Самоаффинные многогранники. Приложения к функциональным уравнениям и теории матриц.

А.С.Войнов*

20 ноября 2010 г.

УДК: 514.172.45+517.988.6+512.643.8

Аннотация

В работе изучаются функциональные уравнения со сжатием аргумента специального вида: уравнения аффинного самоподобия. Обобщаются ранее известные одномерные уравнения самоподобия на многомерный случай функций многих переменных. Доказывается критерий существования и единственности L_p-решения. При описании таких уравнений возникает задача классификации конечномерных самоаффинных выпуклых компактов, в работе подробно исследуются их свойства, в частности приводится контрпример к известной с 1991 г. гипотезе о возможной структуре таких тел. В качестве приложений получены результаты о сходимости произведений стохастических матриц, найдены критерии сходимости некоторых уточняющих алгоритмов.

Библиография: 38 наименований.

Ключевые слова: выпуклый многогранник, разбиения, функциональное уравнение, сжатие аргумента, стохастические матрицы.

Keywords: convex polyhedron, partition, functional equation, compression of the argument, stochastic matrix.

I. Введение.

Уравнения самоподобия (линейные функциональные уравнения со сжатием аргумента) широко изучаются в литературе в связи с многочисленными применениями в функциональном анализе, теории всплесков, теории приближений, теории вероятностей, и т.д. В общем виде уравнение самоподобия определяется следующим образом. Дано разбиение отрезка $\Delta = [0,1]$ на меньшие отрезки $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, а также произвольные аффинные операторы $B_1, \dots, B_k$ в пространстве $\mathbb{R}^d$; уравнение самоподобия – уравнение на вектор-функцию $f : \Delta \to \mathbb{R}^d$ в пространстве $L_p(\Delta)$:

$$f(t) \ = \ B_m\big(g_m^{-1}(t)\big)\,, \qquad t \in \Delta_m\,, \qquad m \ = \ 1, \dots, k\,,$$

где g_m – аффинное отображение прямой, переводящее отрезок Δ в отрезок Δ_m. Таким образом, решение данного уравнения f разбивается на k функций, каждая из которых аффинно-подобна f, т.е., переходит в f при аффинной замене координат в области определения и области значений. Этим объясняется название данного класса уравнений, а также термин “фрактальная кривая”, используемый в литературе для его решений. Большинство классических фрактальных кривых (например, кривые Коха, де Рама, Кантора, кривая биномиального распределения, и т.д.) являются решениями соответствующих уравнений самоподобия в $\mathbb{R}^2$ [1, 2, 3]. Другой частный случай самоподобных функций – всплески Добеши (Daubechies wavelets). Они удовлетворяют уравнениям с делением отрезка $[0,1]$ на две равные части, при этом операторы B_1, B_2 задаются так называемыми матрицами переноса (transition matrices), 2-блочными Теплицевыми матрицами [4, 5, 6, 7, 8]. С начала 1990-х гг. в литературе широко изучаются *масштабирующие уравнения* и связанные с ними *уточняющие алгоритмы* (subdivision algorithms), применяющиеся для быстрых методов интерполяции функций, заданных на равномерной сетке (см. библиографию в [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]). Это – еще один частный случай уравнений самоподобия, соответствующий равномерному делению отрезка $[0,1]$ и специальным операторам B_m. Другие примеры: функция плотности распределения степенного ряда со случайными коэффициентами [16], самоподобные меры в эргодической теории [17, 18], и т.д. Общее понятие уравнений самоподобия было,

*Войнов Андрей Сергеевич, МГУ им. Ломоносова, механико-математический факультет, an.voynov@gmail.com

по-видимому, впервые исследовано в 2008 г. в [19], где, в частности, был получен критерий разрешимости уравнений в L_p и исследована гладкость решений. Оказалось, что если решение $f \in L_p$ существует, то оно всегда единственно, устойчиво, и, более того, итерации оператора самоподобия сходятся в L_p к данному решению при любом выборе начальной функции. В этом смысле уравнения самоподобия являются естественными и удобными объектами для изучения.

В данной работе мы определим уравнения самоподобия нескольких переменных, когда область определения Δ является выпуклым компактом в $\mathbb{R}^n$. В частности, в §V мы получаем критерий разрешимости таких уравнений в $L_p(\Delta)$, теорему о единственности и устойчивости решения, и рассматриваем ряд примеров. Перед этим, однако, нам придется классифицировать выпуклые тела $\Delta \subset \mathbb{R}^d$, которые могут служить областями определения уравнений самоподобия. Как будет показано, такие тела должны обладать свойством *самоаффинности*, т.е., разбиваться на части, аффинно-подобные исходному телу. Задача о классификации таких тел была сформулирована Г.Валеттом (см. [20, с. 88] и [21, с. 274]), им же была выдвинута гипотеза о возможном виде таких тел. В настоящей статье строится контрпример к этой гипотезе. Для описания возможных областей определения уравнений самоподобия, нам понадобится более узкий класс самоаффинных множеств, а именно: итерации разбиения должны измельчаться, т.е., наименьший диаметр элемента разбиения стремится к нулю. Примеры подобных разбиений есть, в частности, у куба, симплекса, и т.д. (см. §II, есть также несколько примеров в литературе [22]). Таким образом, мы начнем в §II-III с геометрической задачи о классификации самоаффинных выпуклых компактов. Будет показано, в частности (теорема 1), что всякий самоаффинный компакт с измельчающимся разбиением является многогранником. Для многогранников будет получен критерий того, что разбиение измельчается (теорема 2). Затем, в §IV мы докажем несколько результатов, связывающих свойства самоаффинных разбиений со спектральными свойствами соответствующих линейных операторов. Эта задача тесно связана с широко известным понятием совместного спектрального радиуса операторов (предложение 1). Далее, в §V данные результаты позволят нам определить уравнения самоподобия на многомерных областях и доказать теорему о существовании и единственности решений. Применив эти результаты к частному случаю – известному *уравнению Мичелли-Праутша* [2], мы получим критерий его разрешимости в L_p. Заметим, что критерий этот значительно проще и эффективнее на практике, чем условия разрешимости в $C[0,1]$, полученные в 1989 г. Мичелли и Праутшем. Далее (§VIII) мы рассмотрим приложения полученных результатов к уточняющим алгоритмами и докажем критерий сходимости в $L_p(\mathbb{R}^d)$ уточняющего алгоритма с неотрицательными коэффициентами (эта задача изучалась ранее [23]). В §VI будут получены приложения (с нашей точки зрения, несколько неожиданные) к теории матриц. А именно, применяя результаты §IV к случаю когда многогранник является симплексом, будет доказан критерий сходимости почти любого произведения стохастических матриц (элементы произведения случайно выбираются из конечного семейства матриц). В частности, мы предложим полиномиальный алгоритм проверки данной сходимости. Будут также рассмотрены несколько равносильных свойств семейств стохастических матриц.

В работе использованы следующие обозначения. *Тело* – выпуклый компакт в $\mathbb{R}^d$ с непустой внутренностью. ∂M – граница тела M, conv – выпуклая оболочка, span, aff – линейная и аффинная оболочки множеств, diam – диаметр, id – тождественный оператор, $\mu(X)$ – мера Лебега множества X.

Тело $X \subset \mathbb{R}^d$ назовем *самоаффинным* с конечным семейством невырожденных аффинных операторов разбиения $A_1, \ldots, A_k$, если

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} A_k X$$

и множества $A_i X, A_j X$ при $i \neq j$ не имеют общих внутренних точек. Тела $A_i X$ будем называть элементами разбиения. Тела вида $A_i A_j X, j = 1, \ldots, k$ задают самоаффинное разбиения тела $A_i X, i = 1, \ldots, k$, тем самым мы итерируем исходное разбиение.

Назовем самоаффинное тело X *дробящимся* семейством аффинных операторов разбиения $A_1, \ldots A_k$, если

$$\min_{i_1,\ldots,i_m \in \{1,\ldots,k\}} (\mathrm{diam}\ A_{i_1} \ldots A_{i_m} X) \to 0,\ m \to \infty$$

Другими словами, требуется, чтобы существовал элемент разбиения сколь угодно малого диаметра. Понятие самоаффинности и свойство тела быть дробящимся – аффинно инвариантны (последнее следует из эквивалентности норм в $\mathbb{R}^d$). Далее, если тело дробящееся, то подразумевается, что оно самоаффинное.

II. Самоаффинные выпуклые тела.

Вопрос о классификации самоаффинных тел был сформулирован Г.Валеттом (см. [20, с. 88] и [21, с. 274]) и звучал следующим образом:

Верно ли что любое самоаффинное выпуклое тело является либо многогранником, либо прямым произведением выпуклого тела на многогранник с более, чем одной точкой?

Мы представляем пример, опровергающий данную гипотезу (пример 1). Вопрос о классификации сложен даже для размерности 2. В работе [24] было доказано, что плоскими самоаффинными телами могут быть только многоугольники, однако, в $\mathbb{R}^d$, $d > 2$ этот факт не верен. В данном параграфе приводится пример самоаффинного выпуклого тела, не являющегося многогранником и прямым произведением многогранника на выпуклое тело. Везде далее, если из контекста понятно, о каких операторах, ассоциированных с самоаффинным телом, идет речь, мы будем опускать слова "с заданным семейством операторов". Простейшими примерами самоаффинных тел служат разбиения симплекса на меньшие симплексы. Рассмотрим треугольник на вершинах a, b, c и середину m_a стороны bc. Пусть аффинный оператор A_1 переводит треугольник abc в abm_a, а оператор A_2 переводит abc в am_ac. Треугольник abc с данной парой операторов – самоаффинный, но не дробящийся: любой треугольник разбиения будет содержать точку a и точку на стороне bc, следовательно, его диаметр будет больше $\mathrm{dist}(a, bc)$. Если в том же треугольнике рассмотреть середины m_b, m_c оставшихся сторон и семейство из четырех операторов, переводящих abc в треугольники $am_bm_c, cm_am_b, bm_cm_a, m_am_bm_c$, то abc с таким набором будет дробящимся.

Более содержательные примеры самоаффинных тел могут быть построены как прямые произведения любого самоаффинного тела на произвольное тело. Класс цилиндрических самоаффинных тел задается следующим образом: дано множество самоаффинных тел $\{X_i\}$ в $\mathbb{R}^{d_i}$, каждому из них соответствует семейство операторов $\{A_{ij}\}$. Кроме того, даны произвольные тела $\{Y_i\}$ в $\mathbb{R}^{d'_i}$, у каждого из них "самоподобие"задается тождественным оператором $\mathrm{id}(Y_i) = Y_i$. Тогда прямое произведение $\left(\bigoplus_{i=1}^{n} X_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{m} Y_j\right)$ является самоаффинным телом в $\mathbb{R}^d$, где $d = d_1 + \dots + d_n + d'_1 + \dots + d'_m$ с семейством операторов вида $A_{1j_1} \oplus \dots \oplus A_{nj_n} \oplus \mathrm{id}^m$.

Пример 1. Конус построенный на самоаффинном теле является самоаффинным. Действительно, если рассмотреть самоаффинное тело $X \subset \mathbb{R}^{d-1}$ с соответствующем ему семейством операторов $\{A_i,\ i = 1, \dots, k\}$, то, зафиксировав точку $p \in \mathbb{R}^d$ и аффинную гиперплоскость $L \supset X$, получаем самоаффинный конус $\mathrm{conv}(p, X)$. Его операторы разбиения сохраняют точку p и плоскость L, действуя в ней как $A_i,\ i = 1, \dots, k$. *Так можно получить простой пример, когда самоаффинное тело не разлагается в прямое произведение самоаффинного многогранника и произвольного тела.*

Рассмотрим подпространство $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \subset \mathbb{R}^4$. Рассмотрим круговой цилиндр $W = [0, 1] \times S^1 \subset \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$. Конус $\mathrm{conv}((0, 0, 0, 1), W) \subset \mathbb{R}^4$ является самоаффинным со следующим набором операторов:

$$A_1x = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x, \qquad A_2x = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Самоаффинное разбиение симплекса дает любое разбиение его на меньшие симплексы. Например, рассмотрим симплекс в $\mathbb{R}^d$ с вершинами $a_0, a_1, \dots, a_d$ и произвольную точку p внутри него. Тогда этот симплекс будет дробящимся с семейством из $d + 1$ оператора: каждый оператор переводит исходный симплекс в симплекс с вершинами $p, a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_d,\ i = 0, \dots, d$. Если же точка p лежит на ребре a_0a_1, то два оператора разбиения, переводящие исходный симплекс в симплексы с вершинами $p, a_1, \dots, a_d$ и $a_0, p, a_2, \dots, a_d$ (именно в таком порядке), задают не дробящееся самоподобие (т.к. любой элемент m-ой итерации разбиения будет содержать точку на a_0a_1 и ребро a_2a_3, т.е. элементы разбиений будут уменьшаться с ростом m). Отметим, что если бы операторы в этом примере по-другому переставляли вершины, то разбиение было бы дробящимся (хотя после первой итерации разбиения картина не изменилась бы). Другим простым примером является прямоугольник, разбитый на произвольные прямоугольники со сторонами, параллельными исходному.

Дробящиеся самоаффинные разбиения выпуклых тел находят естественные применения в теории функциональных уравнений со сжатием аргумента. Этот аспект будет подробно изучаться в § V. Подобные уравнения применяются при построении фрактальных поверхностей, а также обобщают ряд известных классов уравнений (например, refinement equations, которые используются при построении всплесков), на функции многих переменных. Случай дробящихся симплексов отдельно рассматривается в § VI. Этот случай может быть интерпретирован как действие стохастических матриц на единичном симплексе $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum x_i = 1, x_i \geqslant 0,\ i = 1, \dots, d\}$. Мы получим критерий на сходимость произведения стохастических матриц с вероятностью 1, а так же новый критерий сходимости уточняющих алгоритмов (sibdivision algorithms) в пространстве L_p. Наконец, в § IX мы вернемся к вопросу о структуре и свойствах самоаффинных тел. В частности, приведем обзор последних работ о самоаффинных телах в $\mathbb{R}^2$ и разберем несколько примеров.

III. Дробящиеся тела и сжимающие наборы операторов.

Мы подробно исследуем класс дробящихся самоаффинных разбиений. Как будет показано далее, именно такие разбиения интересны в приложениях к функциональным уравнениям и теории матриц. Кроме того, как будет показано далее, в отличие от обычных самоаффинных тел, дробящиеся всегда являются многогранниками. Рассмотрим произвольное самоаффинное тело X. Не уменьшая общности, считаем, что $\mathrm{diam}(X) = 1$ и $\mu(X) = 1$. Докажем равносильное определение самоаффинного дробящегося тела. Мы приведем критерий, является ли самоаффинное тело с соответствующим ему разбиением дробящимся. Сформулируем более общее свойство семейства аффинных операторов, так называемую "сжимаемость". Сжимаемость тесно связана со спектральными характеристиками семейства операторов и с дробящимися самоаффинными телами.

Определение 1. Предположим, дано тело X и набор аффинных преобразований, возможно, вырожденных, $A_1, \dots A_k$, такой, что $A_i X \subset X, i = 1, \dots, k$; тогда тело X *сжимаемо* (а соответствующее семейство операторов – *сжимающее*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует композиция исходных операторов $\hat{A}_\varepsilon$ такая, что $\mathrm{diam}(\hat{A}_\varepsilon X) < \varepsilon$.

Следующая простая лемма существенно упрощает детали рассуждений в дальнейшем.

Лемма 1. *Предположим, дано тело X и аффинный оператор A, $\widetilde{A}$ – его линейная часть. Если существует вектор $a \in \mathbb{R}^d$ такой, что $AX + a \subset X$, то существует норма $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^d$ такая, что $\|\widetilde{A}\| \leqslant 1$. Если при этом $AX + a \subset \mathrm{int}\ X$, то $\|\widetilde{A}\| < 1$.*

Доказательство. Через $(-X)$ обозначим образ X при центральной симметрии относительно 0. Рассмотрим тело $\widetilde{X} = X + (-X)$, являющееся суммой Минковского тел X и $(-X)$. Очевидным образом $\widetilde{X}$ центрально-симметрично. Центр симметрии будет совпадать с началом координат. Если $AX + a \subset X$, то $-AX - a \subset -X$. Непосредственно из определения суммы Минковского, $\widetilde{A}(\widetilde{X}) = (AX) + (-AX) = (AX + a) + (-AX - a) \subset X + (-X) = \widetilde{X}$. Рассмотрим норму Минковского, порожденную телом $\widetilde{X}$. Тогда $\|\widetilde{A}\| \leqslant 1$. Очевидным образом, $\|\widetilde{A}\| < 1$ при $AX + a \subset \mathrm{int}\ X$. □

Таким образом, мы построили норму, ассоциированную с телом X. Везде далее, для определенности, будем рассматривать именно такую норму. В этой норме, норма любого оператора разбиения самоаффинного тела X не превосходит 1.

Замечание 1. В силу леммы 1, определение самоаффинного дробящегося тела равносильно существованию для любого ε композиции исходных операторов $\hat{A}_\varepsilon$ такой, что $\|\hat{A}_\varepsilon\| < \varepsilon$. Действительно, если диаметр образа $\hat{A}X$ достаточно мал ($\hat{A}$ – композиция исходных операторов), то существует вектор a такой, что $\hat{A}X + a \subset \mathrm{int}\ X$. Тем самым $\|\hat{A}\| < 1$ и взяв достаточную степень этого оператора, получим оператор с нормой, меньшей ε. В другую сторону – очевидно.

По определению, дробящееся самоаффинное тело является сжимаемым. Следующая лемма является усилением определения дробящихся тел.

Лемма 2. *Самоаффинное тело X с операторами $A_1, \dots, A_k$ является дробящимся тогда, и только тогда, когда выполнено следующее условие: $\mu_n(\varepsilon) = \mu(\cup A_{i_1} \dots A_{i_n} X |\ \mathrm{diam}(A_{i_1} \dots A_{i_n} X) > \varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого ε.*

Иначе говоря, при итерации разбиения, суммарная мера элементов разбиения с большим диаметром, должна стремится к нулю. Очевидным образом, $\mu_n(\varepsilon)$ не возрастает по n.

Доказательство. Достаточность очевидна. Необходимость. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Из замечания 1, существует композиция исходных операторов $\hat{A}$ с нормой, меньшей ε, значит, $\mathrm{diam}(\hat{A}X) < \varepsilon$. Предположим, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(\varepsilon) = E > 0$. Из условия, $E < 1$. Рассмотрим произвольное $\delta \in (0; 1 - E)$. Тогда существует итерация разбиения N, такая, что $\mu_N(\varepsilon) < E + \delta$. Рассмотрим $2N$-итерацию разбиения. Тогда каждый элеменет X_i из N-итерации разбиения разбивается на N частей. Так как $\|A_i\| \leqslant 1$, $i = 1, \dots, k$, то суммарная мера элементов разбиения тела X_i (полученных на $2N$-итерации исходного разбиения) с диаметром большим ε не превышает $\mu_N(\varepsilon)\mu(X_i)$. Таким образом $\mu_{2N}(\varepsilon) \leqslant \mu_N(\varepsilon)^2$. Следовательно,

$$E \leqslant \mu_{2N}(\varepsilon) \leqslant \mu_N(\varepsilon)^2 < (E + \delta)^2$$

Получаем, что $E < (E + \delta)^2$ для любого $\delta \in (0; 1 - E)$, значит, $E = 0$, что и требовалось. □

Равносильное определение дробящихся тел позволяет без труда доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Любое дробящееся тело X является многогранником.*

Доказательство. Пусть p – произвольная внутренняя точка X, пусть $r = \mathrm{dist}(p, \partial X)$. При некоторой итерации N разбиения, мера объединения элементов разбиения с диаметром большим $r/3$ будет меньше объема шара радиуса $r/3$, следовательно, в шаре с центром в p и радиуса $r/3$ будет содержаться точка, принадлежащая элементу разбиения $\hat{A}X$, с диаметром меньшим $r/3$, $\hat{A}$ – некоторая композиция исходных операторов. Значит, $\hat{A}X \cap \partial X$ – пусто. Тогда каждая точка $x \in \partial(\hat{A}X)$ лежит в пересечении $\hat{A}X$ с некоторым $A_{i_1} \ldots A_{i_N}X$, значит

$$\partial(\hat{A}X) = \bigcup_{i_1,\ldots i_N} (\hat{A}X \cap A_{i_1} \ldots A_{i_N}X)$$

(в объединение не входит $\hat{A}X \cap \hat{A}X$). Следовательно, граница $\hat{A}X$ состоит из конечного числа плоских участков (являющихся пересечениями $\partial\hat{A}X$ с другими элементами разбиения), так как пересечение выпуклых тел – выпукло и число элементов разбиения, полученных через N итераций конечно, эти участки действительно плоские и их конечное число. Значит, $\hat{A}X$ – многогранник. □

Таким образом, например, круговой цилиндр, или конус, построенный на круговом цилиндре заведомо не дробящиеся, т.к. не являются многогранниками. С другой стороны, оба тела самоаффинные (см. § II). Однако, согласно теореме 1, для них не существует семейств операторов, задающих их дробящееся разбиения.

Замечание 1, в некотором смысле, приводит критерий, однако, задача определения, существует ли произведение операторов с нормой, меньшей 1, довольно сложна. Найдем более простой критерий.

Мы докажем общий критерий сжимаемости для произвольного многогранника. Далее он будет применен для нахождения критерия, является ли самоаффинный многогранник дробящимся. В силу теоремы 1, полученный критерий будет применим для любых самоаффинных тел. Результаты полученные при изучении сжимаемых тел будут применяться при исследовании нестационарных Марковских процессов и при построении фрактальных поверхностей. Сформулируем и докажем критерий для невырожденных операторов. Напомним, что гранью многогранника называется его пересечение с опорной гиперплоскостью (грани могут иметь размерность от 0 (вершина) до $d-1$ (гипергрань)).

Теорема 2. *Многогранник X с семейством невырожденных аффинных операторов $A_1, \ldots, A_k$ не является сжимаемым тогда и только тогда, когда существует набор G непересекающихся граней многогранника X, содержащий не менее двух граней, такой, что для любой грани $g \in G$ и для любого $i = 1, \ldots k$ образ $A_i g$ целиком лежит в некоторой грани $g^{(i)} \in G$.*

Доказательство теоремы помещено в приложении.

Отметим, что из условия невырожденности операторов A_i, из теоремы 2 следует, что для любого $i = 1, \ldots, k$ и любой грани $g \in G$, существует грань $g_{(i)} \in G$ такая, что $A_i g_{(i)} \subset g$. Набор G тот же, что и в условии теоремы.

Замечание 2. Условие невырожденности в теореме 2 существенно. Приведем простой пример.

Пример 2. Пусть X – квадрат с вершинах a_1, a_2, a_3, a_4, а операторы A_1, A_2, A_3, A_4 являются проекторами на его диагонали: операторы A_1, A_2 проектируют квадрат на a_1a_3 вдоль сторон a_2a_1 и a_2a_3 соответственно, операторы A_3, A_4 проектируют квадрат на a_2a_4 вдоль сторон a_1a_2 и a_3a_2. В этом случае многогранник X не будет сжимаемым, но для него не будет существовать множества инвариантных граней.

Воспользовавшись теоремой 2, немедленно получаем критерий на то, что самоаффинный многогранник является дробящимся.

Следствие 1. *Самоаффинный многогранник X с разбиением, заданным преобразованиями $A_1, \ldots, A_k$ не является дробящимся тогда, и только тогда, когда существует набор граней G (возможно, пересекающихся) такой, что любой из операторов разбиения переводит его в себя, т.е. $A_i(\bigcup_{g \in G} g) \subset \bigcup_{g \in G} g$, $i = 1, \ldots, k$.*

Доказательство. Как отмечалось выше, если X – не дробящийся, то он не сжимаемый. Таким образом, из теоремы 2 следует часть 'только тогда'.

В другую сторону. Предположим, такой набор граней существует. Тогда для любого многогранника разбиения AX выполнено: $(\partial AX) \cap \partial X \neq \varnothing$, что противоречит конструкции, приведенной в доказательстве теоремы 1, где строится элемент разбиения, не пересекающийся с ∂X. □

Теорема 2 позволяет найти некоторые свойства набора операторов $A_1, \ldots, A_k$, не являющегося сжимаемым на многограннике X.

Теорема 3. *Если многогранник $X \subset \mathbb{R}^d$ с набором невырожденных операторов $A_1, \ldots, A_k$ не является сжимаемым, то существует аффинная плоскость, инвариантная относительно всех этих операторов.*

Доказательство. Рассмотрим набор граней G, инвариантных относительно операторов $\{A_i\}$, описанный в теореме 2. Рассмотрим все грани минимальной размерности в этом наборе: $g_1, \ldots, g_t \in G$. Очевидным образом, аффинные плоскости $l_1 = \mathrm{span}(g_1), \ldots, l_t = \mathrm{span}(g_t)$ инвариантны относительно операторов $\{A_i\}$. Сформулируем и докажем лемму:

Лемма 3. *Задан набор аффинных плоскостей $l_1, \ldots, l_t$, инвариантных относительно семейства операторов $\{A_i\}$, их размерности совпадают и строго больше 1. Тогда одно из двух условий гарантированно выполнено:*

1) *среднее по Минковскому $\frac{1}{t}(\sum\limits_{i=1}^{t} l_i)$ плоскостей $l_1, \ldots, l_t$ имеет размерность меньшую d;*

2) *существует непустой набор аффинных плоскостей $f_1, \ldots, f_{t'}$ одинаковых размерностей, инвариантный относительно $\{A_i\}$ такой, что $\dim(f_i) < \dim(g_i)$.*

Доказательство. Предположим, условие 1) не выполнено. Отметим, что усреднение по Минковскому коммутирует с аффинными операторами: $A_i(\frac{1}{2}(V_1 + V_2)) = \frac{1}{2}(A_iV_1 + A_iV_2)$ для любых аффинных плоскостей V_1, V_2. Рассмотрим произвольную перестановки $\sigma \in S_t$. Рассмотрим плоскость $L_1 = l_{\sigma(1)}$. Если $l_{\sigma(2)} \cap L_1 \neq \varnothing$ и $l_{\sigma(2)} \nsubseteq L_1$, положим $w_\sigma = l_{\sigma(2)} \cap L_1$. В противном случае рассмотрим плоскость L_2, равную средней по Минковскому плоскостей $l_{\sigma(2)}$ и L_1 и повторим для нее и плоскости $l_{\sigma(3)}$ описанную операцию, и т.д., пока не получим плоскость w_σ. Процесс заведомо выдаст w_σ, так как если условие 1) не выполнено, то на каком-то шаге j будем иметь $\dim(L_j) < d$, при этом $\frac{1}{2}(L_j + l_{\sigma(j+1)}) = \mathbb{R}^d$, следовательно, $\dim L_j + \dim l_{\sigma(j+1)} \geqslant d$ и $l_{\sigma(j+1)} \cap L_j \neq \varnothing$ и $l_{\sigma(j+1)} \nsubseteq L_j$.

По построению, множество всех плоскостей $\{g_\sigma\}_{\sigma \in S_t}$ инвариантно относительно $\{A_i\}$ и $\dim(g_\sigma) < \dim(l_i)$ для любой перестановки σ. Среди множества всех плоскостей $\{g_\sigma\}_{\sigma \in S_t}$ выберем поднабор плоскостей минимальных размерностей. Это и будет набор плоскостей, удовлетворяющий условию 2). $\square$

Применим лемму к набору плоскостей $l_1, \ldots, l_t$. Если $\dim(\frac{1}{t}(\sum\limits_{i=1}^{t} l_i)) < d$, то плоскость $\frac{1}{t}(\sum\limits_{i=1}^{t} l_i)$ будет инвариантна относительно семейства $\{A_i\}$. В противном случае перейдем к новому набору инвариантных плоскостей меньших размерностей и т.д. Таким образом, мы получим либо инвариантную плоскость для всех операторов $\{A_i\}$, либо конечную систему точек $t_1, \ldots, t_r$, инвариантную относительно $\{A_i\}$. Предположим, выполнено второе. Каждый оператор A_i переводит в себя многогранник (возможно, вырожденный) $\mathrm{conv}(t_1, \ldots, t_r)$, следовательно, его центр масс инвариантен относительно семейства $\{A_i\}$. $\square$

IV. Свойства, равносильные сжимаемости.

Свойство сжимаемости для семейства линейных операторов может быть сформулировано в терминах совместных спектральных характеристик операторов, таких, как совместный спектральный радиус, p-радиус и т.д. Пусть задано семейство линейных операторов $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ в $\mathbb{R}^d$. Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ и подстановки $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$ через Π_σ обозначим произведение $B_{\sigma(1)} \ldots B_{\sigma(n)}$. Определим $\mathcal{F}_n(p) = \mathcal{F}_n(p, \mathcal{B})$ как величину $[k^{-n} \sum_\sigma \|\Pi_\sigma\|^p]^{1/p}$, $p \geqslant 1$, при $p = \infty$ эта величина определяется как предел величины $\mathcal{F}_n(p)$ при $p \to \infty$. Кроме того, для $x \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\mathcal{F}_n(p, x) = \mathcal{F}_n(p, \mathcal{B}, x) = [k^{-n} \sum_\sigma |\Pi_\sigma x|^p]^{1/p}$$

$\mathcal{F}_n(\infty, x) = \mathcal{F}_n(\infty, \mathcal{B}, x) = \sup_\sigma |\Pi_\sigma x|$. Будем обозначать $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$.

Для фиксированного $p \in [1, +\infty]$ *p-радиусом линейных операторов* семейства $\mathcal{B}$ называется величина

$$\rho_p = \rho_p(\mathcal{B}) = \lim_{n \to \infty} [\mathcal{F}_n(p, \mathcal{B})]^{1/n} \tag{1}$$

Для аффинных операторов p-радиусом называется p-радиус их линейных частей.

Предел (1) существует для любого семейства операторов и не зависит от нормы в $\mathbb{R}^d$. Если $k = 1$, или все операторы B_i равны некоторому оператору B, то по известной формуле Гельфанда, $\rho_p(\mathcal{B})$

равно обычному спектральному радиусу $\rho(B)$, т.е. максимальному модулю собственных значений. При фиксированном семействе $\mathcal{B}$, p-радиус является неубывающей функцией по p. Число ρ_∞ называется совместным спектральным радиусом (ССР). В литературе широко изучался p-радиус. Впервые ССР был введен в работе Рота и Странга [25] в 1960 г. Активное изучение этого объекта началось в лишь в конце 1980-х годов, ССР нашел применения в теории вейвлетов, subdivision-алгоритмах, динамических системах, теории кодирования, теории чисел, теории вероятностей, и т.д. (см. библиографию в [19]). Свойствам ССР и проблеме его вычисления посвящена обширная литература (см. [26, 27, 28, 29] и библиографию в этих работах). Понятие ССР было расширено до p-радиуса в работе Вонга [11] (для случая $p = 1$), а затем для произвольного $p \geqslant 1$ в работе Джиа [12] и независимо в работе Вонга и Лау [13].

Предложение 1. *Предположим, дано тело X и набор аффинных операторов $A_1, \dots, A_k$ такой, что $A_iX \subset X,\ i = 1, \dots, k$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) X – сжимаемо;

2) $\rho_p(A_1, \dots, A_k) < 1$ для любого $p \in [1, +\infty)$;

3) почти для любой последовательности $\{i_t\}, i_t \in \{1, \dots, k\}$ предел $\lim\limits_{T\to\infty} \|A_{i_T} \dots A_{i_1}\|$ равен 0;

4) существует произведение A исходных операторов такое, что его спектральный радиус $\rho(A)$ меньше 1.

Поясним пункт 3. Пусть $\{i_k\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, величина i_k равномерно распределена на множестве $\{1, \dots, k\}$ и принимает любое значение с вероятностью $p = \frac{1}{k}$. Тогда условие пункта 3 означает, что $\lim\limits_{T\to\infty} \|A_{i_T} \dots A_{i_1}\| = 0$ с вероятностью 1 (почти наверное).

Доказательство. <u>$1 \Rightarrow 2$</u>. В силу замечания 1, существует произведение Π_1 исходных операторов некоторой длины m с нормой, меньшей единицы. Через $\Pi_1, \dots, \Pi_{k^m}$ обозначим всевозможные произведения длины m исходных операторов. Тогда имеем:

$$\rho_p(A_1, \dots, A_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum \|A_{i_1} \dots A_{i_{mn}}\|^p}{k^{mn}} \right)^{\frac{1}{mnp}} = \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum \|\Pi_{j_1} \dots \Pi_{j_n}\|^p}{k^{m^n}} \right)^{\frac{1}{np}} \right)^{\frac{1}{m}} = \rho_p(\Pi_1, \dots, \Pi_{k^m})^{\frac{1}{m}}$$

Достаточно показать, что $\rho_p(\Pi_1, \dots, \Pi_{k^m}) < 1$. Действительно, пусть $\|\Pi_1\| = \varepsilon < 1$, легко видеть, что:

$$\rho_p(\Pi_1, \dots, \Pi_{k^m}) \leqslant \rho_p(\Pi_1, \underbrace{E, \dots E}_{k^m - 1}) \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{i=0}^n C_n^i \varepsilon^{ip} (k^m - 1)^{n-i}}{k^{mn}} \right)^{\frac{1}{np}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left((k^m)^{-n} (k^m - 1 + \varepsilon^p)^n \right)^{\frac{1}{np}} = \left(\frac{k^m - 1 + \varepsilon^p}{k^m} \right)^{\frac{1}{p}} < 1$$

Первое неравенство выполнено из очевидного $\|\Pi_{j_1} \dots \Pi_{j_n}\| \leqslant \|E_{j_1} \dots E_{j_n}\|$, где $E_{j_k} = \Pi_1$ если $j_k = 1$ и E в противном случае.

<u>$2 \Rightarrow 1$</u>. От противного: пусть норма любого произведения не меньше 1. Тогда

$$1 > \rho_1(A_1, \dots, A_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum \|A_{i_1} \dots A_{i_n}\|}{k^n} \right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \lim_{n\to\infty} \left(\frac{k^n}{k^n} \right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

противоречие.

Импликация <u>$3 \Rightarrow 1$</u> – очевидна. Докажем <u>$1 \Rightarrow 3$</u>. Рассмотрим произведение Π_1 исходных операторов длины m с нормой, меньшей единицы, то же, что при доказательстве <u>$1 \Rightarrow 2$</u>. Разделим последовательность $\{i_t\}$ на участки длины m. Очевидным образом, почти для любой последовательности будет сколь угодно много участков произведения $A_{i_{ml+m}} \dots A_{i_{ml}}$, равных Π_1. В силу леммы 1, в подходящей норме, условие $A_iX \subset X$ влечет $\|A_i\| \leqslant 1$. Таким образом, в силу $\|\Pi_1\| < 1$, искомый предел стремится к 0 почти для любой последовательности.

Пункт 4 непосредственно следует из 1: если существует композиция A операторов с нормой, меньшей 1, то $\rho(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|A\| < 1$. Если выполнен пункт 4, то при некотором N имеем $\|A^N\| < 1$ и в силу замечания 1, тело X – сжимаемо. Тем самым, предложение доказано. □

Отметим, что при доказательстве $\underline{2 \Rightarrow 1}$, в силу монотонности функции ρ_p по p, мы пользовались более слабым предположением, чем в условии предложения, а именно $\rho_1(A_1, \dots, A_k) < 1$.

V. Функциональные уравнения самоподобия.

Одним из наиболее важных приложений самоаффинных выпуклых тел является теория функциональных уравнений самоподобия. Уравнения самоподобия – это линейные функциональные уравнения со сжатием аргумента. В частности, масштабирующие уравнения (refinement equations), использующиеся в теории всплесков и теории приближений, уравнения, задающие классические фрактальные кривые (кривые Коха, де Рама и т.д.), плотности распределений случайных степенных рядов, самоподобные меры являются частными случаями уравнений самоподобия.

Если задано произвольное семейство аффинных операторов $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$, действующих в $\mathbb{R}^d$ и произвольное разбиение отрезка $[0,1]$ точками $0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < 1$, то следующее уравнение на функцию $v : \ [0,1] \to \mathbb{R}^d$:

$$v(t) = B_m v(g_m^{-1}(t)), \ t \in [t_{m-1}, t_m], \ m = 1, \dots, k \tag{2}$$

называется *уравнением самоподобия*, соответствующим данному семейству и разбиению. Через g_m обозначаем одномерный аффинный оператор, переводящий отрезок $[0,1]$ в отрезок $[t_{m-1}, t_m]$, также полагаем $t_0 = 0, t_k = 1$. Вопрос о разрешимости уравнений такого вида в пространствах $C[0,1]$ и $L_p[0,1]$ (имеются ввиду соответствующие пространства вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^d$) и о свойствах решений возникал в различных областях математики. Большинство классических фрактальных кривых являются решениями уравнений вида (2).

Пример 3. (*Кривая Коха*). $k = 2, t_1 = 1/2$ (т.е. отрезок разбивается на две равные части), аффинные операторы B_1, B_2 определены следующим образом: пусть abc – равнобедренный треугольник, $\angle c = 120^o$, точки d, e выбраны на стороне ab так, что $\angle acd = \angle bce = 30^o$; тогда B_1 – оператор подобия, переводящий треугольник abc в треугольник acd; B_2 – оператор подобия, переводящий abc в cbe. Решение соответствующего уравнения (2) непрерывно и является кривой Коха ("снежинкой"), построенной на отрезке ab.

Пример 4. (*Кривая де Рама*). $k = 2, t = 1/2$,

$$B_1 x = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ \omega & 1-2\omega \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega \end{pmatrix}, \qquad B_2 x = \begin{pmatrix} 1-2\omega & \omega \\ 0 & \omega \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2\omega \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение соответствующего уравнения самоподобия является кривой де Рама, которая получается как предельная кривая следующей последовательности кривых. Дана произвольная незамкнутая ломаная на вершинах $z_k = (x_k, z_k) \in \mathbb{R}^2, \ k \in \mathbb{Z}$. На первом шаге каждую сторону ломаной делим на три части в отношении $\omega : (1-2\omega) : \omega$, где $\omega \in (0, 1/2)$ – некоторый фиксированный коэффициент. Таким образом на каждой стороне исходной ломаной мы получаем по две точки деления. Соединив последовательно все точки деления, получаем новую ломаную. Опять применяем это преобразование для получившейся ломаной, и т.д. Предельная кривая и будет кривой де Рама [3, 30].

Пример 5. (*Масштабирующие уравнения*). Масштабирующим называется функциональное уравнение вида

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j \varphi(2x - j),$$

где $c_0, \dots c_N$ – заданная последовательность коэффициентов. Вектор-функция $v(t) = \big(\varphi(t), \varphi(t+1), \dots, \varphi(t+N-1)\big)$ является решением уравнения самоподобия (2) с параметрами $k = 2, t_1 = 1/2$ операторы B_1, B_2 задаются специальными матрицами, построенными по коэффициентам c_m [4], см. так же обширную библиографию в [15, 6].

Уравнения самоподобия, соответствующие разбиению отрезка $[0,1]$ на равные части подробно изучались в [2, 31]. Другие примеры уравнений самоподобий рассматривались в [15, 18]. В работе [19] были определены уравнения самоподобия общего вида (2) и доказан критерий их разрешимости в $L_p[0,1]$ (в этом случае уравнение выполнено почти всюду на отрезке). Для формулировки критерия нам потребуется ввести несколько понятий. Семейство операторов называется *неприводимым*, если не существует *аффинного* подпространства, инвариантного относительно всех операторов. Пусть $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_k\}$ – семейство операторов, являющихся линейными частями аффинных операторов семейства $\widetilde{\mathcal{B}}$. Положим $r_i = t_i - t_{i-1},\ r = (r_1, \ldots, r_k),\ kr\widetilde{\mathcal{B}} = kr_1\widetilde{B}_1, \ldots, kr_k\widetilde{B}_k$.

Теорема А [19, теорема 2]. *Для неприводимого семейства аффинных операторов уравнение* (2) *имеет решение $v(t) \in L_1(K)$ тогда, и только тогда, когда $\rho_1(kr\mathcal{B}) < 1$. Это решение единственно. Если при некотором $p \in [1, +\infty]$ имеетместо $\rho_p((kr)^{1/p}\mathcal{B}) < 1$, то $v \in L_p$. Для $p < \infty$ верно и обратное: если $v \in L_p$, то $\rho_p < 1$. Если $v \in L_\infty$, то $\rho_\infty \leqslant 1$.*

Решение уравнения самоподобия является неподвижной точкой оператора самоподобия

$$[\mathbf{B}f](t) = B_m f(g_m^{-1}(t)), t \in [t_{m-1}, t_m], m = 1, \ldots, k$$

В [19] показано, что если уравнение (2) имеет решение $v \in L_p[0,1]$, то это решение единственно (следует из теоремы А) и, более того, глобально устойчиво, т.е. для любой начальной функции $v_0 \in L_p[0,1]$ итерации оператора $\mathbf{B}^m v_0$ сходится в $L_p[0,1]$ к решению v. Таким образом, только существование решения порождает его единственность и глобальную устойчивость. В данном разделе мы обобщим этот результат на аналогичные уравнения от функций многих переменных. Посмотрим, как может выглядеть такое обобщение для функций n переменных. Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ – область определения функции v. Уравнение самоподобия предполагает разбиение области определения на части $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, эти части не пересекаются (точнее, могут пересекаться по множествам меры нуль), и каждая из них должна быть аффинно-подобна K. При этом их объединение должно совпадать с K, в противном случае, как легко показать, решение v будет определено на множестве меры нуль, что делает бессмысленным вопрос о принадлежности его к L_p. Таким образом, если мы ограничимся только выпуклыми областями K, то уравнение самоподобия будут определены на самоаффинных областях. Содержательное обобщение теоремы А на случай функций многих переменных будет приведено именно для дробящихся самоаффинных тел.

В силу теоремы 1, дробящееся самоаффинное тело является многогранником. Так что далее мы рассматриваем функции, определенные на самоаффинных многогранниках в $\mathbb{R}^n$. Дадим теперь строгое определение.

Дан дробящийся самоаффинный многогранник $K \subset \mathbb{R}^n$ с операторами разбиения $A_1, \ldots, A_k$. Задан произвольный набор аффинных операторов $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$, действующих в $\mathbb{R}^d$.

Фрактальной поверхностью для семейства $\mathcal{B}$ и соответствующего самоаффинного разбиения операторами $A_1, \ldots, A_k$ будем называть функцию $v \in L_p(K) : K \to \mathbb{R}^d$, удовлетворяющую *уравнению самоподобия*:

$$v(t) = B_m v(A_m^{-1}(t)),\ t \in A_m K,\ m = 1, \ldots, k \tag{3}$$

Фрактальная поверхность является неподвижной точкой аффинного *оператора самоподобия* $\mathbf{B}$, действующего в $L_p(K)$ по формуле

$$[\mathbf{B}f](t) = B_m f(A_m^{-1}(t)), t \in A_m K, m = 1, \ldots, k$$

Через $\widetilde{\mathbf{B}}$ будем обозначать линейную часть этого оператора. Простейшими примерами областей определения K могут быть кубы, симплексы. Например единичный куб в $\mathbb{R}^n$ с операторами двоичного сжатия относительно его вершин, в этом случае уравнение (3) примет вид: $v(t) = B_j v(2t - w_j)$, где w_j – ближайшая к t вершина куба.

Пусть $r_i = \det A_i$, $r = (r_1, \ldots, r_k)$, $kr\widetilde{\mathcal{B}} = \{kr_1\widetilde{B}_1, \ldots, kr_k\widetilde{B}_k\}$. Как и в одномерном случае, критерий существования и единственности решения уравнения (3) будет дан в терминах p-радиуса некоторого семейства линейных операторов, связанного с $\widetilde{\mathcal{B}}$.

Теорема 4. *Для неприводимого семейства аффинных операторов уравнение* (3) *имеет решение* $v(t) \in L_1(K)$ *тогда, и только тогда, когда* $\rho_1(kr\widetilde{\mathcal{B}}) < 1$*. Это решение единственно.*

Если при некотором $p \in [1, +\infty]$ имеет место $\rho_p((kr)^{1/p}\widetilde{\mathcal{B}}) < 1$, то $v \in L_p$. Для $p < \infty$ верно и обратное: если $v \in L_p$, то $\rho_p < 1$. Если $v \in L_\infty$, то $\rho_\infty \leqslant 1$.

Напомним, что самоаффинный дробящийся многогранник K фиксирован и включен в уравнение самоподобия. Отметим, что условие неприводимости не накладывает никаких ограничений: если операторы имеют общее собственное аффинное подпространство, то, ограничив их на него, мы вновь можем воспользоваться теоремой. При доказательстве будут использованы некоторые результаты работы [19].

Начнем со вспомогательного результата. После m итераций разбиения, многогранник K разбился на k^m частей, обозначим их $\Delta_i,\ i = 1, \dots k^m$. Предположим дана функция $f(x) \in L_p(K) : K \to \mathbb{R}^d$. Через $s_m(f) : K \to \mathbb{R}^d$ обозначим кусочно-постоянную функцию, такую, что

$$s_m(x) = \frac{1}{\mu(\Delta_i)} \int_{\Delta_i} f(t)dt \qquad ,x \in \Delta_i, \quad i = 1, \dots, k^m$$

Лемма 4. *Если компакт K дробящийся, то $\|f - s_m(f)\|_p \to 0$ при $m \to \infty$.*

Доказательство леммы приведено в приложении.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим произвольное $p < \infty$, обозначим $\widetilde{C}_j = (kr_j)^{1/p}\widetilde{B}_j,\ \widetilde{\mathcal{C}} = (kr)^{1/p}\widetilde{\mathcal{B}},\ \rho_p = \rho_p(\widetilde{\mathcal{C}})$. Для любых $f_1, f_2 \in L_p(K)$ имеем

$$\|\widetilde{\mathbf{B}}(f_1 - f_2)\|_p = \left[\int_K \sum_j r_j |\widetilde{B}_j(f_1(t) - f_2(t))|^p \ dt\right]^{1/p} = \left[\int_K \mathcal{F}^p(p, \widetilde{\mathcal{C}}, f_1(t) - f_2(t)) \ dt\right]^{1/p}$$

Таким образом,

$$\|\widetilde{\mathbf{B}}(f_1 - f_2)\|_p = \|\mathcal{F}(p, \widetilde{\mathcal{C}}, f_1 - f_2)\|_p \tag{4}$$

Переходя к пределу, получим данное равенство для $p = \infty$. Если $\rho_p < 1$, то из предложения, доказанного в работе [19], существует норма $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^d$ такая, что $\mathcal{F}(p, \widetilde{\mathcal{C}}, f_1(t) - f_2(t)) \leqslant \gamma |f_1(t) - f_2(t)|$ в любой точке $t \in \mathbb{R}^d$, следовательно, $\|\widetilde{\mathbf{B}}(f_1 - f_2)\|_p \leqslant \gamma \|f_1 - f_2\|_p$, где $\gamma < 1$. Таким образом, $\mathbf{B}$ – сжимающий оператор на $L_p(K)$ с единственной неподвижной точкой. Тем самым, мы установили достаточность.

Докажем необходимость. Предположим, уравнение (3) имеет решение $v \in L_p(K)$. Положим $a = \int_K v(t)dt$. Тем же символом будем обозначать функцию $a(t) \equiv a, t \in K$. Для любого $m \geqslant 1$ и элемента разбиения Δ_σ из m-итерации разбиения имеем:

$$\mu(\Delta_\sigma)^{-1} \int_{\Delta_\sigma} v(t)dt = \int_K B_{\sigma(1)} \dots B_{\sigma(m)} v(t)dt = B_{\sigma(1)} \dots B_{\sigma(m)} a$$

Таким образом, кусочно-постоянная функция $f_m = \mathbf{B}^m a$ равна среднему $\mu(\Delta_\sigma)^{-1} \int_{\Delta_\sigma} v(t)dt$ на каждом элементе разбиения Δ_σ. Многогранник K – дробящийся, поэтому, по лемме 4, в случае $p < \infty$, имеем $\|v - f_m\|_p \to 0$ при $m \to \infty$. Значение $\|v - f_m\|_\infty$ может не стремиться к 0, но оно будет ограничено.

Предположим, у операторов A_j существует общее линейное подпространство $\widetilde{L}$, содержащее вектор $v(t) - a$ почти для всех $t \in K$. Это подпространство задано системой $(l_q, u) = 0, q = 1, \dots, n$, l_q – линейные функционалы в $\mathbb{R}^d$. Для любого q имеем $(l_q, v(t)) = (l_q, a)$ покоординатно почти для всех t. Поэтому при всех $j \in \{1, \dots, k\}$ уравнение (3) влечет

$$(l_q, B_j a) = \left(l_q,\ \int_K B_j v(t)dt\right) = \left(l_q,\ \mu(\Delta_j)^{-1} \int_{\Delta_j} v(t)dt\right) = (l_q, a)$$

Значит, аффинная гиперплоскость $L = a + \widetilde{L}$ содержит все точки $B_j a, j = \{1, \dots, k\}$. Следовательно, для любого $x \in \widetilde{L}$ имеем $B_j(a + x) = B_j a + \widetilde{B}_j x \in L$, так как $B_j a \in L$ и $\widetilde{B}_j x \in \widetilde{L}$. Таким образом, L – общее инвариантное подпространство для семейства операторов $\mathcal{B}$, что противоречит предположению о неприводимости. Значит, существует множество $\eta \subset K, \mu(\eta) > 0$ такое, что $v(t) - a$ не лежит в общем инвариантном подпространстве семейства $\widetilde{\mathcal{B}}$ (а, следовательно, и семейства $\widetilde{\mathcal{C}}$) при $t \in \eta$. Рассмотрим функцию $c(t) = c(v(t) - a)$, равную максимальному числу, для которого $\mathcal{F}_n(p, \widetilde{\mathcal{C}}, t) \geqslant c(t)(\rho_p(\widetilde{\mathcal{C}}))^n$ при всех $n \geqslant d$. В [19] доказывается, что если t не лежит в общем инвариантном подпространстве семейства $\widetilde{\mathcal{C}}$, то $c(t)$ – полунепрерывна сверху и положительна. Таким образом, $c(t)$ положительна на η, следовательно существует $\varepsilon > 0$ и множество $\eta_\varepsilon \subset \eta$ положительной меры, такое, что $c(t) > \varepsilon$ при $t \in \eta_\varepsilon$. Получаем, что $\mathcal{F}_n(p, \widetilde{\mathcal{C}}, v(t) - a) \geqslant \varepsilon(\rho_p)^n$ при всех $t \in \eta_\varepsilon$. Итерируя (4), получаем

$$\|\widetilde{\mathbf{B}}^n(f_1 - f_2)\|_p = \|\mathcal{F}_n(p, \widetilde{\mathcal{C}}, f_1 - f_2)\|_p, \quad n \in \mathbb{N}$$

Подставляя $f_1 = v, f_2 = a$ получим $\|\mathbf{B}^n v - \mathbf{B}^n a\|_p = \|\mathcal{F}_n(p, \widetilde{\mathcal{C}}, v(\cdot) - a\|_p$. Таким образом,

$$\|v - \mathbf{B}^n a\|_p \geqslant |\eta_\varepsilon|^{1/p} \varepsilon(\rho_p)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Если $p < \infty$, то левая часть стремится к 0 при $n \to \infty$, значит $|\eta_\varepsilon|^{1/p}\varepsilon(\rho_p)^n \to 0$ при $n \to \infty$, из чего следует $\rho_p < 1$. При $p = \infty$ левая часть равномерно ограничена, поэтому $\rho_\infty \leqslant 1$. $\square$

Пример 6. Рассмотрим треугольник abc и две точки m_1, m_2 на стороне bc, делящие сторону на три равные части. Пусть операторы A_1, A_2, A_3 переводят треугольник abc в abm_1, m_1m_2a и m_2ca. Легко видеть, что abc – дробящийся, $r_i = \det(A_i) = 1/3$. Полагаем:

$$B_1 = \frac{E}{2}\,x + e_1, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} x + e_1, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/5 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} x + e_2.$$

Тогда $\rho_1(kr\widetilde{\mathcal{B}}) = \rho_1(\frac{3}{3}\widetilde{B}_1, \frac{3}{3}\widetilde{B}_2, \frac{3}{3}\widetilde{B}_3) = \lambda_{max}(\frac{\widetilde{B}_1+\widetilde{B}_2+\widetilde{B}_3}{3}) = 1/2 < 1$, таким образом, существует единственное решение (3) [рис. 1].

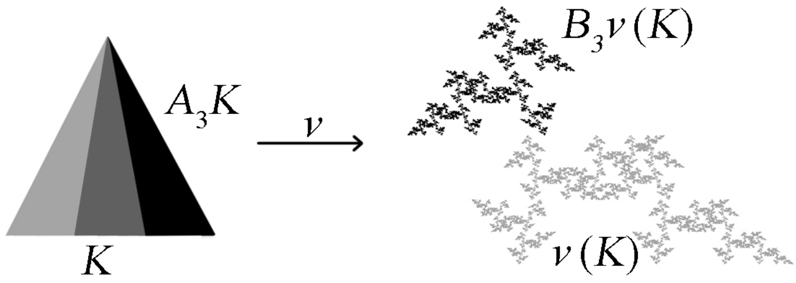

Рис.1

Если же в качестве B_1, B_2, B_3 взять операторы

$$B_1 = \frac{E}{2}\,x + e_1, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} x + e_1, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} x + e_2,$$

то $\rho_1(kr\widetilde{\mathcal{B}}) = 1$ и суммируемого решения уравнения (3) не существует.

Еще один пример: многогранник K и операторы самоподобия те же, что и выше. Рассмотрим $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,7 \\ 0,3 & 0,25 \end{pmatrix}$. Рассмотрим уравнение самоподобия (3) на функцию $v : K \to \mathbb{R}^2$ со следующим семейством $\mathcal{B}$: $B_1 = \widetilde{B}x$, $B_2 = \widetilde{B}x + e_1$, $B_3 = \widetilde{B}x + e_1 + e_2$. Легко видеть, что $\rho_p(rk\widetilde{\mathcal{B}}) = \rho_p(\widetilde{\mathcal{B}}) = \rho(\widetilde{B}) < 1$, тем самым, $v \in L_p(K)$ для любого $p > 0$, на рисунке 2 приведена приближенная область значения v.

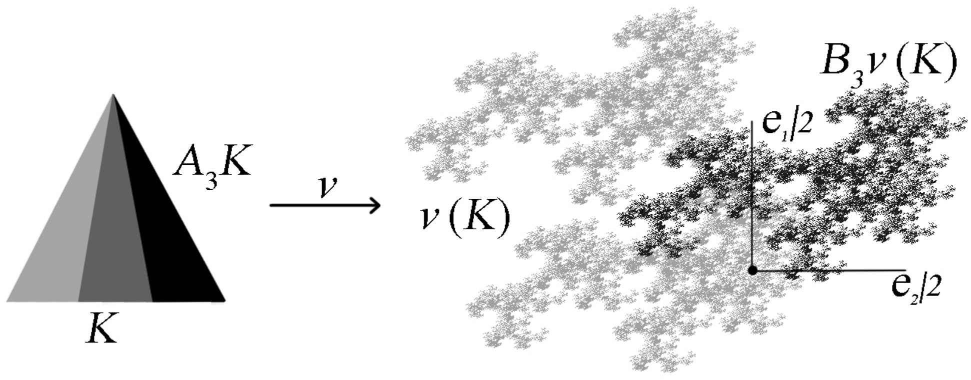

Рис.2

Замечание 3. Численное нахождение решений уравнения самоподобия может быть осуществлено итерациями оператора $\mathbf{B}$, примененного к произвольной начальной функции $v_0 \in L_p$. В силу теоремы 4, если L_p-решение существует, то $\rho_p = \rho_p(kr\widetilde{\mathcal{B}}) < 1$. Рассуждениями, аналогичными тем, которые приведены в работе [19, теорема 3] нетрудно показать, что для любого m имеет место оценка на норму степени оператора самоподобия:

$$\|\widetilde{\mathbf{B}}^m\|_p \leqslant c(\rho_p)^k k^s$$

где c и s – некоторые константы и $\rho_p = \rho_p(kr\widetilde{\mathcal{B}})$. Предположим, φ – решение (3), f – произвольная суммируемая функция из K в $\mathbb{R}^d$. Тогда

$$\|\mathbf{B}^k(f) - \varphi\|_p = \|\mathbf{B}^k(f - \varphi)\|_p \leqslant c(\rho_p)^k k^s$$

В силу $\rho_p < 1$, имеем $\mathbf{B}^k f \to \varphi$ при $k \to \infty$ с экспоненциальной скоростью.

VI. Сжимаемые симплексы и стохастические матрицы.

Применяя предложение 1 к случаю, когда многогранник является симплексом, можно получить ряд результатов о произведениях стохастических матриц, которые могут быть применены к исследованию масштабирующих уравнений, неоднородных Марковских процессов и т.д.

Если дано семейство аффинных операторов $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$, переводящее данный симплекс в себя, т.е. $B_i X \subset X$, то его можно интерпретировать как ограничение линейных операторов, заданных стохастическими матрицами на гиперплоскость $L = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \sum x_j = 1\}$. Мы рассматриваем матрицы стохастические по столбцам, т.е. матрицы с неотрицательными элементами с суммой элементов в каждом столбце равной единице. Если $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ – произвольное семейство стохастических матриц, то соответствующие аффинные операторы $B_i = B_i|_L$, действующие в L, переводят в себя единичный симплекс $\Delta = \mathbb{R}^{d+1}_+ \cap L$. Обратно: любое семейство аффинных операторов в $\mathbb{R}^d$, сохраняющих некоторый симплекс Δ, может быть задано семейством стохастических $(d+1) \times (d+1)$ матриц. Действительно, представим пространство $\mathbb{R}^d$, как аффинную плоскость $L \subset \mathbb{R}^{d+1}$, возьмем произвольную точку $O \notin L$ и базис пространства $\mathbb{R}^{d+1}$, составленный из векторов, соединяющих O с вершинами симплекса Δ. Для каждого i определим линейный оператор B_i, ограничение которого на L совпадает с A_i. В указанном базисе, матрицы всех операторов B_i стохастические. Таким образом, задачи самоаффинных дробящихся, или сжимаемых симплексах могут быть сформулированы в терминах стохастических матриц. Кроме того, результаты, полученные нами для дробящихся и сжимаемых многогранников, могут быть применены (для случая симплекса) для стохастических матриц. Первая задача, которая будет исследована, относится к правой сходимости последовательности стохастических матриц.

Пусть дано семейство $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ стохастических матриц. Оно называется *сходящимся справа*, если для любой последовательности $\{A_{i_t}\}$ матриц данного семейства предельная матрица $\lim\limits_{n\to\infty} A_{i_1} \ldots A_{i_n}$ существует и имеет одинаковые столбцы. Это означает, что для любого неотрицательного вектора $x \in L$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_{i_1} \ldots A_{i_n} x$ существует и один и тот же для всех векторов. Свойство правой сходимости семейств матриц широко изучалось в литературе в задачах о неоднородных марковских процессах, масштабирующих уравнений, уточняющих алгоритмах и т.д. (см. библиографию в [32]) Данное свойство тесно связано с понятием перемешивающих (scrambling) матриц. Стохастическая матрица называется *перемешивающей*, если носители любых двух ее столбцов пересекаются. Известно, что семейство матриц обладает свойством правой сходимости тогда, и только тогда, когда существует m такое, что в семействе $\mathcal{A}^m = \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_m} \mid i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, k\}\}$ все матрицы – перемешивающие [2]. Однако, проверка существования такого числа m достаточно сложна. Показатель m даже в случае одной матрицы оценивается снизу как $d^2 - 2d + 2$ и эта оценка не улучшается [33, гл. 8.5]. Поэтому, например, для семейства из двух 10×10 матриц проверка правой сходимости может потребовать перебора 2^{82} матричных произведений. Для произвольного семейства матриц константа m оценивается сверху константой 2^{d^2}, растущей с экспоненциальной скоростью. В настоящее время, насколько нам известно, неясно, существует ли полиномиальный алгоритм проверки семейства матриц на правую сходимость (скорее всего, ответ отрицательный, данная задача исследовалась в [2]). Правая сходимость семейства матриц равносильна тому, что совместный спектральный радиус ρ_∞ матриц, ограниченных на L, меньше 1. Мы введем в рассмотрение более слабое свойство правой сходимости с вероятностью 1:

Определение 2. Семейство $\mathcal{A}$ обладает свойством правой сходимости с вероятностью 1, если почти для любой последовательности $\{A_{i_t}\}$ предельная матрица $\lim\limits_{n\to\infty} A_{i_1} \ldots A_{i_n}$ существует и имеет одинаковые столбцы.

Одними из первых результатов по исследованию сходимости матричных произведений являются работы Фюрстенберга [34, 35]. В частности, показывалось, что произведение матриц со спектральным радиусом не превышающим 1 сходится с вероятностью 1 к матрица ранга 1, если эти матрицы не имеют общего инвариантного семейства подпространств. Однако, критерии, полученные в настоящей работе не являются следствиями работ Фюрстенберга.

Мы покажем, что правая сходимость с вероятностью 1 может быть проверена эффективным алгоритмом за полиномиальное время. Кроме того, она имеет естественные приложения к фрактальным кривым, масштабирующим уравнениям и т.д. В терминах неоднородных марковских процессов, данное свойство означает, что неоднородный процесс Маркова с распределениями вероятностей, заданным матрицами семейства $\mathcal{A}$, сходится с вероятностью 1.

Определение 3. *Нижним спектральным радиусом* семейства матриц $\mathcal{A}$ называется величина

$$\check{\rho} = \check{\rho}(\mathcal{A}) = \lim_{m\to\infty} \min_{A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}} \|A_{i_1} \ldots A_{i_m}\|^{1/m}.$$

В терминах спектральных характеристик, свойство сходимости с вероятностью 1 означает, что нижний спектральный радиус $\check{\rho}$ данного семейства меньше 1.

Применяя предложение 1 к случаю, когда X – симплекс, получаем критерий на выполнение неравенства $\rho_p(A_1|_L, \ldots, A_k|_L) < 1$:

Следствие 2. *Для семейства $\mathcal{A}$ стохастических матриц следующие условия равносильны:*

1) *Семейство $\{A_1|_L, \ldots, A_k|_L\}$ сжимаемо на Δ.*

2) *$\rho_p(A_1|_L, \ldots, A_k|L) < 1$ для любого $p \in [1, +\infty)$;*

3) *семейство $\mathcal{A}$ обладает свойством правой сходимости с вероятностью 1;*

4) *существует произведение матриц данного семейства, для которого 1 является простым собственным значением, а все остальные собственные значения по модулю меньше 1;*

5) *$\check{\rho}_p(A_1|_L, \ldots, A_k|L) < 1$.*

Определение 4. *Носителем* вектора $x \in \mathbb{R}^d_+$ называется множество номеров его положительных элементов.

Таким образом, носитель – это конечное множество $\{i \mid x_i > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$.

Следующая теорема дает простой критерий проверки свойств 1)-5) для произвольного семейства стохастических матриц.

Теорема 5. *Для семейства стохастических матриц $A_1, \ldots, A_k$ свойства 1)-5) выполнены тогда, и только тогда, когда для любых двух индексов $i, j \leqslant d$, $i \neq j$, существует произведение Π этих матриц, у которого носители столбцов i и j пересекаются.*

Далее, в термине "правая сходимость", слово "правая"будем опускать. Таким образом, для свойства сходимости с вероятностью 1, нужно, чтобы для любых двух столбцов существовало *хотя бы одно* матричное произведение, у которого эти столбцы имеют пересекающиеся носители. В отличии от свойства "обычной"сходимости, где требуется более сильное условие: *у всех произведений* некоторой длины m носители любых двух столбцов пересекаются.

Доказательство теоремы 5. Достаточность. Предположим, для любых двух индексов $i, j \leqslant d$, $i \neq j$, существует произведение этих матриц Π_{ij}, у которого носители столбцов i и j пересекаются. Тогда $\|\Pi_{ij} e_i - \Pi_{ij} e_j\|_1 < \|e_i - e_j\| = 2$. Докажем, что существует произведение матриц P со свойством $\|P e_{ij}\|_1 < 1$ для всех пар (i, j), где $e_{ij} = \frac{1}{2}(e_i - e_j)$. Положим $P_1 = \Pi_{12}$, $I_1 = (1, 2)$, применяем индукцию: если существует произведение исходных матриц P_m, для которого $\|P_m e_{ij}\|_1 < 1$ при всех $(i, j) \in I_m$, где I_m – некоторое множество пар индексов, то рассмотрим произвольную пару $(a, b) \notin I_m$. Пусть в матрице P_m элементы $(P_m)_{aq} > 0, (P_m)_{br} > 0$ и $q \neq r$. Если такой пары несовпадающих индексов q, r не существует, то, очевидно, $P_m e_{ab} < 1$, делаем шаг индукции, рассматривая $P_{m+1} = P_m, I_{m+1} = I_m \cup \{(a, b)\}$. Предположим, такая пара индексов нашлась. Так как $\|P_m\|_1 = \|\Pi_{qr}\| = 1$, то для матрицы $P_{m+1} = \Pi_{qr} P_m$ имеем $\|P_{m+1}\|_1 < 1$ при всех $(i, j) \in I_{m+1} = I_m \cup \{(a, b)\}$. Мы построили матрицу P. Пересечение единичного шара $\{x \in \mathbb{R}^d \mid |x|_1 \leqslant 1\}$ с пространством L является выпуклой оболочкой точек e_{ij}, следовательно, $\|P|_L\|_1 < 1$ и, в силу следствия 2, семейство матриц $A_1, \ldots, A_k$ обладает свойством правой сходимости с вероятностью 1.

Необходимость. Если нашлась пара индексов t_1, t_2, для которых не существует искомого матричного произведения, то для любого матричного произведения A имеем $\|Ae_{t_1} - Ae_{t_2}\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |(e_i, Ae_{t_1}) - (e_i, Ae_{t_2})| = 2$ в силу того, что матрица A – стохастическая. Таким образом, симплекс Δ – не сжимаемый. $\square$

В статье [36] доказывалось утверждение, аналогичное теореме 5: в предположении, что семейство матриц $A_1, \ldots, A_k$ неприводимо, условия на пары индексов из теоремы 5, являются необходимыми и достаточными условиями на то, что существует положительное произведение матриц $A_1, \ldots, A_k$. Следует отметить, что доказательства обоих утверждений очень похожи.

Теорема 5 позволяет построить эффективный полиномиальный алгоритм проверки конечного семейства матриц на сходимость с вероятностью 1. В силу теоремы 5, для этого достаточно проверить условие, что для любых двух столбцов найдется произведение матриц, у которого эти столбцы имеют пересекающиеся носители.

Рассмотрим ориентированный граф G размера d^2 с вершинами в виде пар индексов $(i_1, i_2), i_l = 1, \ldots, k$. Из (i_1, i_2) идет ребро в (j_1, j_2), если существует матрица $A_{(i_1,i_2)\to(j_1,j_2)}$ из набора $\{A_1, \ldots, A_k\}$, для которой одновременно выполнено: $(A_{(i_1,i_2)\to(j_1,j_2)})_{j_1 i_1} > 0, (A_{(i_1,i_2)\to(j_1,j_2)})_{j_2 i_2} > 0$. Докажем нетрудную лемму, которая понадобится при построении алгоритма.

Лемма 5. *Если для некоторого матричного произведения $A = A_{k_1} \dots A_{k_T}$, одновременно выполнено: $(A)_{i_1 j_1} > 0, (A)_{i_2 j_2} > 0$, то в графе G существует путь из (i_1, i_2) в (j_1, j_2).*

Доказательство. Индукция по длине произведения T. Для $T = 1$ – очевидно из определения. Переход. Рассмотрим произведение $A_{k_1}(A_{k_2} \dots A_{k_T}) = A_{k_1}\hat{A}$. В силу $(A_{i_1}\hat{A})_{i_1 j_1} > 0, (A_{k_1}\hat{A})_{i_2 j_2} > 0$, существует пара индексов h_1, h_2, такая, что $(\hat{A})_{i_1 h_1} > 0, (\hat{A})_{i_2 h_2} > 0, (A_{k_1})_{h_1 j_1} > 0, (A_{k_1})_{h_1 j_1} > 0$. Таким образом, существует ребро из (h_1, h_2) в (j_1, j_2) и по предположению индукции, существует путь из (i_1, i_2) в (h_1, h_2). $\square$

Предложение 2. *Следующие условия равносильны:*

- *для любых двух индексов $i, j \leqslant d$ существует произведение Π исходных матриц, такое, что при некотором t, $(\Pi)_{ti} > 0$ и $(\Pi)_{tj} > 0$;*
- *для любой вершины (i, j) в графе G существует ориентированный путь на диагональ, т.е. в вершину вида (t, t).*

Доказательство. Из второго первое. Непосредственно проверяется, что если существуют ребра из (i_1, i_2) в (j_1, j_2) и из (j_1, j_2) в (h_1, h_2) то для матрицы $A = A_{(j_1,j_2)\to(h_1,h_2)} A_{(i_1,i_2)\to(j_1,j_2)}$ выполнено: $(A)_{i_1 h_1} > 0, (A)_{i_2 h_2} > 0$. Рассмотрим произвольную пару индексов t_0, s_0. Существует путь из (t_0, s_0) в некоторую вершину (t, t). Пусть $(t_l, s_l), l = 1, \dots, T$ – вершины в этом пути. В силу замечания, $A_{(t_T,s_T)\to(t,t)} \dots A_{(t_l,s_l)\to(t_{l+1},s_{l+1})} \dots A_{(t_0,s_0)\to(t_1,s_1)}$ – искомое произведение для пары индексов t_0, s_0. Второе из первого немедленно следует из леммы 5. $\square$

Алгоритм проверки свойств 1)-5). Рассмотрим подграф $G' \subset G$. На первом шаге G' – множество всех диагональных вершин. Достаточно проверить, что из любой вершины G существует путь в G'. Обратим все ребра (т.е. рассматриваем матрицы $A_1^T, \dots, A_k^T$ и граф G построенный, как описано раньше, но с помощью этих матриц). Рассмотрим k нулевых матриц $M_1, \dots, M_k$ размера $d \times (d + 1)$. В элемент $(M_j)_{i1}$ запишем количество единиц в i-ом столбце матрицы A_j^T, а все последующие $(M_j)_{i1}$ элементов будут номерами строк, в которых стоят не нулевые элементы. Будем добавлять вершины к G' и производить поиск в глубину. Над каждой вершиной g из G' проведем следующую операцию: рассматриваем все ребра, выходящие из нее, они ведут в вершины $f_1 \dots, f_l$. Если $f_i \in G'$, ничего не делаем, если $f_i \notin G'$, то отмечаем f как помеченную, добавляем в G', повторяем эту процедуру для вершины f и т.д. Сложность вышеописанной операции, примененной к одной вершине, линейна по количеству ребер, выходящих из нее (за счет матриц $M_1, \dots, M_k$, нахождение ребер, ведущих из g линейно по их количеству и числу k). Присоединим f к множеству G', повторим описанную операцию. Если после завершения алгоритма $G' = G$, то имеет место сильная левая сходимость. Алгоритм затрачивает не более $2kd^2$ (составление матриц $M_1, \dots, M_k$) + kd^4 (поиск в глубину в графе G) операций. Алгоритм имеет сложность $kd^4(1 + \bar{o}(kd^4))$

VII. Самоподобные функции Мичелли-Праутша.

Мичелли и Праутш в [2] исследовали следующее функциональное уравнение

$$v(t) = B_m v(2t - m + 1), \ t \in \left[\frac{m-1}{2}, \frac{m}{2}\right], \ m = 1, 2 \tag{5}$$

где B_1, B_2 – произвольные стохастические $n \times n$ матрицы. Это было одно из первых уравнений самоподобия, рассматриваемых в литературе. Оно действительно является частным случаем уравнения (3) на аффинной плоскости L при $k = 2, \ n = 1, \ K = [0, 1]$. В работе [2] был получен критерий существования непрерывного решения. Было показано, что существует непрерывное решение $v(t)$ тогда и только тогда, когда $B_1 v_2 = B_2 v_1$, где $v_i \in L$ – неподвижная точка оператора B_i, и пара матриц B_1, B_2 обладает свойством правой сходимости. В работе отмечалось, что проверка этого условия для данной пары стохастических матриц сложна (см. обсуждение этого вопроса в начале § VI). Таким образом, определение, будет ли решение уравнения (5) непрерывным, является весьма нетривиальной задачей, которая, по-видимому, не имеет полиномиального алгоритма распознавания. С другой стороны, теорема 4 и алгоритм из предыдущего параграфа дает возможность легко проверять наличие L_p решения уравнения (5) для произвольных $p \in [1, +\infty)$. В самом деле, при дополнительном предположении, что матрицы B_i не имеют общих аффинных подпространств, лежащих в L, принадлежность решения $v(t)$ пространству L_p равносильна тому, что p-радиус матриц на пространстве L меньше единицы (теорема 4). В силу теоремы 5, для любого p это условие проверяется с помощью нашего алгоритма за полиномиальное время. Мы сформулируем этот результат сразу в общем случае для уравнений самоподобия функций многих переменных.

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ – семейство стохастических матриц, не имеющих общих собственных аффинных подпространств на гиперплоскости L, K – самоаффинный дробящийся многогранник, разбивающийся на k частей одинакового объема, аффинными операторами A_j. Тогда соответствующее уравнение самоподобия*

$$v(t) = B_m v(A_m^{-1}(t)),\ t \in A_m K,\ m = 1, \ldots, k \tag{6}$$

имеет L_p-решение в том, и только том случае, когда матрицы удовлетворяют одному из условий 1)-5) в следствии 2.

Для доказательства заметим, что если объемы всех частей разбиения $A_i K,\ i = 1, \ldots, k$ одинаковые, то семейство $rk\mathcal{B} = \mathcal{B}$ состоит из стохастических матриц, следовательно, по теореме 5, $\rho_p < 1$ и в силу теоремы 4, уравнение имеет L_p-решение.

Например, если $K = [0,1]^n$ – единичный куб в $\mathbb{R}^n$ с операторами A_j двоичного сжатия относительно его вершин, то уравнение (6) примет вид: $v(t) = \widetilde{B}_j v(2t - w_j)$, где w_j – ближайшая к t вершина куба.

Таким образом, наличие решения в пространстве L_p для уравнения самоподобия со стохастическими матрицами, в частности, для уравнения Митчелли-Праутча может быть проверено за полиномиальное время (см § VI).

VIII.Приложение к уточняющим алгоритмам (subdivision-algorithms).

Уточняющие (subdivision) алгоритмы применяются для восстановления функций по их значениям на целочисленной решетке. Эти алгоритмы были разработаны в статьях Дибука, Деларье, Дин, Левина и т.д. [9, 10, 14] и активно изучаются в настоящее время. Идея алгоритма состоит в следующем: дана целочисленная $d \times d$ матрица M, все собственные значения которой по модулю больше единицы; для любой ограниченной функции $x:\ \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ положим $(Sx)_\alpha = \sum\limits_{j \in \mathbb{Z}^d} c_{\ Mj-\alpha} x_j$, где $\{c_i\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ – данная числовая последовательность. Таким образом, S – линейный оператор в пространстве $l_\infty(\mathbb{Z}^d)$, называемый уточняющим оператором. Уточняющий алгоритм сходится в $C(\mathbb{R}^d)$, если для любой финитной непрерывной функции f имеем

$$\|f(M^{-r}\alpha) - S^r f(\alpha)\|_{C(\mathbb{Z}^d)} \to 0,\ r \to \infty$$

Сходимость уточняющих алгоритмов в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$ была определена и изучалась в [12, 13]. Вопрос о сходимости уточняющего алгоритма для данной последовательности c_i достаточно сложен и сводится к оценке совместного спектрального радиуса (p-радиуса для сходимости в L_p) семейства линейных операторов, являющихся ограничениями специальных $N \times N$ матриц $T_1, \ldots, T_k$ на пространство $L := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum x_i = 1\}$ (способ получения этих матриц см. например, в [5, 15]). Если все коэффициенты алгоритма c_i – неотрицательные, то все матрицы T_i являются стохастическими. Алгоритм сходится в пространстве L_p тогда, и только тогда, когда $\rho_p(T_1|_L, \ldots, T_k|_L) < 1$ [12, 15]. Таким образом, теорема 5 дает возможность быстрой проверки уточняющего алгоритма на L_p-сходимость. Применяя алгоритм из параграфа § VI, мы получаем простой алгоритм с числом операций, не превосходящим $2kd^2 + kd^4$. Отметим, что задача о L_p-сходимости уточняющего алгоритма с неотрицательными коэффициентами изучалась в работах [37, 38], где были разработаны алгоритмы проверки L_p-сходимости, основанные на других идеях.

IX.Самоаффинные множества в $\mathbb{R}^2$.

В заключительном параграфе мы сделаем обзор о структуре самоаффинных тел в $\mathbb{R}^2$. В теореме 1, §III было показано, что если выпуклое тело $X \subset \mathbb{R}^d$ допускает аффинное дробящееся разбиение, то это многогранник. Причем, для не дробящихся разбиений это может не выполняться (например, для цилиндра). Оказывается, однако, что при $d = 2$ это условие излишне, как показывает следующая теорема, доказанная в 2010 г. Х.Рихтером:

Теорема B [24]. *Любой самоаффинный выпуклый компакт $X \subset \mathbb{R}^2$ является многоугольником с числом вершин не превосходящим 5.*

Эта теоремы верна только для размерности $d = 2$. Отметим, что если в определении самоаффинных множеств допустить не только аффинные, но и проективные преобразования, то теорема B в этом случае не будет верна.

Пример 7. Рассмотрим дугу параболы, ограниченную двумя точками – a и b и точку c на ней. Парабола является частным случаем кривой де Рама, поэтому существуют аффинные преобразования

A_1, A_2, переводящие дугу ab в дуги ac и cb соответственно. Кроме того, эти преобразования переведут множество K_{ab}, ограниченное дугой ab и лучами, выходящими из a и b, параллельными направлению оси параболы в определенные аналогично множества K_{ac}, K_{cb}. Теперь дробно-линейным преобразованием P переведем K_{ab} в ограниченное множество. Тогда для выпуклого компакта $P(K_{ab})$ выполнено: $P(K_{ab}) = P \circ A_1(K_{ac}) \cup P \circ A_2(K_{cb})$. Пример показывает и существенность условия ограниченности выпуклого множества.

Простейшими примерами самоаффинных многоугольников являются треугольник и квадрат. Любая трапеция самоаффинна с разбиением на две трапеции отрезком, соединяющим середины ее оснований. В работе [22] был построен пример самоаффинного пятиугольника, кроме того, построены самоаффинные четырехугольники, не имеющие параллельных сторон.

X.Приложение.

Доказательство теоремы 2. Достаточность. Предположим, набор G с данными условиями существует. Рассмотрим пару граней $\gamma_1, \gamma_2 \in G$. Тогда для любых $\sigma_1, \dots, \sigma_t$ имеем $\mathrm{diam}(A_{\sigma_1} \dots A_{\sigma_t} X) \geqslant \mathrm{dist}(\gamma_1, \gamma_2) > 0$, тем самым, диаметр любого образа X больше некоторого фиксированного ε, что и требовалось.

Необходимость. Если G – некоторый набор граней, тем же символом G будем обозначать множество $\{\cup g: \ g \in G\}$. Предположим, X – не сжимаемый. В соответствие каждому образу многогранника (не обязательно полученного после первой итерации применения операторов) сопоставим набор граней исходного многогранника X, образы которых лежат на границе X.

По этим наборам введем лексиграфический порядок на многогранниках-образах X. Формально будем говорить, что многогранник X_1, являющийся образом X, больше многогранника X_2, если для некоторого натурального l и для любого $i > l$, число граней размерности i первого равно числу граней размерности i второго и число граней размерности l первого больше числа граней размерности l второго. Число наборов граней конечно, поэтому существует многогранник, не превосходящий всех остальных. Пусть это многогранник $\hat{A}X$, где $\hat{A}$ – некоторая композиция исходных операторов. Пусть набор граней G, являющийся множеством тех граней X, образы которых под действием $\hat{A}$, лежат на границе X, состоит из двух множеств граней: $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{h_1}\}, \Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_{h_2}\}$, таких, что только грани $\hat{A}\Gamma$ лежат в гранях многогранника X тех же размерностей.

Лемма 6. *Любая грань δ_j лежит в некоторой грани γ_i.*

От противного. Пусть существует максимальный поднабор $\{\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_k}, 1 \leqslant k \leqslant h_2\}$, любая грань которого не лежит на границе какой-то грани из Γ. Пусть размерность грани δ_{i_1} максимальна в этом наборе. Из минимальности $\hat{A}X$, получаем $\hat{A}^2\delta_{i_1} \subset \partial(X \cap \hat{A}X) = \hat{A}G$. Пусть $\hat{A}^2\delta_{i_1}$ лежит в некоторой грани $\hat{A}\beta$. Если $\beta \in \Delta$, то из максимальности размерности δ_{i_1}, получаем, что $\hat{A}\delta_{i_1}$ лежит в грани той же размерности, противоречие. Значит, $\beta = \gamma_t$ для некоторого t. Рассмотрим множество Γ_t всех граней из Γ, той же размерности, что и γ_t. Тогда, в силу минимальности $\hat{A}X$, $\hat{A}^2\Gamma_t \subset \hat{A}\Gamma$, причем, по построению множества Γ, образ любой грани лежит в грани той же размерности и в каждой грани из $\hat{A}\Gamma_t$ лежит ровно один образ. Следовательно, помимо $\hat{A}^2\delta_{i_1}$, в $\hat{A}\beta$ лежит еще какая-то грань многогранника $\hat{A}^2X$ размерности той же, что и β, противоречие. Лемма доказана.

Отметим, что из леммы 6, $\Delta \subset \partial\Gamma = \{\partial\gamma_i, \ i = 1, \dots, h_1\}$. Среди всех многогранников вида $\hat{A}\widetilde{A}X$, где $\widetilde{A}$ – композиция исходных операторов, выберем многогранник с минимальным набором граней, лежащих в множестве Γ, множество Γ определяется уже в смысле оператора $\hat{A}\widetilde{A}$. Пусть это многогранник AX. Пусть ему отвечает набор граней $G = \Gamma \cup \Delta$, образы под действием A которых лежат на границе X.

Лемма 7. *Для любого i, $A_i\Gamma \subset \Gamma$.*

Рассмотрим грани набора Γ одинаковой размерности k: $\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_m}$. В силу минимальности AX, все многогранники $A\widetilde{A}X$ содержат грани размерности k, лежащие в каждой из граней $A\gamma_{i_1}, \dots, A\gamma_{i_m}$, $\widetilde{A}$ – произвольная композиция операторов. Следовательно, любой многогранник разбиения содержит грань размерности k в каждой из граней $\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_m}$ исходного многогранника. Из этого следует, что

$$\bigcup_{j=1}^{m} A\gamma_{i_j} \subset \bigcup_{j=1}^{m} \gamma_{i_j}, \bigcup_{j=1}^{m} AA_l\gamma_{i_j} \subset \bigcup_{j=1}^{m} \gamma_{i_j}$$

Последние включение следует из минимальности многогранников AA_lX. Таким образом:

$$\bigcup_{j=1}^{m} AA_l\gamma_{i_j} \subset \bigcup_{j=1}^{m} A\gamma_{i_j}$$

Значит, если Γ – набор граней, соответствующий многограннику AX, то под действием любого из операторов, каждая из граней набора переходит в одну из граней набора той же размерности. Лемма доказана.

Заметим, что $A\Delta \subset \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int}\gamma = \operatorname{int}\Gamma$. Действительно, иначе для некоторых граней из Δ, $A\delta_i \subset \delta_j$, рассмотрим такую грань δ_i максимальной размерности, она будет лежать в грани своей размерности, противоречие. Непосредственно проверяется, что если $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, то $\gamma_1 \cap \gamma_2 \in \Gamma$.

Лемма 8. *Построенные грани не пересекаются:* $\bigcap_\Gamma \gamma_i = \varnothing$.

От противного, пусть все грани из Γ пересекаются по грани γ_0. Отметим, что $\gamma_0 \in \Gamma$. Тогда имеет место строгое вложение: $AG \subset \operatorname{int}\Gamma$. Рассмотрим произвольную точку $p \in \gamma_0$. Пусть L – множество лучей, выходящих из p и пересекающих X еще в какой-то точке. Тогда

$$\sup_{l\in L} |l\cap AX|/|l\cap X| < 1$$

таким образом, норма A меньше 1 и $\operatorname{diam}(A^nX) \to 0$ при $n\to\infty$, противоречие. Лемма доказана.

Попутно доказано, что $|\Gamma| > 1$.

Лемма 9. *Существует подмножество* $\Gamma' \subset \Gamma$ *такое, что* $A_i(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma'}\gamma) \subset \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma'}\gamma$ *для любого* i *и* $|\Gamma'| > 1$.

Рассмотрим поднабор граней Γ', такой, что любая грань $\gamma\in\Gamma'$ не содержит другой грани меньшей размерности из Γ. Из леммы 7, очевидным образом, $A_i\Gamma' \subset \Gamma'$ для любого оператора разбиения A_i. Отметим, что Γ' не пусто: в этом наборе заведомо лежат грани из Γ минимальных размерностей. Предположим, существует единственный элемент $\gamma\in\Gamma'$, тогда любой элемент из Γ содержит γ, что противоречит лемме 8. Пусть $\gamma_1,\gamma_2 \in \Gamma'$. Как отмечалось ранее, $\gamma_1\cap\gamma_2 \in \Gamma$, значит, эти грани не пересекаются. Предложение доказано. Заметим, что из невырожденности операторов следует, что для любого A_i и $\gamma\in\Gamma'$, существует грань γ_i^{-1} такая, что $A_i\gamma_i^{-1} \subset \gamma$.
Тем самым, Γ' – искомый набор и часть 'только тогда' доказана. □

Доказательство леммы 4. Достаточно доказать утверждение для вещественнозначных функций. Не уменьшая общности, $\mu(K) = 1$.

Сначала докажем, предполагая, что функция f непрерывна. Пусть $c = \max_{x\in K}|f(x)| < \infty$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = (\frac{\varepsilon}{4c})^p$. Функция f равномерно непрерывна на компакте, следовательно, существует $r>0:\ |f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon/4$ при $|x_1-x_2|<r$. Пусть $\widetilde{K} = \bigcup\Delta_i:\ \operatorname{diam}\Delta_i > r$. Возьмем итерацию разбиения такую, что $\mu(\widetilde{K}) < \delta$. Тогда

$$\begin{aligned}\|f-s_m(f)\|_p \leqslant \left(\int_{K\setminus\widetilde{K}} |f-s_m(f)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\widetilde{K}} |f-s_m(f)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\ \leqslant \left(\int_K \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\widetilde{K}} (2c)^p\right)^{\frac{1}{p}} = (\mu(K))^{\frac{1}{p}}\frac{\varepsilon}{2} + \left(\mu(\widetilde{K})\right)^{\frac{1}{p}} 2c \leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

Пусть f – произвольная. Тогда существует непрерывная функция $\widetilde{f}:\ \|f-\widetilde{f}\|_p < \varepsilon$. Тогда по неравенству треугольника

$$\|f-s_m(f)\|_p \leqslant \|f-\widetilde{f}\|_p + \|\widetilde{f}-s_m(\widetilde{f})\|_p + \|s_m(\widetilde{f})-s_m(f)\|_p$$

Первые два слагаемых стремятся к нулю при $m\to\infty, \varepsilon\to 0$. Оценим разность $\|s_m(\widetilde{f})-s_m(f)\|_p$. Ограничивая функцию $\|s_m(\widetilde{f})-s_m(f)\|_p$ на каждый элемент Δ_i получаем

$$\|s_m(\widetilde{f})-s_m(f)\|_p \leqslant \|s_m(|\widetilde{f}-f|)\|_p$$

Пусть $h = |\widetilde{f}-f|$. Покажем, что $\|s_m(h)\|_p \leqslant \|h\|_p < \varepsilon$. Достаточно показать, что на каждом элементе разбиения Δ_i это неравенство выполнено. L_1-норма обоих функций совпадает, а при постоянной L_1-норме, минимум L_p-нормы достигается на постоянной функции. Тем самым, лемма доказана. □

Благодарности.

Автор горячо благодарен своему научному руководителю В.Ю.Протасову за постановки задач, постоянное внимание к работе, полезные обсуждения и помощь в подготовке текста. Автор благодарен М.Б.Скопенкову, М.Лацковичу, Х.Рихтеру за полезные обсуждения тем, связанных с двумерными самоаффинными многоугольниками. Автор благодарен В.А.Клепцыну за полезные обсуждения вопросов о сходимости произведений матриц и ссылки, данные им.

Список литературы

[1] M. Barnsley, *Fractals everywhere*, Boston, Academic Press, 1988.

[2] C.A.Micchelli, H.Prautzsch, *Uniform refinement of curves*, Linear Algebra and its Applications 114/115 (1989), 841–870.

[3] G. De Rham, *Sur une courbe plane*, J. Math. Pures Appl., 35 (1956), No 9, 25-–42.

[4] I. Daubechies and J. Lagarias, *Two-scale difference equations. II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals*, SIAM. J. Math. Anal., 23 (1992), No 4, 1031–1079

[5] D. Collela and C. Heil, *Characterization of scaling functions: continuous solutions*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 15 (1994), No 2, 496–518.

[6] L.Villemoes, *Wavelet analysis of refinement equations,* SIAM J. Math. Anal. 25 (1994), No 5, 1433–1460.

[7] V. Yu. Protasov, *Fractal curves and wavelets*, Izvestiya Math., 70 (2006), No 5, 123–162.

[8] И.Я.Новиков, В.Ю.Протасов, М.А.Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М. 2006.

[9] G. Deslauriers and S. Dubuc, *Symmetric iterative interpolation processes*, Constr. Approx., 5 (1989), No 1, 49–68.

[10] N. Dyn and D. Levin, *Interpolatory subdivision schemes for the generation of curves and surfaces*, Multivariate approximation and interpolation, (Duisburg,1989), Birkhäuser, Basel (1990), 91–106,

[11] Y. Wang, *Two-scale dilation equations and the mean spectral radius*, Random Comput. Dynam. 4 (1996), No 1, 49—72.

[12] R.Q. Jia, *Subdivision schemes in L_p spaces*, Adv. Comput. Math. 3 (1995), 309—341.

[13] K.-S. Lau and J. Wang, *Characterization of L_p-solutions for two-scale dilation equations*, SIAM. J. Math. Anal., 26 (1995), No 4, 1018–1046.

[14] G. A. Derfel, N.Dyn and D.Levin, *Generalized refinement equations and subdivision processes.* Journal of Approx.Theory, 80 (1995), 272–297.

[15] C. A. Cabrelli, C. Heil and U. M. Molter, *Self-similarity and multiwavelets in higher dimensions*, Memoirs Amer. Math. Soc., 170 (2004), No 807.

[16] V. Yu. Protasov, *The generalized spectral radius. A geometric approach*, Izvestiya Math., 61 (1997), No 5, 995–1030.

[17] M. Solomyak and E. Verbitsky, *On a spectral problem related to self-similar measures*, Bull. London Math. Society, 27 (1995), 242–248.

[18] B. M. Hambly, J. Kigami and T. Kumagai, *Multifractal formalisms for the local spectral and walk dimensions*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 132 (2002), No 3, 555–571 .

[19] V.Yu. Protasov, *Extremal L_p-norms of linear operators and self-similar functions*, Linear Algebra and its Applications, 428 (2008), 2339–2356.

[20] H.T. Croft, K.J. Falconer, R.K. Guy, *Unsolved problems in geometry*, Problem Books in Mathematics. Unsolved Problems in Intuitive Mathematics, II. Springer-Verlag, New York, (1991).

[21] J. Tolke, J.M. Wills (eds.), *Contributions to geometry. Proceedings of the Geometry- Symposium held in Siegen, June 28 to July 1, 1978*, Birkhauser Verlag, Basel, (1979).

[22] E. Hertel, C. Richter, *Self-afine convex polygons*, (to appear).

[23] D.-X. Zhou, *Self-Similar Lattice Tilings and Subdivision Schemes*, SIAM J. Math. Anal., 33 (2001), No 1, 1–15.

[24] C. Richter *Self-affine convex disc are polygons*, Beitrage Algebra Geom. (to appear).

[25] G.C.Rota and G.Strang, *A note on the joint spectral radius*, Kon. Nederl. Acad. Wet. Proc. Vol. 63 (1960), 379–381.

[26] M. A. Berger and Y. Wang, *Bounded semigroups of matrices*, Linear Algebra Appl., 166 (1992), 21–27.

[27] V. Blondel and J. Tsitsiklis, *Approximating the spectral radius of sets of matrices in the max-algebra is NP-hard*, IEEE Trans. Autom. Control, 45 (2000), No 9, 1762–1765.

[28] В. Ю. Протасов *Совместный спектральный радиус и инвариантные множества линейных операторов*, Фундамент. и прикл. матем, 2 (1996), No 1, 205–231.

[29] G. Gripenberg, *Computing the joint spectral radius*, Lin. Alg. Appl., 234 (1996), 43–60.

[30] В.Ю.Протасов, *О гладкости кривых де Рама*, Изв. РАН. Сер. матем., 68 (2004), No 3, 139-–180.

[31] И.А. Шейпак, *О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах* $L_p[0,1]$, Матем. заметки 81 (2007), No 6, 924—938.

[32] I. Daubechies, J.C. Lagarias, *Corrigendum/addendeum: Sets of matrices all infinite products of which converge*, Linear Algebra and its Applications, 327 (2001), 69–83.

[33] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, М.Наука, 1989.

[34] Furstenberg H., *Noncommuting random products*, Transactions of American Mathematical Society, 108 (1963), 377–428.

[35] Furstenberg H., Kesten H., *Products of random matrices*, Ann. Math. Stat., 31 (1960), 457–469.

[36] В.Ю.Протасов, *Полуруппы неотрицательных матриц*, УМН, 65 (2010), No 6.

[37] R.-Q. Jia, D.-X. Zhou, *Convergence of subdivision schemes associated with nonnegative masks*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 21 (1999), No 2, 418–430.

[38] V.Yu.Protasov, *Refinement equations with nonnegative coefficients*, J. Fourier Anal. Appl. 6 (2000), No 6, 55–77.