf{E}(\lambda^{\mathcal{P}}_i(n) - N_{x_i}(n))$ можно доказывать для различных упорядочений алфавита $\mathcal{A}$. Введем порядок p_1 на $\mathcal{A}$:

$$x_1 < x_2 < \dots < y_1 < y_2 < \dots < G.$$

Оценка снизу. Для порядка p_1 буквы $x_1, x_2, \dots, x_K$ эволюционируют вне зависимости от других букв, поэтому оценка

$$\lambda_i^{\mathcal{P}}(n) \geq N_{x_i}(n) + \{L(n)\} \quad i = 1 \dots K$$

доказывается аналогично случаю конечного $\mathcal{A}$.

Идея доказательства оценки сверху состоит в сведении общего случая к случаю конечного числа параметров с помощью операции укрупнения. Порядок p_2, используемый для оценки сверху, определим так, чтобы были возможны операции укрупнения, предписанные нижеследующими шагами (то есть буквы, которые будет нужно отождествить, должны образовывать интервалы относительно порядка p_2). Нашей целью является получение после нескольких укрупнений конечного числа параметров, причём K первых по величине α-параметров не должны измениться и все α-параметры должны быть различны.

1) Пусть число α-параметров в $\mathcal{P}$ бесконечно. Рассмотрим два случая:

а) Допустим, существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что выполнено неравенство

$$\sum\nolimits_{i=l+1}^{\infty} \alpha_i < \alpha_K$$

и для любого $r \leq l$ верно:

$$\sum\nolimits_{i=l+1}^{\infty} \alpha_i \neq \alpha_r$$

В этом случае отождествим буквы $x_{l+1}, x_{l+2}, x_{l+3} \dots$.

б) Если такого l, как требуется в пункте а), не существует, то, как легко видеть, найдутся $l_1, m_1 \in \mathbb{N}$ такие, что для некоторого $r \leq l_1$ верно:

$$\sum\nolimits_{i=l_1+1}^{\infty} \alpha_i = \alpha_r < \alpha_K$$

и выполняются условия

$$\alpha_r > \sum\nolimits_{i=l_1+1}^{l_1+m_1} \alpha_i > \alpha_{r+1},$$

$$\sum\nolimits_{i=l_1+m_1+1}^{\infty} \alpha_i < \alpha_{l_1}.$$

В этом случае отождествим буквы $x_{l_1+1}, \dots, x_{l_1+m_1}$, а также (отдельно) $x_{l_1+m_1+1}, x_{l_1+m_1+2}, x_{l_1+m_1+3} \dots$.

После проведенных операций укрупнения остается конечное число попарно различных α-параметров. Обозначим минимальное из них символом α_R.

2) Если число β-параметров бесконечно, то выберем l_2 так, чтобы было выполнено условие

$$\sum\nolimits_{i=l_2+1}^{\infty} \beta_i < \alpha_R, \tag{3.2}$$

и отождествим буквы $y_{l_2+1}, y_{l_2+2}, y_{l_2+3} \dots$. Напомним, что после такой операции укрупнения возникает новый α-параметр, который в силу (3.2) меньше других α-параметров. Обозначим его символом α_{R+1}.

3) Если $\gamma > 0$, то легко видеть, что найдутся $m \in \mathbb{N}$ и $\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_m \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\begin{aligned}
&\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_m = 0,\\
&\frac{\gamma}{m} + \delta_1 < \alpha_{R+1},\\
&\frac{\gamma}{m} + \delta_m > 0.
\end{aligned}$$

Разобьём G на непересекающиеся интервалы длины $\frac{\gamma}{m} + \delta_1$, $\frac{\gamma}{m} + \delta_2$, $\dots$, $\frac{\gamma}{m} + \delta_m$ и отождествим точки в каждом из этих интервалов. В результате такой операции укрупнения возникнет m новых α-параметров, а из выбора δ_i следует, что эти параметры будут попарно различны и меньше всех полученных на предыдущих шагах.

Таким образом, каждый набор параметров $\mathcal{P}$ можно операциями укрупнения, описанными в 1)-3), свести к случаю конечного числа параметров, при этом K первых по величине α-параметров не меняются. Обозначим полученный набор параметров символом $\mathcal{P}^*$. Напомним, что величины $\lambda_i^{\mathcal{P}^*}(n)$ естественным образом определены на $(\mathcal{A}^n, \mu_n)$.

Оценка сверху.

1) Первая строка.

По лемме 2

$$\lambda_1^{\mathcal{P}}(n) \le \lambda_1^{\mathcal{P}^*}(n).$$

Так как $\mathcal{P}^*$ соответствует случаю конечного алфавита, то по уже доказанному

$$\lambda_1^{\mathcal{P}^*}(n) \le N_{x_1}(n) + \{L(n)\}.$$

Следовательно,

$$\lambda_1^{\mathcal{P}}(n) \le N_{x_1}(n) + \{L(n)\}.$$

2) Докажем утверждение для l-ой строки. По лемме 2

$$\lambda_1^{\mathcal{P}}(n) + \lambda_2^{\mathcal{P}}(n) + \dots + \lambda_l^{\mathcal{P}}(n) \le \lambda_1^{\mathcal{P}^*}(n) + \lambda_2^{\mathcal{P}^*}(n) + \dots + \lambda_l^{\mathcal{P}^*}(n).$$

Из уже доказанного в 3.1 имеем

$$\lambda_1^{\mathcal{P}^*}(n) + \lambda_2^{\mathcal{P}^*}(n) + \dots + \lambda_l^{\mathcal{P}^*}(n) \le N_{x_1}(n) + \dots + N_{x_l}(n) + \{L(n)\}.$$

Из оценки снизу получаем

$$\lambda_1^{\mathcal{P}}(n) + \lambda_2^{\mathcal{P}}(n) + \dots + \lambda_{l-1}^{\mathcal{P}}(n) \ge N_{x_1}(n) + \dots + N_{x_{l-1}}(n) + \{L(n)\}.$$

Следовательно,

$$\lambda_l^{\mathcal{P}}(n) \le N_{x_l}(n) + \{L(n)\}.$$

Доказательство утверждения теоремы для длин столбцов следует из утверждения для строк аналогично случаю конечного алфавита, что заканчивает доказательство теоремы 2.

3.3 Доказательство теоремы 1

Простым вычислением характеристических функций можно показать, что

$$\eta_n := \Big(\frac{N_{x_1}(n) - \alpha_1 n}{\sqrt{n}}, \frac{N_{x_2}(n) - \alpha_2 n}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{N_{x_K}(n) - \alpha_K n}{\sqrt{n}},$$
$$\frac{N_{y_1}(n) - \beta_1 n}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{N_{y_L}(n) - \beta_L n}{\sqrt{n}}\Big) \xrightarrow[Law]{} \eta,$$

где символом η обозначена многомерная гауссова случайная величина с нулевым средним и матрицей ковариаций C, задаваемой формулой

$$C = \begin{pmatrix}
\alpha_1 - \alpha_1^2 & -\alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1\alpha_3 & \dots & -\alpha_1\alpha_K & -\alpha_1\beta_1 & \dots & -\alpha_1\beta_L \\
-\alpha_2\alpha_1 & \alpha_2 - \alpha_2^2 & -\alpha_2\alpha_3 & \dots & -\alpha_2\alpha_K & -\alpha_2\beta_1 & \dots & -\alpha_2\beta_L \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-\alpha_K\alpha_1 & -\alpha_K\alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_K - \alpha_K^2 & -\alpha_K\beta_1 & \dots & -\alpha_K\beta_L \\
-\beta_1\alpha_1 & -\beta_1\alpha_2 & \dots & \dots & -\beta_1\alpha_K & \beta_1 - \beta_1^2 & \dots & -\beta_1\beta_L \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-\beta_L\alpha_1 & -\beta_L\alpha_2 & \dots & \dots & -\beta_L\alpha_K & -\beta_1\beta_L & \dots & \beta_L - \beta_L^2
\end{pmatrix}$$

Легко видеть, что вектор

$$\psi_n := \frac{(\{L(n)\}, \{L(n)\}, \dots, \{L(n)\})}{\sqrt{n}} \xrightarrow[prob]{} 0$$

для произвольных L-ограниченных последовательностей случайных величин (обозначенных как $\{L(n)\}$). Хорошо известно (см., например, [12, Th 3.1]), что из $\eta_n^0 \xrightarrow[Law]{} \eta^0$ и $\psi_n^0 \xrightarrow[prob]{} 0$ следует, что

$$\eta_n^0 + \psi_n^0 \xrightarrow[Law]{} \eta^0$$

Поэтому

$$\Big(\frac{\lambda_1^{\mathcal{P}}(n) - \alpha_1 n}{\sqrt{n}}, \frac{\lambda_2^{\mathcal{P}}(n) - \alpha_2 n}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{\lambda_K^{\mathcal{P}}(n) - \alpha_K n}{\sqrt{n}}, \\ \frac{\lambda_1'^{\mathcal{P}}(n) - \beta_1 n}{\sqrt{n}} \dots \frac{\lambda_L'^{\mathcal{P}}(n) - \beta_L n}{\sqrt{n}}\Big) = \eta_n + \psi_n \xrightarrow[Law]{} \eta$$

Таким образом, теорема 1 доказана.

Список литературы

[1] E.Thoma, Die unzerlegbaren, positive-definiten Klassenfunktionen der abzahlbar unendlichen symmetrischen Gruppe. Mat.Zeitschrift, 85:40-61, 1964

[2] V.Feray and P.L.Meliot. Asymptotics of q-Plancherel measures, arXiv:1001.2180, 2010

[3] S.V.Kerov and A.M.Vershik, Asymptotics theory of characters of the symmetric group. Funct.Anal.Appl. 15 : 246-255, 1982

[4] S.V.Kerov, A.Okounkov, and G.Olshanski. The boundary of the Young graph with Jack edge multiplicities. International Mathematics Research Notices, 1998(4):173, 1998.

[5] S.V.Kerov, G.Olshanski, and A.M.Vershik. Harmonic analysis on the infinite symmetric group. Invent.Math., 158:551-642, 2004

[6] S.V.Kerov and A.M.Vershik. The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson-Schensted-Knuth algorithm. SIAM J.Alg.Disc.Meth., Vol.7, No. 1, 1986

[7] I.G.Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, 1998

[8] A.Regev and T.Seeman. Shuffle-invariance of the super-RSK algorithm, Advances in Applied Mathematics, Vol.28, No. 1, 59-81, 2002

[9] A.Berele and A.Regev. Hook Young diagrams with applications to combinatorics and representations of Lie superalgebras. Advances in Mathematics 64, 118-175 (1987)

[10] W.Fulton, Young tableaux. Cambridge University Press, 1997

[11] C.Schensted. Longest increasing and decreasing subsequences, Canadian Journal of Mathematics 13: 179–191, 1961

[12] P.Billingsley. Convergence of probability measures, 1999.

[13] S.V. Kerov. Asymptotic Representation Theory of the Symmetric Group and its Applications in Analysis. D Sci. thesis, 1993

[14] K.Johansson. Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure, Annals of Mathematics, 153 (2001), 259-296