

# ОРБИТЫ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ НА ПОЛНОМ ТОРИЧЕСКОМ МНОГООБРАЗИИ

ИВАН БАЖОВ

АННОТАЦИЯ. Пусть  $X$  — полное торическое многообразие и  $\text{Aut}(X)$  — группа его автоморфизмов. В работе найдено явное описание орбит группы  $\text{Aut}(X)$  на многообразии  $X$ . В частности, доказано, что  $\text{Aut}(X)$  действует на  $X$  транзитивно тогда и только тогда, когда  $X$  изоморфно произведению проективных пространств.

Напомним, что торическим многообразием называется нормальное алгебраическое многообразие  $X$  с заданным локально транзитивным и эффективным действием алгебраического тора  $\mathbb{T}$ . Дополнение  $X \setminus \mathcal{O}$  к открытой  $\mathbb{T}$ -орбите  $\mathcal{O}$  является объединением конечного числа простых  $\mathbb{T}$ -инвариантных дивизоров  $D_1, \dots, D_r$ . Каждая  $\mathbb{T}$ -орбита на  $X$  однозначно определяется набором тех дивизоров  $D_i$ , которые ее содержат. В частности, число  $\mathbb{T}$ -орбит конечно.

Хорошо известно, что для проективного или, более общо, полного торического многообразия  $X$  группа алгебраических автоморфизмов  $\text{Aut}(X)$  является аффинной алгебраической группой, содержащей  $\mathbb{T}$  в качестве максимального тора. Тем самым, связная компонента единицы  $\text{Aut}^0(X)$  порождается тором  $\mathbb{T}$  и корневыми подгруппами, т.е. одномерными унипотентными подгруппами, нормализуемыми  $\mathbb{T}$ . В работе [7] М. Демазюр нашел замечательное комбинаторное описание корневых подгрупп в случае гладкого  $X$ . Этот результат был обобщен в [5] на случай симплицальных многообразий в терминах тотального координатного кольца, или кольца Кокса торического многообразия. Случай произвольных полных торических многообразий рассмотрен в [4], см. также [8]. В работе [3] разработан другой метод описания группы автоморфизмов, применимый к проективным торическим многообразиям. Отметим, что связные компоненты группы  $\text{Aut}(X)$  также допускают комбинаторное описание.

Ясно, что каждая  $\text{Aut}^0(X)$ - и  $\text{Aut}(X)$ -орбита на  $X$  являются объединением  $\mathbb{T}$ -орбит. Наша задача — описать  $\mathbb{T}$ -орбиты, попадающие в одну  $\text{Aut}^0(X)$ - или  $\text{Aut}(X)$ -орбиту. Для этого с каждой орбитой тора  $\mathcal{O}_1$  свяжем набор тех простых  $\mathbb{T}$ -инвариантных дивизоров

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 14M25, 14L30.

*Key words and phrases.* toric varieties, group actions, transitivity.

$D(\mathcal{O}_1) := \{D_{i_1}, \dots, D_{i_r}\}$ , которые не содержат  $\mathcal{O}_1$ . Пусть  $\Gamma(\mathcal{O}_1)$  — подполугруппа в группе классов дивизоров  $\text{Cl}(X)$ , порожденная классами дивизоров из  $D(\mathcal{O}_1)$ .

**Теорема 1.** *Пусть  $X$  — полное торическое многообразие. Тогда две орбиты тора  $\mathcal{O}_1$  и  $\mathcal{O}_2$  на  $X$  лежат в одной  $\text{Aut}^0(X)$ -орбите тогда и только тогда, когда*

$$\Gamma(\mathcal{O}_1) = \Gamma(\mathcal{O}_2).$$

В доказательстве этого результата используется техника работы [2]. Там доказано, что на аффинном торическом многообразии каждая нетривиальная орбита корневой подгруппы из  $\text{Aut}(X)$  пересекает ровно две  $\mathbb{T}$ -орбиты, и получено комбинаторное описание таких пар орбит. Мы адаптируем эти результаты к случаю полного торического многообразия и выведем из них теорему 1.

В теореме 2.5 получено аналогичное описание для  $\mathbb{T}$ -орбит, попадающих в одну  $\text{Aut}(X)$ -орбиту. В качестве следствия мы покажем, что действие  $\text{Aut}(X)$  на  $X$  транзитивно тогда и только тогда, когда  $X$  изоморфно произведению проективных пространств. Похожий результат был получен в [1, Proposition 4.1], где доказано, что из полных торических многообразий только произведение проективных пространств допускает транзитивное действие полупростой алгебраической группы.

Всюду в работе основное поле  $\mathbb{k}$  предполагается алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю И. В. Аржанцеву за постановку задачи, полезные ссылки и идею воспользоваться двойственностью Гейла, приводящую к основному результату.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

**Веер торического многообразия.** Обозначим через  $N \cong \mathbb{Z}^d$  решетку одно-параметрических подгрупп тора  $\mathbb{T}$ , через  $M$  — двойственную решетку характеров, а  $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$  — естественное спаривание. Пусть  $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ,  $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ .

Как и любое торическое многообразие,  $X$  может быть задано веером  $\Delta_X$  в  $N_{\mathbb{Q}}$ . Обычно мы будем опускать индекс и писать  $\Delta$ . Пусть  $\Delta(1) = \{\tau_1, \dots, \tau_r\}$  — множество одномерных конусов веера  $\Delta$ . Через  $\sigma(1)$  будем обозначать множество одномерных граней конуса  $\sigma$ , а через  $v_{\tau}$  — примитивный вектор решетки  $N$  на луче  $\tau$ ,  $v_i = v_{\tau_i}$ .

Существует естественное взаимно-однозначное соответствие  $\sigma \leftrightarrow \mathcal{O}_{\sigma}$  между конусами  $\sigma$  веера  $\Delta$  и орбитами тора  $\mathcal{O}_{\sigma}$  на  $X$ . При этом  $\dim \mathcal{O}_{\sigma} = \dim \Delta - \dim \sigma$ . Торическое многообразие  $X$  полно тогда и только тогда, когда  $\Delta$  — полный, т.е.  $\cup_{\sigma \in \Delta} \sigma = N_{\mathbb{Q}}$ .

Каждый простой  $\mathbb{T}$ -инвариантный дивизор  $D_i$  является замыканием орбиты  $\overline{\mathcal{O}_{\tau_i}}$  для некоторого  $\tau_i \in \Delta(1)$ . Орбита тора  $\mathcal{O}_\sigma$  лежит в пересечении дивизоров  $D_i$ , соответствующих лучам  $\tau_i \in \sigma(1)$ .

Существует естественное отображение свободной абелевой группы  $\text{Div}_{\mathbb{T}}(X)$ , порожденной всеми простыми  $\mathbb{T}$ -инвариантными дивизорами, в группу классов  $\text{Cl}(X): D \mapsto [D]$ . Для полного торического многообразия имеется точная последовательность ([6, Theorem 4.1.3]):

$$(1) \quad 0 \rightarrow M \rightarrow \text{Div}_{\mathbb{T}}(X) \rightarrow \text{Cl}(X) \rightarrow 0,$$

где  $m \in M$  отображается в  $\sum_{i=1}^r \langle m, v_i \rangle D_i$ .

**Пример 1.1.** Примерами полных торических многообразий являются:

- (i) проективная плоскость  $\mathbb{P}^2$ , веер  $\Delta_{\mathbb{P}^2}$  изображен на рис. 1(i).  $\Delta_{\mathbb{P}^2}(1)$  порождено примитивными векторами  $(1, 0)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(-1, 1)$ .  $\text{Cl}(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}$ ;
- (ii) поверхность Хирцебруха  $\mathcal{H}_r$ , заданная веером на рис. 1(ii).  $\Delta_{\mathcal{H}_r}(1)$  порождено векторами  $(1, 0)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(-1, r)$ ,  $(0, 1)$ .  $\text{Cl}(\mathcal{H}_r) = \mathbb{Z}^2$ ;
- (iii) многообразие  $\mathcal{X}_r$ , заданное веером на рис. 1(iii). Для  $r = 1$  многообразия  $\mathcal{X}_r$  и  $\mathbb{P}^2$  совпадают.  $\Delta_{\mathcal{X}_r}(1)$  порождено векторами  $(1, 0)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(-1, r)$ .  $\text{Cl}(\mathcal{X}_r) = \mathbb{Z}$ ;
- (iv) многообразие  $\mathcal{B}_r$ , заданное веером на рис. 1(iv).  $\Delta_{\mathcal{B}_r}(1)$  порождено векторами  $(r, 1)$ ,  $(r, -1)$ ,  $(-r, -1)$ ,  $(-r, 1)$ .  $\text{Cl}(\mathcal{B}_r) = \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_{2r}$ .

**Группа автоморфизмов и корневые подгруппы.** Будем считать, что многообразие  $X$  полное,  $\Delta$  — соответствующий ему веер.

**Определение 1.2.** *Корнем Демажюра* называется такой элемент  $m \in M$ , что

$$\exists \tau \in \Delta(1) : \langle m, v_\tau \rangle = -1, \forall \tau' \in \Delta(1) \setminus \{\tau\} : \langle m, v_{\tau'} \rangle \geq 0.$$

Для корня  $m$  через  $\eta_m$  мы обозначим единственный примитивный вектор  $v_\tau$ , для которого  $\langle v_\tau, m \rangle = -1$ . Множество всех корней веера  $\Delta$  обозначим через  $\mathcal{R}$ . Корни  $m \in \mathcal{R} \cap (-\mathcal{R})$  называются *полупростыми*.

**Пример 1.3.** Укажем множества корней для многообразий из примера 1.1.

- (i) Корни для  $\mathbb{P}^2$  изображены на рис. 2(i).
- (ii) Корни для поверхности Хирцебруха  $\mathcal{H}_r$ ,  $r = 2$ , изображены на рис. 2(ii).
- (iii) Корни для  $\mathcal{X}_r$ ,  $r = 2$ , изображены на рис. 2(iii). При  $r > 1$  корни  $\mathcal{X}_r$  совпадают с корнями  $\mathcal{H}_r$ .

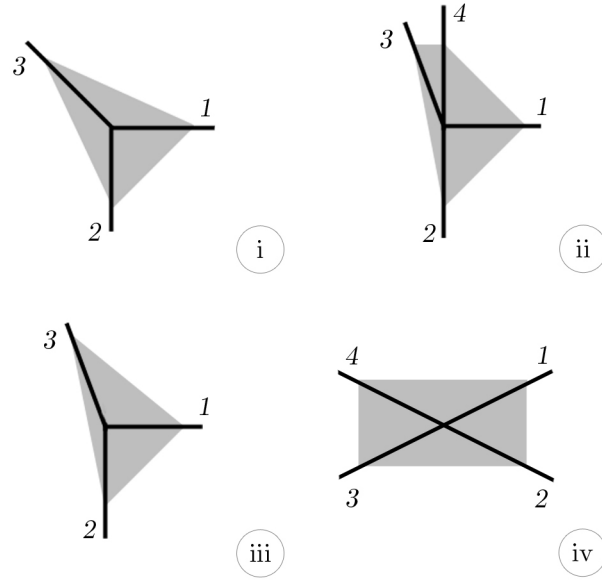


РИС. 1. Веера для  $\mathbb{P}^2$ ,  $\mathcal{H}_r$ ,  $\mathcal{X}_r$  и  $\mathcal{B}_r$ .

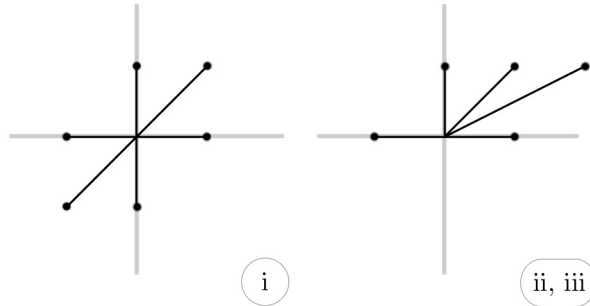


РИС. 2. Корни Демазюра для  $\mathbb{P}^2$ ,  $\mathcal{H}_r$  и  $\mathcal{X}_r$ .

(iv) Множество корней для  $\mathcal{B}_r$  пусто.

Каждому корню  $t \in \mathcal{R}$  соответствует корневая подгруппа  $H_t \subset \text{Aut}(X)$ , см. [2, 5, 9].

В [2, Proposition 2.1] приведено доказательство следующего утверждения для аффинного многообразия.

**Лемма 1.4.** *Для каждой точки  $Q \in X \setminus X^{H_m}$  орбита  $H_m \cdot Q$  пересекает в точности две орбиты тора на  $X$ ,  $\mathcal{O}_{\sigma_1}$  и  $\mathcal{O}_{\sigma_2}$ , причем  $\dim \mathcal{O}_{\sigma_1} = 1 + \dim \mathcal{O}_{\sigma_2}$ .*

*Доказательство.* Согласно [9, Proposition 3.14], для каждого  $m \in \mathcal{R}$  существует набор  $\mathbb{T}$ -инвариантных карт  $U_i$  на  $X$ , на каждой из которых действует  $H_m$ ,  $i \in I$ . Дополнение  $V = X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i$  сохраняется группой  $H_m$  поточечно. Имеется представление

$$X = V \cup \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Для завершения доказательства достаточно применить [2, Proposition 2.1] к каждой аффинной карте  $U_i$ ,  $i \in I$ .  $\square$

**Определение 1.5.** Пару орбит  $(\mathcal{O}_{\sigma_1}, \mathcal{O}_{\sigma_2})$  из леммы 1.4 будем называть  $H_m$ -связанной. Пару соответствующих конусов  $(\sigma_1, \sigma_2)$  также будем называть  $H_m$ -связанной.

**Лемма 1.6.** ([2, Lemma 2.2]) *Пара  $(\sigma_1, \sigma_2)$   $H_m$ -связанна тогда и только тогда, когда*

$$(2) \quad m|_{\sigma_2} \leq 0 \text{ и } \sigma_1 = \sigma_2 \cap m^\perp - \text{гипергрань конуса } \sigma_2.$$

$\square$

Обозначим через  $P_\psi \in \text{Aut}(X)$  автоморфизм, отвечающий автоморфизму  $\psi \in \text{Aut}(N, \Delta)$  решетки  $N$ , сохраняющему веер  $\Delta$ .

**Теорема 1.7.** ([9, стр. 140]) *Пусть  $X$  — полное торическое многообразие. Тогда группа  $\text{Aut}(X)$  порождена подгруппами  $\mathbb{T}$ ,  $H_m$  для  $m \in \mathcal{R}$  и элементами  $P_\psi$  для  $\psi \in \text{Aut}(N, \Delta)$ .*  $\square$

## 2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В этой части мы рассматриваем полное торическое многообразие  $X$ , заданное веером  $\Delta$ . Как и ранее  $\Delta(1) = \{\tau_1, \dots, \tau_r\}$ ,  $v_i = v_{\tau_i}$ ,  $D_i = D_{\tau_i}$ . Для конуса  $\sigma = \text{cone}_{\mathbb{Q}}(\tau_i : i \in I)$ ,  $I \subset \{1, \dots, r\}$ , необязательно из веера  $\Delta$ , определим полугруппу

$$\Gamma(\sigma) = \sum_{\tau_i \notin \sigma(1)} \mathbb{Z}_{\geq 0}[D_i].$$

Для орбиты тора  $\mathcal{O}_\sigma$  полугруппа  $\Gamma(\mathcal{O}_\sigma)$  совпадает с  $\Gamma(\sigma)$ . Положим

$$\Gamma(\Delta) = \{\Gamma(\sigma) : \sigma \in \Delta\}.$$

**Пример 2.1.** Найдем  $\Gamma(\Delta)$  для каждого многообразия из примера 1.1.

- (i) Для  $\mathbb{P}^2$  будет одна полугруппа  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ , рис. 3(i).
- (ii) Для поверхности Хирцебруха  $\mathcal{H}_r$  будут две полугруппы ранга 2, рис. 3(ii).
- (iii) Для  $\mathcal{X}_r$  будут полугруппы  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  и  $r\mathbb{Z}_{\geq 0}$ , рис. 3(iii).

- (iv) Для  $\mathcal{B}_r$  будут 4 полугруппы порожденные двумя элементами, 4 — тремя элементами и одна полугруппа порожденная всеми 4 элементами  $[D_1], [D_2], [D_3], [D_4]$ . Изобразим полугруппы, порожденные двумя элементами, в трехмерном пространстве, не забывая, что  $2r[D_3 - D_1] = 0$ ; см рис. 3(iv).

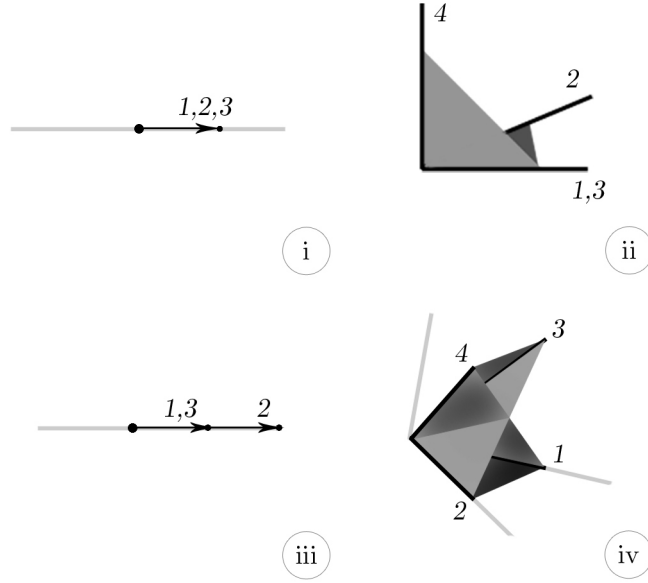


Рис. 3.  $\Gamma(\Delta)$  для  $\mathbb{P}^2$ ,  $\mathcal{H}_r$ ,  $\mathcal{X}_r$  и  $\mathcal{B}_r$ .

Пусть  $\sigma_1 = \text{cone}_{\mathbb{Q}}(\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_p})$ ,  $\sigma_2 = \text{cone}_{\mathbb{Q}}(\tau_{i_0}, \tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_p})$  — два конуса, не обязательно из веера  $\Delta$ , один из которых является гипергранью другого.

**Лемма 2.2.** Пусть существует такой  $t \in \mathcal{R}$ , что выполнено условие (2) для конусов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Тогда

$$\sigma_1 \in \Delta \Leftrightarrow \sigma_2 \in \Delta.$$

*Доказательство.* Пусть конус  $\sigma_1$  лежит в веере  $\Delta$ . Тогда на  $X$  найдется орбита тора  $\mathcal{O}_{\sigma_1}$ . Согласно леммам 1.4 и 1.6, найдется орбита тора  $\mathcal{O}_2$ , пересекающая  $H_m \cdot \mathcal{O}_{\sigma_1}$ . Несложно понять, что конус, соответствующий  $\mathcal{O}_2$ , будет  $\sigma_2$ , а значит  $\sigma_2 \in \Delta$ .

Доказательство в обратную сторону аналогично.  $\square$

**Лемма 2.3.** Для конусов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  и некоторого корня  $t \in \mathcal{R}$  выполнено условие (2) тогда и только тогда, когда

$$\Gamma(\sigma_1) = \Gamma(\sigma_2).$$

*Доказательство.* Поскольку

$$\begin{aligned}\Gamma(\sigma_1) &= \sum_{\tau_i \notin \sigma_1(1)} \mathbb{Z}_{\geq 0}[D_i] = \mathbb{Z}_{\geq 0}[D_{i_0}] + \sum_{\tau_i \notin \sigma_2(1)} \mathbb{Z}_{\geq 0}[D_i], \\ \Gamma(\sigma_2) &= \sum_{\tau_i \notin \sigma_2(1)} \mathbb{Z}_{\geq 0}[D_i],\end{aligned}$$

условие  $\Gamma(\sigma_1) = \Gamma(\sigma_2)$  может быть записано как

$$(3) \quad [D_{i_0}] = \sum_{\tau_i \notin \sigma_2(1)} a_i [D_i]$$

для некоторых  $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $\tau_i \notin \sigma_2(1)$ . Положим  $a_{i_0} = -1$  и  $a_i = 0$  для  $\tau_i \in \sigma_1(1)$ . Согласно точной последовательности (1), условие (3) равносильно существованию  $m \in M$ :  $\langle m, v_i \rangle = a_i$  для всех  $1 \leq i \leq r$  и означает выполнение (2) для  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $m$ .  $\square$

Лемма 2.4 показывает, каким образом веер  $\Delta$  может быть восстановлен по  $\Gamma(\Delta)$ . Чтобы не загромождать обозначения, будем считать  $\sigma_1 = \text{cone}_{\mathbb{Q}}(\tau_1, \dots, \tau_p)$ ; в качестве индексов может выступать произвольный набор различных  $1 \leq i_1, \dots, i_p \leq r$ .

**Лемма 2.4.**  $\Gamma(\sigma_1) \in \Gamma(\Delta)$  тогда и только тогда, когда  $\sigma_1 \in \Delta$ .

*Доказательство.* Импликация  $\sigma_1 \in \Delta \Rightarrow \Gamma(\sigma_1) \in \Gamma(\Delta)$  очевидна.

Пусть  $\sigma_1 \in \Gamma(\Delta)$ . Согласно построению  $\Gamma(\Delta)$  найдется конус  $\sigma_2 \in \Delta$  такой, что  $\Gamma(\sigma_2) = \Gamma(\sigma_1)$ . Будем считать, что  $\sigma_1(1) \cap \sigma_2(1) = \{\tau_s, \tau_{s+1}, \dots, \tau_p\}$ ,  $\sigma_2(1) = \{\tau_s, \dots, \tau_p, \tau_{p+1}, \dots, \tau_{p+q}\}$ .

Рассмотрим последовательность конусов

$$(4) \quad \begin{aligned}\sigma_1 &= \varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_{s+q} = \sigma_2, \\ \varsigma_i &= \text{cone}_{\mathbb{Q}}(\tau_i, \dots, \tau_p), \quad 1 \leq i \leq s, \\ \varsigma_{s+i} &= \text{cone}_{\mathbb{Q}}(\tau_s, \dots, \tau_{p+i}), \quad 1 \leq i \leq q.\end{aligned}$$

Если  $\sigma_1(1) \cap \sigma_2(1) = \emptyset$ , то можно считать  $\varsigma_s = \text{cone}_{\mathbb{Q}}(0)$ .

Мы имеем  $\varsigma_s(1) = \sigma_1(1) \cap \sigma_2(1)$  и выполнено

$$\Gamma(\varsigma_s) = \Gamma(\sigma_1) + \Gamma(\sigma_2) = \Gamma(\sigma_1) = \Gamma(\sigma_2).$$

Более того,

$$\Gamma(\sigma_1) \subset \Gamma(\varsigma_i) \subset \Gamma(\varsigma_s), \text{ значит, } \Gamma(\varsigma_i) = \Gamma(\sigma_1) \text{ для } 1 \leq i \leq s,$$

$$\Gamma(\sigma_2) \subset \Gamma(\varsigma_{s+i}) \subset \Gamma(\varsigma_s), \text{ значит, } \Gamma(\varsigma_{s+i}) = \Gamma(\sigma_2) \text{ для } 1 \leq i \leq q.$$

Согласно лемме 2.3, для каждой пары  $\varsigma_i, \varsigma_{i+1}$  и некоторого  $m_i \in M$  выполнено условие (2),  $1 \leq i \leq s+q-1$ . Далее, согласно лемме 2.2,  $\varsigma_i \in \Delta$  для  $s+q-1 \geq i \geq 1$ . Значит,  $\sigma_1 \in \Delta$ .  $\square$

*Доказательство теоремы 1.* Поскольку  $\text{Aut}^0(X)$  порождена  $\mathbb{T}$  и  $H_m$ ,  $m \in \mathcal{R}$ , точки орбит тора  $\mathcal{O}_{\sigma_1}$  и  $\mathcal{O}_{\sigma_2}$  лежат в одной  $\text{Aut}^0(X)$ -орбите тогда и только тогда, когда существует цепочка

$$(5) \quad \sigma_1 = \varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_l = \sigma_2,$$

конусов из  $\Delta$  такая, что  $\varsigma_i$  и  $\varsigma_{i+1}$   $H_{m_i}$ -связанны для некоторых  $m_i \in \mathcal{R}$ ,  $1 \leq i \leq l-1$ .

Для конусов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  таких, что  $\Gamma(\sigma_1) = \Gamma(\sigma_2)$ , в качестве искомой цепочки можно взять (4) из доказательства леммы 2.4.

Обратно, пусть существует цепочка (5). Согласно лемме 2.3,  $\Gamma(\sigma_1) = \Gamma(\varsigma_1) = \dots = \Gamma(\varsigma_l) = \Gamma(\sigma_2)$ , и  $\Gamma(\sigma_1) = \Gamma(\sigma_2)$ .  $\square$

**Теорема 2.5.** *Орбиты тора  $\mathcal{O}_{\sigma_1}$  и  $\mathcal{O}_{\sigma_2}$  на  $X$  лежат в одной  $\text{Aut}(X)$ -орбите тогда и только тогда, когда существует такой автоморфизм  $\phi : \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(X)$ , что*

- существует такая перестановка  $f$  множества  $\Delta(1)$ , что  $\phi([D_\tau]) = [D_{f(\tau)}]$ ,
- $\phi(\Gamma(\sigma_1)) = \Gamma(\sigma_2)$ ,
- $\phi(\Gamma(\Delta)) = \Gamma(\Delta)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{O}_{\sigma_1}$ ,  $\mathcal{O}_{\sigma_2}$  лежат в одной  $\text{Aut}(X)$ -орбите. Пользуясь результатами теорем 1 и 1.7 достаточно указать  $\phi : \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(X)$  для  $P_\psi \in \text{Aut}(X)$ , который переводит  $\text{Aut}^0(X) \cdot \mathcal{O}_{\sigma_1}$  в  $\text{Aut}^0(X) \cdot \mathcal{O}_{\sigma_2}$  и соответствует  $\psi \in \text{Aut}(N, \Delta)$ . Автоморфизм  $P_\psi$  задает автоморфизм  $\phi$  группы классов естественным образом. Он обладает следующими свойствами:

- $\phi([D_\tau]) = [P_\psi(D_\tau)] = [D_{\psi(\tau)}]$ ;
- $\phi(\Gamma(\sigma_1)) = \Gamma(\sigma_2)$  согласно предыдущему свойству;
- $\phi(\Gamma(\Delta)) = \Gamma(\Delta)$ , поскольку  $\psi$  сохраняет  $\Delta$ .

Докажем утверждение в обратную сторону. Для каждого  $\phi$  мы укажем  $P_\psi \in \text{Aut}(X)$ , которое отображает  $\text{Aut}^0(X)$ -орбиту, соответствующую  $\Gamma(\sigma_1)$ , в  $\text{Aut}^0(X)$ -орбиту, соответствующую  $\Gamma(\sigma_2)$ .

Для  $\phi$  имеется коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \text{Div}_{\mathbb{T}}(X) & \longrightarrow & \text{Cl}(X) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \psi^* & & \downarrow \tilde{f} & & \downarrow \phi \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \text{Div}_{\mathbb{T}}(X) & \longrightarrow & \text{Cl}(X) \longrightarrow 0 \end{array}$$

где  $\tilde{f}$  задан перестановкой  $f : \Delta(1) \rightarrow \Delta(1)$ . Существует автоморфизм  $\psi^* : M \rightarrow M$ , который замыкает диаграмму до коммутативной. Определим  $\psi : N \rightarrow N$  как двойственный к  $\psi^*$  автоморфизм. Несложно проверить, что  $\psi$  сохраняет  $\Delta(1)$ . Теперь, согласно лемме 2.3, для  $\sigma \in \Delta$  конус  $\psi(\sigma)$  также лежит в  $\Delta$ , потому что  $\Gamma(\psi(\sigma)) = \phi(\Gamma(\sigma)) \in \Gamma(\Delta)$ . Автоморфизм  $\psi$  задает искомый  $P_\psi$ .  $\square$



**Пример 2.6.** Орбиты группы автоморфизмов состоят из нескольких орбит тора, их можно изображать прямо на веере. Пользуясь теоремами 1 и 2.5 и результатами примера 2.1, можно указать орбиты для рассматриваемых ранее четырех многообразий.

- (i) На  $\mathbb{P}^2$  действие  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$  транзитивно. Рис. 4(i).
- (ii) На поверхности Хирцебруха  $\mathcal{H}_r$  имеется две орбиты, не смотря на то, что поверхность гладкая. Рис. 4(ii).
- (iii) На  $\mathcal{X}_r$ ,  $r > 1$ , будет две орбиты. Одна из них состоит из всех гладких точек, а вторая состоит из одной  $\mathbb{T}$ -неподвижной особой точки. Рис. 4(iii).
- (iv) При  $r > 1$  орбиты группы  $\text{Aut}^0(\mathcal{B}_r)$  на  $\mathcal{B}_r$  совпадают с орбитами тора. На  $\Gamma(\Delta)$  действует группа  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ , которая задает следующие орбиты на  $\mathcal{B}_r$ : открытая  $\text{Aut}(\mathcal{B}_r)$ -орбита совпадает с открытой орбитой тора, точки одномерных орбит тора попадают в одну  $\text{Aut}(\mathcal{B}_r)$ -орбиту, четыре  $\mathbb{T}$ -неподвижные особые точки образуют две  $\text{Aut}(\mathcal{B}_r)$ -орбиты.

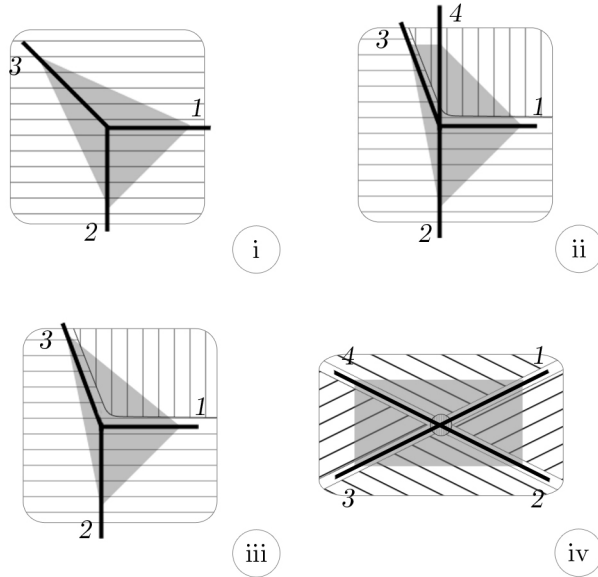


РИС. 4. Орбиты на  $\mathbb{P}^2$ ,  $\mathcal{H}_r$ ,  $\mathcal{X}_r$ ,  $\mathcal{B}_r$ .

**Теорема 2.7.** Пусть  $X$  — полное торическое многообразие. Тогда группа  $\text{Aut}(X)$  действует транзитивно на  $X$  тогда и только тогда, когда

$$X \cong \prod_{i=1}^s \mathbb{P}^{k_i},$$

для некоторых  $k_i \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.* Пусть действие  $\text{Aut}(X)$  транзитивно на  $X$ . Тогда  $X$  гладкое, в частности, все конуса  $\sigma \in \Delta$  симплицальные. Поскольку открытая  $\text{Aut}^0(X)$ -орбита совпадает с открытой  $\text{Aut}(X)$ -орбитой,  $\Gamma(\Delta)$  состоит только из одной полугруппы.

Рассмотрим конус максимальной размерности  $\sigma \in \Delta$ . Можно считать, что  $\sigma(1) = \{\tau_1, \dots, \tau_d\}$ . Найдется конус  $\sigma' \in \Delta(1)$  максимальной размерности, пересекающийся с  $\sigma$  по гиперграну, не содержащей  $\tau_1$ :  $\sigma'(1) = \{\tau_2, \dots, \tau_d, \tau_{d+1}\}$ .

Поскольку  $\Gamma(\Delta)$  состоит из одной полугруппы, следующие полугруппы совпадают:

$$\Gamma(\sigma') = \mathbb{Z}_{\geq 0}[D_1] + \sum_{i>d+1} \mathbb{Z}_{\geq 0}[D_i],$$

$$\Gamma(\sigma) = \mathbb{Z}_{\geq 0}[D_{d+1}] + \sum_{i>d+1} \mathbb{Z}_{\geq 0}[D_i].$$

Имеются равенства:

$$(6) \quad \begin{aligned} [D_1] &= a_{d+1}[D_{d+1}] + \sum_{i>d+1} a_i[D_i], \\ [D_{d+1}] &= b_1[D_1] + \sum_{i>d+1} b_i[D_i], \end{aligned}$$

где  $a_{d+1}, b_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  и  $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  для  $d+2 \leq i \leq r$ . Положим  $a_1 = -1$  и  $b_{d+1} = -1$ ,  $a_i = 0$  и  $b_i = 0$  для  $2 \leq i \leq d$

Согласно равенствам 6, найдутся такие  $m_1$  и  $m'_1$  из  $M$ , что

$$\langle m_1, v_i \rangle = a_i \text{ для } 1 \leq i \leq r,$$

$$\langle m'_1, v_i \rangle = b_i \text{ для } 1 \leq i \leq r.$$

Из  $d-1$  равенства  $\langle m_1, v_i \rangle = \langle m'_1, v_i \rangle = 0$ ,  $2 \leq i \leq d$ , следует, что  $m_1$  и  $m'_1$  пропорциональны. Значит, пропорциональны и равенства (6). Получаем, что  $[D_1] = [D_{d+1}]$ , значит  $\langle m_1, v_1 \rangle = -1$  и  $\langle m_1, v_{d+1} \rangle = 1$ ,  $\langle m_1, v_i \rangle = 0$ ,  $i \neq 1, d+1$ . Т.о.  $m_1 \in \mathcal{R}$  — полупростой корень.

Поскольку в качестве  $\tau_1$  мог быть выбран любой элемент  $\sigma(1)$ , существует такой набор корней  $m_1, \dots, m_d$ , что  $\langle m_i, \eta_{m_j} \rangle = -\delta_{ij}$  для всех  $1 \leq i, j \leq d$ . Значит, корни  $m_1, \dots, m_d$  линейно независимы.

Теорема [8, Theorem 3.18] утверждает, что если  $X$  — полное торическое многообразие размерности  $d$ , для которого найдется  $d$  линейно независимых полупростых корней  $m_1, \dots, m_d$ , то

$$X \cong \prod_{i=1}^s \mathbb{P}^{k_i},$$

для некоторых  $k_i \in \mathbb{N}$ . Применение этой теоремы завершает доказательство в одну сторону.

Доказательство в обратную сторону не составляет труда. Группа

$$\prod_{i=1}^s \mathrm{PGL}(k_i + 1),$$

действует на  $X$  транзитивно.  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. Arzhantsev, S. Gaifullin: *Homogeneous Toric Varieties*. J. Lie Theory. **20** (2010), 283-293.
- [2] I. Arzhantsev, K. Kuyumzhiyan, M. Zaidenberg: *Flag varieties, and suspensions: three instances of infinite transitivity*. arXiv:1003.3164v1 (2010), 25 p.
- [3] W. Bruns, J. Gubeladze: *Polytopal linear group*. J. Algebra. **218** (1999), 715-737.
- [4] D. Bühler: *Homogener Koordinatenring und Automorphismengruppe vollständiger torischer Varietäten*. Diplomarbeit, University of Basel (1996).
- [5] D. Cox: *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*. J. Alg. Geometry. **4** (1995), 17-50. arXiv:alg-geom/9210008v2.
- [6] D. Cox, J. Little, and H. Shenck: *Toric varieties (a preliminary version)*, [www.cs.amherst.edu/dac/toric.html](http://www.cs.amherst.edu/dac/toric.html).
- [7] M. Demazure: *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*. Ann. Sci. École Norm. Sup. **3** (1970) 507-588.
- [8] B. Nill: *Complete toric varieties with reductive automorphism group*. Math. Z. **252** (2006), 767-786.
- [9] T. Oda: *Convex bodies and algebraic geometry — An introduction to the theory of toric varieties*. Springer Verlag, Berlin (1988).

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ, МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ,  
МГУ, ЛЕНИНСКИЕ ГОРЫ 1, МОСКВА, 119991, РОССИЯ  
E-mail address: [ibazhov@gmail.com](mailto:ibazhov@gmail.com)