Ортогональные подмножества систем корней и метод орбит

М.В. Игнатьев

Содержание

§1. Введение . . . 2
§2. Максимальные унипотентные подгруппы групп Шевалле и метод орбит . . . 5
2.1. Группы Шевалле . . . 5
2.2. Максимальные унипотентные подгруппы . . . 6
2.3. Метод орбит для конечных групп . . . 7
2.4. Примеры коприсоединённых орбит . . . 10
§3. Орбиты, ассоциированные с ортогональными подмножествами систем корней: общие результаты . . . 12
3.1. Определения и основная теорема . . . 12
3.2. Системы корней с простыми связями . . . 16
3.3. Системы корней с кратными связями . . . 25
§4. Классические системы корней . . . 32
4.1. Поляризации для канонических форм . . . 32
4.2. Формула для размерности . . . 39
4.3. Размерности неприводимых представлений группы $U(q)$ . . . 44
Список литературы . . . 47

§1. Введение

Основным инструментом в теории представлений максимальных унипотентных подгрупп в группах Шевалле над конечными полями является созданный А.А. Кирилловым в 1962 г. *метод орбит.* Пусть Φ — приведённая система корней, p — простое число, достаточно большое по сравнению с рангом Φ (например, $p > \operatorname{rk}\Phi + |\Phi|$). Пусть $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{F}_q$ — поля из p и $q = p^r$, $r \geqslant 1$, элементов соответственно, $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}_p$. Пусть U (соответственно, $U(q)$) — максимальная унипотентная подгруппа в группе Шевалле с системой корней Φ над полем k (соответственно, над полем $\mathbb{F}_q$), отвечающая некоторому множеству положительных корней Φ^+; подробности см. в пунктах 2.1, 2.2.

Поскольку $U(q)$ — конечная группа, классическая задача теории представлений звучит так: описать все неприводимые конечномерные комплексные представления $U(q)$ с точностью до изоморфизма. В статье Д. Каждана [26] (см. также подробное изложение в [31, Chapter VII]) было показано, что метод орбит *действительно* позволяет решить сформулированную выше задачу в терминах орбит коприсоединённого представления в следующем смысле.

Обозначим через $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}(q)$ алгебры Ли групп U, $U(q)$ соответственно, а через $\mathfrak{u}^*, \mathfrak{u}^*(q)$ — сопряжённые к ним пространства над k, $\mathbb{F}_q$ соответственно. Каждая из групп естественно действует на своей алгебре Ли с помощью присоединённого представления; двойственное представление в сопряжённом пространстве называется коприсоединённым. Оказывается, имеется взаимно однозначное соответствие между множеством орбит $\mathfrak{u}^*(q)/U(q)$ и множеством классов изоморфных неприводимых комплексных представлений группы $U(q)$. Более того, целый ряд вопросов, связанных с представлениями $U(q)$, допускает естественную трактовку в терминах орбит, см. пункт 2.3.

Удобно одновременно рассматривать орбиты группы U в пространстве $\mathfrak{u}^*$, чтобы иногда переходить в "геометрическую" ситуацию; к тому же, эти орбиты тесно связаны с орбитами группы $U(q)$. Например, если через $\Omega \subset \mathfrak{u}^*$ и $\Omega(q) \subset \mathfrak{u}^*(q)$ обозначить орбиты одного и того же элемента $f \in \mathfrak{u}^*(q) \subset \mathfrak{u}^*$ относительно коприсоединённого представления групп U и $U(q)$ соответственно, то $|\Omega(q)| = q^{\dim\Omega}$, причём $\dim\Omega$ всегда будет чётным числом. При этом размерность неприводимого представления T группы $U(q)$, соответствующего орбите $\Omega(q)$, равна $\dim_{\mathbb{C}} T = q^{\dim\Omega/2} = \sqrt{|\Omega(q)|}$.

В самой первой работе по методу орбит [7] было получено описание всех орбит максимальной размерности (так называемых *регулярных* орбит) *унитреугольной* группы $U_n(\mathbb{R})$ — группы всех унипотентных треугольных матриц (над $\mathbb{R}$); оно остаётся верным и в нашей ситуации, когда характеристика основного поля достаточно велика. Орбиты предмаксимальной размерности этой группы (мы будем называть их *субрегулярными*) были полностью описаны А.Н. Пановым в работе [4]. В статьях К. Андре и А.М. Нето [15]–[20] развивается теория так называемых *базисных* характеров, или *суперхарактеров* группы $U(q)$ в случае классической системы корней Φ (См. также диссертацию Н. Яна [34].) В частности, из полученных там результатов вытекает описание регулярных орбит для C_n и *элементарных* орбит (орбит одного корневого ковектора) для всех классических систем корней; см. также [29] для случая B_n и D_n. Упомянем ещё работы И.М. Айзекса [24] и Дж. Сангрониза [30], в которых речь идёт о характерах подгрупп $U_n(\mathbb{F}_q)$ специального вида (так называемых algebra groups).

В пункте 2.4 показано, что практически все изученные к настоящему времени примеры укладываются в весьма общую схему. А именно, пусть D — произвольное *ортогональное* (то есть состоящее из попарно ортогональных корней) подмножество множества положительных корней Φ^+. Для произвольного корня $\alpha \in \Phi^+$ договоримся через e_α обозначать соответствующий корневой вектор в алгебре Ли, а через e_α^* — двойственный ему ковектор в сопряжённом пространстве. Выберем произвольное отображение $\xi\colon \beta \mapsto \xi_\beta$ из D в k^* для группы U (соответственно, в $\mathbb{F}_q^*$ для группы $U(q)$); пусть $f = f_{D,\xi}$ — элемент $\mathfrak{u}^*$ (соответственно, $\mathfrak{u}^*(q)$) вида

$$f = \sum\nolimits_{\beta \in D} \xi_\beta e_\beta^*.$$

Обозначим, наконец, через $\Omega \subset \mathfrak{u}^*$, $\Omega(q) \subset \mathfrak{u}^*(q)$ его орбиты относительно коприсоединённых представлений групп U, $U(q)$ соответственно.

Определение. Будем говорить, что орбита Ω (или $\Omega(q)$) *ассоциирована* с ортогональным подмножеством D (и отображением ξ).

Оказывается, что почти все упомянутые выше орбиты (и не только они) ассоциированы с теми или иными ортогональными подмножествами в системах корней. Изучение этого класса орбит и является одной из основных задач данной работы. Более точно, нас будет интересовать вопрос о *размерности* таких орбит: удаётся доказать, что она не зависит от выбора отображения ξ, и оценить её сверху (а для классических групп — получить точную формулу) в терминах группы Вейля системы корней Φ.

А именно, пусть $W = W(\Phi)$ — группа Вейля; рассмотрим в ней инволюцию (элемент второго порядка) $\sigma = \sigma_D$ вида

$$\sigma = \prod\nolimits_{\beta \in D} r_\beta,$$

где r_β – отражение, соответствующее корню β (порядок, в котором берутся отражения, не имеет значения, ибо они коммутируют ввиду ортогональности подмножества D). Обозначим через $l(\sigma)$ и $s(\sigma)$ длины этой инволюции в простых и произвольных отражениях соответственно. (Другими словами, $l(\sigma) = \#\{\alpha \in \Phi^+ \mid \sigma\alpha \in \Phi^-\}$ и $s(\sigma) = |D|$.)

Основной результат работы заключается в следующей теореме (см. теорему 3.3 для систем корней с простыми связями, теорему 4.13 для классических систем корней и пункт 3.3 для F_4 и G_2):

Теорема 1. *Размерность орбиты Ω не зависит от выбора отображения ξ и не превосходит числа $l(\sigma) - s(\sigma)$. Иначе говоря,*

$$\dim \Omega = l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta,$$

где $\vartheta \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ зависит только от подмножества D (но не от ξ). Более того, для классических систем корней ϑ задаётся формулой (20).

Отметим, в частности, что $\vartheta = 0$ всегда, если $\Phi = A_n$ или $\Phi = C_n$ (для A_n этот результат был ранее получен Пановым [10, теорема 1.2]). С другой стороны, есть примеры, когда получается строгое неравенство, то есть $\vartheta \neq 0$ (см. пример 4.19). Подчеркнём, что автоматически мы получаем информацию о количестве точек на орбите $\Omega(q)$ (оно равно $|\Omega(q)| = q^{\dim \Omega}$) и о размерности соответствующего неприводимого комплексного представления T группы $U(q)$ (она равна $\dim_{\mathbb{C}} T = q^{\dim \Omega/2} = \sqrt{|\Omega(q)|}$).

Использую эту связь между размерностями орбит и представлений, мы получаем ответ на вопрос, какую размерность в принципе может иметь неприводимо представление группы $U(q)$ в случае классической системы корней. Точнее говоря, обозначим через 2μ максимально возможную размерность коприсоединённой орбиты группы U; для классических группы она задаётся формулой (23). Вот точная формулировка результата (см. следствие 4.21):

Следствие. *Пусть система корней* Φ *относится к типу* B_n, C_n *или* D_n. *Группа* $U(q)$ *обладает неприводимым представлением размерности* N *тогда и только тогда, когда* $N = q^l$, *где* $0 \leqslant l \leqslant \mu$.
(Для A_n это доказано в [25] и легко выводится из результатов [10].)

В явной конструкции неприводимого представления, соответствующего данной коприсоединённой орбите, ключевую роль играют так называемые *поляризации* (см. пункт 2.3). Напомним, что поляризацией линейной формы $\lambda \in \mathfrak{u}^*$ называется подалгебра $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{u}$, являющаяся одновременно λ-*изотропным* подпространством (то есть удовлетворяющая условию $\lambda|_{[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]} \equiv 0$) и максимальная по включению среди всех таких подпространств. Классическая конструкция М. Вернь показывает, что поляризации всегда существуют ([33], см. также [3, §1.12]). Оказывается, представление $U(q)$, соответствующее орбите $\Omega(q)$, индуцировано с некоторого одномерного представления подгруппы $\exp \mathfrak{p} \subset U(q)$, где $\exp\colon \mathfrak{u}(q) \to U(q)$ — экспоненциальное отображение, а $\mathfrak{p}$ — любая поляризация для любой точки на $\Omega(q)$. Для классических систем корней мы предъявляем процедуру, позволяющую по ортогональному подмножеству $D \subset \Phi^+$ построить некое подпространство $\mathfrak{p}$, которое, как выясняется, будет поляризацией для *канонической формы* (то есть для элемента $f = f_{D,\xi}$) на орбите Ω (или на $\Omega(q)$), ассоциированной с ортогональным подмножеством D (см. теорему 4.5):

Теорема 2. *Пусть система корней* Φ *относится к типу* B_n, C_n *или* D_n. *Подпространство* $\mathfrak{p}$ *в алгебре Ли, построенное с помощью правила* (15), *является поляризацией для линейной формы* f.

Это прямое обобщение конструкции для A_n, предложенной Пановым в [10, теорема 1.1]. Вообще, само понятие орбиты, ассоциированной с ортогональным подмножеством, обобщает на случай произвольной системы корней введённое в [10] понятие орбиты, ассоциированной с инволюцией, для случая A_n. Отметим, что в этом случае Пановым получены, кроме всего прочего, точные уравнения, описывающие произвольную орбиту такого вида как аффинное многообразие [10, теорема 1.4].

Опишем структуру работы. Второй параграф носит вводный характер; в нём собраны необходимые определения и обозначения, а также некоторые общеизвестные факты, которые используются в дальнейшем. Мы кратко напоминаем ряд определений, связанных с системами корней, группами Шевалле (пункт 2.1) и их максимальными унипотентными подгруппами (пункт 2.2), а также очень сжато излагаем метод орбит для унипотентных групп над конечными полями. В пункте 2.3 даётся определение коприсоединённого представления (см. формулу (4)) и формулируется теорема, выражающая суть метода орбит (теорема 2.2). В пункте 2.4 мы приводим ряд важных примеров коприсоединённых орбит и показываем, что все они ассоциированы с некоторыми ортогональными подмножествами в системах корней.

Следующие параграфы посвящены изучению коприсоединённых орбит, ассоциированных с ортогональными подмножествами систем корней. В параграфе 3 мы доказываем несколько фактов о таких орбитах в общем случае, а в параграфе 4 уточняем их для классических систем корней. Подробнее, в пункте 3.1 даётся точное определение орбиты, ассоциированной с произвольным ортогональным подмножеством $D \subset \Phi^+$, и формулируется основная теорема о размерности таких орбит (теорема 3.3). Там же показано, что при доказательстве этой теоремы можно ограничиться неприводимыми системами корней (лемма 3.5) и ортогональными подмножествами, удовлетворяющими некоторому дополнительному условию (лемма 3.7).

В следующем пункте 3.2 мы доказываем основную теорему для неприводимых систем корней с простыми связями (то есть для A_n, D_n, E_6, E_7 и E_8). Утверждение теоремы непосредственно вытекает из предложений 3.14 и 3.15. Рассуждения основываются на индукции по рангу системы корней Φ. В пункте 3.3 мы проверяем, что основная теорема верна для систем корней типа F_4 и G_2. (Случай G_2 почти тривиален, а в случае F_4 часть ортогональных подмножеств рассматриваются единообразно, а оставшиеся подмножества приходится изучать по отдельности.)

Таким образом, нерассмотренными остаются системы корней типа B_n и C_n, но их естественно изучать в рамках общей схемы для классических систем корней, к чему мы и переходим в параграфе 4. Пункт 4.1 посвящён построению поляризации $\mathfrak{p}$ для канонической формы f на орбите Ω, ассоциированной с каким-то ортогональным подмножеством. Конструкция подпространства $\mathfrak{p}$ содержится в (15). Теорема 4.5 утверждает, что $\mathfrak{p}$ является поляризацией для f; её доказательство сразу следует из определения поляризации и предложений 4.9 и 4.10. В пункте 4.2 мы уточняем основную теорему о размерности орбиты Ω для классических систем корней: оценка сверху на $\dim \Omega$ превращается в точную формулу, см. теорему 4.13 и формулу (20). Доказательство, по сути, основано вновь на индукции по $\operatorname{rk}\Phi$. Как следствие, мы в пункте 4.3 описываем все возможные размерности неприводимых комплексных представлений группы $U(q)$, см. следствие 4.21.

Работа основана на статьях автора [5], [6]. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю А.Н. Панову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

§2. Максимальные унипотентные подгруппы групп Шевалле и метод орбит

2.1. Группы Шевалле

Во всём, что касается алгебраических групп, алгебр Ли, их представлений, корней и весов, мы будем придерживаться стандартных определений и обозначений, принятых в [1], [2], [11], [12], [13], [14]. Здесь мы фиксируем эти обозначения и напоминаем основные факты, которые постоянно будут использоваться в дальнейшем.

Через Φ мы всегда будем обозначать приведённую систему корней ранга $n \geqslant 1$, а через $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — произвольный набор простых корней в Φ (чаще всего речь будет идти о неприводимых системах корней, но это будет оговорено специально). Нумерация простых корней такая же, как в [2]. Множества положительных и отрицательных корней обозначаются через Φ^+ и Φ^- соответственно. Очень часто мы будем писать $\alpha > 0$ (соответственно, $\alpha < 0$), если $\alpha \in \Phi^+$ (соответственно, $\alpha \in \Phi^-$). Вообще, через $<$ обозначается частичный порядок на Φ, для которого $\alpha < \beta$ (или же $\beta > \alpha$), если $\beta - \alpha$ есть сумма положительных корней.

Иногда нам будет нужно явное представление неприводимой системы корней Φ как подмножества какого-нибудь евклидова пространства $\mathbb{R}^N$. Здесь мы также будем следовать [2]. Для удобства напомним используемое там представление ($\{\varepsilon_i\}_{i=1}^N$ — стандартный базис $\mathbb{R}^N$). Для E_6, E_7 и E_8 такое представление нам нигде не понадобится, поэтому мы его и не приводим:

Тип Φ	N	Множество Φ^+	Множество простых корней Δ
A_{n-1}, $n \geqslant 2$	n	$\varepsilon_i - \varepsilon_j, 1 \leqslant i < j \leqslant n$	$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant n-1$
B_n, $n \geqslant 2$	n	$\varepsilon_i, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leqslant i < j \leqslant n$	$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant n-1$, $\alpha_n = \varepsilon_n$
C_n $n \geqslant 3$	n	$2\varepsilon_i, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leqslant i < j \leqslant n$	$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant n-1$, $\alpha_n = 2\varepsilon_n$
D_n $n \geqslant 4$	n	$\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leqslant i < j \leqslant n$	$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant n-1$, $\alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$
F_4	4	$\varepsilon_i, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leqslant i < j \leqslant 4$, $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)/2$	$\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4$, $\alpha_3 = \varepsilon_4$, $\alpha_4 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2$
G_2	2	α_1, α_2, $\alpha_1+\alpha_2$, $2\alpha_1+\alpha_2$, $3\alpha_1+\alpha_2$, $3\alpha_1+2\alpha_2$	$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

Пусть, как всегда, $W = W(\Phi)$ — группа Вейля системы корней Φ, r_α — отражение относительно гиперплоскости, ортогональной корню $\alpha \in \Phi$. Мы будем использовать две численные характеристики, связанные с элементами группы Вейля. А именно, для произвольного $w \in W$ через $l(w)$ (соответственно, $s(w)$) будем обозначать длину редуцированного (самого короткого) разложения w в произведение простых (соответственно, произвольных) отражений. Хорошо известно (см., например, [14, лемма 10.3A]), что $l(w)$ совпадает с числом корней $\alpha \in \Phi^+$, для которых $w(\alpha) \in \Phi^-$; множество таких корней будет обозначаться через Φ_w.

Далее, пусть $q = p^r$, где $r \geqslant 1$, а p — простое число, *достаточно большое* по сравнению с рангом Φ (например, $p > \operatorname{rk}\Phi + |\Phi|$; это ограничение позволит нам свободно пользоваться всей техникой метода орбит — подробности см. в пунктах 2.2, 2.3). Через $\mathbb{F}_p$ обозначается конечное поле из p элементов, а через $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ — его алгебраическое замыкание. Тогда $\mathbb{F}_q = \{t \in k \mid t^q = t\}$ — конечное поле из q элементов. (На самом деле, многие результаты будут верны для *произвольного* поля — в том числе, нулевой характеристики. Мы, однако, предпочитаем указать на это в соответствующих параграфах, но зато дать единообразные формулировки.)

Через $G = G_{\mathrm{sc}}(\Phi, k)$ (соотв., $G(q) = G_{\mathrm{sc}}(\Phi, \mathbb{F}_q)$) обозначается (односвязная) *группа Шевалле* с системой корней Φ над полем k (соотв., над полем $\mathbb{F}_q$). Пусть $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ и $\mathfrak{g}(q) = \mathrm{Lie}(G(q))$ — их алгебры Ли (над полями k и $\mathbb{F}_q$ соответственно). Поскольку $\mathbb{F}_q \subset k$, можно считать, что $G(q)$ — подгруппа в G, а $\mathfrak{g}(q)$ — $\mathbb{F}_q$-подпространство в $\mathfrak{g}$, см. [12, §5, следствие 2]. Фиксируем в алгебре $\mathfrak{g}(q)$ (а значит, и в $\mathfrak{g}$) произвольный *базис Шевалле* $\{e_\alpha, \alpha \in \Phi\} \cup \{h_{\alpha_i}, \alpha_i \in \Delta\}$ (элементы e_α называются *корневыми векторами*). Для любых $\alpha, \beta \in \Phi$, $\alpha + \beta \in \Phi$, структурные *константы Шевалле* $N_{\alpha\beta}$ определяются равенством $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$. (Мы в основном будем рассматривать случай $\alpha, \beta \in \Phi^+$ и полагать тогда $N_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha + \beta \notin \Phi^+$.)

2.2. Максимальные унипотентные подгруппы

Рассмотрим в $\mathfrak{g}$ подалгебру Ли $\mathfrak{u}$, порождённую над k всеми e_α, $\alpha \in \Phi^+$. Поскольку характеристика поля k достаточно велика, корректно определено *экспоненциальное отображение* $\exp\colon \mathfrak{u} \to G$. Его образ мы будем обозначать через U. Хорошо известно, что U — максимальная унипотентная подгруппа G а $\mathfrak{u}$ — её алгебра Ли. Более того, отображение $\exp\colon \mathfrak{u} \to U$ является взаимно однозначным и выполняется формула Кэмпбелла–Хаусдорфа [31, p. 115]. А именно, для любых $x, y \in \mathfrak{u}$

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x + y + \tau(x, y)), \tag{1}$$

где $\tau(x, y) \in [\mathfrak{v}, \mathfrak{v}]$ (здесь $\mathfrak{v}$ — любая подалгебра Ли в $\mathfrak{u}$, содержащая оба элемента x и y, а $[\mathfrak{v}, \mathfrak{v}]$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{v}$, порождённая над k всеми векторами вида $[u, v]$, $u, v \in \mathfrak{v}$). В частности, $(\exp(x))^{-1} = \exp(-x)$. Обратное к exp отображение мы, конечно, будем обозначать через $\ln\colon U \to \mathfrak{u}$.

В дальнейшем нам потребуются матричные представления алгебры $\mathfrak{u}$ в случае, когда Φ — классическая система корней. Договоримся через $e_{a,b}$ обозначать стандартную матричную единицу (матрицу, (a, b)-ый элемент которой равен единице, а остальные — нулю), а через 1_n — единичную матрицу размера $n \times n$. Для $\Phi = A_{n-1}$ алгебра $\mathfrak{u}$ состоит из всех нильпотентных нижнетреугольных матриц в $\mathfrak{gl}_n(k)$ (то есть порождена над k матрицами $e_{j,i}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$), а $U = U_m = U_m(k) = 1_n + \mathfrak{u}$ — *унитреугольная группа*, состоящая из всех унипотентных треугольных матриц из $\mathrm{GL}_n(k)$.

Для остальных классических систем корней мы будем придерживаться варианта, описанного, к примеру, в [19]. А именно, пусть Φ имеет тип B_n, $n \geqslant 2$, C_n, $n \geqslant 3$, или D_n, $n \geqslant 4$. Определим число $m = m(\Phi)$ по правилу

$$m = \begin{cases} 2n + 1, & \text{если } \Phi = B_n, \\ 2n, & \text{если } \Phi = C_n \text{ или } D_n. \end{cases} \tag{2}$$

Договоримся нумеровать строки и столбцы произвольной матрицы размера $m \times m$ индексами $1, 2, \ldots, n, 0, -n, \ldots, -2, -1$, пропуская индекс 0 для чётного m. Алгебра Ли $\mathfrak{u}$ может быть реализована как подалгебра в $\mathfrak{gl}_m(k)$, порождённая над k корневыми векторами e_α, $\alpha \in \Phi^+$, где

$$\begin{aligned} &e_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = e_{j,i} - e_{-i,-j}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n, \\ &e_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} = e_{-j,i} - e_{-i,j}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n, \\ &e_{\varepsilon_i} = e_{0,i} - e_{-i,0}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \\ &e_{2\varepsilon_i} = e_{-i,i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned} \tag{3}$$

(Мы воспользовались вложениями $\Phi \subset \mathbb{R}^N$ из пункта 2.1.)

Аналогично, стартуя с конечного поля $\mathbb{F}_q$, можно определить подалгебру $\mathfrak{u}(q) \subset \mathfrak{g}(q)$ и максимальную унипотентную подгруппу $U(q) = \exp \mathfrak{u}(q)$ в $G(q)$. Подчеркнём, что $\mathfrak{u}(q) = \sum_{\alpha \in \Phi^+} \mathbb{F}_q e_\alpha$ — $\mathbb{F}_q$-подпространство в алгебре $\mathfrak{u}$, а $U(q)$ — подгруппа в U, однозначно представимая в виде $\prod_{\alpha \in \Phi^+} X_\alpha(q)$, где, как и выше, $X_\alpha(q) = \{x_\alpha(t), t \in \mathbb{F}_q\}$ — корневые подгруппы. Отображения $\exp\colon \mathfrak{u}(q) \to U(q)$ и $\ln\colon U(q) \to \mathfrak{u}(q)$ корректно определены, взаимно обратны, и выполняется формула Кэмпбелла–Хаусдорфа (1). Кроме того, $\mathfrak{u}^*(q) = \{\lambda \in \mathfrak{u}^* \mid \lambda(u) \in \mathbb{F}_q \text{ для всех } u \in \mathfrak{u}(q)\} = (\mathfrak{u}(q))^*$.

2.3. Метод орбит для конечных групп

Основным объектом нашего изучения будут неприводимые конечномерные комплексные представления группы $U(q)$ (чуть позже мы поясним, как они связаны с группой U). Идеальным вариантом было бы, конечно, полное описание всех классов попарно неизоморфных представлений; другими словами, построение таблицы неприводимых (комплексных) характеров группы $U(q)$. (Для произвольной конечной группы $\mathcal{G}$ условимся множество классов изоморфных неприводимых представлений обозначать через $\widehat{\mathcal{G}}$, а множество её неприводимых характеров — через $\operatorname{Irr}\mathcal{G}$.)

В такой постановке задача до сих пор не решена и представляется *чрезвычайно* сложной. В то же время, имеется замечательная геометрическая интерпретация этой задачи, называемая *методом орбит* и являющаяся сейчас, пожалуй, наиболее мощным инструментом в описании неприводимых представлений группы $U(q)$.

Метод орбит был первоначально создан А.А. Кирилловым в 1962 году для описания унитарных неприводимых представлений нильпотентных групп Ли (над полем вещественных чисел) в комплексных гильбертовых пространствах [7] и адаптирован Д. Кажданом для конечных групп [26]. (Оригинальная версия метода орбит подробно изложена в книге [8]; по поводу метода орбит для конечных групп см., например, [27], [31] или статьи [21], [22], [23], где изложение ведётся в контексте ℓ-адических пучков.) Мы в этом параграфе приводим основные конструкции метода орбит, которые постоянно будем использовать в дальнейшем. А именно, группа U естественно действует на своей алгебре Ли $\mathfrak{u}$ с помощью присоединённого представления (над полем k): если $g = \exp(x) \in U$, $y \in \mathfrak{u}$, то, по определению, $\mathrm{Ad}_g y = (\exp \mathrm{ad}_x)(y)$. (Поскольку $\mathrm{ad}_x \colon y \mapsto [x, y]$ — нильпотентный оператор на пространстве $\mathfrak{u}$, а характеристика поля k достаточно велика, отображение $\exp \mathrm{ad}_x \colon \mathfrak{u} \to \mathfrak{u}$ корректно определено.)

Определение 2.1. Сопряженное представление группы U в пространстве $\mathfrak{u}^*$ называется *коприсоединённым.*

Мы будем обозначать результат коприсоединённого действия элемента $g \in U$ на линейную форму $f \in \mathfrak{u}^*$ через $g.f$; понятно, что для $g = \exp(x)$

$$\begin{aligned}(g.f)(y) &= f(\mathrm{Ad}_{g^{-1}} y) = f(\exp \mathrm{ad}_{-x} y)\\ &= f(x) - f(\mathrm{ad}_x y) + \frac{1}{2} f(\mathrm{ad}_x^2 y) - \ldots \quad \text{для любого } y \in \mathfrak{u}.\end{aligned} \tag{4}$$

Аналогично определяется коприсоединённое представление (над полем $\mathbb{F}_q$) группы $U(q)$ в пространстве $\mathfrak{u}^*(q)$. Обратим внимание, что если $f \in \mathfrak{u}^*(q) \subset \mathfrak{u}^*$, то мы можем рассматривать орбиту f как относительно коприсоединённого представления группы $U(q)$, так и относительно коприсоединённого представления всей группы U. Будем обозначать эти орбиты через $\Omega_f(q)$ и Ω_f соответственно (по определению, $\Omega_f(q) \subset \mathfrak{u}^*(q)$ и $\Omega_f \subset \mathfrak{u}^*$).

Вообще, для произвольной орбиты $\Omega(q) \subset \mathfrak{u}^*(q)$ коприсоединённого представления группы $U(q)$ будем через $\Omega \subset \mathfrak{u}^*$ обозначать орбиту произвольного элемента из $\Omega(q)$ относительно коприсоединённого представления группы U (ясно, что Ω не зависит от выбора этого элемента, причём $\Omega(q) \subset \Omega$). Поскольку любая коприсоединённая орбита U является неприводимым аффинным многообразием (это орбита унипотентной группы на аффинном пространстве, см. [13, предложение 8.2] и [32, Proposition 2.5]), для неё корректно определена размерность (над полем k). Известно, что $\dim \Omega$ всегда чётна, причём $|\Omega(q)| = q^{\dim \Omega}$ [26, p. 274].

Суть метода орбит в следующем: коротко говоря, существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathrm{Irr}\, U(q)$ неприводимых комплексных характеров группы $U(q)$ и множеством её коприсоединённых орбит $\mathfrak{u}^*(q)/U(q)$, причём многие задачи теории представлений допускают естественную трактовку в терминах орбит.

Более подробно, выберем и зафиксируем какой-либо нетривиальный гомоморфизм $\theta \colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^*$ (подчеркнём, что слева стоит *аддитивная* группа поля $\mathbb{F}_q$, а справа — *мультипликативная* группа поля комплексных чисел; нетривиальность означает, что образ θ состоит не только из единицы). Любой такой гомоморфизм имеет вид $\theta(c) = e^{2\pi i \cdot \mathrm{Tr}(bc)/p}$ для некоторого $b \in \mathbb{F}_q^*$, где $c \in \mathbb{F}_q$ и, по определению,

$$\mathrm{Tr}(t) = \sum_{i=0}^{r-1} t^{p^i} \in \mathbb{F}_p$$

для любого $t \in \mathbb{F}_q$ (здесь, напомним, $q = p^r$) [9, теорема 5.7].

Для произвольной коприсоединённой орбиты $\Omega(q) \subset \mathfrak{u}^*(q)$ рассмотрим функцию $\chi = \chi_{\Omega(q)} \colon U(q) \to \mathbb{C}$, действующую по правилу

$$\chi(g) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega(q)|}} \cdot \sum_{\lambda \in \Omega(q)} \theta(\lambda(x)), \quad \text{где } g = \exp(x) \in U(q). \tag{5}$$

(Поскольку $\dim \Omega = 2l$ для некоторого целого неотрицательного l, то в знаменателе этой формулы стоит целое число $\sqrt{|\Omega(q)|} = q^l$.)

Теорема 2.2. [26, Proposition 1] *Функция χ является характером некоторого неприводимого конечномерного комплексного представления группы $U(q)$. Более того, отображение $\Omega(q) \mapsto \chi_{\Omega(q)}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathfrak{u}^*(q)/U(q)$ и $\mathrm{Irr}\, U(q)$.*

В частности, размерность соответствующего представления равна

$$\chi(1) = \sqrt{|\Omega(q)|} = q^{\dim \Omega/2}.$$

Замечание 2.3. i) Построенное соответствие между коприсоединёнными орбитами, конечно, *зависит* от выбора гомоморфизма θ: выбирая другой гомоморфизм из $\mathbb{F}_q$ в $\mathbb{C}^*$, мы получим *другое* соответствие. Мы, однако, везде будем предполагать, что θ зафиксирован раз и навсегда, поэтому зависимость всех конструкций от θ можно никак специально не подчёркивать (например, мы нигде не будем указывать её в обозначениях).

ii) Уже из этой теоремы видно, что при описании представлений группы $U(q)$ иногда удобно использовать коприсоединённые орбиты группы U; позже мы увидим, что во многих случаях ответы получаются единообразными вообще для любого поля характеристики p (а иногда вообще для любого поля, см. замечание 4.22).

На самом деле, метод орбит позволяет даже в явном виде по данной орбите Ω построить представление, характер которого совпадает с $\chi_{\Omega(q)}$. Для этого нужно ввести исключительно важное понятие поляризации. Пусть V — произвольное конечномерное векторное пространство (над любым полем характеристики $\neq 2$) и B — произвольная билинейная антисимметрическая форма на V. Напомним, что подпространство $W \subset V$ называется *B-изотропным*, если $B(v, w) = 0$ для любых векторов $v, w \in W$. Кроме того, подпространство

$$\mathrm{Ker}\, B = \{v \in V \mid B(v, w) = 0 \text{ для любого } w \in V\}$$

называется *ядром* билинейной формы B.

Пусть теперь $\mathfrak{a}$ — любая алгебра Ли (над полем характеристики $\neq 2$), $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. Рассмотрим билинейную (антисимметрическую) форму на $\mathfrak{a}$ вида

$$B_\lambda(x, y) = \lambda([x, y]), \quad x, y \in \mathfrak{a}.$$

Определение 2.4. *Радикал B_λ* — это подалгебра в $\mathfrak{a}$ вида

$$\mathfrak{rad}_{\mathfrak{a}}\lambda = \mathrm{Ker}\, B_\lambda = \{x \in \mathfrak{a} \mid \lambda([x, y]) = 0 \text{ для любого } y \in \mathfrak{a}\}.$$

Любое B_λ-изотропное подпространство $\mathfrak{a}$ мы будем называть просто λ-*изотропным*. Подалгебра $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}$ называется *поляризацией* для λ (или λ-*поляризацией*), если она одновременно является максимальным по включению элементом среди всех λ-изотропных подпространств $\mathfrak{a}$. Разумеется, поляризация определяется не единственным образом. В то же время, классическая конструкция М. Верньи показывает, что поляризация всегда существует ([33], см. также [22, Appendix D] и [3, §1.12]).

Пусть $\Omega(q) \subset \mathfrak{u}^*(q)$ — произвольная косприсоединённая орбита группы $U(q)$ и f — любая точка на этой орбите. Пусть $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{u}(q)$ — какая-то f-поляризация и $P = \exp \mathfrak{p} \subset U(q)$. Поскольку для любых $x, y \in \mathfrak{p}$, согласно формуле Кэмпбелла–Хаусдорфа (1), $\exp(x)\exp(y) = \exp(x + y + z)$, $z \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$, а $f|_{[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]} \equiv 0$, мы получаем, что при $g = \exp(x)$, $h = \exp(y)$

$$\begin{aligned}\theta(f(\ln(g))) \cdot \theta(f(\ln(h))) &= \theta(f(x)) \cdot \theta(f(y)) = \theta(f(x+y)) \\ &= \theta(f(x+y+z)) = \theta(f(\ln(gh))),\end{aligned}$$

а значит, отображение $\psi\colon P \to \mathbb{C}\colon g \mapsto \theta(f(\ln(g)))$ будет одномерным представлением группы P. Положим $T = T_{\Omega(q)} = \mathrm{Ind}_P^{U(q)}\psi$. Оказывается, T — неприводимое представление группы $U(q)$, причём оно не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора точки $f \in \Omega(q)$ и поляризации для f (см. [26, Proposition 2]). Более того, $\chi_{\Omega(q)}$ — это в точности характер представления $T_{\Omega(q)}$ (таким образом, отображение $\Omega(q) \mapsto T_{\Omega(q)}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{u}^*(q)/U(q)$ и $\widehat{U(q)}$).

Мы видим, что поляризации играют ключевую роль в явной конструкции представления, связанного с данной косприсоединённой орбитой. Отметим, кроме того, что

$$\dim \Omega = \mathrm{codim}_{\,\mathfrak{u}}\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}} f = 2 \cdot \mathrm{codim}_{\,\mathfrak{u}}\mathfrak{p}, \tag{6}$$

где $\mathfrak{p}$ — любое максимальное f-изотропное подпространство для любой линейной формы $f \in \Omega$ ([19, Section 3], см. также [31, p. 117]).

2.4. Примеры косприсоединённых орбит

В этом пункте мы рассмотрим некоторые наиболее важные примеры орбит косприсоединённого представления, которые затем будут использоваться как модельные примеры для различных общих конструкций. (Впрочем, в действительности здесь будут перечислены практически *все* классы косприсоединённых орбит, описание которых известно к настоящему моменту.)

Дело в том, что, благодаря методу орбит, проблема описания неприводимых представлений группы $U(q)$ сводится к геометрической задаче классификации косприсоединённых орбит группы $U(q)$ (или группы U), но, разумеется, не становится от того *проще*. Несмотря на то, что задача полной классификации орбит чрезвычайно сложна, про отдельные классы орбит (а также соответствующих им представлений и характеров) известно довольно много; к описанию этих классов мы и переходим. Мы будем говорить про орбиты группы U, но все примеры в этом пункте имеют тот же вид над произвольным полем $\mathbb{F}_q$, то есть они годятся и для группы $U(q)$.

Пусть сначала $\Phi = A_{n-1}$, $n \geqslant 2$ (соответственно, $U = U_n$ — унитреугольная группа размера $n \times n$, а $\mathfrak{u}$ состоит из всех нижнетреугольных матриц с нулями на главной диагонали). В самой первой работе по методу орбит [7] было получено описание так называемых *регулярных* орбит группы U, то есть орбит максимально возможной размерности. Напомним, что в данном случае Φ^+ имеет вид $\{\varepsilon_i - \varepsilon_j, 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ (см. пункт 2.1), причём корневой вектор $e_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ можно отождествить с матрицей e_{ji}.

Пример 2.5. Обозначим через $D = D_{\mathrm{reg}}$ подмножество Φ^+ вида

$$D = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_n, \varepsilon_2 - \varepsilon_{n-1}, \ldots, \varepsilon_{n_0} - \varepsilon_{n-n_0+1}\},$$

где $n_0 = [n/2]$. Пусть $\xi\colon D \to k^*$ — произвольное отображение; будем для простоты писать $\xi_\beta = \xi(\beta)$ для любого корня $\beta \in D$.

Рассмотрим линейную форму на $\mathfrak{u}$ вида

$$f = f_{D,\xi} = \sum_{\beta \in D} \xi_\beta e_\beta^* \in \mathfrak{u}^*,$$

где e_α^* — элемент $\mathfrak{u}^*$, двойственный к корневому вектору e_α, $\alpha \in \Phi^+$. Обозначим через $\Omega = \Omega_{D,\xi} \subset \mathfrak{u}^*$ коприсоединённую орбиту элемента f. Тогда Ω — регулярная орбита, причём $\dim \Omega = 2\mu$, где $\mu = \mu(n) = (n-2) + (n-4) + \ldots$

.

Замечание 2.6. i) При нечётных n так получается любая регулярная орбита, а при чётных n последний корень $\varepsilon_{n_0} - \varepsilon_{n-n_0+1}$ может и отсутствовать в подмножестве D_{reg} — соответствующая орбита всё равно будет регулярной (и этим исчерпываются все регулярные орбиты для чётного n).

ii) Для наших целей выгодно дать другую характеризацию $\dim \Omega$, использующую группу Вейля W системы корней Φ. В рассматриваемом случае W изоморфна S_n — группе подстановок на n элементах. Пусть снова $D = D_{\mathrm{reg}}$; рассмотрим инволюцию (элемент второго порядка) в W вида

$$\sigma = \sigma_D = \prod_{\beta \in D} r_\beta$$

(порядок, в котором берутся отражения, не имеет значения, ибо они коммутируют ввиду ортогональности корней из D). Тогда, как легко проверить, $\Phi_\sigma = \Phi^+$ (то есть σ все положительные корни переводит в отрицательные), σ — самый длинный элемент группы Вейля, причём $l(\sigma) = n(n-1)/2$, $s(\sigma) = |D|$ и $\dim \Omega = l(\sigma) - s(\sigma)$. (Если n чётно и $\varepsilon_{n_0} - \varepsilon_{n-n_0+1} \notin D$, то и $l(\sigma)$, и $s(\sigma)$ будут на единицу меньше, так что Ω всё равно будет регулярной.)

iii) Более того, известны уравнения, которые задают орбиту Ω как аффинное многообразие. Для $U = U_n$ (как и для всех остальных классических групп) присоединённое представление имеет простой вид $\mathrm{Ad}_g(x) = gxg^{-1}$, $g \in U$, $x \in \mathfrak{u}$.

На $\mathfrak{gl}_n(k)$ есть невырожденная билинейная форма, инвариантная относительно сопряжения матриц — это форма следа: $\langle x, y \rangle = \mathrm{tr}\,(xy)$, $x, y \in \mathfrak{gl}_n(k)$. Пользуясь этой формой, мы можем отождествить $\mathfrak{u}^*$ с пространством $\mathfrak{u}^t$ всех верхнетреугольных матриц с нулями на главной диагонали. В этом случае коприсоединённое представление принимает вид

$$g.\lambda = \mathrm{pr}(g\lambda g^{-1}), \quad g \in U, \lambda \in \mathfrak{u}^* = \mathfrak{u}^t,$$

где $\mathrm{pr}\colon \mathfrak{gl}_n(k) \to \mathfrak{u}^*$ заменяет элементы матрицы, стоящие на главной диагонали и ниже, нулями. Так вот, орбита Ω задаётся уравнениями

$$\Delta^i = (-1)^{i(i-1)/2} \cdot \prod_{l=1}^{i} \xi_{\varepsilon_l - \varepsilon_{n-l+1}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant |D|,$$

где Δ^i — "угловой" минор с системой строк $\{1, 2, \ldots, i\}$ и системой столбцов $\{n-i+1, n-i+2, \ldots, n\}$ [7, с. 106].

Пример 2.7. Пусть теперь $D = D_{\mathrm{sreg}}$ получается из D_{reg} заменой какой-либо пары корней $\{\varepsilon_i - \varepsilon_{n-i+1}, \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{n-i}\}$ на пару $\{\varepsilon_i - \varepsilon_{n-i}, \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{n-i+1}\}$, а $\xi\colon D \to k^*$ — произвольное отображение. Определим элемент f и орбиту Ω так же, как в предыдущем примере. Тогда Ω имеет предмаксимальную размерность (мы будем называть такие орбиты и соответствующие им неприводимые характеры *субрегулярными*), равную $\dim\Omega = 2\mu - 2$.

Несложно проверить, что, как и для регулярных орбит, размерность орбиты Ω вычисляется по формуле $\dim\Omega = l(\sigma) - s(\sigma)$, где $\sigma = \prod_{\beta\in D} r_\beta$ — соответствующая инволюция в группе Вейля. В самом деле, $\Phi_\sigma = \Phi^+ \setminus \{\varepsilon_i - \varepsilon_{n-i+1}, \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{n-i}\}$, так что $l(\sigma) - s(\sigma) = (n(n-1)/2 - 2) - |D| = 2\mu - 2$, как и должно быть. Субрегулярные орбиты были полностью описаны в совместной работе А.Н. Панова и автора [4].

Пример 2.8. Рассмотрим теперь случай $\Phi = C_n$, $n \geqslant 3$. Мы будем считать, что $\Phi \subset \mathbb{R}^n$, как в пункте 2.1. Положим

$$\mathcal{A} = \{2\varepsilon_i, 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}, 1 \leqslant i < n\} \subset \Phi^+.$$

Предположим, что $D \subset \mathcal{A}$, причём D или $D \cup \{2\varepsilon_n\}$ — максимальный по включению элемент среди всех подмножеств $\mathcal{A}$, не содержащих корней с одинаковыми индексами i при ε_i. Пусть $\xi\colon D \to k^*$ — произвольное отображение; положим, как и раньше, $\Omega = \Omega_{D,\xi}$. Тогда Ω — регулярная орбита, причём любая регулярная орбита может быть получена таким способом [19, Theorem 6.4]. При этом, как несложно видеть, $\dim\Omega = n(n-1)/2 = l(\sigma) - s(\sigma)$ для соответствующей инволюции $\sigma = \prod_{\beta\in D} r_\beta$ в группе Вейля W. В работе [19] указано, как найти явные уравнения, описывающие орбиту Ω.

Обратим внимание, что даже для остальных классических групп (то есть для систем корней $\Phi = B_n$ и D_n) — не говоря уже об исключительных! — полное описание регулярных орбит до сих пор *не получено*.

Пример 2.9. Пусть теперь Φ — любая система корней, а $D = \{\beta\}$ состоит из одного положительного корня. Определим элемент $f \in \mathfrak{u}^*$ и его орбиту Ω, как во всех предыдущих примерах. Такие орбиты называются *элементарными*. Для классических групп описание элементарных орбит вытекает из результатов [15] и [19], см. также [29]. В четвёртом параграфе показано, что и в этом случае $\dim\Omega = l(\sigma) - s(\sigma)$ для соответствующей инволюции $\sigma = r_\beta \in W$.

Мы видим, что каждый из рассмотренных примеров укладывается в единую достаточно общую схему: отталкиваясь от некоторого подмножества $D \subset \Phi^+$, состоящего из попарно ортогональных положительных корней, и некоторого отображения $\xi\colon D \to k^*$, мы определяем коприсоединённую орбиту, размерность которой выражается в терминах группы Вейля (и вообще не зависит от выбора ξ).

§3. Орбиты, ассоциированные с ортогональными подмножествами систем корней: общие результаты

3.1. Определения и основная теорема

Доказательство основного результата проводится индукцией по рангу системы корней, причём приходится рассматривать системы корней с простыми и кратными связями по отдельности (см. пункты 3.2 и 3.3 соответственно). В этом пункте мы даём определение орбит, ассоциированных с ортогональными подмножествами в системах корней, формулируем основной результат и доказываем несколько элементарных фактов, связанных с такими орбитами.

Пусть, как и раньше, Φ — произвольная приведённая система корней, $\Delta \subset \Phi$ — множество простых корней, Φ^+ — соответствующий набор положительных корней. Пусть также $D \subset \Phi^+$ — произвольное подмножество, состоящее из попарно ортогональных положительных корней (мы, разумеется, будем называть такие подмножества *ортогональными*). Обозначим через $\xi\colon D \to k^*$ произвольное отображение; будем, как и раньше, для краткости писать $\xi_\beta = \xi(\beta)$ для любого $\beta \in D$.

Теперь, как и во всех примерах, рассмотренных в пункте 2.4, определим элемент $f = f_{D,\xi} \in \mathfrak{u}^*$ по правилу

$$f = f_{D,\xi} = \sum_{\beta \in D} \xi_\beta e^*_\beta$$

(здесь, напомним, $e^*_\beta \in \mathfrak{u}^*$ — ковекторы, двойственные к корневым векторам $e_\beta \in \mathfrak{u}$, см. пункт 2.1). Положим $f = 0$ при $D = \varnothing$. Определим основной объект нашего изучения:

Определение 3.1. Орбиту $\Omega = \Omega_{D,\xi} \subset \mathfrak{u}^*$ элемента f относительно коприсоединённого представления группы U будем называть орбитой, *ассоциированной* с подмножеством D, а f — *канонической формой* на Ω.

Замечание 3.2. i) Требование, чтобы D состояло только из положительных корней, не принципиально: поскольку Φ — приведённая система корней, $\Phi \cap \mathbb{Z}\beta = \{\pm\beta\}$ для любого $\beta \in \Phi$. Поэтому можно всегда договориться брать ковектор e^*_β, соответствующий положительному корню и считать, что $D \subset \Phi$.

ii) Как это следует из обозначений, мы здесь рассматриваем всё над алгебраически замкнутым полем $k = \overline{\mathbb{F}}_p$. Но ясно, что точно такое же определение орбит, ассоциированных с ортогональными подмножествами, можно дать вообще для *любого* поля (см., в частности, замечание 4.22).

Наша цель в этом параграфе — получить оценку на размерность орбиты Ω в терминах группы Вейля $W = W(\Phi)$ системы корней Φ. Для этого, как и в пункте 2.4, рассмотрим инволюцию σ в W, равную произведению отражений, соответствующих корням из D:

$$\sigma = \sigma_D = \prod_{\beta \in D} r_\beta$$

(напомним, что отражения r_β коммутируют ввиду ортогональности D).

Положим, как и выше, $\Phi_\sigma = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \sigma\alpha < 0\}$; пусть $l(\sigma) = |\Phi_\sigma|$ — длина σ в простых отражениях, а $s(\sigma) = |D|$ — длина σ в произвольных отражениях. Теперь мы можем сформулировать основную теорему:

Теорема 3.3. *Размерность орбиты Ω не зависит от выбора отображения $\xi\colon D \to k^*$ и не превосходит числа $l(\sigma) - s(\sigma)$. Иначе говоря,*

$$\dim \Omega = l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta, \tag{7}$$

где $\vartheta \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ зависит только от подмножества D (но не от ξ).

Замечание 3.4. i) В пункте 2.4 мы видели, что оценка на размерность во многих случаях является точной (на самом деле, если $\Phi = A_n$ или C_n, то равенство имеет место *всегда*, см. [10] и следующий параграф). С другой стороны, легко построить примеры, когда в формуле (7) имеет место строгое неравенство (см. пример 4.19).

ii) Как мы помним (см. пункт 2.3), размерность любой коприсоединённой орбиты должна быть чётна. Но поскольку определитель каждого отражения равен -1, то чётности чисел $l(\sigma)$ и $s(\sigma)$ обязаны совпасть.

Докажем сперва два вспомогательных утверждения. Во-первых, без ограничения общности, можно рассматривать случай *неприводимой* системы корней Φ. Действительно, пусть $\Phi = \bigcup_{i=1}^{l} \Phi_i$ — разложение Φ на неприводимые компоненты, лежащие в попарно ортогональных подпространствах.

Пусть, далее, $D = \bigcup_{i=1}^{l} D_i$, где $D_i = D \cap \Phi_i$. Для каждого i положим $\mathfrak{u}_i = \sum_{\alpha \in \Phi_i^+} ke_\alpha$; пусть $\mathfrak{u}_i^* = \sum_{\alpha \in \Phi^+} e_\alpha^* \subset \mathfrak{u}^*$ — сопряжённое к этой подалгебре подпространство, $f_i \in \mathfrak{u}_i^*$ — ограничение f на $\mathfrak{u}_i$, $U_i = \exp(\mathfrak{u}_i) \subset U$, $\xi_i \colon D_i \to k^*$ — ограничение ξ на D_i, $\Omega_i = \Omega_{D_i} \subset \mathfrak{u}_i^*$ — орбита f_i относительно коприсоединённого представления группы U_i. Наконец, обозначим через $W_i = W(\Phi_i)$ группу Вейля системы корней Φ_i и положим $\sigma_i = \sigma_{D_i} \in W_i$.

Лемма 3.5. *Пусть для всех орбит Ω_i, $i = 1, \ldots, l$, теорема* 3.3 *верна. Тогда она верна и для самой орбиты Ω.*

Доказательство. Очевидно, если $\alpha \in \Phi_i$, $\beta \in \Phi_j$ и $i \neq j$, то $\alpha + \beta \notin \Phi$. Пусть $x = \sum_{i=1}^{l} x_i$, $y = \sum_{j=1}^{l} y_j$, $x_i, y_i \in \mathfrak{u}_i$, тогда $\mathrm{ad}_{-y_j}^r x_i = 0$ для любых $j \neq i$ и любого $r > 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \exp(y).f(x) &= \left(\sum_{i=1}^{l} f_i\right) \left(\sum_{j=1}^{l} \exp \mathrm{ad}_{-y_j} x_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{l} f_i(\exp \mathrm{ad}_{-y_i} x_i) = \sum_{i=1}^{l} \exp(y_i).f_i(x_i), \end{aligned}$$

так как $\exp \mathrm{ad}_{-y_i} x_i \in \mathfrak{u}_i$ для любого i. Следовательно, отображения

$$\begin{gathered} \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_l \to \Omega \colon (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \mapsto \lambda_1 + \ldots + \lambda_l \text{ и} \\ \Omega \to \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_l \colon \lambda \mapsto (\lambda|_{\mathfrak{u}_1}, \ldots, \lambda|_{\mathfrak{u}_l}) \end{gathered}$$

являются взаимно обратными изоморфизмами аффинных многообразий.

Поскольку $\Omega_i = \Omega_{D_i, \xi_i}$, где $\xi_i = \xi|_{D_i}$, то независимость $\dim \Omega$ от выбора ξ при выполнении условий леммы очевидна. С другой стороны, если $i \neq j$, то каждое отражение r_β, $\beta \in D_i$, действует на Φ_j тождественно, поэтому $l(\sigma) = \sum_{i=1}^{l} l(\sigma_i)$. Наконец, $s(\sigma) = |D| = |\bigcup_{i=1}^{l} D_i| = \sum_{i=1}^{l} |D_i| = \sum_{i=1}^{l} s(\sigma_i)$. Это завершает доказательство. $\square$

Итак, с этого момента и до конца работы мы будем считать, что Φ — неприводимая система корней.

Во-вторых, возможна ситуация, когда орбиты, ассоциированные с разными ортогональными подмножествами, будут совпадать; естественно в каждом классе таких подмножеств рассматривать минимальные по включению подмножества. Чтобы дать точную формулировку, нам потребуется исключительно важное понятие сингулярных корней (см. [15], [19], [29]).

Определение 3.6. Пусть $\beta \in \Phi^+$ — произвольный положительный корень. Корни $\alpha, \gamma \in \Phi^+$ называются *β-сингулярными*, если $\alpha + \gamma = \beta$. Множество всех β-сингулярных корней мы будем обозначать через $S(\beta)$. Разумеется, для конкретной системы корней множества сингулярных корней легко найти в явном виде; для классических систем корней см. формулу (12).

Пусть в ортогональном подмножестве D есть два корня, один из которых сингулярен для другого. Иначе говоря, предположим, что найдутся такие корни $\beta_0, \beta_1 \in D$, что $\beta_0 \in S(\beta_1)$. Обозначим тогда $D' = D \setminus \{\beta_0\}$, $\xi' = \xi|_{D'}$, $f' = f_{D', \xi'} \in \mathfrak{u}^*$; пусть $\Omega' \subset \mathfrak{u}^*$ — коприсоединённая орбита f'.

Лемма 3.7. *Орбиты Ω и Ω' совпадают.*

Доказательство. Пусть $\beta_1 = \beta_0 + \alpha$ для некоторого $\alpha \in \Phi^+$. Тогда квадрат длины корня α равен сумме квадратов длин корней β_0, β_1, то есть $||\alpha||^2 = ||\beta_0||^2 + ||\beta_1||^2$. Ввиду неприводимости Φ мы заключаем, что в Φ встречаются длинные и короткие корни (α — длинный, β_0, β_1 — короткие), причём квадрат длины длинного корня вдвое больше, чем квадрат дины короткого: $||\alpha||^2 = 2||\beta_0||^2 = 2||\beta_1||^2$. (Иначе говоря, Φ — это B_n, C_n или F_4.)

Положим $\widetilde{f} = \exp(ce_\alpha).f'$ для некоторого $c \in k^*$. Тогда для произвольного корня $\gamma \in \Phi^+$, согласно (4),

$$\widetilde{f}(e_\gamma) = f'(e_\gamma) - c \cdot f'(\mathrm{ad}_{e_\alpha} e_\gamma) + \frac{1}{2}c^2 \cdot f'(\mathrm{ad}^2_{e_\alpha} e_\gamma) - \ldots$$

Достаточно проверить, что если $\gamma + N\alpha \in D'$ для каких-то $\gamma \in \Phi^+$, $N \geqslant 1$, то $N = 1$ и $\gamma = \beta_0$ (а значит, $\gamma + N\alpha = \beta_0 + \alpha = \beta_1$). Действительно, если это верно, то, с одной стороны, $\beta_0 + N\alpha$ не содержится в D' ни для какого $N \geqslant 2$. Поскольку $\beta_0 \notin D'$, то $f'(e_{\beta_0}) = 0$, а потому

$$\widetilde{f}(e_{\beta_0}) = f'(e_{\beta_0}) - c \cdot f'(\mathrm{ad}_{e_\alpha} e_{\beta_0}) = -c \cdot f'(N_{\alpha\beta_0} e_{\beta_1}) = -c \cdot N_{\alpha\beta_0} \cdot \xi_{\beta_1}.$$

Значит, при $c = -\xi_{\beta_0}/(N_{\alpha\beta_0} \cdot \xi_{\beta_1})$ значение линейной формы $\widetilde{f}$ на векторе e_{β_0} будет равно ξ_{β_0}, то есть $\widetilde{f}(e_{\beta_0}) = \xi_{\beta_0} = f(e_{\beta_0})$.

С другой стороны, при $\gamma \neq \beta_0$ мы тогда получим, что $\gamma + N\alpha$ не содержится в D' ни для какого $N \geqslant 1$. Это означает, что

$$\widetilde{f}(e_\gamma) = f'(e_\gamma) = f(e_\gamma)$$

и для любого $\gamma \neq \beta_0$. Тем самым, при $c = -\xi_{\beta_0}/(N_{\alpha\beta_0} \cdot \xi_{\beta_1})$ линейные формы f и f' просто совпадут. Но $\widetilde{f} \in \Omega'$ по построению, так что $\Omega = \Omega'$.

Итак, покажем, что если $\gamma + N\alpha \in D'$ для каких-то $\gamma \in \Phi^+$, $N \geqslant 1$, то $N = 1$ и $\gamma = \beta_0$. Рассмотрим два случая.

i) Предположим, что $\gamma = \beta_0$, $N \geqslant 2$ и $\gamma + N\alpha = \beta_0 + N\alpha = \beta \in D'$. Ясно, что в этом случае $\beta \neq \beta_1$. Но тогда $8||\beta_0||^2 \leqslant N^2 \cdot ||\alpha||^2 = ||\beta_0||^2 + ||\beta||^2$, то есть $||\beta||^2 \geqslant 7||\beta_0||^2$, что невозможно.

ii) Пусть теперь $\gamma \neq \beta_0$ и $\gamma + N\alpha = \beta \in D'$ для какого-то $N \geqslant 1$. Мы замечаем, что

$$\gamma + (N-1)\alpha = (\gamma + N\alpha) - \alpha = \beta - \alpha = \beta - \beta_1 + \beta_0.$$

Если $N = 1$, то $\beta \neq \beta_1$ (ибо $\beta_1 = \beta_0 + \alpha$, $\beta = \gamma + \alpha$, но $\gamma \neq \beta_0$). Тогда $||\gamma||^2 = ||\beta + \beta_0||^2 + ||\beta_1||^2$. Однако $||\beta_1||^2 = ||\beta_0||^2$ (они оба короткие), а $||\beta + \beta_0||^2 \geqslant 2||\beta_0||^2$ (корни β, β_0 ортогональны, так как $\beta \in D'$, а $\beta_0 \notin D'$), поэтому $||\gamma||^2 \geqslant 3||\beta_0||^2$, что невозможно.

Если же $N \geqslant 2$ и $\beta = \beta_1$, то

$$\gamma = \beta - N\alpha = \beta_1 - N \cdot (\beta_1 - \beta_0) = (1 - N) \cdot \beta_1 + N\beta_0,$$

откуда в силу ортогональности корней β_0 и β_1 следует, что

$$||\gamma||^2 = ||N\beta_0 + (1-N)\beta_1||^2 = (N^2 + (1-N)^2) \cdot ||\beta_0||^2 \geqslant 5||\beta_0||^2$$

(ибо $||\beta_0||^2 = |\beta_1||^2$) — противоречие.

Если, наконец, $N \geqslant 2$ и $\beta \neq \beta_1$, то $(\beta, \alpha) = (\beta, \beta_1) - (\beta, \beta_0) = 0$ ($\beta \neq \beta_0$, ибо $\beta \in D'$, а $\beta_0 \notin D'$). В то же время,

$$||\gamma||^2 = ||\beta - N\alpha||^2 = ||\beta||^2 + N^2 \cdot ||\alpha||^2 > 4||\alpha||^2,$$

что невозможно. Лемма доказана. $\square$

Итак, везде далее мы будем предполагать, что ни один корень из подмножества D не является сингулярным ни для какого другого корня из D.

3.2. Системы корней с простыми связями

Мы переходим к доказательству основной теоремы 3.3. В этом пункте мы докажем её в случае, когда Φ — неприводимая система корней с простыми связями (`simply laced`). Другими словами, до конца этого пункта будем считать, что Φ относится к типу A_n, $n \geqslant 1$, D_n, $n \geqslant 4$, E_6, E_7 или E_8.

В дальнейшем нам потребуется *запретить* некоторые варианты расположения корней. В связи с этим перечислим те из них, которые на самом деле никогда не могут встретиться. А именно, будем через η_i, θ_j, ψ_l (возможно, без индексов или со штрихами) обозначать различные положительные корни; условимся считать, что все корни η_i попарно ортогональны, причём корень η (без индекса и без штриха) *максимален* среди всех η_i в смысле естественного порядка на корнях. Вот интересующие нас случаи:

1. $\eta = \theta + \psi = \theta' + \psi'$,
   $\eta_1 = \theta_1 + \psi$,
   $\eta_2 = \theta_2 + \psi$,
   $\eta' = \theta_1 + \psi'$,

2. $\eta = \theta + \psi$,
   $\eta' = \theta' + \psi$,
   $\eta_1 = \theta + \psi_1$,
   $\eta_2 = \theta + \psi_2$

3. $\eta = \theta + \psi$,
   $\eta_1 = \theta_1 + \psi$,
   $\eta_2 = \theta + \psi_2$,
   $\eta_3 = \theta_1 + \psi_3$,

4. $\eta = \theta + \psi = \theta'_1 + \psi'_1$,
   $\eta_1 = \theta_1 + \psi = \theta'_1 + \psi'$,
   $\eta' = \theta + \psi' = \theta_1 + \psi'_1$,
   $\theta, \theta_1, \theta'_1, \psi, \psi'$ или $\psi'_1 \in S(\eta_2)$.

Определение 3.8. Любой набор корней типа 1–4 мы будем называть *запрещённым*.

Лемма 3.9. *Если $\Phi = D_5$, то корни из Φ^+ не могут образовывать запрещённые наборы типов* 1–4.

Доказательство. Прямая проверка. $\square$

Замечание 3.10. Будем для удобства считать, что все корни в Φ имеют единичную длину. Отметим, что все скалярные произведения корней из Φ равны 0, ± 1 или $\pm 1/2$. При этом если $\alpha, \beta \in \Phi^+$, то $(\beta, \alpha) = 1/2$ тогда и только тогда, когда один из корней α, β сингулярен для другого (в этом случае $r_\beta \alpha = \alpha - \beta$). С другой стороны, $(\alpha, \beta) = -1/2$ тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta \in \Phi^+$ (и в этом случае $r_\beta \alpha = \alpha + \beta$).

Докажем сначала, что размерность орбиты Ω не превосходит $l(\sigma) - s(\sigma)$. Доказательство проводится индукцией по рангу Φ (ввиду леммы 3.5 предполагать можно, что теорема доказана для *всех* систем корней с простыми связями ранга $< \operatorname{rk}\Phi$, а проверять — только для *неприводимой* системы корней Φ). База индукции ($\operatorname{rk}\Phi = 1$, то есть $\Phi = A_1$) очевидна.

Будем считать, что в D более одного корня: если $|D| = 1$, то есть Ω — элементарная орбита, то доказывать нечего. Действительно, в этом случае, очевидно, $\dim \Omega = |S(\beta)|$, где $D=\{\beta\}$, и $\sigma=r_\beta$. То, что число $l(\sigma)-s(\sigma)$ также совпадает с $|S(\beta)|$, для классических систем корней вытекает из доказательства следствия 4.21 (см. формулу (24)), а для исключительных систем корней легко проверяется непосредственно.

Выберем корень β, максимальный среди всех корней из D в смысле естественного порядка на корнях (если таких несколько, возьмём любой из них). Пусть $\widetilde{D}=D\setminus\{\beta\}$. Чтобы использовать предположение индукции, надо перейти к системе корней меньшего ранга. А именно, положим

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}=\{\alpha\in\Phi^+\mid(\alpha,\beta)\neq 0\}\text{ и }\widetilde{\Phi}=\pm\widetilde{\Phi}^+,\text{ где}\\&\widetilde{\Phi}^+=\Phi^+\setminus\mathcal{A}=\{\alpha\in\Phi^+\mid(\alpha,\beta)=0\}.\end{aligned}\tag{8}$$

Подчеркнём, что $S(\beta)\subset\mathcal{A}$, так как $(\alpha,\beta)=1/2$ для любого β-сингулярного корня α, см. замечание 3.10.

Утверждение 3.11. *Множество $\widetilde{\Phi}$ есть система корней ранга $<\operatorname{rk}\Phi$.*

Доказательство. Пересечение Φ с любым подпространством — система корней. Условие на ранг следует из того, что $\widetilde{\Phi}\subset(\mathbb{R}\beta)^\perp$. $\square$

Конечно, $\widetilde{\Phi}$ — система корней с простыми связями. Ясно, что $\widetilde{D}=D\cap\widetilde{\Phi}^+$. Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{u}}$ подалгебру в $\mathfrak{u}$, натянутую на векторы вида e_α, $\alpha\in\widetilde{\Phi}^+$. Пусть $\widetilde{f}=f|_{\widetilde{\mathfrak{u}}}\in\widetilde{\mathfrak{u}}^*=\sum_{\alpha\in\widetilde{\Phi}^+}ke_\alpha^*\subset\mathfrak{u}^*$, тогда $f=\xi_\beta e_\beta^*+\widetilde{f}$. Положим $\widetilde{U}=\exp(\widetilde{\mathfrak{u}})\subset U$ и через $\widetilde{\Omega}\subset\widetilde{\mathfrak{u}}^*$ обозначим орбиту коприсоединённого представления группы $\widetilde{U}$, ассоциированную с ортогональным подмножеством $\widetilde{D}$ (и отображением $\widetilde{\xi}=\xi|_{\widetilde{D}}$); тогда $\widetilde{f}$ — каноническая форма на орбите $\widetilde{\Omega}$.

Через $\widetilde{\sigma}=\prod_{\widetilde{\beta}\in\widetilde{D}}r_{\widetilde{\beta}}$ обозначим инволюцию в группе Вейля $\widetilde{W}$ системы корней $\widetilde{\Phi}$, соответствующую подмножеству $\widetilde{D}$. По предположению индукции, $\dim\widetilde{\Omega}\leqslant\widetilde{l}(\widetilde{\sigma})-\widetilde{s}(\widetilde{\sigma})$, так что нам, по сути дела, осталось выяснить, как связаны между собой $l(\sigma)$ и $\widetilde{l}(\widetilde{\sigma})$, ибо $s(\sigma)=\widetilde{s}(\widetilde{\sigma})+1$, очевидно. (Числа $\widetilde{l}$ и $\widetilde{s}$ определяются для $\widetilde{\sigma}\in\widetilde{W}$ так же, как l и s для $\sigma\in W$, см. пункт 2.1.) Для этого нам понадобится выразить размерность орбиты через размерность радикала $\mathfrak{a}=\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}f$ билинейной формы B_f (см. определение 2.4). Ввиду (6) мы получаем, что

$$\dim\Omega=\operatorname{codim}_{\mathfrak{u}}\mathfrak{a}=|\Phi^+|-\dim\mathfrak{a}.\tag{9}$$

Аналогично, рассмотрим форму $B_{\widetilde{f}}$ на $\widetilde{\mathfrak{u}}$ и пусть $\widetilde{\mathfrak{a}}=\mathfrak{rad}_{\widetilde{\mathfrak{u}}}\widetilde{f}$ — её радикал. Тогда $\dim\widetilde{\Omega}=\operatorname{codim}_{\widetilde{\mathfrak{u}}}\widetilde{\mathfrak{a}}=|\widetilde{\Phi}^+|-\dim\widetilde{\mathfrak{a}}$. Положим $\mathfrak{u}_{\mathcal{A}}=\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}ke_\alpha$ ($\mathfrak{u}=\mathfrak{u}_{\mathcal{A}}\oplus\widetilde{\mathfrak{u}}$ как векторные пространства и $\widetilde{f}|_{\mathfrak{u}_{\mathcal{A}}}\equiv 0$) и $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{u}_{\mathcal{A}}$.

Утверждение 3.12. *Подалгебра $\mathfrak{a}$ распадается в прямую сумму своих подпространств $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\oplus\widetilde{\mathfrak{a}}$.*

Доказательство. Условимся для произвольного $x=\sum_{\alpha\in\Phi^+}b_\alpha e_\alpha\in\mathfrak{u}$ обозначать $\operatorname{Supp}(x)=\{\alpha\in\Phi^+\mid b_\alpha\neq 0\}$. Обозначим также

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}\xi_\beta e_\beta^*=\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}e_\beta^*=\langle e_\alpha\mid\alpha\in\Phi^+\setminus S(\beta)\rangle_k\supset\widetilde{\mathfrak{u}}.$$

(последнее включение вытекает из того, что $S(\beta)\subset\mathcal{A}$).

i) Покажем, что $\widetilde{\mathfrak{a}}\subset\mathfrak{a}$. Предположим противное: пусть существует $x\in\widetilde{\mathfrak{a}}$, не лежащий в $\mathfrak{a}$. Это означает, что найдётся $y\in\mathfrak{u}$, для которого $f([x,y])\neq 0$. Поскольку $x\in\widetilde{\mathfrak{u}}\subset\mathfrak{r}$, то $\xi_\beta e_\beta^*([x,y])=0$, поэтому $\widetilde{f}([x,y])=f([x,y])\neq 0$. Следовательно, существуют такие $\alpha\in\operatorname{Supp}(x)\subset\widetilde{\Phi}^+$ и $\gamma\in\mathcal{A}\cap\operatorname{Supp}(y)$, что $\alpha+\gamma=\widetilde{\beta}\in\widetilde{D}$. Но тогда, ввиду ортогональности подмножества D,

$$(\alpha,\beta)=(\widetilde{\beta}-\gamma,\beta)=(\widetilde{\beta},\beta)-(\gamma,\beta)=-(\gamma,\beta)\neq 0,$$

так как $\gamma \in \mathcal{A}$. Это противоречит выбору $\alpha \in \widetilde{\Phi}^+$. Таким образом, $x \in \mathfrak{a}$. Мы доказали, что $\widetilde{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{a}$.

ii) С другой стороны, пусть $x = y + z \in \mathfrak{a}$, где $y \in \mathfrak{u}_{\mathcal{A}}$, $z \in \widetilde{\mathfrak{u}}$. Если $\gamma \in \widetilde{\Phi}^+$, то $\gamma \notin S(\beta)$, ибо $S(\beta) \subset \mathcal{A}$; значит, $e_\gamma \in \mathfrak{r}$. В то же время, для любого $\alpha \in \mathcal{A}$, очевидно, $\alpha + \gamma$ либо содержится в $\mathcal{A}$, либо не является корнем, поэтому $\mathrm{Supp}([y, e_\alpha]) \in \mathcal{A}$, то есть $[y, e_\gamma] \in \mathfrak{u}_{\mathcal{A}}$. Тем самым, $\widetilde{f}([y, e_\gamma]) = 0$ и

$$0 = f([x, e_\gamma]) = \xi_\beta e_\beta^*([x, e_\gamma]) + \widetilde{f}([y, e_\gamma]) + \widetilde{f}([z, e_\gamma]) = \widetilde{f}([z, e_\gamma]),$$

то есть $z \in \widetilde{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{a}$ согласно шагу i). Значит, и $y = x - z \in \mathfrak{a}$, откуда $y \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{u}_{\mathcal{A}} = \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \widetilde{\mathfrak{a}}$. Но $\mathfrak{b} \cap \widetilde{\mathfrak{a}} = 0$, поэтому сумма прямая. $\square$

Ключевым моментом в доказательстве интересующего нас неравенства $\dim \Omega \leqslant l(\sigma) - s(\sigma)$ является следующая

Лемма 3.13. *Имеет место неравенство* $\#\{\alpha \in \mathcal{A} \mid \sigma\alpha > 0\} + 1 \leqslant \dim \mathfrak{b}$.

Доказательство. Обозначим $\widetilde{\mathcal{A}} = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \sigma\alpha > 0\} \cup \{\beta\}$ (ясно, что $\sigma\beta = -\beta < 0$). Достаточно для каждого $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}$ построить вектор $x_\alpha \in \mathfrak{b}$ так, чтобы система векторов $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}}$ была линейно независима. В качестве x_β можно взять вектор e_β: очевидно, $(\beta, \beta) = 1$, так что $\beta \in \mathcal{A}$. В то же время, β не сингулярен ни для какого корня из D, поэтому $e_\beta \in \mathfrak{b}$.

Представим множество $\widetilde{\mathcal{A}}$ в виде объединения

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^+ \cup \mathcal{A}^- \cup \{\beta\}, \text{ где}\\
&\mathcal{A}^+ = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \sigma\alpha > 0 \text{ и } (\alpha, \beta) > 0\},\\
&\mathcal{A}^- = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \sigma\alpha > 0 \text{ и } (\alpha, \beta) < 0\}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим случаи $\alpha \in \mathcal{A}^-$ и $\alpha \in \mathcal{A}^+$ по отдельности.

i) Пусть сначала $\alpha \in \mathcal{A}^-$, то есть $(\alpha, \beta) = -1/2 < 0$ и $\sigma\alpha > 0$. Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_l$ — те корни из D, для которых α будет сингулярным; пусть, соответственно, $\gamma_i = \beta_i - \alpha \in \Phi^+$ для $i = 1, \ldots, l$. Тогда

$$(\beta, \gamma_i) = (\beta, \beta_i - \alpha) = -(\beta, \alpha) = 1/2,$$

то есть или $\gamma_i \in S(\beta)$, или $\beta \in S(\gamma_i)$. Однако во втором случае $\beta < \beta_i$, что противоречит выбору корня β. Итак, $\gamma_i \in S(\beta)$ для любого i; положим, соответственно, $\alpha_i = \beta - \gamma_i \in \Phi^+$, $i = 1, \ldots, l$.

Обозначим теперь $b_i = -(\xi_{\beta_i} \cdot N_{\alpha\gamma_i})/(\xi_\beta \cdot N_{\alpha_i\gamma_i})$, $i = 1, \ldots, l$, и в качестве вектора x_α выберем $x_\alpha = e_\alpha + \sum_{i=1}^l b_i e_{\alpha_i}$; очевидно, $x_\alpha \in \mathfrak{u}_{\mathcal{A}}$. Мы утверждаем, что $x_\alpha \in \mathfrak{a} = \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}} f$. Действительно, пусть δ — произвольный положительный корень. По определению,

$$f([x_\alpha, e_\delta]) = N_{\alpha\delta} \cdot f(e_{\alpha+\delta}) + \sum_{i=1}^l N_{\alpha_i\delta} \cdot f(e_{\alpha_i+\delta}) \cdot b_i.$$

Выберем и зафиксируем какое-то i. Мы замечаем, что $\alpha_i + \delta \notin D$ при $\delta \neq \gamma_i$. В самом деле, предположим противное: пусть существует такой $\widetilde{\beta} \in D$, $\widetilde{\beta} \neq \beta$, что $\alpha_i + \delta = \widetilde{\beta}$. (Понятно, что условия $\delta \neq \gamma_i$ и $\widetilde{\beta} \neq \beta$ равносильны.) В таком случае $(\widetilde{\beta}, \alpha_i) = 1/2$, поэтому $(\widetilde{\beta}, \gamma_i) = (\widetilde{\beta}, \beta - \alpha_i) = -1/2$. Значит, $(\widetilde{\beta}, \alpha) = (\widetilde{\beta}, \beta_i - \gamma_i) = 1/2$. Пусть $\beta_1', \ldots, \beta_s'$ — все те корни из D, которые не ортогональны корню α, за исключением корней $\beta, \beta_i, \widetilde{\beta}$. Тогда

$$\sigma\alpha = \alpha + \beta - \beta_i + \widetilde{\beta} - 2(\alpha, \beta_1') \cdot \beta_1' - \ldots - 2(\alpha, \beta_s') \cdot \beta_s'.$$

Поскольку $(\alpha, \beta'_r) = \pm 1/2$ для любого $1 \leqslant r \leqslant s$, то

$$||\sigma\alpha - \alpha||^2 = 2 - 2(\sigma\alpha, \alpha) = ||\beta||^2 + ||\beta_i||^2 + ||\widetilde{\beta}||^2 + \sum_{r=1}^{s} ||\beta'_r||^2 = 3 + s.$$

Отсюда видно, что $s = 0$ или $s = 1$, так как $(\sigma\alpha, \alpha) \geqslant -1$. При $s = 0$

$$\sigma\alpha = \alpha + \beta - \beta_i - \widetilde{\beta} = \alpha + (\alpha_i + \gamma_i) - (\alpha + \gamma_i) - (\alpha_i + \delta) = -\delta < 0.$$

Вместе с тем, $(\alpha, \beta_i) = 1/2$, ибо $\alpha \in S(\beta_i)$, поэтому при $s = 1$

$$\begin{aligned}(\sigma\alpha, \alpha) &= ||\alpha||^2 + (\beta, \alpha) - (\beta_i, \alpha) - (\widetilde{\beta}, \alpha) - 2(\beta'_1, \alpha)^2 \\ &= 1 - 1/2 - 1/2 - 1/2 - 1/2 = -1,\end{aligned}$$

то есть $\sigma\alpha = -\alpha < 0$. В любом случае, $\sigma\alpha < 0$, что противоречит выбору α. Следовательно, такой вариант невозможен, то есть $\alpha_i + \delta \notin D$ при $\delta \neq \gamma_i$.

Это означает, что если $\delta = \gamma_i$ для некоторого i, то

$$\begin{aligned}f([x_\alpha, e_\delta]) &= f([x_\alpha, e_{\gamma_i}]) = N_{\alpha\gamma_i} \cdot \xi_{\beta_i} + N_{\alpha_i\gamma_i} \cdot \xi_\beta \cdot b_i \\ &= N_{\alpha\gamma_i} \cdot \xi_{\beta_i} - N_{\alpha_i\gamma_i} \cdot \xi_\beta \cdot (\xi_{\beta_i} \cdot N_{\alpha\gamma_i})/(\xi_\beta \cdot N_{\alpha_i\gamma_i}) \\ &= N_{\alpha\gamma_i} \cdot \xi_{\beta_i} - N_{\alpha\gamma_i} \cdot \xi_{\beta_i} = 0.\end{aligned}$$

Если же $\delta \neq \gamma_i$ ни для какого i, то, как мы только что доказали, $\alpha_i + \delta \notin D$ при всех i от 1 до l. Но $\alpha + \delta \notin D$ по построению. Значит, $f([x_\alpha, e_\delta]) = 0$ и в этом случае. Таким образом, для любого $\alpha \in \mathcal{A}^-$ построенный выше вектор x_α действительно содержится в $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{u}_\mathcal{A}$, как мы и хотели.

ii) Рассмотрим теперь более простой случай, когда $\alpha \in \mathcal{A}^+$, то есть $(\alpha, \beta) = 1/2 > 0$ и $\sigma\alpha > 0$. Группа Вейля действует ортогональными преобразованиями, поэтому $(\beta, \sigma\alpha) = (\sigma\beta, \alpha) = (-\beta, \alpha) = -1/2$.

Тем самым, $\beta + \sigma\alpha \in \Phi^+$ (см. замечание 3.10). Если при этом $\beta + \sigma\alpha \in S(\widetilde{\beta})$ для какого-то корня $\widetilde{\beta} \in D$, то $\beta < \widetilde{\beta}$, что противоречит выбору корня β. Значит, в качестве x_α можно выбрать вектор $e_{\beta+\sigma\alpha}$. Таким образом, для каждого $\alpha \in \mathcal{A}^+$ нам тоже удалось построить вектор $x_\alpha \in \mathfrak{b}$. При этом, очевидно, $(\beta, \beta + \sigma\alpha) = 1 - 1/2 = 1/2 \neq 0$, так что $\beta + \sigma\alpha \in \mathcal{A}$.

Итак, для каждого корня $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}$ построен $x_\alpha \in \mathfrak{b}$. Осталось проверить их линейную независимость. Все корни $\beta + \sigma\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}^+$, различны, поэтому соответствующие векторы $x_\alpha = e_{\beta+\sigma\alpha}$ линейно независимы автоматически. Если $\alpha \in \mathcal{A}^-$, то $e_\alpha \in \mathrm{Supp}(x_\alpha)$, причём $\mathrm{Supp}(x_\alpha) \setminus \{\alpha\} \subset S(\beta)$. Следовательно, все такие x_α, $\alpha \in \mathcal{A}^-$, также линейно независимы. Их линейная независимость с векторами x_α, $\alpha \in \mathcal{A}^+$, следует из того, что

$$(\mathcal{A}^- \cup S(\beta)) \cap (\beta + \sigma\mathcal{A}^+) = \varnothing.$$

В самом деле, скалярные произведения корня β с корнями из $\mathcal{A}^-$ меньше нуля, а с корнями из $\beta + \sigma\mathcal{A}^+$ больше нуля, поэтому эти множества не пересекаются. Кроме того, для любого $\alpha \in \mathcal{A}^+$ корень $\beta + \sigma\alpha \in \Phi^+$ больше корня β, а значит, не может быть β-сингулярным.

Итак, все векторы $x_\alpha, \alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}$, линейно независимы. Лемма доказана. $\square$

Теперь мы легко завершим доказательство того, что $\dim \Omega \leqslant l(\sigma) - s(\sigma)$.

Предложение 3.14. *Пусть Φ — приведённая неприводимая система корней с простыми связями, $D \subset \Phi^+$ — произвольное ортогональное подмножество, Ω — ассоциированная с ним орбита группы U, $\sigma \in W$ — инволюция, соответствующая D. Тогда* $\dim \Omega \leqslant l(\sigma) - s(\sigma)$.

Доказательство. Из утверждения 3.12 видно, что $\dim \mathfrak{a} = \dim \widetilde{\mathfrak{a}} + \dim \mathfrak{b}$. С учётом (9), (8) и предположения индукции,

$$\begin{aligned}\dim \Omega &= |\Phi^+| - \dim \mathfrak{a} = |\widetilde{\Phi}^+| + |\mathcal{A}| - \dim \mathfrak{a} - \dim \widetilde{\mathfrak{a}} + \dim \widetilde{\mathfrak{a}} \\ &= (|\widetilde{\Phi}^+| - \dim \widetilde{\mathfrak{a}}) + |\mathcal{A}| - (\dim \mathfrak{a} - \dim \widetilde{\mathfrak{a}}) \\ &= \dim \widetilde{\Omega} + |\mathcal{A}| - (\dim \mathfrak{a} - \dim \widetilde{\mathfrak{a}}) \leqslant \widetilde{l}(\widetilde{\sigma}) - \widetilde{s}(\widetilde{\sigma}) + |\mathcal{A}| - \dim \mathfrak{b}.\end{aligned}$$

Таким образом, для завершения доказательства достаточно проверить, что $l(\sigma) - s(\sigma) \geqslant \widetilde{l}(\widetilde{\sigma}) - \widetilde{s}(\widetilde{\sigma}) + |\mathcal{A}| - \dim \mathfrak{b}$. Но $s(\sigma) = \widetilde{s}(\widetilde{\sigma}) + 1$, а на всех корнях из $\widetilde{\Phi}^+$ отражение r_β действует тривиально, поэтому $|\Phi_\sigma \cap \widetilde{\Phi}^+| = |\widetilde{\Phi}_{\widetilde{\sigma}}| = \widetilde{l}(\widetilde{\sigma})$ и

$$l(\sigma) = |\Phi_\sigma| = |\Phi_\sigma \cap \widetilde{\Phi}^+| + |\Phi_\sigma \cap \mathcal{A}| = \widetilde{l}(\widetilde{\sigma}) + \#\{\alpha \in \mathcal{A} \mid \sigma\alpha < 0\}.$$

Итак, осталось показать, что

$$|\mathcal{A}| - \#\{\alpha \in \mathcal{A} \mid \sigma\alpha < 0\} + 1 = \#\{\alpha \in \mathcal{A} \mid \sigma\alpha > 0\} + 1 \leqslant \dim \mathfrak{b},$$

но это в точности утверждение леммы 3.13. Предложение доказано. □

Остаток этого пункта посвящён доказательству независимости $\dim \Omega$ от выбора ξ. Обозначим через $\xi' \colon D \to k^*$ произвольное отображение; пусть $\Omega' = \Omega_{D,\xi'}$ и f' — каноническая форма на этой орбите. Положим $\mathfrak{a}' = \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}} f'$; рассуждая так же, как в утверждении 3.12, получаем, что $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}' \oplus \widetilde{\mathfrak{a}}'$ как векторные пространства, где $\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{u}_{\mathcal{A}}$, $\widetilde{f}' = f'|_{\widetilde{\mathfrak{u}}} \in \mathfrak{u}^* \subset \mathfrak{u}^*$ и $\widetilde{\mathfrak{a}}' = \mathfrak{rad}_{\widetilde{\mathfrak{u}}} \widetilde{f}'$.

Предложение 3.15. *Пусть Φ — приведённая неприводимая система корней с простыми связями, $D \subset \Phi^+$ — произвольное ортогональное подмножество, ξ, ξ' — два любых отображения из D в k^*, $\Omega = \Omega_{D,\xi}$, $\Omega' = \Omega_{D,\xi'}$. Тогда* $\dim \Omega = \dim \Omega'$.

Доказательство. Как мы уже отмечали (см. (9)), $\dim \Omega = \operatorname{codim}_{\mathfrak{u}} \mathfrak{a}$ и $\dim \Omega' = \operatorname{codim}_{\mathfrak{u}} \mathfrak{a}'$, то есть нужно показать, что $\dim \mathfrak{a} = \dim \mathfrak{a}'$. Используем индукцию по рангу Φ. База индукции ($\operatorname{rk} \Phi = 1$, то есть $\Phi = A_1$) тривиальна. Но $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \widetilde{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}' \oplus \widetilde{\mathfrak{a}}'$ (утверждение 3.12), а $\dim \widetilde{\mathfrak{a}} = \dim \widetilde{\mathfrak{a}}'$ по предположению индукции ($\operatorname{rk} \widetilde{\Phi} < \operatorname{rk} \Phi$). Значит, надо показать, что $\dim \mathfrak{b} = \dim \mathfrak{b}'$.

В силу полной симметричности условий относительно f и f' достаточно проверить, что $\dim \mathfrak{b} \leqslant \dim \mathfrak{b}'$. Пусть $x = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x_\alpha e_\alpha \in \mathfrak{b}$; положим $y = \varphi(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} y_\alpha e_\alpha$. Предположим, что нам удалось подобрать коэффициенты y_α так, чтобы $y \in \mathfrak{b}'$ и для произвольного набора $x_1, \ldots, x_l$ ранги систем векторов $\{x_1, \ldots, x_l\}$ и $\{\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_l)\}$ совпадали. Выбирая тогда в качестве x_i произвольный базис пространства $\mathfrak{b}$, получаем искомый результат. Сейчас мы определим коэффициенты y_α, покажем, что они определяются корректно, проверим совпадение рангов и докажем, что y содержится в $\mathfrak{b}'$.

Итак, первая цель — определить y_α. Мы полагаем $y_\alpha = x_\alpha$ для любого $\alpha \in \mathcal{A}$, за исключением, быть может, следующих четырёх случаев.

i) Существуют такие $\alpha_0, \gamma \in \Phi^+$, $\beta_0 \in D$, что

$$\beta = \alpha + \gamma, \quad \beta_0 = \alpha_0 + \gamma,$$

причём ни один из корней α, α_0 не сингулярен больше ни для какого корня из D. Здесь $y_\alpha = x_\alpha \cdot \xi_\beta/\xi'_\beta$.

ii) Существуют такие $\widetilde{\alpha}, \alpha_0, \gamma, \widetilde{\gamma} \in \Phi^+$, $\beta_0, \widetilde{\beta}_0 \in D$, что

$$\beta = \alpha + \gamma = \widetilde{\alpha} + \widetilde{\gamma},$$
$$\beta_0 = \alpha_0 + \gamma, \quad \widetilde{\beta}_0 = \alpha_0 + \widetilde{\gamma},$$

причём ни один из корней $\alpha, \widetilde{\alpha}, \gamma, \widetilde{\gamma}$ не сингулярен больше ни для какого корня из D. Пусть тогда $y_\alpha = x_\alpha \cdot (\xi_\beta \cdot \xi'_{\beta_0})/(\xi'_\beta \cdot \xi_{\beta_0})$. (Поскольку ситуация полностью симметрична относительно корней α и $\widetilde{\alpha}$, то, автоматически, $y_{\widetilde{\alpha}} = x_{\widetilde{\alpha}} \cdot (\xi_\beta \cdot \xi'_{\widetilde{\beta}_0})/(\xi'_\beta \cdot \xi_{\widetilde{\beta}_0})$.)

iii) Существуют такие $\widetilde{\alpha}, \alpha_0, \gamma, \widetilde{\gamma}, \gamma_0 \in \Phi^+$, $\beta_0, \widetilde{\beta}_0 \in D$, что

$$\beta = \alpha + \gamma = \widetilde{\alpha} + \widetilde{\gamma},$$
$$\beta_0 = \alpha_0 + \gamma = \widetilde{\alpha} + \gamma_0,$$
$$\widetilde{\beta}_0 = \alpha + \gamma_0 = \alpha_0 + \widetilde{\gamma},$$

причём ни один из корней $\alpha, \widetilde{\alpha}, \alpha_0, \gamma, \widetilde{\gamma}, \gamma_0$ не сингулярен больше ни для какого корня из D. В этом случае, как и выше, положим $y_\alpha = x_\alpha \cdot (\xi_\beta \cdot \xi'_{\beta_0})/(\xi'_\beta \cdot \xi_{\beta_0})$. (Поскольку ситуация полностью симметрична относительно корней α и $\widetilde{\alpha}$, то, автоматически, $y_{\widetilde{\alpha}} = x_{\widetilde{\alpha}} \cdot (\xi_\beta \cdot \xi'_{\widetilde{\beta}_0})/(\xi'_\beta \cdot \xi_{\widetilde{\beta}_0})$.)

iv) Существуют такие $\alpha', \gamma' \in \Phi^+$, $\beta_0 \in D$, что $\alpha = \alpha_0$ и

$$\beta = \alpha' + \gamma', \quad \beta_0 = \alpha_0 + \gamma',$$

причём ни один из корней $\alpha = \alpha_0$, α' не сингулярен больше ни для какого корня из D. Здесь $y_{\alpha_0} = x_{\alpha_0} \cdot \xi_{\beta_0}/\xi'_{\beta_0}$.

Проверим корректность определения чисел y_α. Пусть $\alpha \in \mathcal{A}$; если $\alpha \notin \mathrm{Supp}(x)$, то, в любом случае, $y_\alpha = x_\alpha = 0$, поэтому можно дальше считать, что $\alpha \in \mathrm{Supp}(x)$. Если α не сингулярен ни для одного корня из D, то $y_\alpha = x_\alpha$. Пусть, с другой стороны, $\alpha \in S(\beta)$, то есть $\beta = \alpha + \gamma$ для некоторого $\gamma \in \Phi^+$. Тогда γ обязательно сингулярен ещё для какого-то корня из D (а иначе $f([x, e_\gamma]) = \xi_\beta \cdot x_\alpha \cdot N_{\alpha\gamma} \neq 0$, что противоречит выбору вектора $x \in \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} = \mathfrak{rad}_\mathfrak{u} f$). Пусть, к примеру, $\beta_0 = \alpha_0 + \gamma$ для некоторых $\alpha_0 \in \mathrm{Supp}(x)$, $\beta_0 \in D$, $\beta_0 \neq \beta$. Предположим, что α сингулярен ещё для какого-то корня из D; пусть, например, $\widetilde{\beta}_0 = \alpha + \gamma_0$ для некоторых $\widetilde{\beta}_0 \in D$, $\gamma_0 \in \Phi^+$, $\widetilde{\beta}_0 \neq \beta$. Понятно, что $\widetilde{\beta}_0 \neq \beta_0$, ибо при $\widetilde{\beta}_0 = \beta_0$

$$(\beta_0, \beta) = (\beta_0, \alpha + \gamma) = (\widetilde{\beta}_0, \alpha) + (\beta_0, \gamma) = 1/2 + 1/2 = 1$$

(скалярное произведение корня с сингулярным ему всегда равно $1/2$, см. замечание 3.10), что противоречит ортогональности D.

Мы замечаем, что γ_0 обязан быть сингулярным ещё для какого-то корня из D, кроме $\widetilde{\beta}_0$ (а иначе $f([x, e_{\gamma_0}]) = \xi_{\widetilde{\beta}_0} \cdot x_\alpha \cdot N_{\alpha\gamma_0} \neq 0$); пусть, например, $\widehat{\beta} = \widehat{\alpha} + \gamma_0$, $\widehat{\beta} \neq \widetilde{\beta}_0$. Если $\widehat{\beta}$ отличен от корня β_0, то рассмотрим множество $\Psi = \langle \beta, \widehat{\beta}, \beta_0, \widetilde{\beta}_0, \alpha \rangle_\mathbb{Z} \cap \Phi$. Сразу ясно, что Ψ — система корней ранга 5, причём $\gamma, \gamma_0, \alpha_0, \widehat{\alpha} \in \Psi$. Более того, множество $\Psi \cap \Phi^+$ *замкнуто* в Ψ в том смысле, что если $\zeta_1, \zeta_2 \in \Psi \cap \Phi^+$ и $\zeta_1 + \zeta_2 \in \Psi$, то $\zeta_1 + \zeta_2 \in \Psi \cap \Phi^+$. Согласно [14, §16, упражнение 3], $\Psi \cap \Phi^+$ содержится в множестве положительных корней относительно некоторой подсистемы простых корней в Ψ. Поэтому можно считать, что корни $\beta, \widehat{\beta}, \beta_0, \widetilde{\beta}_0, \gamma, \gamma_0, \alpha, \alpha_0, \widetilde{\alpha}$ лежат в Ψ^+.

Поскольку сумма двух корней из разных неприводимых компонент системы корней не может быть корнем, мы заключаем, что Ψ — неприводимая система корней; разумеется, все корни в ней имеют одну длину. В A_5^+ *нет* четырёх попарно ортогональных корней, следовательно, $\Psi \cong D_5$. Но тогда корни $\eta = \beta$, $\eta_1 = \widetilde{\beta}_0$, $\eta_2 = \beta_0$, $\eta_3 = \widehat{\beta}$, $\theta = \gamma$, $\theta_1 = \gamma_0$, $\psi = \alpha$, $\psi_2 = \alpha_0$ и $\psi_3 = \widehat{\alpha}$ образуют в D_5^+ запрещённый набор типа 3, что противоречит лемме 3.9.

Таким образом, $\widehat{\beta} = \beta_0 = \alpha_0 + \gamma = \widehat{\alpha} + \gamma_0$. Переобозначим $\widetilde{\alpha} = \widehat{\alpha}$ (тем самым, $\beta_0 = \alpha_0 + \gamma = \widetilde{\alpha} + \gamma_0$). Тогда

$$\widetilde{\alpha} = \beta_0 - \gamma_0 = \beta_0 - (\widetilde{\beta}_0 - \alpha) = \beta_0 - \widetilde{\beta}_0 + \alpha,$$

поэтому $(\beta, \widetilde{\alpha}) = (\beta, \alpha) = 1/2$. Значит, $\widetilde{\alpha} \in S(\beta)$ (если $\beta \in S(\widetilde{\alpha})$, то $\beta < \beta_0$, то есть β не будет максимальным среди всех корней из D), то есть $\beta = \widetilde{\alpha} + \widetilde{\gamma}$ для некоторого $\widetilde{\gamma} \in \Phi^+$. Со всей необходимостью,

$$\widetilde{\beta}_0 = \alpha + \gamma_0 = (\beta - \gamma) + (\beta_0 - \widetilde{\alpha}) = (\beta_0 - \gamma) + (\beta - \widetilde{\alpha}) = \alpha_0 + \widetilde{\gamma}.$$

Лемма 3.9 показывает, что ни один из корней $\alpha, \widetilde{\alpha}, \alpha_0, \gamma, \widetilde{\gamma}, \gamma_0$ не является сингулярным ни для какого другого корня β_2 из D, иначе корни $\eta = \beta$, $\eta_1 = \beta_0$, $\eta' = \widetilde{\beta}_0$, $\theta = \alpha$, $\theta_1 = \alpha_0$, $\theta_1' = \widetilde{\alpha}$, $\psi = \gamma$, $\psi' = \gamma_0$, $\psi_1' = \widetilde{\gamma}$ и $\eta_2 = \beta_2$ образуют в D_5^+ запрещённый набор типа 4. Значит, α относится к случаю iii), причём корни $\widetilde{\alpha}, \alpha_0, \beta_0, \widetilde{\beta}_0, \gamma, \widetilde{\gamma}, \gamma_0$ определены однозначно.

Предположим теперь, что, по-прежнему, $\beta = \alpha + \gamma$, $\beta_0 = \alpha_0 + \gamma$, но α не сингулярен больше ни для какого корня из D, кроме β. Рассмотрим случай, когда α_0 сингулярен ещё для какого-то корня из D; пусть, скажем, $\widetilde{\beta}_0 = \alpha_0 + \widetilde{\gamma}$ для некоторого $\widetilde{\gamma} \in \Phi^+$. Тогда

$$(\beta, \widetilde{\gamma}) = (\beta, \widetilde{\beta}_0 - \alpha_0) = (\beta, \widetilde{\beta}_0 - \beta_0 + \gamma) = 1/2,$$

ибо $\gamma \in S(\beta)$; значит, и $\widetilde{\gamma} \in S(\beta)$ (если $\beta \in S(\gamma)$, то $\beta < \beta_0$, то есть β не будет максимальным среди всех корней из D). Пусть, например, $\beta = \widetilde{\alpha} + \widetilde{\gamma}$ для некоторого $\widetilde{\alpha} \in \Phi^+$. Мы замечаем, что $\widetilde{\alpha}$ не может быть сингулярным больше ни для какого корня из D, кроме β. В самом деле, если это не так, то, рассуждая, как выше, мы получим, что корень $\widetilde{\alpha}$ относится к случаю iii). Но тогда α обязан быть сингулярным для корня $\widetilde{\beta}_0$ — противоречие.

Кроме того, корень γ не может быть сингулярным больше ни для какого корня из D, кроме β и β_0. Действительно, если $\beta_2 = \alpha_2 + \gamma$ для некоторых, $\beta_2 \in D$, $\beta_2 \neq \beta$, $\beta_2 \neq \beta_0$, $\alpha_2 \in \Phi^+$, то корни $\eta = \beta$, $\eta_1 = \beta_0$, $\eta' = \widetilde{\beta}_0$, $\eta_2 = \beta_2$, $\theta = \alpha$, $\theta' = \widetilde{\alpha}$, $\theta_1 = \alpha_0$, $\theta_2 = \alpha_2$, $\psi = \gamma$ и $\psi' = \widetilde{\gamma}$ образуют в D_5^+ запрещённый набор типа 1, а это невозможно в силу леммы 3.9. Аналогично, $\widetilde{\gamma}$ не сингулярен больше ни для какого корня из D, кроме β, $\widetilde{\beta}_0$. Мы видим, что корень α относится к случаю ii), причём корни β_0, $\widetilde{\beta}_0$ определены однозначно.

Если, наконец, $\beta = \alpha + \gamma$, $\beta_0 = \alpha_0 + \gamma$ и ни один из корней α, α_0 не сингулярен больше ни для одного корня из D, кроме β, β_0 соответственно, то мы попадаем в случай i), причём корень β_0 определён однозначно.

Осталось рассмотреть случай, когда $\alpha = \alpha_0$ не сингулярен для β, но сингулярен для какого-то другого корня из D; пусть, скажем, $\beta_0 = \alpha_0 + \gamma'$ для некоторых $\beta_0 \in D$, $\beta_0 \neq \beta$, $\gamma' \in \Phi^+$. Раз α не сингулярен для β, то он не может относиться ни к одному из случаев i)–iii). Если и корень γ' не сингулярен для β, то $\alpha = \alpha_0$ не относится и к случаю iv), поэтому $y_{\alpha_0} = x_{\alpha_0}$.

Предположим, что $\gamma' \in S(\beta)$, то есть $\beta = \alpha' + \gamma'$ для некоторого $\alpha' \in \Phi^+$. Если $\alpha' \in \mathrm{Supp}(x)$, то корень α' относится к одному из случаев i)–iii), но тогда $y_{\alpha_0} = x_{\alpha_0}$. Если же

$\alpha' \notin \mathrm{Supp}(x)$, то обязательно найдётся ещё один $\beta_1 \in D$, отличный от β, β_0, для которого $\beta_1 = \alpha_1 + \gamma'$ при некотором $\alpha_1 \in \Phi^+$ (а иначе $f([x, e_{\gamma'}]) = \xi_{\beta_0} \cdot x_{\alpha_0} \cdot N_{\alpha_0\gamma'} \neq 0$). Но тогда ни один из корней $\alpha', \alpha = \alpha_0$ не может быть сингулярным ни для одного корня из D, кроме β, β_0 соответственно.

Действительно, предположим, что корень $\alpha = \alpha_0$ сингулярен ещё для какого-то корня из D, кроме β_0, то есть $\widetilde{\beta}_0 = \alpha_0 + \widetilde{\gamma}$ для некоторых $\widetilde{\beta}_0 \in D$, $\widetilde{\beta}_0 \neq \beta_0$, $\widetilde{\gamma} \in \Phi^+$. Корень $\widetilde{\beta}_0$ не может совпасть с β, ибо $\alpha = \alpha_0$ не сингулярен для β. Не может $\widetilde{\beta}_0$ совпасть и с β_1, ибо тогда

$$(\beta_0, \beta_1) = (\alpha_0, \gamma', \beta_1) = (\alpha_0, \widetilde{\beta}_0) + (\gamma', \beta_1) = 1/2 + 1/2 = 1.$$

В то же время, $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\beta}_0 - \alpha_0 = \widetilde{\beta}_0 - \beta_0 + \gamma'$, поэтому $(\beta, \widetilde{\gamma}) = 1/2$, а значит, $\widetilde{\gamma} \in S(\beta)$ (если $\beta \in S(\widetilde{\gamma})$, то $\beta < \beta_0$, то есть β не максимален среди всех корней из D). Но тогда если $\beta = \widetilde{\alpha} + \widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\alpha} \in \Phi^+$, то корни $\eta = \beta$, $\eta_1 = \beta_0$, $\eta_2 = \beta_1$, $\eta' = \widetilde{\beta}_0$, $\theta = \alpha'$, $\theta_1 = \alpha = \alpha_0$, $\theta_2 = \alpha_1$, $\psi = \gamma'$ и $\psi' = \widetilde{\gamma}$ образуют в D_5^+ запрещённый набор типа 1, что невозможно ввиду леммы 3.9.

С другой стороны, если корень α' сингулярен для какого-то корня из D, кроме β, то найдутся такие $\widetilde{\beta} \in D$, $\widetilde{\beta} \neq \beta$, $\widetilde{\gamma} \in \Phi^+$, что $\widetilde{\beta} = \alpha' + \widetilde{\gamma}$. Корень $\widetilde{\beta}$ не может совпасть с β_0, ибо тогда $(\beta, \beta_0) = 1$; по аналогичным соображениям, $\widetilde{\beta} \neq \beta_1$. Но в таком случае корни $\eta = \beta$, $\eta' = \widetilde{\beta}$, $\eta_1 = \beta_0$, $\eta_2 = \beta_1$, $\theta = \gamma$, $\theta' = \widetilde{\gamma}$, $\psi = \alpha'$, $\psi_1 = \alpha = \alpha_0$ и $\psi_2 = \alpha_1$ образуют в D_5^+ запрещённый набор типа 2, что противоречит лемме 3.9.

Получается, что если корень $\alpha = \alpha_0$ не сингулярен для β, но сингулярен для какого-то другого корня $\beta_0 \in D$, и $y_\alpha \neq x_\alpha$, то $\alpha = \alpha_0$ обязательно относится к случаю iv); в частности, корень β_0 определён однозначно.

Таким образом, если $y_\alpha \neq x_\alpha$, то α относится ровно к одному из случаев i)–iv), причём в каждом случае корень β_0 (от которого только и зависит y_α) определён однозначно. Это доказывает, что все y_α корректно определены. Более того, обозначим через X, Y матрицы размера $|\mathcal{A}| \times l$, столбики которых состоят из коэффициентов разложения векторов $x_1, \ldots, x_l \in \mathfrak{b}$ и $y_1 = \varphi(x_1), \ldots, y_l = \varphi(x_l)$ соответственно по стандартному базису $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ алгебры $\mathfrak{u}_{\mathcal{A}}$. Пусть T — диагональная матрицу размера $|\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}|$, (строки и столбцы нумеруются корнями из $\mathcal{A}$), (α, α)-ый элемент которой равен

$$t_{\alpha,\alpha} = \begin{cases} \xi_\beta / \xi'_\beta, & \text{если } \alpha \text{ относится к случаю i)}, \\ (\xi_\beta \cdot \xi'_{\beta_0}) / (\xi'_\beta \cdot \xi_{\beta_0}), & \text{если } \alpha \text{ относится к случаю ii) или iii)}, \\ \xi_{\beta_0} / \xi'_{\beta_0}, & \text{если } \alpha = \alpha_0 \text{ относится к случаю iv)}, \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

В таких обозначениях $Y = TX$, но матрица T обратима, поэтому $\mathrm{rk}\, X = \mathrm{rk}\, Y$. Для завершения доказательства предложения нам осталось убедиться в том, что если $x \in \mathfrak{b}$, то $y \in \mathfrak{b}'$, то есть $f'([y, e_{\widehat{\gamma}}]) = 0$ для любого $\widehat{\gamma} \in \Phi^+$.

Рассмотрим разные варианты расположения корня $\widehat{\gamma}$.

1. Предположим сначала, что $(\beta, \widehat{\gamma}) = 0$, то есть $\widehat{\gamma} \in \widetilde{\Phi}^+$ (тогда $\widehat{\gamma} \notin S(\beta)$); пусть $\beta_1, \ldots, \beta_l$ — те корни из $\widetilde{D} = D \setminus \{\beta\}$, для которых корень $\widehat{\gamma}$ сингулярен, и $\alpha_i = \beta_i - \widehat{\gamma}$ для любого i. Тогда $(\beta, \alpha_i) = (\beta, \beta_i - \widehat{\gamma}) = 0$, поэтому ни один из векторов e_{α_i} не лежит в $\mathrm{Supp}(x) \subset \mathcal{A} = \Phi^+ \setminus \widetilde{\Phi}^+$, так что $f'([y, e_{\widehat{\gamma}}]) = 0$.

2. Пусть теперь $(\beta, \widehat{\gamma}) \neq 0$, то есть $\widehat{\gamma} \in \mathcal{A}$. Если $(\beta, \widehat{\gamma}) = 1$, то $\widehat{\gamma} = \beta$, но β не сингулярен ни для какого корня из D, поэтому $f'([y, e_{\widehat{\gamma}}]) = f'([y, e_\beta]) = 0$. Если $(\beta, \widehat{\gamma}) = -1/2$, то $\widehat{\gamma}$ не сингулярен для β; переобозначим тогда $\gamma_0 = \widehat{\gamma}$ (тем самым, надо проверить, что

$f'([y,e_{\gamma_0}])=0$). Если для всех $\widetilde{\beta}_0\in\widetilde{D}$, для которых корень γ_0 сингулярен, корни $\alpha=\widetilde{\beta}_0-\gamma_0$ не входят в $\mathrm{Supp}(x)$, то $f'([y,e_{\gamma_0}])=0$ автоматически. С другой стороны, предположим, что существует такой $\widetilde{\beta}_0\in\widetilde{D}$, что $\widetilde{\beta}_0=\alpha+\gamma_0$ для некоторого $\alpha\in\mathrm{Supp}(x)$.

Раз $(\beta,\alpha)=(\beta,\widetilde{\beta}_0-\gamma)=1/2$, то $\alpha\in S(\beta)$ (если $\beta\in S(\alpha)$, то $\beta<\widetilde{\beta}_0$, то есть β не максимален среди всех корней из D), то есть $\beta=\alpha+\gamma$, $\gamma\in\Phi^+$. Корень γ обязан быть сингулярным ещё хоть для одного корня из D (иначе $f([x,e_\gamma])=\xi_\beta\cdot x_\alpha\cdot N_{\alpha\gamma}\neq 0$); пусть, скажем, $\beta_0=\alpha_0+\gamma$, $\alpha_0\in\mathrm{Supp}(x)$. Рассуждая, как выше, получаем, что α относится к случаю iii), а тогда

$$\begin{aligned}
f'([y,e_{\gamma_0}])&=\xi'_{\beta_0}\cdot N_{\widetilde{\alpha}\gamma_0}\cdot y_{\widetilde{\alpha}}+\xi'_{\widetilde{\beta}_0}\cdot N_{\alpha\gamma_0}\cdot y_\alpha\\
&=\xi'_{\beta_0}\cdot N_{\widetilde{\alpha}\gamma_0}\cdot x_{\widetilde{\alpha}}\cdot(\xi_\beta\cdot\xi'_{\widetilde{\beta}_0})/(\xi'_\beta\cdot\xi_{\widetilde{\beta}_0})\\
&+\xi'_{\widetilde{\beta}_0}\cdot N_{\alpha\gamma_0}\cdot y_\alpha\cdot(\xi_\beta\cdot\xi'_{\beta_0})/(\xi'_\beta\cdot\xi_{\beta_0})\\
&=(\xi_{\beta_0}\cdot N_{\widetilde{\alpha}\gamma_0}\cdot x_{\widetilde{\alpha}}+\xi_{\widetilde{\beta}_0}\cdot N_{\alpha\gamma_0}\cdot x_\alpha)\cdot(\xi'_{\beta_0}\cdot\xi'_{\widetilde{\beta}_0}\cdot\xi_\beta)/(\xi_{\beta_0}\cdot\xi_{\widetilde{\beta}_0}\cdot\xi'_\beta)\\
&=f([x,e_{\gamma_0}])\cdot(\xi'_{\beta_0}\cdot\xi'_{\widetilde{\beta}_0}\cdot\xi_\beta)/(\xi_{\beta_0}\cdot\xi_{\widetilde{\beta}_0}\cdot\xi'_\beta)=0.
\end{aligned}$$

3. Пусть теперь $(\beta,\widehat{\gamma})=1/2$ и $\widehat{\gamma}\in S(\beta)$; переобозначим тогда $\gamma=\widehat{\gamma}$ (тем самым, надо проверить, что $f'([y,e_\gamma])=0$). Пусть, скажем, $\beta=\alpha+\gamma$, $\alpha\in\Phi^+$, $\beta_1,\ldots,\beta_l$ — все те корни из $\widetilde{D}$, для которых γ сингулярен, и $\alpha_i=\beta_i-\gamma$ для любого i. Если $\alpha\in\mathrm{Supp}(x)$, то, рассуждая, как выше, мы заключаем, что α относится к одному из случаев i)–iii). Если α относится к случаю i), то каждый из корней α_i относится к случаю iv), поэтому

$$\begin{aligned}
f'([y,e_\gamma])&=\xi'_\beta\cdot N_{\alpha\gamma}\cdot y_\alpha+\sum_{i=1}^{l}\xi'_{\beta_i}\cdot N_{\alpha_i\gamma}\cdot y_{\alpha_i}\\
&=\xi'_\beta\cdot N_{\alpha\gamma}\cdot x_\alpha\cdot\xi_\beta/\xi'_\beta+\sum_{i=1}^{l}\xi'_{\beta_i}\cdot N_{\alpha_i\gamma}\cdot x_{\alpha_i}\cdot\xi_{\beta_i}/\xi'_{\beta_i}\\
&=\xi_\beta\cdot N_{\alpha\gamma}\cdot x_\alpha+\sum_{i=1}^{l}\xi_{\beta_i}\cdot N_{\alpha_i\gamma}\cdot x_{\alpha_i}=f([x,e_\gamma])=0.
\end{aligned}$$

Если же α относится к случаю ii) или iii), то γ сингулярен ещё ровно для одного корня из D, кроме β (для $\beta_0=\alpha_0+\gamma$), причём $y_{\alpha_0}=x_{\alpha_0}$ и

$$\begin{aligned}
f'([y,e_\gamma])&=\xi'_\beta\cdot N_{\alpha\gamma}\cdot y_\alpha+\xi'_{\beta_0}\cdot N_{\alpha_0\gamma}\cdot y_{\alpha_0}\\
&=\xi'_\beta\cdot N_{\alpha\gamma}\cdot x_\alpha\cdot(\xi_\beta\cdot\xi'_{\beta_0})/(\xi_{\beta'}\cdot\xi_{\beta_0})+\xi'_{\beta_0}\cdot N_{\alpha_0\gamma}\cdot x_{\alpha_0}\\
&=(\xi_\beta\cdot N_{\alpha\gamma}\cdot x_\alpha+\xi_{\beta_0}\cdot N_{\alpha_0\gamma}\cdot x_{\alpha_0})\cdot\xi'_{\beta_0}/\xi_{\beta_0}=f([x,e_\gamma])\cdot\xi'_{\beta_0}/\xi_{\beta_0}=0.
\end{aligned}$$

Предположим теперь, что $\alpha\notin\mathrm{Supp}(x)$. Если ни один из α_i тоже не входит в $\mathrm{Supp}(x)$, то, автоматически, $f'([y,e_\gamma])=0$, так как $\mathrm{Supp}(x)=\mathrm{Supp}(y)$. В то же время, если хоть один из α_i содержится в $\mathrm{Supp}(x)$, то таких корней по крайней мере два; пусть, к примеру, $\alpha_i,\alpha_j\in\mathrm{Supp}(x)$. Корень α_i не может быть сингулярным больше ни для какого корня из D, кроме β_i. В самом деле, пусть $\widetilde{\beta}_i=\alpha_i+\widetilde{\gamma}$ для некоторых $\widetilde{\beta}_i\in D$, $\widetilde{\gamma}\in\Phi^+$. Поскольку

$$(\beta,\alpha_i)=(\beta,\beta_i-\gamma)=-1/2,$$

то $\alpha_i\notin S(\beta)$, поэтому $\widetilde{\beta}_i\neq\beta$. Но тогда $(\beta,\widetilde{\gamma})=(\beta,\widetilde{\beta}_i-\alpha_i)=1/2$, то есть $\widetilde{\gamma}\in S(\beta)$ (если $\beta\in S(\widetilde{\gamma})$, то $\beta<\widetilde{\beta}_i$, то есть β не максимален среди всех корней из D). Пусть, например,

$\beta = \widetilde{\alpha} + \widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\alpha} \in \Phi^+$. Если $\widetilde{\beta}_i = \beta_j$, то

$$(\beta_i, \beta_j) = (\alpha_i + \gamma, \beta_j) = (\alpha_i, \widetilde{\beta}_i) + (\gamma, \beta_j) = 1/2 + 1/2 = 1.$$

Следовательно, $\widetilde{\beta}_i \neq \beta_j$. Но тогда корни $\eta = \beta$, $\eta_1 = \beta_i$, $\eta_2 = \beta_j$, $\eta' = \widetilde{\beta}_i$, $\theta = \alpha$, $\theta' = \widetilde{\alpha}$, $\theta_1 = \alpha_i$, $\theta_2 = \alpha_j$, $\psi = \gamma$ и $\psi' = \widetilde{\gamma}$ образуют в D_5^+ запрещённый набор типа 1, что противоречит лемме 3.9. Итак, α_i не сингулярен ни для какого корня из D, кроме β_i.

Аналогично, пусть α сингулярен ещё для какого-то корня из D, кроме β: например, $\widetilde{\beta} = \alpha + \widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\beta} \neq \beta$, $\widetilde{\gamma} \in \Phi^+$. Корень $\widetilde{\beta}$ не совпадает с β_i, ибо иначе

$$(\beta, \beta_i) = (\alpha + \gamma, \beta_i) = (\alpha, \widetilde{\beta}) + (\gamma, \beta_i) = 1/2 + 1/2 = 1.$$

По тем же соображениям, $\widetilde{\beta} \neq \beta_j$. Но тогда корни $\eta = \beta$, $\eta' = \widetilde{\beta}$, $\eta_1 = \beta_i$, $\eta_2 = \beta_j$, $\theta = \gamma$, $\theta' = \widetilde{\gamma}$, $\psi = \alpha$, $\psi_1 = \alpha_i$ и $\psi_2 = \alpha_j$ образуют в D_5^+ запрещённый набор типа 2, а этого не может быть по лемме 3.9. Итак, α и все $\alpha_i \in \mathrm{Supp}(x)$ не сингулярны больше ни для одного корня из D, кроме β, β_i соответственно. Значит, все $\alpha_i \in \mathrm{Supp}(x)$ относятся к случаю iv), а потому

$$\begin{aligned} f'([y, e_\gamma]) &= \sum_{i=1}^{l} \xi'_{\beta_i} \cdot N_{\alpha_i\gamma} \cdot y_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{l} \xi'_{\beta_i} \cdot N_{\alpha_i\gamma} \cdot x_{\alpha_i} \cdot \xi_{\beta_i}/\xi'_{\beta_i} \\ &= \sum_{i=1}^{l} \xi_{\beta_i} \cdot N_{\alpha_i\gamma} \cdot x_{\alpha_i} = f([x, e_\gamma]) = 0. \end{aligned}$$

4. Наконец, пусть $(\beta, \widehat{\gamma}) = 1/2$ и $\beta \in S(\widehat{\gamma})$. Тогда $\widehat{\gamma}$ не сингулярен ни для одного корня из D, а значит, $f'([y, e_{\widehat{\gamma}}]) = 0$. Предложение доказано. $\square$

Соединяя предложение 3.15 с предложением 3.14, мы получаем доказательство основной теоремы 3.3 для систем корней с простыми связями. В случае $\Phi = A_n$ эта теорема была ранее доказана А.Н. Пановым [10] (на самом деле, им были получены более точные результаты, часть из которых мы в параграфе 4 переносим на остальные классические системы корней).

Более того, случай $\Phi = D_n$ изучен нами в рамках общей схемы для классических систем корней (см. параграф 4), так что *фактически* теорема 3.3 представляет интерес лишь для систем корней E_6, E_7 и E_8. Но поскольку все рассуждения для систем корней с простыми связями получаются единообразными, мы сочли возможным в этом пункте изложить доказательство этой теоремы именно в такой общности.

3.3. Системы корней с кратными связями

Докажем теперь основную теорему 3.3 для неприводимых систем корней с кратными связями (`multiply laced`), то есть для таких систем корней, в которых встречаются корни двух разных длин: длинные и короткие. Точнее говоря, в *этом* пункте мы ограничимся рассмотрением случаев F_4 и G_2. Дело в том, что для всех систем корней с кратными связями уже не удаётся дать единообразные доказательства. В то же время, случаи B_n и C_n полностью рассмотрены в следующем параграфе в рамках общей схемы для классических систем корней. (Мы даже будем использовать часть результатов из следующего параграфа; разумеется, они *никак* не зависят от наших рассуждений в этом пункте.)

Изучим сначала совсем простой случай $\Phi = G_2$. Напомним, что

$$G_2^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\},$$

где $||\alpha_1||^2 = 1$, $||\alpha_2||^2 = 3$ и угол между α_1, α_2 равен $5\pi/6$ (см. пункт 2.1). Каждое ортогональное подмножество содержит, разумеется, не больше двух корней. Если $|D| = 1$, то доказывать нечего: Ω — элементарная орбита (см. пример 2.9), значит, $\dim \Omega = |S(\beta)|$, где $D = \{\beta\}$. Тривиально проверяется, что в каждом случае $l(\sigma) - s(\sigma)$ тоже совпадает с $|S(\beta)|$ (здесь $\sigma = r_\beta$).

В G_2^+ ровно три ортогональных подмножества мощности два; рассмотрим их по отдельности. Отметим, что в каждом случае σ — центральная симметрия, поэтому $l(\sigma) = 6$ и $l(\sigma) - s(\sigma) = 6 - 2 = 4$. Будем писать $D = \{\beta_1, \beta_2\}$.

i) $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$. Корень $\beta_1 = \alpha_1$ — базисный, поэтому $S(\beta_1) = \varnothing$. С другой стороны, β_2-сингулярные корни имеют вид

$$S(\beta_2) = \{\alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2\} \cup \{\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2\}.$$

Положим $\mathcal{M} = \{\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$, $\mathcal{P} = \Phi^+ \setminus \mathcal{M}$ и $\mathfrak{p} = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} k e_\alpha$. Понятно, что $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{u}$ — *изотропное* подпространство (см. определение 2.4), так как из каждой пары β_i-сингулярных корней, $i = 1, 2$, $\mathcal{P}$ содержит ровно один.

Более того, если x не лежит в $\mathfrak{p}$, то $\mathrm{Supp}(x)$ содержит хотя бы один из корней $\gamma_1 = \alpha_2, \gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_2$. Если, например, $x = x_1 e_{\gamma_1} + \ldots$, $x_1 \neq 0$, то

$$f([x, e_{3\alpha_1+\alpha_2}]) = \xi_{\beta_2} \cdot x_1 \cdot N_{\gamma_1, 3\alpha_1+\alpha_2} \neq 0.$$

Аналогично, если $x = x_2 e_{\gamma_2} + \ldots$, $x_2 \neq 0$, то

$$f([x, e_{2\alpha_1+\alpha_2}]) = \xi_{\beta_2} \cdot x_2 \cdot N_{\gamma_2, 2\alpha_1+\alpha_2} \neq 0.$$

Таким образом, $\mathfrak{p}$ — *максимальное* (по включению) изотропное подпространство, поэтому, ввиду (6), размерность орбиты Ω не зависит от выбора отображения ξ и равна

$$\dim \Omega = 2 \cdot \mathrm{codim}_{\mathfrak{u}} \mathfrak{p} = 4 = l(\sigma) - s(\sigma).$$

Заметим, что $\mathcal{P}$, очевидно, является замкнутым подмножеством Φ^+, поэтому $\mathfrak{p}$ — подалгебра, а значит, поляризация для f (хотя это не имеет значения для вычисления $\dim \Omega$).

ii) $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = 3\alpha_1 + \alpha_2$. Здесь

$$S(\beta_1) = \{\alpha_1, \alpha_2\}, S(\beta_2) = \{\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2\}.$$

Положим $\mathcal{M} = \{\alpha_1\}$ и определим $\mathcal{P}, \mathfrak{p}$, как выше. Очевидно, что $\mathfrak{p}$ — изотропное подпространство. В то же время, если $x = x_1 e_{\alpha_1} + \ldots \notin \mathfrak{p}$, $x_1 \neq 0$, то $f([x, e_{\alpha_2}]) = \xi_{\beta_1} \cdot x_1 \cdot N_{\alpha_1 \alpha_2} \neq 0$, поэтому $\mathfrak{p}$ — максимальное изотропное подпространство (и даже поляризация для f, так как $\mathcal{P}$ — замкнутое подмножество Φ^+), а значит, размерность Ω не зависит от ξ и равна

$$\dim \Omega = 2 \cdot \mathrm{codim}_{\mathfrak{u}} \mathfrak{p} = 2 < 4 = l(\sigma) - s(\sigma).$$

iii) $\beta_1 = \alpha_2, \beta_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$. Корень $\beta_1 = \alpha_2$ — базисный, поэтому $S(\beta_1) = \varnothing$; с другой стороны, $S(\beta_2) = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2\}$. Положив $\mathcal{M} = \{\alpha_1\}$ и определив $\mathcal{P}$ и $\mathfrak{p}$, как выше, получим, как и на предыдущем шаге, что $\mathfrak{p}$ — поляризация для f, поэтому размерность Ω не зависит от ξ и равна

$$\dim \Omega = 2 \cdot \mathrm{codim}_{\mathfrak{u}} \mathfrak{p} = 2 < 4 = l(\sigma) - s(\sigma).$$

Перейдём теперь к более сложному случаю $\Phi = F_4$. Напомним, что

$$F_4^+ = \{\varepsilon_i, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j, (\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)/2, 1 \leqslant i < j \leqslant 4\}$$

(знаки независимы).

При этом базисные корни имеют вид

$$\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \alpha_3 = \varepsilon_4, \alpha_4 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2,$$

где $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^4$ — стандартный базис $\mathbb{R}^4$ (см. пункт 2.1). Для удобства введём обозначения $\widetilde{\Phi}^+ = \{\varepsilon_i, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leqslant i < j \leqslant 4\}$ и $\mathcal{B} = \Phi^+ \setminus \widetilde{\Phi}^+$. Имеем очевидный изоморфизм систем корней $\widetilde{\Phi} \cong B_4$, где $\widetilde{\Phi} = \pm\widetilde{\Phi}^+$.

Предположим сначала, что $D \subset \widetilde{\Phi}^+$. Обозначим через $\widetilde{W}$ группу Вейля системы корней $\widetilde{\Phi}$ и через $\widetilde{\sigma}$ — инволюцию в $\widetilde{W}$, соответствующую подмножеству D. Ясно, что $\widetilde{s}(\widetilde{\sigma}) = s(\sigma) = |D|$ и $\widetilde{l}(\widetilde{\sigma}) \leqslant l(\sigma)$. Точнее говоря,

$$\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}} + \#\{\alpha \in \mathcal{B} \mid \sigma\alpha < 0\} \tag{10}$$

(здесь мы для краткости обозначили $\mathcal{F} = l(\sigma) - s(\sigma)$ и $\widetilde{\mathcal{F}} = \widetilde{l}(\widetilde{\sigma}) - \widetilde{s}(\widetilde{\sigma})$).

Обозначим для краткости $\widetilde{\mathfrak{u}} = \sum_{\alpha\in\widetilde{\Phi}^+} ke_\alpha$; пусть также $\mathfrak{u}_\mathcal{B} = \sum_{\alpha\in\mathcal{B}} ke_\alpha$ ($\mathfrak{u} = \widetilde{\mathfrak{u}} \oplus \mathfrak{u}_\mathcal{B}$ как векторные пространства) и $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{u}_\mathcal{B}$. Положим $f = f|_{\widetilde{\mathfrak{u}}} \in \widetilde{\mathfrak{u}}^* = \sum_{\alpha\in\widetilde{\Phi}^+} ke_\alpha^* \subset \mathfrak{u}^*$, $\widetilde{U} = \exp(\widetilde{\mathfrak{u}})$. Пусть $\widetilde{\Omega} \subset \widetilde{\mathfrak{u}}^*$ — орбита $\widetilde{f}$ относительно коприсоединённого представления группы $\widetilde{U}$. Пусть также $\mathfrak{a} = \mathfrak{rad}_\mathfrak{u} f$, $\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{rad}_{\widetilde{\mathfrak{u}}}\widetilde{f}$. Из теоремы 4.13 следует, что $\dim\widetilde{\Omega} = \widetilde{\mathcal{F}} - 2\vartheta$, где ϑ зависит только от D (но не от ξ). Следующие два утверждения близки по смыслу к утверждению 3.12 и лемме 3.13 для систем корней с простыми связями.

Утверждение 3.16. *Подалгебра $\mathfrak{a}$ распадается в прямую сумму своих подпространств $\mathfrak{a} = \widetilde{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{b}$.*

Доказательство. Пусть $x \in \widetilde{\mathfrak{a}}$, $\alpha \in \mathrm{Supp}(x)$. Если γ лежит в $\widetilde{\Phi}^+$, то $f([x, e_\gamma]) = 0$, ибо $\widetilde{\mathfrak{a}}$ — радикал $\widetilde{f} = f|_{\widetilde{\mathfrak{u}}}$ на пространстве $\widetilde{\mathfrak{u}}$. Если же $\gamma \in \mathcal{B}$, то и $\alpha + \gamma \in \mathcal{B}$, поэтому $f([e_\alpha, e_\gamma]) = 0$. Следовательно, $f([x, e_\gamma]) = 0$ для любого $\gamma \in \Phi^+$, то есть $x \in \mathfrak{a}$. Это показывает, что $\widetilde{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{a}$. С другой стороны, пусть $x = y + z \in \mathfrak{a}$, $y \in \widetilde{\mathfrak{u}}$, $z \in \mathfrak{u}_\mathcal{B}$, $\alpha \in \mathrm{Supp}(z)$ и $\gamma \in \widetilde{\Phi}^+$. Тогда $\alpha+\gamma \in \mathcal{B}$, поэтому $f([z, e_\gamma]) = 0$, а значит, и $f([y, e_\gamma]) = 0$, то есть $y \in \widetilde{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{a}$. Поэтому и $z \in \mathfrak{a}$, то есть $z \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{u}_\mathcal{B} = \mathfrak{b}$ и, тем самым, $\mathfrak{a} = \widetilde{\mathfrak{a}} + \mathfrak{b}$. Но $\widetilde{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{b} = 0$, поэтому сумма прямая. $\square$

Утверждение 3.17. *Имеет место равенство $\mathfrak{b} = \langle e_\alpha, \alpha \in \mathcal{B} \mid \sigma\alpha > 0\rangle_k$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\alpha \in \mathcal{B} \mid \sigma\alpha > 0\}$. Изучим возможные случаи расположения корней из D. Предположим сначала, что в D нет корней ε_1, $\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j$, $j = 2, 3, 4$. Тогда для любого $\alpha \in \mathcal{B}$ имеем $\sigma\alpha = \varepsilon_1/2 \pm \ldots > 0$, то есть $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$. Но в этом случае ни один корень из $\mathcal{B}$ не является сингулярным ни для какого корня из D, а потому $\mathfrak{b} = \mathfrak{u}_\mathcal{B}$, как и должно быть.

Пусть теперь $\beta = \varepsilon_1 \in D$. Тогда, разумеется, в D нет корней вида $\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j$, $j = 2, 3, 4$, поэтому $\sigma\alpha = -\varepsilon_1/2 \pm \ldots < 0$ для любого $\alpha \in \mathcal{B}$. Значит, $\widetilde{\mathcal{B}} = \varnothing$. С другой стороны, если $\alpha \in \mathcal{B}$, то $\gamma = \beta - \alpha$ будет сингулярен ровно для одного корня из D: для β. Значит,

$$f([x, e_\gamma]) = \xi_\beta \cdot x_\alpha \cdot N_{\alpha\gamma} \neq 0$$

при $x = x_\alpha e_\alpha + \ldots \in \mathfrak{u}_\mathcal{B}$. Тем самым, $\mathfrak{b} = 0$, как и должно быть.

Предположим, далее, что $\beta = \varepsilon_1 - \varepsilon_j \in D$ для некоторого j и $\varepsilon_1 + \varepsilon_j \notin D$. В этом случае $\sigma\alpha > 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = (\varepsilon_1 + \varepsilon_j \pm \ldots)/2$. Если теперь $\gamma \in \widetilde{\Phi}^+$, то $\alpha + \gamma \in \mathcal{B}$, поэтому $f([e_\alpha, e_\gamma]) = 0$ автоматически, а если $\gamma \in \mathcal{B}$, то коэффициент при ε_j в γ не меньше $-1/2$, поэтому $\alpha + \gamma \neq \beta$. В то же время, $\alpha + \gamma = \varepsilon_1 \pm \ldots$, поэтому $\alpha + \gamma \notin S(\beta)$, каким бы ни был $\beta \in D$. Значит, $e_\alpha \in \mathfrak{b}$. Однако если $x \in \mathfrak{u}_{\mathcal{B}}$ и $\alpha = (\varepsilon_1 - \varepsilon_j \pm \ldots)/2 \in \mathrm{Supp}(x)$, то в D есть ровно один корень, для которого $\gamma = \beta - \alpha$ будет сингулярным: это β. Если $x = x_\alpha e_\alpha + \ldots$, то $f([x, e_\gamma]) = \xi_\beta \cdot x_\alpha \cdot N_{\alpha\gamma} \neq 0$, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{b} = \langle e_\alpha, \alpha \in \widetilde{\mathcal{B}} \rangle_k$, как и должно быть.

Аналогично, если $\beta = \varepsilon_1 + \varepsilon_j \in D$, а $\varepsilon_1 - \varepsilon_j \notin D$, то $\sigma\alpha > 0$ равносильно тому, что $\alpha = (\varepsilon_1 - \varepsilon_j \pm \ldots)/2$, а значит, $e_\alpha \in \mathfrak{b}$. В то же время, любой $\gamma = \beta - \alpha$, где $\alpha = (\varepsilon_1 + \varepsilon_j \pm \ldots)$, сингулярен только для одного корня из D (для β), поэтому $f([x, e_\gamma]) \neq 0$, где $\gamma = \beta - \alpha$, а значит, $x \notin \mathfrak{a}$, если $x \in \mathfrak{u}_{\mathcal{B}}$ и $\alpha \in \mathrm{Supp}(x)$. Итак, $\mathfrak{b} = \langle e_\alpha, \alpha \in \widetilde{\mathcal{B}} \rangle_k$, как и должно быть.

Пусть, наконец, $\varepsilon_1 - \varepsilon_j, \varepsilon_1 + \varepsilon_j \in D$. Тогда $\sigma\alpha = -\varepsilon_1/2 \pm \ldots < 0$ для любого α из $\mathcal{B}$, поэтому $\widetilde{\mathcal{B}} = \varnothing$. Но любой корень из $\mathcal{B}$ имеет вид

$$\alpha = (\varepsilon_1 + z \cdot \varepsilon_j \pm \ldots)/2,\ z = \pm 1 \text{ (знаки независимы)},$$

а значит, будет сингулярным ровно для одного корня из D (для $\beta = \varepsilon_1 + z \cdot \varepsilon_j$); то же верно и для $\gamma = \beta - \alpha$. Рассуждая, как выше, мы получаем, что x не содержится в $\mathfrak{a}$ при $x \in \mathfrak{u}_{\mathcal{B}}$ и $\alpha \in \mathrm{Supp}(x)$. Значит, $\mathfrak{b} = 0$, как и должно быть. Утверждение доказано. $\square$

Из (10) и двух только что доказанных утверждений мы получаем, что

$$\begin{aligned}
\dim \Omega &= \mathrm{codim}_{\,\mathfrak{u}} \mathfrak{a} = \dim \mathfrak{u} - \dim \mathfrak{a} \\
&= |\Phi^+| - (\dim \widetilde{\mathfrak{a}} + \dim \mathfrak{b}) \\
&= |\widetilde{\Phi}^+| + |\mathcal{B}| - \dim \widetilde{\mathfrak{a}} - \dim \mathfrak{b} \\
&= (|\widetilde{\Phi}^+| - \dim \widetilde{\mathfrak{a}}) + |\mathcal{B}| - \dim \mathfrak{b} \\
&= (\dim \widetilde{\mathfrak{u}} - \dim \widetilde{\mathfrak{a}}) + |\mathcal{B}| - \#\{\alpha \in \mathcal{B} \mid \sigma\alpha > 0\} \\
&= \mathrm{codim}_{\,\widetilde{\mathfrak{u}}} \widetilde{\mathfrak{a}} + \#\{\alpha \in \mathcal{B} \mid \sigma\alpha < 0\} \\
&= \dim \widetilde{\Omega} + \mathcal{F} - \widetilde{\mathcal{F}} = \widetilde{\mathcal{F}} - 2\vartheta + \mathcal{F} - \widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} - 2\vartheta.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\dim \Omega$ не зависит от ξ и не превосходит $\mathcal{F}$, то есть теорема 3.3 верна для ортогональных подмножеств, целиком лежащих в $\widetilde{\Phi}^+$.

Рассмотрим оставшиеся ортогональные подмножества F_4^+. Итак, будем считать, что в D есть хотя бы один корень из $\mathcal{B}$. Легко видеть, что из любых двух ортогональных корней из $\mathcal{B}$ один будет сингулярным для другого, поэтому можно считать, что D содержит *ровно один* корень из $\mathcal{B}$ (см. лемму 3.7). Ясно, что D не может содержать корней ε_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$.

Как известно, система корней F_4 двойственна сама себе. Возникает биекция $\varphi\colon F_4 \to F_4$, которая положительные корни переводит в положительные и сингулярные — в сингулярные. Мы получаем, что

$$\varphi(\mathcal{B}) = \{\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j, \varepsilon_2 \pm \varepsilon_j, j = 3, 4\}$$

(знаки независимы) и $\varphi(\widetilde{\Phi}) \cong C_4$ (ибо $\widetilde{\Phi} \cong B_4$). Для C_4 можно вновь применить теорему 4.13, поэтому если $D \subset \varphi(\widetilde{\Phi}^+)$, то теорема 3.3 доказана.

Пусть теперь

$$\beta = (\varepsilon_1 + z_2 \cdot \varepsilon_2 + z_3 \cdot \varepsilon_3 + z_4 \cdot \varepsilon_4)/2, \quad z_j = \pm 1,$$

обозначает тот единственный корень из $\mathcal{B}$, который содержится в D (знаки независимы); положим $\widetilde{D} = D \setminus \{\beta\}$. Поскольку мы рассматриваем случай $D \cap \varphi(\mathcal{B}) \neq \varnothing$, множество $\widetilde{D}$ совпадает либо с $\{\varepsilon_1 - z_3 \cdot \varepsilon_3, \varepsilon_2 - z_2 z_4 \cdot \varepsilon_4\}$, либо с $\{\varepsilon_1 - z_4 \cdot \varepsilon_3, \varepsilon_2 - z_2 z_3 \cdot \varepsilon_3\}$, либо с любым корнем из этих двух подмножеств. Корень $\beta = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2 = \alpha_4$ — базисный, поэтому $\Omega = \xi_\beta e_\beta^* + \widetilde{\Omega}$ и, следовательно, $\dim \Omega = \dim \widetilde{\Omega}$, где $\widetilde{\Omega} = \Omega_{\widetilde{D}, \widetilde{\xi}} \subset \mathfrak{u}^*$, $\widetilde{\xi} = \xi|_{D \setminus \{\beta\}}$. С другой стороны, отражение r_β переставляет между собой положительные корни, отличные от β, поэтому если через $\widetilde{\sigma} = \prod_{\widetilde{\beta} \in \widetilde{D}} r_{\widetilde{\beta}} \in W$ обозначить инволюцию в W, соответствующую подмножеству $\widetilde{D}$, то

$$l(\sigma) - s(\sigma) = (l(\widetilde{\sigma}) + 1) - (s(\widetilde{\sigma}) + 1) = l(\widetilde{\sigma}) - s(\widetilde{\sigma}).$$

Но для орбиты $\widetilde{\Omega}$, как мы уже отмечали выше, теорема 3.3 верна, поэтому в этом случае всё доказано.

Итак, дальше будем считать, что $\beta \neq (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2$. По аналогичным соображениям можно считать, что базисный корень $\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ не лежит в D (при $|D| = 2$ всё опять сводится к элементарным орбитам, а при $|D| = 3$ — к орбитам, ассоциированным с двухэлементными подмножествами).

Предположим, что нам удалось для каждого D построить некоторое подмножество $\mathcal{M}$ в Φ^+, удовлетворяющее двум следующим условиям.

1. Если $\alpha + \gamma = \beta \in D$, то $\mathcal{M}$ содержит ровно один из корней α, γ.

2. Для любого $\gamma \in \mathcal{M}$ существует такой $\alpha \in \mathcal{P}$, что $\alpha + \gamma = \beta \in D$ (здесь $\mathcal{P} = \Phi^+ \setminus \mathcal{M}$). Более того, множество $(\alpha + \mathcal{M}) \cap D$ состоит либо из одного корня β, либо из двух корней $\beta, \widetilde{\beta} = \alpha + \widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{M}$. При этом во втором случае $\widetilde{\gamma} \in S(\beta)$ и $(\widetilde{\alpha} + \mathcal{M}) \cap D = \{\beta\}$, где $\widetilde{\alpha} = \beta - \widetilde{\gamma} \in \mathcal{P}$.

Мы утверждаем, что если подмножество $\mathcal{M}$ удовлетворяет этим условиям, то $\mathfrak{p} = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} k e_\alpha$ будет максимальным изотропным подпространством для канонической формы f на Ω. Действительно, если $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{P}$, то $\alpha_1 + \alpha_2 \notin D$, поэтому $f([e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}]) = 0$, а значит, $f([x_1, x_2]) = 0$ вообще для любых $x_1, x_2 \in \mathfrak{p}$, то есть $\mathfrak{p}$ является f-изотропным подпространством.

С другой стороны, предположим, что существует такой $y \notin \mathfrak{p}$, что $\mathfrak{p} + ky$ тоже является f-изотропным подпространством. Пусть $\gamma \in \mathrm{Supp}(y)$ (можно, разумеется, считать, что $\mathrm{Supp}(y) \subset \mathcal{M}$) и α — тот корень из $\mathcal{P}$, для которого $\alpha + \gamma = \beta \in D$. Если $(\alpha + \mathcal{M}) \cap D = \{\beta\}$ и $y_\gamma \neq 0$ — коэффициент при e_γ в разложении y по стандартному базису $\mathfrak{u}$, то

$$f([y, e_\alpha]) = N_{\gamma\alpha} \cdot y_\gamma \cdot \xi_\beta \neq 0.$$

Если же $(\alpha + \mathcal{M}) \cap D = \{\beta, \widetilde{\beta}\}$, $\widetilde{\beta} = \alpha + \widetilde{\gamma}$ и $\beta = \widetilde{\alpha} + \widetilde{\gamma}$, где $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{M}$, $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{P}$, то хотя бы одно из чисел $f([y, e_\alpha])$, $f([y, e_{\widetilde{\alpha}}])$ отлично от нуля. В самом деле, $(\widetilde{\alpha} + \mathcal{M}) \cap D = \{\beta\}$, поэтому если $\widetilde{\gamma} \in \mathrm{Supp}(y)$ (то есть коэффициент $y_{\widetilde{\gamma}}$ при $e_{\widetilde{\gamma}}$ в разложении y по стандартному базису $\mathfrak{u}$ не равен нулю), то

$$f([y, e_{\widetilde{\alpha}}]) = N_{\widetilde{\gamma}\widetilde{\alpha}} \cdot y_{\widetilde{\gamma}} \cdot \xi_\beta \neq 0,$$

А если $y_{\widetilde{\gamma}} = 0$, то есть $\widetilde{\gamma} \notin \mathrm{Supp}(y)$, то, как и выше,

$$f([y, e_\alpha]) = N_{\gamma\alpha} \cdot y_\gamma \cdot \xi_\beta \neq 0.$$

Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{p}$ в самом деле является максимальным по включению f-изотропным подпространством.

Следовательно, размерность орбиты Ω не зависит от ξ и равна

$$\dim \Omega = 2 \cdot \operatorname{codim}_{\mathfrak{u}} \mathfrak{p} = 2 \cdot |\mathcal{M}|.$$

В приведённой ниже таблице искомое множество $\mathcal{M}$ указано для каждого из оставшихся подмножеств D (то, что $\mathcal{M}$ удовлетворяет нужным условиям, проверяется непосредственно). В таблице также приведены интересующие нас числа $\mathcal{F} = l(\sigma) - s(\sigma)$ для каждого подмножества D. Видно, что в каждом случае $2 \cdot |\mathcal{M}| \leqslant \mathcal{F}$; это завершает доказательство теоремы 3.3 для системы корней F_4. В таблице предполагается, что знаки $\pm$ каждый раз независимы; имеется в виду, что в подмножество $\mathcal{M}$ входят все корни, соответствующие произвольной комбинации знаков.

Подмножество D	Подмножество $\mathcal{M}$	$\lvert\mathcal{M}\rvert$	$\mathcal{F}$
1) $\varepsilon_1 + \varepsilon_3$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2$	ε_1, ε_4, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 \pm \varepsilon_4$, $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)/2$	7	14
2) $\varepsilon_1 - \varepsilon_4$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$, $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2$	4	8
3) $\varepsilon_2 + \varepsilon_4$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2$	ε_4, $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$	2	4
4) $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)/2$	3	6
5) $\varepsilon_1 + \varepsilon_4$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2$	ε_1, ε_3, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2$	6	12
6) $\varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2$	ε_3, $\varepsilon_3 \pm \varepsilon_4$	3	6
7) $\varepsilon_2 - \varepsilon_4$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2$	$\varepsilon_3 - \varepsilon_4$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2$	2	4
8) $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2$	ε_4, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)/2$	4	8
9) $\varepsilon_1 - \varepsilon_4$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2$	ε_3, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2$	5	10
10) $\varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2$	ε_3, $\varepsilon_3 \pm \varepsilon_4$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2$	4	8
11) $\varepsilon_2 + \varepsilon_4$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2$	ε_4, $\varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2$	3	6
12) $\varepsilon_1 + \varepsilon_3$, $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2$	ε_1, $\varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $\varepsilon_1 \pm \varepsilon_4$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)/2$	8	16
13) $\varepsilon_1 + \varepsilon_4$, $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2$	ε_1, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)/2$	7	14
14) $\varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2$	ε_2, $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\varepsilon_2 \pm \varepsilon_4$	4	8
15) $\varepsilon_2 + \varepsilon_4$, $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2$	ε_2, $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_4$	3	6
16) $\varepsilon_1 + \varepsilon_3$, $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2$	ε_1, ε_4, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 \pm \varepsilon_4$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)/2$	9	18
17) $\varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2$	ε_2, $\varepsilon_2 \pm \varepsilon_4$, ε_4, $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$	5	10

Подмножество D	Подмножество $\mathcal{M}$	$\lvert\mathcal{M}\rvert$	$\mathfrak{F}$
18) $\varepsilon_1-\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2$	ε_2, $\varepsilon_1-\varepsilon_2$, $\varepsilon_1-\varepsilon_3$, $\varepsilon_2-\varepsilon_3$, $(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2$	6	12
19) $\varepsilon_2-\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2$	ε_2, ε_4, $\varepsilon_2-\varepsilon_3$, $\varepsilon_2+\varepsilon_4$	4	8
20) $\varepsilon_1-\varepsilon_3$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2$	ε_2, $\varepsilon_2-\varepsilon_3$, $\varepsilon_2-\varepsilon_4$, $\varepsilon_3-\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2$	6	14
21) $\varepsilon_1+\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2$	ε_1, ε_2, $\varepsilon_1-\varepsilon_3$, $\varepsilon_2\pm\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2-\varepsilon_3\pm\varepsilon_4)/2$	9	20
22) $\varepsilon_2+\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2$	ε_2, ε_3, $\varepsilon_2\pm\varepsilon_3$, $\varepsilon_2-\varepsilon_4$, $\varepsilon_3-\varepsilon_4$	6	12
23) $\varepsilon_1-\varepsilon_3$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2$	ε_2, ε_4, $\varepsilon_2\pm\varepsilon_3$, $\varepsilon_2+\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3\pm\varepsilon_4)/2$	7	16
24) $\varepsilon_1-\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2$	ε_2, ε_3, $\varepsilon_2+\varepsilon_3$, $\varepsilon_3-\varepsilon_4$, $\varepsilon_2\pm\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2\pm\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2$	8	18
25) $\varepsilon_2-\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2$	ε_2, $\varepsilon_2\pm\varepsilon_3$, $\varepsilon_2+\varepsilon_4$, ε_3, ε_4, $\varepsilon_3+\varepsilon_4$	7	14
26) $\varepsilon_1-\varepsilon_3$, $\varepsilon_2-\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2$	ε_2, ε_4, $\varepsilon_2+\varepsilon_4$, $\varepsilon_2\pm\varepsilon_3$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3\pm\varepsilon_4)/2$	7	16
27) $\varepsilon_1-\varepsilon_3$, $\varepsilon_2+\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2$	ε_2, $\varepsilon_2-\varepsilon_3$, $\varepsilon_2-\varepsilon_4$, $\varepsilon_3-\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2$	6	14
28) $\varepsilon_1+\varepsilon_3$, $\varepsilon_2+\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2$	ε_1, ε_4, $\varepsilon_1-\varepsilon_2$, $\varepsilon_3\pm\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3\pm\varepsilon_4)/2$	7	14
29) $\varepsilon_1-\varepsilon_3$, $\varepsilon_2+\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2$	ε_2, $\varepsilon_2-\varepsilon_3$, $(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3\pm\varepsilon_4)/2$	4	10
30) $\varepsilon_1+\varepsilon_4$, $\varepsilon_2+\varepsilon_3$, $(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2$	ε_3, ε_4, $\varepsilon_2+\varepsilon_4$, $\varepsilon_3+\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1-\varepsilon_2\pm\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2$	6	14
31) $\varepsilon_1-\varepsilon_3$, $\varepsilon_2+\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2$	ε_4, $\varepsilon_2-\varepsilon_3$, $(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3\pm\varepsilon_4)/2$	4	10
32) $\varepsilon_1-\varepsilon_4$, $\varepsilon_2+\varepsilon_3$, $(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2$	ε_3, $\varepsilon_2-\varepsilon_4$, $\varepsilon_3-\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1-\varepsilon_2\pm\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2$	5	12
33) $\varepsilon_1+\varepsilon_3$, $\varepsilon_2+\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2$	ε_1, ε_2, $\varepsilon_2-\varepsilon_4$, $\varepsilon_2+\varepsilon_3$, $\varepsilon_3\pm\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3\pm\varepsilon_4)/2$	8	18
34) $\varepsilon_1+\varepsilon_4$, $\varepsilon_2+\varepsilon_3$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2$	ε_1, ε_2, $\varepsilon_2-\varepsilon_3$, $\varepsilon_3+\varepsilon_4$, $\varepsilon_2+\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1-\varepsilon_2\pm\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2$	7	16
35) $\varepsilon_1+\varepsilon_3$, $\varepsilon_2-\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2$	ε_1, ε_4, $\varepsilon_1-\varepsilon_2$, $\varepsilon_3\pm\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1-\varepsilon_2\pm\varepsilon_3\pm\varepsilon_4)/2$	9	20
36) $\varepsilon_1-\varepsilon_4$, $\varepsilon_2+\varepsilon_3$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2$	ε_2, $\varepsilon_2-\varepsilon_3$, $\varepsilon_2-\varepsilon_4$, $\varepsilon_3-\varepsilon_4$, $(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2$	6	14

§4. Классические системы корней

4.1. Поляризации для канонических форм

Для классических систем корней доказанную в предыдущем параграфе теорему 3.3 удаётся значительно уточнить. Подробнее, для них можно установить, *на сколько именно* размерность данной орбиты, ассоциированной с ортогональным подмножеством, меньше числа $l(\sigma) - s(\sigma)$, то есть вычислить "дефект" ϑ в явном виде (см. теорему 4.13). Более того, удаётся построить поляризации для канонических форм (то есть для элементов $f_{D,\xi}$) на рассматриваемых орбитах (роль поляризаций в методе орбит освещена в пункте 2.3). В качестве следствия формулы для размерности мы описываем все возможные размерности неприводимых комплексных конечномерных представлений группы $U(q)$, см. следствие 4.21. Доказательства до известной степени опираются на рассуждения, аналогичные использованным в предыдущем параграфе: ключевую роль играет индукция по рангу системы корней Φ.

Поскольку ответы на *все* рассматриваемые вопросы для системы корней A_n получены ранее А.Н. Пановым [10], мы будем далее в этом параграфе предполагать, что Φ имеет тип B_n, $n \geqslant 2$, C_n, $n \geqslant 3$, или D_n, $n \geqslant 4$. Мы свободно будем пользоваться представлением Φ в виде подмножества евклидова пространства, указанным в пункте 2.1. Имея в виду (3), определим функции $\mathrm{col}\colon \Phi^+ \to \{1, \ldots, n\}$ и $\mathrm{row}\colon \Phi^+ \to \{-n, \ldots, n\}$ по правилу

$$\begin{aligned} &\mathrm{col}(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) = \mathrm{col}(\varepsilon_i) = \mathrm{col}(2\varepsilon_i) = i,\\ &\mathrm{row}(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) = \mp j, \mathrm{row}(\varepsilon_i) = 0, \mathrm{row}(2\varepsilon_i) = -i. \end{aligned}$$

Для произвольных $-n \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant n$ множества

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_i = \mathcal{R}_i(\Phi) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \mathrm{row}(\alpha) = i\} \text{ и}\\ &\mathcal{C}_j = \mathcal{C}_j(\Phi) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \mathrm{col}(\alpha) = j\} \end{aligned} \tag{11}$$

назовём *i-ой строкой* и *j-ым столбцом* Φ^+ соответственно.

Замечание 4.1. Ввиду леммы 3.7, $|D \cap \mathcal{R}_i| \leqslant 1$ и $|D \cap \mathcal{C}_j| \leqslant 2$ для всех i, j (причём если $|D \cap \mathcal{C}_j| = 2$, то $D \cap \mathcal{C}_j = \{\varepsilon_j - \varepsilon_l, \varepsilon_j + \varepsilon_l\}$ и $\Phi = B_n$ или D_n). Проще говоря, мы будем предполагать, что если $\Phi = B_n$, то в ортогональном подмножестве D нет двух корней ε_i, ε_j, $i \neq j$ (ибо один из них обязательно сингулярен для другого), а если $\Phi = C_n$, то корни $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ и $\varepsilon_i + \varepsilon_j$ не могут входить в D одновременно (ибо первый сингулярен для второго).

Вообще, легко понять, что сингулярные корни для классических систем корней имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &S(\varepsilon_i - \varepsilon_j) = \bigcup_{l=i+1}^{j-1} \{\varepsilon_i - \varepsilon_l, \varepsilon_l - \varepsilon_j\}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n,\\ &S(\varepsilon_i) = \bigcup_{l=i+1}^{n} \{\varepsilon_i - \varepsilon_l, \varepsilon_l\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,\\ &S(2\varepsilon_i) = \bigcup_{l=i+1}^{n} \{\varepsilon_i - \varepsilon_l, \varepsilon_i + \varepsilon_l\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \end{aligned} \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
S(\varepsilon_i+\varepsilon_j) = \bigcup_{l=i+1}^{j-1} \{\varepsilon_i-\varepsilon_l, \varepsilon_l+\varepsilon_j\} \cup \bigcup_{l=j+1}^{n} \{\varepsilon_i-\varepsilon_l, \varepsilon_j+\varepsilon_l\} \\
\cup \bigcup_{l=j+1}^{n} \{\varepsilon_i+\varepsilon_l, \varepsilon_j-\varepsilon_l\} \cup S_{ij}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n, \quad \text{где}
\end{aligned}
$$

$$
S_{ij} = \begin{cases} \{\varepsilon_i, \varepsilon_j\}, & \text{если } \Phi = B_n, \\ \{\varepsilon_i-\varepsilon_j, 2\varepsilon_j\}, & \text{если } \Phi = C_n, \\ \varnothing, & \text{если } \Phi = D_n. \end{cases}
$$

Для наших целей будет удобно представлять множество $S(\beta)$ в виде объединения $S(\beta) = S^+(\beta) \cup S^-(\beta)$, где $S^-(\beta) = S(\beta) \setminus S^+(\beta)$ и

$$
S^+(\beta) = \begin{cases} \{\varepsilon_i+\varepsilon_l, \quad i < l \leqslant n\}, & \text{если } \Phi = C_n \text{ и } \beta = 2\varepsilon_i, \\ S(\beta) \cap \mathcal{C}_{\mathrm{col}(\beta)} & \text{иначе} \end{cases} \tag{13}
$$

(подчеркнём, что $S^+(\beta) \subset \mathcal{C}_{\mathrm{col}(\beta)}$ в любом случае). В формулах (12) из каждой пары сингулярных корней первый лежит в $S^+(\beta)$, а второй — в $S^-(\beta)$.

Перейдём непосредственно к решению основной задачи этого пункта — построению поляризации для элемента $f = f_{D,\xi}$, то есть для канонической формы на орбите $\Omega = \Omega_{D,\xi}$, ассоциированной с ортогональным подмножеством D (для какого-либо отображения $\xi \colon D \to k^*$).

Обозначение 4.2. Пусть $j_1 < \ldots < j_t$ — все те номера столбиков, в которых лежат корни из D. Положим $j_0 = 0$ и обозначим $\mathcal{M} = \mathcal{M}_D = \bigcup_{i=0}^{t} \mathcal{M}_{j_i}$, где $\mathcal{M}_0 = \varnothing$ и, по индукции, для каждого $i = 1, \ldots, t$

$$
\mathcal{M}_{j_i} = \{\gamma \in S^-(\beta) \mid \beta \in D \cap \mathcal{C}_{j_i} \text{ и } \gamma, \beta-\gamma \notin \bigcup\nolimits_{l=0}^{i-1} \mathcal{M}_{j_l}\}. \tag{14}
$$

Пример 4.3. Пусть $\Phi = D_7$, $D = \{\varepsilon_1-\varepsilon_5, \varepsilon_1+\varepsilon_5, \varepsilon_2-\varepsilon_6, \varepsilon_2+\varepsilon_6, \varepsilon_3+\varepsilon_4\}$. В этом случае $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3$, где

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_1 = \{\varepsilon_2-\varepsilon_5, \varepsilon_2+\varepsilon_5, \varepsilon_3-\varepsilon_5, \varepsilon_3+\varepsilon_5, \varepsilon_4-\varepsilon_5, \varepsilon_4+\varepsilon_5\} \cup \mathcal{C}_5, \\
&\mathcal{M}_2 = \{\varepsilon_3-\varepsilon_6, \varepsilon_3+\varepsilon_6, \varepsilon_4-\varepsilon_6, \varepsilon_4+\varepsilon_6\} \cup \mathcal{C}_6 \text{ и } \mathcal{M}_3 = \{\varepsilon_4-\varepsilon_7, \varepsilon_4+\varepsilon_7\}.
\end{aligned}
$$

Определим теперь подпространство $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{u}$, которое впоследствии окажется поляризацией для канонической формы $f \in \Omega$. А именно, положим

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P} = \Phi^+ \setminus \mathcal{M} \text{ и} \\
&\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{D,\xi} = \sum\nolimits_{\alpha \in \mathcal{P}} k e_\alpha + \mathfrak{p}_0.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Здесь через $\mathfrak{p}_0$ мы обозначили подпространство, которое строится следующим образом. Предположим, что $\varepsilon_i-\varepsilon_j, \varepsilon_i+\varepsilon_j \in D$, $i < l < j$, $\varepsilon_l-\varepsilon_j, \varepsilon_l+\varepsilon_j \in \mathcal{M}_i$ и $D \cap \mathcal{R}_{-l} = \varnothing$; положим тогда $x = \xi_{\varepsilon_l+\varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l-\varepsilon_j} - \xi_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l+\varepsilon_j}$. По определению, $\mathfrak{p}_0$ натянуто на все такие векторы x. В частности, если $\Phi = C_n$, то $\mathfrak{p}_0 = 0$ для любого D, см. замечание 4.1.

Пример 4.4. Пусть Φ и D такие же, как в предыдущем примере. Тогда подпространство $\mathfrak{p}_0$ натянуто на векторы $\xi_{\varepsilon_1+\varepsilon_5} \cdot e_{\varepsilon_2-\varepsilon_5} - \xi_{\varepsilon_1-\varepsilon_5} \cdot e_{\varepsilon_2+\varepsilon_5}$, $\xi_{\varepsilon_1+\varepsilon_5} \cdot e_{\varepsilon_3-\varepsilon_5} - \xi_{\varepsilon_1-\varepsilon_5} \cdot e_{\varepsilon_3+\varepsilon_5}$ и $\xi_{\varepsilon_2+\varepsilon_6} \cdot e_{\varepsilon_3-\varepsilon_6} - \xi_{\varepsilon_2-\varepsilon_6} \cdot e_{\varepsilon_3+\varepsilon_6}$.

Теперь всё готово, чтобы сформулировать основное утверждение, доказательству которого посвящён этот пункт:

Теорема 4.5. *Подпространство $\mathfrak{p}$ является поляризацией для формы f.*

Докажем сначала два технических утверждения, которые будут также использованы в дальнейшем. Пусть $\widetilde{\Phi}^+ = \Phi^+ \setminus \mathcal{A}$, где

$$\mathcal{A} = \begin{cases} \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}, & \text{если } \varnothing \neq D \cap \mathcal{C}_1 \subset \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j, \varepsilon_1 + \varepsilon_j\}, \\ \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{R}_0, & \text{если } \Phi = B_n \text{ и } D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1\}, \\ \mathcal{C}_1 & \text{иначе} \end{cases} \tag{16}$$

(ср. с (8)). С учётом замечания 4.1 имеем $D = (D \cap \mathcal{C}_1) \cup (D \cap \widetilde{\Phi}^+)$.

Обозначим $\widetilde{\Phi} = \pm\widetilde{\Phi}^+$. На самом деле, $\widetilde{\Phi}$ изоморфна классической системе корней, ранг которой меньше, чем ранг Φ. Точнее говоря, пусть

$$\Phi' = \begin{cases} D_{n-1}, & \text{если } \Phi = B_n,\ D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1\}, \\ B_{n-2}, C_{n-2}, D_{n-2}, & \text{если } \varnothing \neq D \cap \mathcal{C}_1 \subset \Phi_0^+, \\ B_{n-1}, C_{n-1}, D_{n-1} & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{17}$$

(везде, кроме самого первого случая, предполагается, что система корней Φ' имеет тот же тип, что и Φ). Здесь мы через Φ_0^+ для краткости обозначили подмножество $\Phi_0^+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leqslant i < j \leqslant n\} \subset \Phi^+$.

Лемма 4.6. *Множество $\widetilde{\Phi}$ является системой корней, причём имеет место изоморфизм систем корней $\widetilde{\Phi} \cong \Phi'$ (ср. с утверждением* 3.11*).*

Доказательство. Достаточно построить биекцию $\pi\colon \widetilde{\Phi}^+ \to \Phi'^+$, которая продолжалась бы до изометрического изоморфизма $\langle\widetilde{\Phi}^+\rangle_{\mathbb{R}} \to \langle\Phi'^+\rangle_{\mathbb{R}}$. Определим m' для Φ' так же, как m для Φ в пункте 2.1 (см. (2)). Если число m' чётно, то положим $n' = m'/2$, а иначе $n' = (m'-1)/2$. Пронумеруем столбики корней из $\widetilde{\Phi}^+$ от 1 до n', а строчки — от $-n'$ до n' (пропуская 0, если m' чётно). Получаем отображение π. $\square$

Той же буквой π договоримся обозначать соответствующий изоморфизм $\widetilde{\mathfrak{u}} \to \mathfrak{u}'$, задаваемый правилом $e_\alpha \to e_{\pi(\alpha)}$, $\alpha \in \widetilde{\Phi}^+$. (Здесь $\widetilde{\mathfrak{u}} = \sum_{\alpha\in\widetilde{\Phi}^+} ke_\alpha \subset \mathfrak{u}$, а $\mathfrak{u}' = \sum_{\alpha\in\Phi'^+} ke_\alpha \subset \mathfrak{gl}_{m'}(k)$ — алгебра Ли максимальной унипотентной подгруппы U' в классической группе Шевалле G' с системой корней Φ'.) Обратимся вновь к формулам (12) и (13). Понятно, что если $\alpha + \gamma = \beta$ и $\alpha \in S^+(\beta)$, то $\gamma \in S^-(\beta)$ (и наоборот). Несложный перебор показывает, что если $\gamma \in S^-(\beta)$, то $\mathrm{col}(\gamma) \geqslant \mathrm{col}(\beta)$. Более того, в этом случае выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$\begin{aligned} &\mathrm{row}(\gamma) = \mathrm{row}(\beta), \mathrm{col}(\gamma) = \mathrm{row}(\alpha), \text{ или} \\ &\mathrm{row}(\gamma) = -\mathrm{row}(\alpha), \mathrm{col}(\gamma) = -\mathrm{row}(\beta) \end{aligned} \tag{18}$$

(здесь так же $\alpha = \beta - \gamma$). Точнее говоря, если $\Phi = C_n$, $\beta = \varepsilon_i + \varepsilon_j$, $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ и $\gamma = 2\varepsilon_j$ для некоторых $1 \leqslant i < j \leqslant n$, то оба условия выполняются одновременно. Во всех остальных случаях выполнено ровно одно из этих условий. При этом для $\beta = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ или $\beta = \varepsilon_i$ всегда имеет место первое условие, для $\beta = 2\varepsilon_i$ — всегда второе, а если $\beta = \varepsilon_i + \varepsilon_j$, то первое условие выполнено тогда и только тогда, когда $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_l$ для некоторых $1 \leqslant i < l < j \leqslant n$.

Лемма 4.7. i) *Пусть $\beta \in D \cap \mathcal{C}_i$, $\alpha \in S^+(\beta)$, причём $\beta - \alpha \in \mathcal{M}_i$. Тогда $D \cap (\alpha + \Phi^+) \subset D \cap \mathcal{C}_i$.* ii) *Пусть $D \cap \mathcal{C}_i = \{\beta, \beta'\}$ (тем самым, $\Phi \neq C_n$) и $\gamma \in \mathcal{M}_i$, причём $\mathrm{col}(\gamma) \neq \pm\mathrm{row}(\beta)$. Тогда $D \cap (\gamma + \mathcal{P}) \subset D \cap \mathcal{C}_i$.*

Доказательство. i) Предположим, что найдётся такой $\beta' \in D \cap \mathcal{C}_j$, $j \neq i$, что $\alpha + \delta = \beta'$ для некоторого $\delta \in \Phi^+$. Поскольку $j \neq i$, а $S^+(\beta) \subset \mathcal{C}_i$, $S^+(\beta') \subset \mathcal{C}_j$ (см. (13)), мы видим, что $\alpha \in S^-(\beta')$, а $\delta \in S^+(\beta')$. Кроме того,

$$i = \mathrm{col}(\beta) = \mathrm{col}(\alpha) \geqslant \mathrm{col}(\beta') = j,$$

а значит, $i > j$ (ибо $j \neq i$ по предположению).

То, что $\alpha \notin \mathcal{M}_j$, означает, что $\delta \in \mathcal{M}_s$ для какого-то $s < j$ (см. (14)). В частности, существует $\beta'' \in D \cap \mathcal{C}_s$, для которого $\delta \in S^-(\beta)$; положим $\eta = \beta'' - \delta$. Применим (18). Если $\mathrm{row}(\delta) = -\mathrm{row}(\eta)$, $\mathrm{col}(\delta) = -\mathrm{row}(\beta'')$, то

$$j = \mathrm{col}(\beta') = \mathrm{col}(\delta) = -\mathrm{row}(\beta'')$$

и корни β', β'' не ортогональны, чего быть не может. Отсюда следует,что $\mathrm{row}(\delta) = \mathrm{row}(\beta'')$, $\mathrm{col}(\delta) = \mathrm{row}(\eta)$.

Аналогично, если $\mathrm{row}(\alpha) = -\mathrm{row}(\delta)$, $\mathrm{col}(\alpha) = \mathrm{row}(\beta')$, то получаем, что

$$i = \mathrm{col}(\beta) = \mathrm{col}(\alpha) = \mathrm{row}(\beta')$$

и корни β, β' не ортогональны. Значит, $\mathrm{row}(\alpha) = \mathrm{row}(\beta')$, $\mathrm{col}(\alpha) = \mathrm{row}(\delta)$. Но в этом случае

$$j = \mathrm{col}(\beta) = \mathrm{col}(\alpha) = \mathrm{row}(\delta) = \mathrm{row}(\beta'')$$

и корни β, β'' не ортогональны — противоречие. Следовательно, такого корня β' не существует, что и требовалось доказать.

ii) Пусть, без ограничения общности, $\beta = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, $\beta' = \varepsilon_i + \varepsilon_j$ и γ — один из корней $\varepsilon_l - \varepsilon_j, \varepsilon_l + \varepsilon_j$, $i < l < j$. Предположим, что существует такой $\widetilde{\beta} \in D \cap \mathcal{C}_s$, $s \neq i$, что $\delta + \gamma = \widetilde{\beta}$ для некоторого $\delta \in \mathcal{P}$. Рассмотрим сначала случай, когда $s \neq l$.

Поскольку $S^+(\widetilde{\beta}) \subset \mathcal{C}_s$, то $\gamma \in S^-(\widetilde{\beta})$, а значит, $l = \mathrm{col}(\gamma) > \mathrm{col}(\widetilde{\beta}) = s$. Вновь воспользуемся (18): если $\mathrm{row}(\widetilde{\beta}) = \mathrm{row}(\gamma) = \pm j$, то корни $\beta, \widetilde{\beta}$ не ортогональны. Следовательно, $\mathrm{row}(\beta) = -\mathrm{col}(\gamma) = -l$, то есть $\widetilde{\beta} = \varepsilon_s + \varepsilon_l$, и если $\gamma = \varepsilon_l \pm \varepsilon_j$, то $\delta = \varepsilon_s \mp \varepsilon_j$. (Понятно, что если $s > j$, то $\gamma = \varepsilon_l - \varepsilon_j$ и $\delta = \varepsilon_j + \varepsilon_s$.) Если $s < i$, то почему же γ содержится в $\mathcal{M}_i$, а не в $\mathcal{M}_s$? Он не может попасть ни в какое $\mathcal{M}_r$, $r < s < i$, поэтому $\delta \in \mathcal{M}_r$ для какого-то $r < s$, но это противоречит тому, что $\delta \in \mathcal{P}$. Таким образом, $i < s$.

Но тогда $\alpha = (\varepsilon_i \mp \varepsilon_j) - \delta = \varepsilon_i - \varepsilon_s \in \Phi^+$, то есть $\delta \in S^-(\varepsilon_i \mp \varepsilon_j)$. Отчего же δ *сам* не попал в $\mathcal{M}_i$? Причина может быть лишь одна: $\alpha \in \mathcal{M}_r$ для некоторого $r < i$. В частности, существует такой $\beta_0 \in D \cap \mathcal{C}_r$, что $\alpha \in S^-(\beta_0)$. Однако (см. (18)) если $\mathrm{row}(\beta_0) = \mathrm{row}(\alpha) = s$, то корни β_0, $\widetilde{\beta}$ не ортогональны, а если $\mathrm{row}(\beta_0) = -\mathrm{col}(\alpha_0) = -i$, то корни β_0, β не ортогональны.

Разберём теперь случай $s = l$. Здесь $\gamma \in S^+(\widetilde{\beta})$ и $\delta \in S^-(\widetilde{\beta})$. Возможно несколько вариантов. Во-первых, если $\widetilde{\beta} = \varepsilon_l \pm \varepsilon_t$, $i < l < j < t$, то $\gamma = \varepsilon_l - \varepsilon_j$ и $\delta = \varepsilon_j \pm \varepsilon_t$; в частности, $\delta \in S^-(\varepsilon_i + \varepsilon_j)$. Раз корень δ не попал ни в какое $\mathcal{M}_r$, $r \leqslant i$, то $\alpha = (\varepsilon_i + \varepsilon_j) - \delta = \varepsilon_i \mp \varepsilon_t \in \mathcal{M}_r$ для некоторого $r < i$; иначе говоря, найдётся такой корень $\beta_0 \in D \cap \mathcal{C}_r$, что $\alpha \in S^-(\beta_0)$. Вновь применим (18): если $\mathrm{row}(\beta_0) = \mathrm{row}(\alpha) = \pm t$, то корни $\beta_0, \widetilde{\beta}$ не ортогональны, а если $\mathrm{row}(\beta_0) = -\mathrm{col}(\alpha) = -i$, то корни β_0, β не ортогональны.

Во-вторых, если $\widetilde{\beta} = \varepsilon_l + \varepsilon_t$, $i < l < t < j$, и $\delta = \varepsilon_t \pm \varepsilon_j$, то $\delta \in S^-(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)$. Раз δ не попал ни в какое $\mathcal{M}_r$, $r \leqslant i$, то $\alpha = (\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) - \delta = \varepsilon_i - \varepsilon_t \in \mathcal{M}_r$ для некоторого $r < i$; значит, найдётся такой $\beta_0 \in D \cap \mathcal{C}_r$, что $\alpha \in S^-(\beta_0)$. Ещё раз используем (18): если $\mathrm{row}(\beta_0) = \mathrm{row}(\alpha) = t$, то корни β_0, $\widetilde{\beta}$ не ортогональны, а если $\mathrm{row}(\beta_0) = -\mathrm{col}(\alpha) = -i$, то корни β_0, β не ортогональны.

Наконец, если $\beta = \varepsilon_l$, то $\delta = \varepsilon_j \in S^-(\beta')$. Раз корень δ не попал ни в какое $\mathcal{M}_r$, $r \leqslant i$, то $\alpha = \beta' - \delta = (\varepsilon_i + \varepsilon_j) - \varepsilon_j = \varepsilon_i \in \mathcal{M}_r$ для некоторого $r < i$; другими словами, найдётся такой $\beta_0 \in D \cap \mathcal{C}_r$, что $\alpha \in S^-(\beta_0)$. Формула (18) показывает, что если $\operatorname{row}(\beta_0) = \operatorname{row}(\alpha_0) = 0$, то D содержит два корня из $\mathcal{R}_0$ ($\beta_0 = \varepsilon_r$ и $\widetilde{\beta} = \varepsilon_l$), что противоречит замечанию 4.1. Если же $\operatorname{row}(\beta_0) = -\operatorname{col}(\alpha) = -i$, то корни β_0, β не ортогональны.

Следовательно, корня $\widetilde{\beta}$ не существует, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 4.8. Другими словами, пункт i) только что доказанной леммы означает, что если $D \cap \mathcal{C}_i = \{\beta\}$, $\alpha \in S^+(\beta)$, $\gamma = \beta - \alpha \in \mathcal{M}_i$ и $\delta \in \Phi^+$, то $\alpha + \delta \in D$ только при $\delta = \gamma$. Если же $D \cap \mathcal{C}_i$ состоит из двух корней (скажем, $D \cap \mathcal{C}_i = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j\}$), $\beta \in D \cap \mathcal{C}_i$ — один из них, $\alpha \in S^+(\beta)$, $\gamma = \beta - \alpha \in \mathcal{M}_i$ и $\delta \in \Phi^+$, то $\alpha + \delta \in D$ лишь при $\delta = \gamma$ в случае $\alpha > \varepsilon_j - \varepsilon_l$ и при $\delta = (\varepsilon_j \pm \varepsilon_l) - \alpha$ в случае $\alpha < \varepsilon_j - \varepsilon_l$.

В свою очередь, пункт ii) гласит, что если $D \cap \mathcal{C}_i = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j\}$ и для некоторого $i < l < j$ корень γ вида $\varepsilon_l - \varepsilon_j$ (соотв., $\varepsilon_l + \varepsilon_j$) лежит в $S^-(\varepsilon_i - \varepsilon_j)$ (соотв., в $S^-(\varepsilon_i + \varepsilon_j)$) и в $\mathcal{M}_i$, а $\delta \in \mathcal{P}$, то $\delta + \gamma \in D$ лишь при $\delta = (\varepsilon_i - \varepsilon_j) - \gamma$ (соотв., лишь при $\delta = (\varepsilon_i + \varepsilon_j) - \gamma$).

Теперь мы в состоянии доказать теорему 4.5. Её доказательство непосредственно вытекает из определения поляризации (см. определение 2.4) и следующих двух предложений.

Предложение 4.9. *Подпространство $\mathfrak{p}$ является подалгеброй в $\mathfrak{u}$.*

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{u}_1 = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}_1} k e_\alpha$, $\mathfrak{u}_2 = \sum_{\alpha \in \Phi^+ \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \widetilde{\Phi}^+)} k e_\alpha$. Заметим, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \widetilde{\mathfrak{p}}$ как векторные пространства, где $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{u}_2$ и $\widetilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cap \widetilde{\mathfrak{u}}$ (напомним, $\widetilde{\mathfrak{u}} = \sum_{\alpha \in \widetilde{\Phi}^+} k e_\alpha$). Будем вести доказательство индукцией по рангу Φ (база индукции легко проверяется непосредственно).

Обозначим $D' = \pi(D \cap \widetilde{\Phi}^+)$ и пусть $\mathfrak{p}'$ — подпространство в $\mathfrak{u}'$, построенное с помощью (15) на основе множества D' и отображения $\xi' = \xi \circ \pi^{-1}|_{D'}$.

В силу леммы 4.6, ранг Φ' меньше, чем ранг Φ, поэтому, по предположению индукции, $\mathfrak{p}'$ — подалгебра в $\mathfrak{u}'$. Следовательно, $\widetilde{\mathfrak{p}}$ — подалгебра в $\widetilde{\mathfrak{u}}$ (а значит, и в $\mathfrak{u}$) как прообраз подалгебры относительно морфизма π. Легко видеть, что $\mathfrak{p}_1$ — коммутативный идеал, поэтому достаточно доказать, что $[\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_2 + \widetilde{\mathfrak{p}}] \subset \mathfrak{p}$. По построению, $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, где $\mathfrak{a} = \sum_{\alpha \in \mathcal{P} \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \widetilde{\Phi}^+)} k e_\alpha$, а $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{p}_0$. Рассмотрим подпространства $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ по отдельности (как мы увидим ниже, в любом случае какое-то из них оказывается нулевым).

i) $[\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_2 + \widetilde{\mathfrak{p}}] \subset \mathfrak{p}$. Действительно, если $\Phi = C_n$ и $D \cap \mathcal{C}_1 = \{2\varepsilon_1\}$, или $\Phi = B_n$ и $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1\}$, или $D \cap \mathcal{C}_1 = \varnothing$, или же $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j, \varepsilon_1 + \varepsilon_j\}$ для какого-нибудь j, то $\mathfrak{a} = 0$ и доказываемое утверждение очевидно.

Предположим, что $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j\}$, тогда $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{b} = 0$ и $\mathfrak{a}$ натянуто на векторы e_α, $\alpha \in (\mathcal{R}_{-j} \cup \mathcal{C}_j) \setminus \{\varepsilon_1 + \varepsilon_j\}$; для них скалярные произведения (α, ε_j) *больше нуля.* В то же время, все корни вида $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $2 \leqslant i \leqslant j-1$, лежат в $\mathcal{M}_1$, поэтому для всякого e_γ, встречающегося в сумме $y = \sum y_\gamma e_\gamma \in \mathfrak{p}_2 + \widetilde{\mathfrak{p}}$, все скалярные произведения $(\gamma + \alpha, \varepsilon_j)$ также будут положительны. Значит, если $\gamma \in \operatorname{Supp}(y)$, то $\gamma + \alpha \in \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$, то есть $[e_\gamma, e_\alpha] \in k e_{\gamma+\alpha} \subset \mathfrak{p}$. Поскольку γ и α выбраны произвольно, $[y, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{p}$.

Аналогично, пусть $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 + \varepsilon_j\}$. Тогда $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{b} = 0$ и $\mathfrak{a}$ натянуто на векторы e_α, $\alpha \in \mathcal{R}_j \setminus \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j\}$; для них скалярные произведения (α, ε_j) *меньше нуля.* В то же время, все корни вида $\varepsilon_i + \varepsilon_j$, $2 \leqslant i \leqslant j-1$, и $\varepsilon_j \pm \varepsilon_i$, $j+1 \leqslant i \leqslant n$, лежат в $\mathcal{M}_1$, как и корень $2\varepsilon_j$ (соотв., ε_j) в случае $\Phi = C_n$ (соотв., $\Phi = B_n$), поэтому для всякого e_γ, встречающегося в сумме $y = \sum y_\gamma e_\gamma \in \mathfrak{p}_2 + \widetilde{\mathfrak{p}}$, все скалярные произведения $(\gamma + \alpha, \varepsilon_j)$ также будут отрицательны. Значит, если $\gamma \in \operatorname{Supp}(y)$, то $\gamma + \alpha \in \mathcal{R}_j$, то есть $[e_\gamma, e_\alpha] \in k e_{\gamma+\alpha} \subset \mathfrak{p}$. Поскольку γ и α выбраны произвольно, $[y, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{p}$.

ii) $[\mathfrak{b}, \mathfrak{p}_2 + \widetilde{\mathfrak{p}}] \subset \mathfrak{p}$. В самом деле, если $|D \cap \mathcal{C}_1| \leqslant 1$, то $\mathfrak{b} = 0$. Предположим, что $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j, \varepsilon_1 + \varepsilon_j\}$ (а значит, $\Phi \neq C_n$); в этом случае $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{u}_1$ и $\mathfrak{a} = 0$.

Пусть e_{γ_0} встречается в сумме $y = \sum y_\gamma e_\gamma \in \mathfrak{p}_2 + \widetilde{\mathfrak{p}}$ (то есть $\gamma_0 \in \mathrm{Supp}(y)$) и $x = \xi_{\varepsilon_1+\varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} - \xi_{\varepsilon_1-\varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} \in \mathfrak{b}$ для некоторого $1 < i < j$. Ясно, что ситуация $[x, e_{\gamma_0}] \neq 0$ возможна лишь при $\gamma_0 \in \mathcal{R}_i$, так как в рассматриваемом случае $\mathfrak{p} \subset \sum_{\alpha \in \Phi^+ \setminus \mathcal{C}_j} k e_\alpha$ и $[x, x'] = 0$ для любого вектора

$$x' = \xi_{\varepsilon_1+\varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l-\varepsilon_j} - \xi_{\varepsilon_1-\varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l+\varepsilon_j}, \quad 1 < l < j.$$

Итак, пусть $\gamma_0 = \varepsilon_l - \varepsilon_i$ для некоторого $1 < l < i$ (при $l = 1$ сразу получаем $[x, e_{\gamma_0}] \in \mathfrak{p}_1$). Тогда, как легко видеть, $[x, e_{\gamma_0}] = cx'$, $c \in k^*$, где

$$x' = \xi_{\varepsilon_1+\varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l-\varepsilon_j} - \xi_{\varepsilon_1-\varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l+\varepsilon_j}.$$

Но $x' \notin \mathfrak{b}$ лишь в одном случае: когда $D \cap \mathcal{R}_{-l} \neq \varnothing$, то есть $\varepsilon_s + \varepsilon_l \in D$ для некоторого $1 < s < l$ (см. определение $\mathfrak{p}_0$). Если $\gamma_0 \in \mathcal{M}_s$, то, по определению $\mathfrak{p}_0$, e_{γ_0} не может входить в разложение какого-либо вектора из $\mathfrak{p}_0$, а потому не может встретиться в y. Следовательно, γ_0 *не лежит* в $\mathcal{M}_s$.

Это означает (см. (14)), что или γ_0, или $\varepsilon_s + \varepsilon_i = (\varepsilon_s + \varepsilon_l) - \gamma_0$ попадают в какое-то $\mathcal{M}_r$, где $1 < r < s$, то есть D содержит один из корней вида $\varepsilon_r - \varepsilon_i$, $\varepsilon_r + \varepsilon_l$, $\varepsilon_r + \varepsilon_s$, $\varepsilon_r + \varepsilon_i$. В первых двух случаях, как и выше, из определения $\mathfrak{p}_0$ видно, что e_{γ_0} не входит в разложение какого-либо вектора из $\mathfrak{p}_0$, а потому не встречается в y. Корень $\varepsilon_r + \varepsilon_s$ не ортогонален корню $\varepsilon_s + \varepsilon_l \in D$, а значит, не может лежать в D. Если же $\varepsilon_r + \varepsilon_i \in D$, то $D \cap \mathcal{R}_{-i} \neq 0$, а потому сам вектор x не содержится в $\mathfrak{p}_0$ по определению этого подпространства. Таким образом, $[x, e_{\gamma_0}] \in \mathfrak{p}$. Поскольку корень γ_0 и вектор x выбраны произвольно, $[y, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{p}$. $\square$

Предложение 4.10. *Подпространство $\mathfrak{p}$ — максимальное f-изотропное подпространство.*

Доказательство. Доказательство состоит из двух частей.

i) Докажем что $\mathfrak{p}$ — f-изотропное подпространство. Пусть сначала y, z лежат в $\sum_{\alpha \in \mathcal{P}} k e_\alpha$ (напомним, что $\mathcal{P} = \Phi^+ \setminus \mathcal{M}$). Тогда $[y, z] \in \sum_{\alpha, \gamma \in \mathcal{P}, \alpha+\gamma \in \Phi^+} k e_{\alpha+\gamma}$. Из того, что $f([y, z]) \neq 0$, следует, что найдутся $\alpha, \gamma \in \mathcal{P}$, для которых $\alpha + \gamma \in D$. Однако это невозможно: по определению множества $\mathcal{M}$ (см. (14)), из каждой пары β-сингулярных корней, равных в сумме $\beta \in D$, *хотя бы один* попадает в $\mathcal{M}$, а значит, не лежит в $\mathcal{P}$.

Пусть теперь $x = \xi_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l-\varepsilon_j} - \xi_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l+\varepsilon_j} \in \mathfrak{p}_0$, $i < l < j$ (тем самым, $\Phi \neq C_n$ и $\beta, \beta' \in D$, где $\beta = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, $\beta' = \varepsilon_i + \varepsilon_j$). Если $\alpha \in \mathcal{P}$, то, ввиду леммы 4.7 ii), $\alpha + (\varepsilon_l \pm \varepsilon_j) \in D$ лишь при $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_l$. Но тогда, конечно,

$$\begin{aligned} f([x, e_\alpha]) &= \xi_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} \cdot f([e_{\varepsilon_l-\varepsilon_j}, e_{\varepsilon_i-\varepsilon_l}]) - \xi_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \cdot f([e_{\varepsilon_l+\varepsilon_j}, e_{\varepsilon_i-\varepsilon_l}]) \\ &= \xi_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} \cdot f(e_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}) - \xi_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \cdot f(e_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}) \\ &= \xi_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} \cdot \xi_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} - \xi_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \cdot \xi_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, если $x' \in \mathfrak{p}_0$ и $[x, x'] \neq 0$, то, очевидно, $x' = \xi_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_s-\varepsilon_j} - \xi_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_s+\varepsilon_j}$, $i < s < j$; пусть, к примеру, $s < l$. В этой ситуации $[x, x'] \in k e_{\varepsilon_s+\varepsilon_l}$. Однако если $\varepsilon_s + \varepsilon_l \in D$, то вектор x' *не может лежать* в подпространстве $\mathfrak{p}_0$ по определению, ибо тогда $D \cap \mathcal{R}_{-l} \neq \varnothing$ (см. (15)).

ii) Покажем теперь, что $\mathfrak{p}$ максимально (по включению) среди всех f-изотропных подпространств. Предположим противное; тогда $\mathfrak{p}$ может быть расширено до большего изотропного подпространства $\mathfrak{p} + ky$ некоторым элементом $y = \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} y_\gamma e_\gamma$, $y_\gamma \in k^*$. Выберем какой-нибудь корень $\gamma_0 \in \mathrm{Supp}(y)$ (то есть $y_{\gamma_0} \neq 0$); по построению, $\gamma_0 \in \mathcal{M}_i$ для некоторого i. Другими словами, существуют такие корни $\beta \in D \cap \mathcal{C}_i$ и $\alpha_0 \in S^+(\beta)$, что $\beta = \alpha_0 + \gamma_0$, причём $\alpha_0 \in \mathcal{P}$, то есть $e_{\alpha_0} \in \mathfrak{p}$. Тем самым, $[e_{\alpha_0}, e_{\gamma_0}] = c \cdot e_\beta$, $c \in k^*$.

Используем лемму 4.7 i): если $D \cap \mathcal{C}_i = \{\beta\}$, то $\alpha_0 + \gamma \notin D$ при $\gamma \neq \gamma_0$, а значит, $f([e_{\alpha_0}, y]) = f([e_{\alpha_0}, y_{\gamma_0} e_{\gamma_0}]) = y_{\gamma_0} \cdot c \cdot \xi_\beta \neq 0$ — противоречие.

Предположим теперь, что $|D \cap \mathcal{C}_i| = 2$; покажем, что и в этом случае найдётся такой вектор $x' \in \mathfrak{p}$, что $f([y, x']) \neq 0$. Пусть $D \cap \mathcal{C}_i = \{\beta, \beta'\}$. Положим, без ограничения общности, $\beta = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, $\beta' = \varepsilon_i + \varepsilon_j$. Пусть также $\gamma_0 = \varepsilon_l - \varepsilon_j \in \mathcal{C}_l$, $i < l < j$, и $x = \xi_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l - \varepsilon_j} - \xi_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l + \varepsilon_j}$.

Обозначим $\gamma_0' = \varepsilon_l + \varepsilon_j$ и $y_0 = y_{\gamma_0} e_{\gamma_0} + y_{\gamma_0'} e_{\gamma_0'}$. Предположим, что векторы x и y_0 не пропорциональны. Поскольку $\gamma_0 \in \mathcal{M}_i$, из леммы 4.7 i) вытекает, что лежащий в $S^+(\beta)$ корень $\alpha_0 = \beta - \gamma_0$ не сингулярен больше ни для какого корня из D, кроме β и β'. Значит, уже $f([y, e_{\alpha_0}]) = \xi_\beta y_{\gamma_0} + \xi_{\beta'} y_{\gamma_0'} \neq 0$, так что в качестве x' можно взять сам вектор e_{α_0}. Если же векторы x и y_0 пропорциональны, то есть $y_0 = cx$, $c \in k$, но $x \in \mathfrak{p}_0$, то в разложение $y - cx \in \mathfrak{p} + ky$ не входят $e_{\gamma_0}, e_{\gamma_0'}$ и можно применить индукцию по $|\mathrm{Supp}(y)|$.

Значит, остаётся рассмотреть случай, когда $x \notin \mathfrak{p}_0$ и x и y_0 пропорциональны. Поскольку $x \notin \mathfrak{p}_0$, то $D \cap \mathcal{R}_{-l} \neq \varnothing$; значит, существует такое $s < l$, что $\widetilde{\beta} = \varepsilon_s + \varepsilon_l \in D$. Мы замечаем, что $s > i$. В самом деле, раз $\gamma_0 \in \mathcal{M}_i$, то и $\gamma_0' \in \mathcal{M}_i$. Но если $s < i$, то почему же γ_0, γ_0' лежат в $\mathcal{M}_i$, а не в $\mathcal{M}_s$? Причина может быть одна: корни $\varepsilon_s \pm \varepsilon_j = (\varepsilon_s + \varepsilon_l) - (\varepsilon_l \mp \varepsilon_j)$ попали в какое-то $\mathcal{M}_r$, $r < s$. Но это значит, что существует $\beta_0 \in D \cap \mathcal{C}_r$, для которого $\varepsilon_s \pm \varepsilon_j \in S^-(\beta_0)$ (имеется в виду, что $S^-(\beta_0)$ содержит какой-то из этих корней). Согласно (18), или $\mathrm{row}(\beta_0) = \mathrm{row}(\varepsilon_s \pm \varepsilon_j) = \mp j$ (и β_0, β не ортогональны), или $\mathrm{row}(\beta_0) = -\mathrm{col}(\varepsilon_s \pm \varepsilon_j) = -s$ (и β_0, $\widetilde{\beta}$ не ортогональны).

Итак, $i < s < l < j$. Рассмотрим корни $\gamma_1 = \varepsilon_s - \varepsilon_j$, $\gamma_1' = \varepsilon_s + \varepsilon_j$. Если хоть один из них попал в какое-то $\mathcal{M}_r$, $r < i$, то подмножество D не ортогонально, как мы только что показали. Оно не ортогонально и в случае, когда корень

$$\varepsilon_i - \varepsilon_s = \beta - \gamma_1 = \beta' - \gamma_1'$$

лежит в $\mathcal{M}_r$ для какого-то $r < i$. Действительно, если $\beta_0 \in D \cap \mathcal{C}_r$ и $\varepsilon_i - \varepsilon_s$ содержится в $S^-(\beta_0)$, то или $\mathrm{row}(\beta_0) = \mathrm{row}(\varepsilon_i - \varepsilon_s) = s$ и корни β_0, $\widetilde{\beta}$ не ортогональны, или $\mathrm{row}(\beta_0) = -\mathrm{col}(\varepsilon_i - \varepsilon_s) = -i$ и корни β_0, β не ортогональны (см. (18)). Таким образом, $\gamma_1, \gamma_1' \in \mathcal{M}_i$ (см. (14)). Вектор $x' = \xi_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} \cdot e_{\gamma_1} - \xi_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \cdot e_{\gamma_1'}$ обязательно лежит в подпространстве $\mathfrak{p}_0$: иначе $D \cap \mathcal{R}_{-s} \neq \varnothing$ (см. определение $\mathfrak{p}_0$), что противоречит ортогональности D (ибо $\widetilde{\beta} = \varepsilon_s + \varepsilon_l \in D$). Понятно, что

$$f([x, x']) = f(2 \cdot \xi_\beta \cdot \xi_{\beta'} \cdot e_{\varepsilon_s + \varepsilon_l}) = 2 \cdot \xi_\beta \cdot \xi_{\beta'} \cdot \xi_{\varepsilon_s+\varepsilon_l} \neq 0.$$

Пусть $\widehat{D} = D \backslash \{\beta, \beta'\}$. Если бы мы строили множество $\widehat{\mathcal{M}}$ с помощью (14), отталкиваясь от множества $\widehat{D}$, то корни γ_1, γ_1', γ_0 и γ_0' не попали бы ни в одно $\widehat{\mathcal{M}}_r$, $r < s$. Действительно, все они лежат в $\mathcal{M}_i$, поэтому не попали ни в одно $\mathcal{M}_r$, $r < i$, но $\mathcal{M}_r = \widehat{\mathcal{M}}_r$ для $r < i$. Если же хоть один из корней γ_1, γ_1' попал в какое-то $\widehat{\mathcal{M}}_r$, $i < r < s$, то он лежит в $S^-(\beta_0)$ для некоторого $\beta_0 \in \widehat{D} \cap \mathcal{C}_r$. Согласно (18), в этом случае или $\mathrm{row}(\beta_0) = \mathrm{row}(\gamma_1)$ (или $\mathrm{row}(\gamma_1')$) $= \pm j$ и корни β_0, β не ортогональны, или $\mathrm{row}(\beta_0) = \mathrm{col}(\gamma_1)$ (или $\mathrm{col}(\gamma_1')$) $= s$ и корни β_0, $\widetilde{\beta}$ не ортогональны.

Аналогично, если хоть один из корней γ_0, γ_0' попал в какое-то $\widehat{\mathcal{M}}_r$, $i < r < s$, то он лежит в $S^-(\beta_0)$ для некоторого $\beta_0 \in \widehat{D} \cap \mathcal{C}_r$. Согласно (18), в этом случае или $\mathrm{row}(\beta_0) = \mathrm{row}(\gamma_0)$ (или $\mathrm{row}(\gamma_0')$) $= \pm j$ и корни β_0, β не ортогональны, или

$\mathrm{row}(\beta_0) = \mathrm{col}(\gamma_0)$ (или $\mathrm{col}(\gamma_0')) = l$ и корни β_0, $\widetilde{\beta}$ не ортогональны. Таким образом, корни γ_0, γ_0' окажутся в $\widehat{\mathcal{M}_s}$, а это значит, что корни γ_1, γ_1' не сингулярны ни для каких корней из $\widehat{D}$, кроме $\widetilde{\beta}$. Действительно, $\widetilde{\beta} = \gamma_1 + \gamma_0' = \gamma_1' + \gamma_0$, $\gamma_1, \gamma_1' \in S^+(\widetilde{\beta})$, $\gamma_0, \gamma_0' \in \widehat{\mathcal{M}_s}$ и лемма 4.7 i) гласит, что $\widehat{D} \cap (\gamma_1 + \Phi^+) \subset \widehat{D} \cap \mathcal{C}_s$ и $\widehat{D} \cap (\gamma_1' + \Phi^+) \subset \widehat{D} \cap \mathcal{C}_s$, но ни γ_1, ни γ_1' не сингулярны для $\varepsilon_s - \varepsilon_l$; значит, они сингулярны *только* для корня $\widetilde{\beta} = \varepsilon_s + \varepsilon_l$.

Конечно, γ_1, γ_1' сингулярны ещё для корней β, β' соответственно (и больше ни для каких корней из D), но $\varepsilon_i - \varepsilon_s = \beta - \gamma_1 = \beta' - \gamma_1' \in \mathcal{P}$, а $\mathrm{Supp}(y)$ целиком содержится в $\mathcal{M}$. Следовательно,

$$f([y, x']) = f([x, x']) \cdot y_{\gamma_0}/\xi_{\beta'} = f([x, x']) \cdot y'_{\gamma_0}/\xi_{\beta} \neq 0.$$

Мы видим, что, в любом случае, $\mathfrak{p}$ *нельзя* включить в изотропное подпространство большей размерности, что и завершает доказательство. $\square$

Теорема 4.5 полностью доказана. В принципе, в ряде случаев (например, для $\Phi = C_n$) она позволяет легко вычислить размерность орбиты, ассоциированной с ортогональным подмножеством:

Следствие 4.11. *Пусть* $|D \cap \mathcal{C}_j| \leqslant 1$ *для всех* $1 \leqslant j \leqslant n$*, то есть* D *содержит не более одного корня из каждого столбца* Φ^+*. Тогда* $\dim \Omega = 2 \cdot |\mathcal{M}|$.

Доказательство. Действительно, размерность орбиты равна удвоенной коразмерности любой поляризации (и даже любого максимального изотропного подпространства) для любой точки на орбите, см. (6). Но в данном случае коразмерность $\mathfrak{p}$ — это в точности $|\mathcal{M}|$, так как $\mathfrak{p}_0 = 0$. $\square$

Мы, однако, получим значительно более явную формулу для вычисления размерности орбиты, ассоциированной с любым ортогональным подмножеством (см. теорему 4.13). А именно, в следующем пункте для произвольной классической системы мы вычислим "дефект" ϑ из теоремы 3.3.

4.2. Формула для размерности

Пусть D, ξ, Ω, $\mathfrak{p}$ определены, как ранее. Напомним, что мы ввели в рассмотрение систему корней Φ', ранг которой меньше ранга Φ (см. (17)) и построили изоморфизм систем корней $\pi\colon \widetilde{\Phi} = \pm\widetilde{\Phi}^+ \to \Phi'$ (см. лемму 4.6). Мы также определили подалгебру $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{u}'$, которая строится с помощью (15) на основе ортогонального подмножества $D' = \pi(D \cap \widetilde{\Phi}^+) \subset \Phi'^+$ и отображения $\xi' = \xi \circ \pi^{-1}|_{D'}$ (см. доказательство предложения 4.9). Обратим внимание, что $D = (D \cap \mathcal{C}_1) \cup \pi^{-1}(D')$, причём эти множества не пересекаются.

Для краткости введём следующее обозначение: $D_1 = D \cap \mathcal{C}_1$ и

$$r = \begin{cases} |\mathcal{C}_1| + \#\{l \mid 1 < l < j \text{ и } D \cap \mathcal{R}_{-l} = \varnothing\}, & \text{если } D_1 = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j, \varepsilon_1 + \varepsilon_j\}, \\ |\mathcal{C}_1| + |S^-(\varepsilon_1 + \varepsilon_j)|, & \text{если } D_1 = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j\}, \\ |\mathcal{C}_1| + |S^-(\varepsilon_1 - \varepsilon_j)|, & \text{если } D_1 = \{\varepsilon_1 + \varepsilon_j\}, \\ |\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{P}| & \text{иначе.} \end{cases} \tag{19}$$

Лемма 4.12. *Имеет место соотношение* $\dim \mathfrak{p} = \dim \mathfrak{p}' + r$.

Доказательство. В доказательстве предложения 4.9 мы уже использовали разложение $\mathfrak{p}$ в сумму векторных пространств:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \widetilde{\mathfrak{p}}, \text{ где}\\
&\widetilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cap \widetilde{\mathfrak{u}},\ \widetilde{\mathfrak{u}} = \sum_{\alpha\in\widetilde{\Phi}^+} ke_\alpha,\\
&\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{u}_1,\ \mathfrak{u}_1 = \sum_{\alpha\in\mathcal{C}_1\cap\mathcal{P}} ke_\alpha,\\
&\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{u}_2,\ \mathfrak{u}_2 = \sum_{\alpha\in\Phi^+\setminus(\mathcal{C}_1\cup\widetilde{\Phi}^+)} ke_\alpha.
\end{aligned}$$

Поскольку $\widetilde{\mathfrak{p}} \cong \mathfrak{p}'$, то

$$\begin{aligned}
\dim\mathfrak{p} - \dim\mathfrak{p}' = \dim\mathfrak{p} - \dim\widetilde{\mathfrak{p}} &= \dim\mathfrak{p}_1 + \dim\mathfrak{p}_2\\
&= |\mathcal{C}_1\cap\mathcal{P}| + |\mathcal{P}\setminus(\mathcal{C}_1\cup\widetilde{\Phi}^+)| + \dim(\mathfrak{p}_0\cap\mathfrak{u}_2).
\end{aligned}$$

Но это в точности r, как показывает тривиальное рассмотрение различных вариантов подмножества $D\cap\mathcal{C}_1$. $\square$

Пусть, как и в предыдущем параграфе, W — группа Вейля системы корней Φ и $\sigma = \prod_{\beta\in D} r_\beta \in W$ — инволюция, соответствующая подмножеству D. Для описания размерности орбиты Ω, ассоциированной с ортогональным подмножеством D, нам понадобится ещё одна численная характеристика. Она может отличаться от нуля лишь при $\Phi = B_n$ или D_n и, по определению, равна

$$\begin{aligned}
&\vartheta = d_1 + d_2 + d_3 + d_4, \text{ где}\\
&d_1 = \#\{(i,j,l,s) \mid i<l<s<j \text{ и } \varepsilon_i-\varepsilon_j, \varepsilon_i+\varepsilon_j, \varepsilon_l+\varepsilon_s \in D\},\\
&d_2 = \#\{(i,j,l,s) \mid i<l<j<s \text{ и } \varepsilon_i-\varepsilon_j, \varepsilon_i+\varepsilon_j, \varepsilon_l-\varepsilon_s, \varepsilon_l+\varepsilon_s \in D\},\\
&d_3 = \#\{(i,j) \mid \varepsilon_i+\varepsilon_j \in D \text{ и } i>l, \text{ где } D\cap\mathcal{R}_0 = \{\varepsilon_l\}\},\\
&d_4 = \#\{(i,j) \mid \varepsilon_i-\varepsilon_j, \varepsilon_i+\varepsilon_j \in D \text{ и } i<j<l, \text{ где } D\cap\mathcal{R}_0 = \{\varepsilon_l\}\}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Отметим, что два последних числа, d_3 и d_4, могут быть не равны нулю лишь при $\Phi = B_n$ и $D\cap\mathcal{R}_0 \neq \varnothing$; в этом случае $|D\cap\mathcal{R}_0| = 1$, (см. замечание 4.1), так что d_3 и d_4 корректно определены.

Теперь мы можем сформулировать основной результат этого пункта:

Теорема 4.13. *Пусть Φ — система корней типа B_n, $n \geqslant 2$, C_n, $n \geqslant 3$, или D_n, $n \geqslant 4$, $D \subset \Phi^+$ — произвольное ортогональное подмножество, $\xi\colon D \to k^*$ — произвольное отображение и $\Omega = \Omega_{D,\xi}$ — орбита, ассоциированная с D. Тогда*

$$\dim\Omega = l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta,$$

где ϑ определяется формулой (20). *В частности,* $\dim\Omega \leqslant l(\sigma) - s(\sigma)$ *и не зависит от ξ (ср. с теоремой* 3.3*).*

Доказательство этой теоремы (как и доказательство теоремы 3.3 для систем корней с простыми связями) использует индукцию по рангу Φ; индукционный переход осуществляется с помощью рассмотрения системы корней Φ', ранг которой меньше ранга Φ. А именно, обозначим через $W' = W(\Phi')$ группу Вейля системы корней Φ' и через $\sigma' = \prod_{\beta\in D'} r_\beta \in W'$ — инволюцию в W', соответствующую ортогональному подмножеству $D' \subset \Phi'^+$. Пусть $l'(\sigma')$ и $s'(\sigma')$ — её длины в W' в простых и произвольных отражениях соответственно. По аналогии с (20), отталкиваясь от подмножества $D' \subset \Phi'^+$, определим ϑ'.

Понятно, что $s(\sigma) = s'(\sigma') + |D \cap \mathcal{C}_1|$; доказательство теоремы 4.13 основано, по сути, на сравнении $l(\sigma)$ с $l'(\sigma')$ и ϑ с ϑ' соответственно.

Напомним, что для произвольной инволюции $\tau \in W$ через Φ_τ мы обозначили множество положительных корней, которые под действием τ переходят в отрицательные: $\Phi_\tau = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \tau(\alpha) \in \Phi^-\}$ (см. пункт 2.1), при этом $l(\tau) = |\Phi_\tau|$, так что нам нужно сравнить мощности Φ_σ и $\Phi'_{\sigma'}$. Ясно, что $\Phi_\sigma \cap \widetilde{\Phi}^+ = \pi^{-1}(\Phi'_{\sigma'})$. Пусть $\widetilde{\sigma} = \prod_{\beta \in \widetilde{D}} r_\beta \in W$, где

$$\widetilde{D} = D \cap \widetilde{\Phi}^+ = \pi^{-1}(D'). \qquad (21)$$

Лемма 4.14. *Пусть* $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j\}$. *Тогда*

$$l(\sigma) = l'(\sigma') + |S(\varepsilon_1 - \varepsilon_j)| + 1.$$

Доказательство. В данной ситуации $\Phi^+ \setminus \widetilde{\Phi}^+ = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$ (см. (16)). Здесь $\Phi_\sigma \cap \mathcal{C}_1 = S^+(\varepsilon_1 - \varepsilon_j) \cup \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j\}$. Если $\alpha \in \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$, то скалярное произведение (α, ε_j) больше нуля, а группа Вейля действует ортогональными преобразованиями, поэтому $(\sigma(\alpha), \varepsilon_1) = (\sigma(\alpha), \sigma(\varepsilon_j)) > 0$, откуда следует, что $\sigma(\alpha) > 0$. Если же $\alpha \in \mathcal{R}_j \setminus \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j\} = S^-(\varepsilon_1 - \varepsilon_j)$, то $(\alpha, \varepsilon_j) < 0$, поэтому $(\sigma(\alpha), \varepsilon_1) < 0$ и $\sigma(\alpha) < 0$. Итого:

$$\begin{aligned} l(\sigma) = |\Phi_\sigma| &= |\Phi_\sigma \cap \widetilde{\Phi}^+| + |\Phi_\sigma \cap (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j})| \\ &= |\Phi'_{\sigma'}| + |S^+(\varepsilon_1 - \varepsilon_j)| + 1 + |S^-(\varepsilon_1 - \varepsilon_j)| \\ &= l'(\sigma') + |S(\varepsilon_1 - \varepsilon_j)| + 1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 4.15. *Пусть* $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 + \varepsilon_j\}$. *Тогда*

$$l(\sigma) = l'(\sigma') + |S(\varepsilon_1 + \varepsilon_j)| + 1.$$

Доказательство. Как и в предыдущей лемме, $\Phi^+ \setminus \widetilde{\Phi}^+ = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}$ (см. (16)). Здесь $\Phi_\sigma \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 \pm \varepsilon_i, i < j\} \cup \{\varepsilon_1 + \varepsilon_j\} \cup S_1$, где множество S_1 пусто при $\Phi = D_n$, состоит из корня ε_1 при $\Phi = B_n$ и состоит из корня $2\varepsilon_1$ при $\Phi = C_n$. В любом случае, $|\Phi_\sigma \cap \mathcal{C}_1| = |S^+(\varepsilon_1 + \varepsilon_j)| + 1$.

Если $\alpha \in (\mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_{-j}) \setminus \{\varepsilon_1 + \varepsilon_j\} = S^-(\varepsilon_1 + \varepsilon_j)$, то $(\alpha, \varepsilon_j) > 0$, поэтому $(\sigma(\alpha), \varepsilon_1) = (\sigma(\alpha), -\sigma(\varepsilon_j)) < 0$ и $\sigma(\alpha) < 0$. Если же $\alpha \in \mathcal{R}_j$, то $(\alpha, \varepsilon_j) < 0$, $(\sigma(\alpha), \varepsilon_1) > 0$ и $\sigma(\alpha) > 0$. Итого:

$$\begin{aligned} l(\sigma) = |\Phi_\sigma| &= |\Phi_\sigma \cap \widetilde{\Phi}^+| + |\Phi_\sigma \cap (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j})| \\ &= |\Phi'_{\sigma'}| + |S^+(\varepsilon_1 + \varepsilon_j)| + 1 + |S^-(\varepsilon_1 + \varepsilon_j)| \\ &= l'(\sigma') + |S(\varepsilon_1 + \varepsilon_j)| + 1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 4.16. i) *Пусть* $\Phi = B_n$ *и* $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1\}$. *Тогда*

$$l(\sigma) = l'(\sigma') + |\mathcal{C}_1| + 2 \cdot \#\{\beta \in \widetilde{D} \mid \mathrm{row}(\beta) < 0\}.$$

ii) *Если* $\Phi = C_n$ *и* $D \cap \mathcal{C}_1 = 2\varepsilon_1$, *то* $l(\sigma) = l'(\sigma') + |\mathcal{C}_1|$.

Доказательство. i) Здесь $\Phi^+ \setminus \widetilde{\Phi}^+ = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{R}_0$. Ясно, что $\Phi_\sigma \cap \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1$. Поскольку ε_1 ортогонален всем остальным корням из $\mathcal{R}_0$, то для $\alpha = \varepsilon_i \in \mathcal{R}_0$ корень $\sigma(\alpha)$ лежит в Φ^-

тогда и только тогда, когда $\varepsilon_i+\varepsilon_l\in\widetilde{D}$ для некоторого l (ибо в этом случае $\sigma(\alpha)=\widetilde{\sigma}(\alpha)=-\varepsilon_l<0$). Итого:

$$\begin{aligned}l(\sigma)=|\Phi_\sigma|&=|\Phi_\sigma\cap\widetilde{\Phi}^+|+|\Phi_\sigma\cap(\mathcal{C}_1\cup\mathcal{R}_0)|\\&=|\Phi'_{\sigma'}|+|\mathcal{C}_1|+2\cdot\#\{\beta\in\widetilde{D}\mid\operatorname{row}(\beta)<0\},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ii) Очевидно: $\Phi^+\setminus\widetilde{\Phi}^+=\mathcal{C}_1$ целиком лежит в Φ_σ. $\square$

Лемма 4.17. *Пусть $\Phi=B_n$ или D_n и $D\cap\mathcal{C}_1=\{\varepsilon_1-\varepsilon_j,\varepsilon_1+\varepsilon_j\}$. Тогда*

$$\begin{aligned}l(\sigma)=l'(\sigma')&+|\mathcal{C}_1|+|\mathcal{C}_j|\\&+4\cdot\#\{(l,s)\mid 1<l<s<j,\ \text{и}\ \varepsilon_l+\varepsilon_s\in\widetilde{D}\}\\&+2\cdot\#\{(l,s)\mid 1<l<j<s\ \text{и}\ \varepsilon_l-\varepsilon_s,\varepsilon_l+\varepsilon_s\in\widetilde{D}\}\\&+2\cdot\#\{l\mid 1<l<j\ \text{и}\ \varepsilon_l\in\widetilde{D}\}\end{aligned}\tag{22}$$

(последнее слагаемое равно нулю или двум).

Доказательство. Как и в леммах 4.14, 4.15, $\Phi^+\setminus\widetilde{\Phi}^+=\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_j\cup\mathcal{R}_j\cup\mathcal{R}_{-j}$ (см. (16)). Ясно, что $\mathcal{C}_1\subset\Phi_\sigma$. Обозначим для краткости $\sigma_1=r_{\varepsilon_1-\varepsilon_j}r_{\varepsilon_1+\varepsilon_j}$ (тем самым, $\sigma=\sigma_1\widetilde{\sigma}$). Исследуем подробно, как действуют инволюции σ_1 и $\widetilde{\sigma}$ на корни из $\mathcal{C}_j\cup\mathcal{R}_j\cup\mathcal{R}_{-j}$.

Если $\alpha=\varepsilon_i\pm\varepsilon_j\in\mathcal{R}_j\cup\mathcal{R}_{-j}$, то $\sigma_1(\alpha)=\varepsilon_i\mp\varepsilon_j>0$, а если $\alpha=\varepsilon_j\pm\varepsilon_l\in\mathcal{C}_j$, то $\sigma_1(\alpha)=-\varepsilon_j\pm\varepsilon_l<0$ (аналогично, $\sigma_1(\varepsilon_j)=-\varepsilon_j<0$). Таким образом, $\Phi_{\sigma_1}\setminus\widetilde{\Phi}^+=\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_j$. Выясним, как влияют на ситуацию корни из $\widetilde{D}$ (напомним, что $\widetilde{D}=D\cap\widetilde{\Phi}^+=\pi^{-1}(D')$, см. (21)). Предположим, что $\widetilde{D}$ изначально пусто, и будем добавлять туда корни, изучая, как при этом изменяется $|\Phi_\sigma\setminus\widetilde{\Phi}^+|$ (ввиду ортогональности множества D добавлять корни в $\widetilde{D}$ можно независимо и в любом порядке).

Пусть $\beta=\varepsilon_l+\varepsilon_s\in\widetilde{D}$, где $1<l<s<j$. Понятно, что в этом случае $r_\beta\sigma_1(\alpha)=\sigma_1(\alpha)<0$ для любого $\alpha\in\mathcal{C}_j$. В то же время, четыре корня из $\mathcal{R}_j\cup\mathcal{R}_{-j}$ под действием $r_\beta\sigma_1$ становятся отрицательными: $\varepsilon_l\pm\varepsilon_j$ и $\varepsilon_s\pm\varepsilon_j$ переходят в $-\varepsilon_s\pm\varepsilon_j$ и $-\varepsilon_l\pm\varepsilon_j$ соответственно. Значит, каждый корень $\beta\in\widetilde{D}$ такого вида увеличивает $|\Phi_\sigma\setminus\widetilde{\Phi}^+|$ на четыре. Это даёт нам четвёртое слагаемое в правой части формулы (22).

Пусть теперь $\beta=\varepsilon_l-\varepsilon_s,\beta'=\varepsilon_l+\varepsilon_s\in\widetilde{D}$, где $1<l<j<s$. В этом случае под действием $r_\beta r_{\beta'}\sigma_1$ корни $\varepsilon_l\pm\varepsilon_j\in\mathcal{R}_j\cup\mathcal{R}_{-j}$ переходят в отрицательные корни $-\varepsilon_l\pm\varepsilon_j$, корни $\varepsilon_j\pm\varepsilon_s$ переходят в корни $-\varepsilon_j\mp\varepsilon_s$ (тоже отрицательные, как и под действием σ_1) и $r_\beta r_{\beta'}\sigma_1(\alpha)=\sigma_1(\alpha)$ для остальных $\alpha\in\mathcal{C}_j\cup\mathcal{R}_j\cup\mathcal{R}_{-j}$. Значит, каждая такая пара корней $\beta,\beta'\in\widetilde{D}$ увеличивает $|\Phi_\sigma\setminus\widetilde{\Phi}^+|$ на два. Это даёт нам пятое слагаемое в правой части формулы (22).

Если $\beta=\varepsilon_l\in\widetilde{D}$, где $1<j<l$, то корни $\varepsilon_l\pm\varepsilon_j\in\mathcal{R}_j\cup\mathcal{R}_{-j}$ переходят под действием $r_\beta\sigma_1$ в отрицательные корни $-\varepsilon_l\mp\varepsilon_j$ и $r_\beta\sigma_1(\alpha)=\sigma_1(\alpha)$ для остальных $\alpha\in\mathcal{C}_j\cup\mathcal{R}_j\cup\mathcal{R}_{-j}$. Значит, каждый корень $\beta\in\widetilde{D}$ такого вида (а их не больше одного) увеличивает $|\Phi_\sigma\setminus\widetilde{\Phi}^+|$ на два. Это даёт нам последнее слагаемое в правой части формулы (22).

Если же $\beta=\varepsilon_l-\varepsilon_s\in\widetilde{D}$, где $1<l<j<s$, то под действием $r_\beta\sigma_1$ корень $\varepsilon_l+\varepsilon_j\in\mathcal{R}_j$ переходит в отрицательный корень $-\varepsilon_j+\varepsilon_s$, но зато корень $\varepsilon_j+\varepsilon_s$ переходит в положительный корень $\varepsilon_l-\varepsilon_j$ (на остальные корни из $\mathcal{C}_j\cup\mathcal{R}_j\cup\mathcal{R}_{-j}$ элементы $r_\beta\sigma_1$ и σ_1 действуют одинаково), так что $|\Phi_\sigma\setminus\widetilde{\Phi}^+|$ не изменяется. Легко видеть, что любые другие варианты расположения корней из $\widetilde{D}$ вообще не влияют на действие σ на $\mathcal{C}_j\cup\mathcal{R}_j\cup\mathcal{R}_{-j}$. Это завершает доказательство. $\square$

Ключевым моментом в доказательстве теоремы 4.13 является следующее

Предложение 4.18. *Пусть D, D', σ, σ' и r определены, как ранее (см. начало этого пункта и* (19)*). Тогда*

$$l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta = l'(\sigma') - s'(\sigma') - 2\vartheta' + 2(|\Phi^+ \setminus \widetilde{\Phi}^+| - r).$$

Доказательство. Обозначим для краткости

$$\mathcal{F} = l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta \text{ и } \mathcal{F}' = l'(\sigma') - s'(\sigma') - 2\vartheta'.$$

Доказательство заключается в переборе различных вариантов расположения корней из подмножества $D \cap \mathcal{C}_1$.

i) $D \cap \mathcal{C}_1 = \varnothing$. В этом случае, разумеется, $l(\sigma) = l'(\sigma')$, $s(\sigma) = s'(\sigma')$ и $\vartheta = \vartheta'$. С другой стороны, $\Phi^+ \setminus \widetilde{\Phi}^+ = \mathcal{C}_1$ (см. (16)) и $r = |\mathcal{C}_1|$ (см. (19)), как и должно быть.

ii) $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j\}$ (имеется в виду, что пересечение совпадает с одним из этих корней). Тогда $s(\sigma) = s'(\sigma') + 1$, $\vartheta = \vartheta'$ и, ввиду лемм 4.14, 4.15,

$$l(\sigma) = l'(\sigma') + |S(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j)| + 1,$$

поэтому $\mathcal{F} - \mathcal{F}' = |S(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j)|$. В то же время, с учётом (16), (19) и того факта, что $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j} = \mathcal{C}_1 \cup S^-(\varepsilon_1 - \varepsilon_j) \cup S^-(\varepsilon_1 + \varepsilon_j)$, получаем:

$$\begin{aligned} |\Phi^+ \setminus \widetilde{\Phi}^+| - r &= |\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}| - (|S^-(\varepsilon_1 \mp \varepsilon_j)| + |\mathcal{C}_1|) \\ &= |S^-(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j)|, \end{aligned}$$

что ровно вдвое меньше, чем $|S(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j)|$.

iii) $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1\}$ ($\Phi = B_n$). Согласно (16), (19), (20) и лемме 4.16 i),

$$|\Phi^+ \setminus \widetilde{\Phi}^+| - r = (|\mathcal{C}_1| + |S^-(\varepsilon_1)|) - |\mathcal{C}_1| = |S^-(\varepsilon_1)| = n - 1,$$

в то время как $s(\sigma) = s'(\sigma') + 1$,

$$\begin{aligned} l(\sigma) &= l'(\sigma') + |\mathcal{C}_1| + 2 \cdot \#\{\beta \in \widetilde{D} \mid \mathrm{row}(\beta) < 0\} \text{ и} \\ \vartheta &= \vartheta' + \#\{(i,j) \mid \varepsilon_i + \varepsilon_j \in D \text{ и } i > 1\} \\ &= \vartheta' + \#\{\beta \in \widetilde{D} \mid \mathrm{row}(\beta) < 0\}, \end{aligned}$$

так что $\mathcal{F} - \mathcal{F}' = |\mathcal{C}_1| - 1 = (2n-1) - 1 = 2(n-1)$, как и должно быть.

iv) $D \cap \mathcal{C}_1 = \{2\varepsilon_1\}$ ($\Phi = C_n$). Согласно (16), (19), (20) и лемме 4.16 ii),

$$|\Phi^+ \setminus \widetilde{\Phi}^+| - r = |\mathcal{C}_1| - |\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{P}| = (2n-1) - n = n - 1,$$

в то время как $l(\sigma) = l'(\sigma') + |\mathcal{C}_1|$, $s(\sigma) = s'(\sigma') + 1$ и $\vartheta = \vartheta' = 0$, так что $\mathcal{F} - \mathcal{F}' = |\mathcal{C}_1| - 1 = (2n-1) - 1 = 2(n-1)$, как и должно быть.

v) $D \cap \mathcal{C}_1 = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j, \varepsilon_1 + \varepsilon_j\}$ ($\Phi = B_n$ или D_n). Напомним, что в пункте 2.1 мы определили число m, см. (2). Из (16) и (19) видно, что

$$\begin{aligned} |\Phi^+ \setminus \widetilde{\Phi}^+| - r &= |\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_j \cup \mathcal{R}_j \cup \mathcal{R}_{-j}| - |\mathcal{C}_1| - \#\{l \mid 1 < l < j \text{ и } D \cap \mathcal{R}_{-l} = \varnothing\} \\ &= m - 4 - \#\{l \mid 1 < l < j \text{ и } D \cap \mathcal{R}_{-l} = \varnothing\} \\ &= m - 4 - \#\{l \mid 1 < l < j \text{ и } \widetilde{D} \cap \mathcal{R}_{-l} = \varnothing\} \\ &= m - 4 - (j-2) + \#\{l \mid 1 < l < j \text{ и } \widetilde{D} \cap \mathcal{R}_{-l} \neq \varnothing\} \\ &= m - j - 2 + \#\{l \mid 1 < l < j \text{ и } \widetilde{D} \cap \mathcal{R}_{-l} \neq \varnothing\}. \end{aligned}$$

С другой стороны, $s(\sigma) = s'(\sigma') + 2$ и, сравнивая (20) с (22) (см. лемму 4.17), мы получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{F} - \mathcal{F}' &= |\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_j| - 2 + 2 \cdot \#\{(l,s) \mid 1 < l < s < j \text{ и } \varepsilon_l + \varepsilon_s \in \widetilde{D}\}\\ &= (m-2) + (m-2j) - 2 + 2 \cdot \#\{(l,s) \mid 1 < l < s < j \text{ и } \varepsilon_l + \varepsilon_s \in \widetilde{D}\}\\ &= 2(m-j-2) + 2 \cdot \#\{s \mid 1 < s < j \text{ и } \widetilde{D} \cap \mathcal{R}_{-s} \neq \varnothing\}.\end{aligned}$$

Заменяя в последней строке s на l, получаем искомый результат. $\square$

Комбинируя это предложение с леммой 4.12, мы легко получим

Доказательство теоремы 4.13. Индукция по рангу Φ (база индукции проверяется непосредственно). Пусть $\Omega' = \Omega_{D',\xi'} \subset \mathfrak{u}'^*$ — орбита коприсоединённого представления группы U' (максимальной унипотентной подгруппы в группе Шевалле G' с системой корней Φ'), ассоциированная с ортогональным подмножеством D' (здесь $\xi' = \xi \circ \pi^{-1}|_{D'}$). По предположению индукции, $\dim \Omega' = l(\sigma') - s(\sigma') - 2\vartheta'$. Поскольку размерность орбиты равна удвоенной коразмерности любой поляризации любой точки на орбите (см. (6)), то, ввиду предложения 4.18 и леммы 4.12, размерность орбиты Ω равна

$$\begin{aligned}\dim \Omega &= 2 \cdot \operatorname{codim} \mathfrak{p} = 2(|\Phi^+| - \dim \mathfrak{p}) = 2(|\Phi^+| - \dim \mathfrak{p}' - r)\\ &= 2(|\Phi^+| - r - |\Phi'^+| + \operatorname{codim} \mathfrak{p}') = 2(|\Phi^+ \setminus \widetilde{\Phi}^+| - r) + \dim \Omega'\\ &= l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta - (l'(\sigma) - s'(\sigma') - 2\vartheta') + l'(\sigma) - s'(\sigma') - 2\vartheta'\\ &= l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta, \quad \text{что и требовалось доказать.} \ \square\end{aligned}$$

Пример 4.19. Пусть $\Phi = B_7$ и

$$D = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_6, \varepsilon_1 + \varepsilon_6, \varepsilon_2, \varepsilon_3 - \varepsilon_7, \varepsilon_3 + \varepsilon_7, \varepsilon_4 + \varepsilon_5\}.$$

Тогда $s(\sigma) = |D| = 6$, $l(\sigma) = |\Phi_\sigma| = 48$, так как $\Phi_\sigma = \Phi^+ \setminus \{\varepsilon_4 - \varepsilon_5\}$. С другой стороны, согласно (20),

$$\begin{aligned}&d_1 = \#\{(1,6,4,5),(3,7,4,5)\} = 2,\ d_2 = \#\{(1,6,3,7)\} = 1,\\ &d_3 = \#\{(3,7),(4,5)\} = 2 \text{ и } d_4 = \#\{(1,6)\} = 1\end{aligned}$$

(ибо $D \cap \mathcal{R}_0 = \{\varepsilon_2\}$). Поэтому $\vartheta = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 6$ и, следовательно,

$$\dim \Omega = l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta = 48 - 6 - 12 = 30.$$

Замечание 4.20. Для $\Phi = A_{n-1}$ (то есть для унитреугольной группы $U = U_n$) ответы на все вопросы, рассматриваемые в данном параграфе, были получены А.Н. Пановым в работе [10]. А именно, им было доказано, что если Ω — орбита, ассоциированная с ортогональным подмножеством в A^+_{n-1}, то её размерность равна $l(\sigma) - s(\sigma)$ [10, теорема 1.2]. Поляризация для канонической формы на орбите Ω строится совершенно аналогично (15), причём $\mathfrak{p}_0 = 0$ в любом случае [10, теорема 1.1]. Более того, там найдены даже точные уравнения, которые определяют Ω как аффинное многообразие [10, теорема 1.4].

4.3. Размерности неприводимых представлений группы $U(q)$

В этом пункте мы в качестве следствия теоремы 4.13 опишем все возможные размерности неприводимых конечномерных комплексных представлений группы $U(q)$, используя связь между представлениями и орбитами, см. пункт 2.3. Напомним, что $U(q) \subset U$,

$\mathfrak{u}(q) \subset \mathfrak{u}$ и $\mathfrak{u}^*(q) \subset \mathfrak{u}^*$; мы договорились для произвольного элемента $f \in \mathfrak{u}^*(q)$ обозначать его орбиту относительно коприсоединённого представления группы $U(q)$ через $\Omega(q) = \Omega_f(q)$, а относительно коприсоединённого представления группы U — через $\Omega = \Omega_f$. При этом $|\Omega(q)| = q^{\dim \Omega}$ и если T — неприводимое представление $U(q)$, соответствующее орбите $\Omega(q)$, то $\dim_{\mathbb{C}} T = q^{\dim \Omega/2} = \sqrt{|\Omega(q)|}$ (см. пункты 2.1 и 2.3). Положим

$$\mu = \mu(\Phi) = \begin{cases} n(n-1)/2, & \text{если } \Phi = B_n \text{ или } C_n, \\ n(n-1)/2, & \text{если } \Phi = D_n \text{ и } n \text{ чётно}, \\ (n-1)^2/2, & \text{если } \Phi = D_n \text{ и } n \text{ нечётно}. \end{cases} \tag{23}$$

Максимально возможная размерность коприсоединённой орбиты Ω равна 2μ [19, Propositions 6.3, 6.6].

Следствие 4.21. *Группа $U(q)$ обладает неприводимым комплексным представлением размерности N тогда и только тогда, когда $N = q^l$ для некоторого $0 \leqslant l \leqslant \mu$.*

Доказательство. Ввиду предыдущих замечаний, достаточно для произвольного такого l предъявить орбиту относительного коприсоединённого представления группы U некоторого элемента из $\mathfrak{u}^*(q)$, размерность которой равнялась бы $2l$. Теорема 4.13 сводит задачу к построению ортогонального подмножества $D \subset \Phi^+$, для которого $l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta = 2l$ (на самом деле, для всех подмножеств, которые мы будем строить, $\vartheta = 0$).

Для произвольного $1 \leqslant j \leqslant [n/2]$ положим $\beta_j = \varepsilon_{2j-1} + \varepsilon_{2j}$ и обозначим $s_j = |S^+(\beta_j)|$. Несложный перебор показывает (см. (12) и (13)), что

$$\begin{gathered} s_1 + \ldots + s_t = \mu, \text{ где} \\ t = \begin{cases} [n/2], & \text{если } \Phi = B_n \text{ или } C_n, \\ [(n-1)/2], & \text{если } \Phi = D_n. \end{cases} \end{gathered}$$

Мы замечаем также, что если $\alpha \in \mathcal{C}_{2j-1}$, а $\mathrm{row}(\alpha)$ пробегает значения

$$2j, 2j+1 \ldots, n, 0, -n, \ldots, -2j+1, -2j$$

(в случае чётного m индекс 0 пропускается), то величина $|S^+(\alpha)|$ пробегает значения $0, 1, \ldots, s_j$ соответственно.

Итак, пусть $0 \leqslant l \leqslant \mu$. Если $l \leqslant s_1$, то, как мы только что указывали, можно выбрать такой корень $\beta \in \mathcal{C}_1$, что $|S^+(\beta)| = l$. Пусть $D = \{\beta\}$, тогда $\Phi_\sigma = \Phi_{r_\beta}$. Но для произвольного $\alpha \in \mathcal{C}_i$

$$\Phi_{r_\alpha} = \begin{cases} \mathcal{C}_i, & \text{если } \Phi = B_n \text{ и } \alpha = \varepsilon_i, \\ (S(\alpha) \cup \{\alpha, 2\varepsilon_i\}) \setminus \{\varepsilon_i - \varepsilon_j\}, & \text{если } \Phi = C_n \text{ и } \alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_j, \\ S(\alpha) \cup \{\alpha\} & \text{иначе}. \end{cases} \tag{24}$$

В любом случае, Φ_{r_α} состоит ровно из $|S(\alpha)| + 1 = 2|S^+(\alpha)| + 1$ корней, так что $s(\sigma) = 1$, $l(\sigma) = 2|S^+(\beta)| + 1$ и $\vartheta = 0$, поэтому

$$l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta = 2|S^+(\beta)| = 2l.$$

Если же $l > s_1$, то выберем такое i, что

$$s_1 + \ldots + s_i < l \leqslant s_1 + \ldots + s_{i+1}.$$

Как было замечено выше, обязательно найдётся корень $\beta \in \mathcal{C}_{2i+1}$, для которого $|S^+(\beta)| = l - (s_1 + \ldots + s_i)$. Положим $D = \{\beta_1, \ldots, \beta_i, \beta\}$. Тогда, очевидно, $\Phi_\sigma = \bigcup_{j=1}^{i} \Phi_{r_{\beta_j}} \cup \Phi_{r_\beta}$, причём эти множества не пересекаются. Значит,

$$\begin{aligned} l(\sigma) &= \sum_{j=1}^{i} |\Phi_{r_{\beta_j}}| + |\Phi_{r_\beta}| = \sum_{j=1}^{i} (2|S^+(\beta_j)| + 1) + (2|S^+(\beta)| + 1) \\ &= 2(s_1 + \ldots + s_i + |S^+(\beta)|) + (i+1) = 2l + |D|, \text{ поэтому} \\ l(\sigma) &- s(\sigma) - 2\vartheta = 2l + |D| - |D| - 0 = 2l, \end{aligned}$$

что завершает доказательство. $\square$

Конечно, отсюда автоматически следует, что над алгебраически замкнутым полем возможные размерности коприсоединённых орбит группы U — это $0, 2, \ldots, 2\mu$. Вопрос о размерностях неприводимых представлений группы $U(q)$ (или, эквивалентно, о размерностях орбит группы U) изучался в разных контекстах в работах [24], [28], [29] и др. В 1974 г. Г. Лерер доказал, что максимальная размерность неприводимого представления унитреугольной группы $U_n(q)$ равна $q^{\mu(n)}$ [28, Corollary 6.2] (число $\mu(n)$ определяется в примере 2.5). Дж. Томпсон предположил (без ограничений на характеристику), что все возможные размерности неприводимых представлений данной группы — это числа вида q^l, $0 \leqslant l \leqslant \mu(n)$, см. [28, Conjecture 6.3]. В 1995 г. И.М. Айзекс доказал, что размерность неприводимого представления всегда есть степень q [24, Corollary B] (в любой характеристике). В книге [25] приводится доказательство гипотезы Дж. Томпсона. В 2001 г. в работе [29] было показано, что коприсоединённые орбиты группы $U_n(\mathbb{C})$ действительно могут иметь все (чётные) размерности от 0 до $2\mu(n)$ включительно; впрочем, это следует и из результатов А.Н. Панова [10].

В 2006 г. К. Андре и А. Нето в статье [19] вычислили максимально возможную размерность коприсоединённой орбиты группы U и дали комбинаторное описание некоторых неприводимых характеров максимальной размерности (для $\Phi = C_n$ — *всех* таких характеров), см. [19, Section 6]. Поскольку в нашей ситуации (когда p достаточно велико) размерность неприводимого представления $U(q)$ всегда есть степень q, то основной результат этого пункта (следствие 4.21) можно коротко сформулировать так: группа $U(q)$ имеет неприводимые представления *всех возможных* размерностей.

Замечание 4.22. В заключение отметим, что предложения 4.9, 4.10, а значит, и сама теорема 4.5 в действительности верны не только для поля k, но вообще для любого поля как достаточно большой положительной, так и *нулевой* характеристики (ибо характеристика поля *никак* не используется в их доказательстве). В частности, это даёт способ построения поляризаций для орбит, ассоциированных с ортогональными подмножествами над полем вещественных чисел $k = \mathbb{R}$, что играет важную роль в конструкции неприводимых унитарных представлений нильпотентных групп Ли (см., например, [7, с. 182]).

Список литературы

[1] Борель А. Линейные алгебраические группы. — М.: Мир, 1972. — 272 с.

[2] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Главы IV–VI. — М.: Мир, 1972. — 334 с.

[3] Диксмье Ж. Универсальные обвёртывающие алгебры. — М.: Мир, 1978. — 408 с.

[4] Игнатьев М.В., Панов А.Н. Коприсоединённые орбиты группы $\mathrm{UT}(7, K)$. // Фунд. и прикл. матем., т. **13**, вып. 5, 2007, с. 127–159, см. также arXiv: `math.RT/0603649v3` (2006).

[5] Игнатьев М.В. Ортогональные подмножества классических систем корней и коприсоединённые орбиты унипотентных групп. // Мат. заметки, т. **86**, вып. 1, 2009, с. 65–80, см. также arXiv: `math.RT/0904.2841v2` (2009).

[6] Игнатьев М.В. Ортогональные подмножества систем корней и метод орбит. Алгебра и анализ, to appear, см. также arXiv: `math.RT/1007.5220v2` (2010).

[7] Кириллов А.А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли. // УМН, т. **17**, 1962, с. 57–110.

[8] Кириллов А.А. Лекции по методу орбит. — Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002. — 290 с.

[9] Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. Т. 1. — М.: Мир, 1988. — 430 с.

[10] Панов А.Н. Инволюции в S_n и ассоциированные коприсоединённые орбиты. // Зап. научн. сем. ПОМИ, т. **349**, вып. 16, 2007, с. 150–173, см. также arXiv: `math.RT/0801.3022v1` (2008).

[11] Спрингер Т.А. Линейные алгебраические группы. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 55 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). — М., 1989. — с. 5–136.

[12] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. — М.: Мир, 1975. — 262 с.

[13] Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы. — М.: Наука, 1980. — 399 с.

[14] Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. — М.: МЦНМО, 2003. — 216 с.

[15] Andrè C.A.M. Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group. J. Algebra, v. **176**, 1995, p. 959–1000.

[16] Andrè C.A.M. Basic characters of the unitriangular group. J. Algebra, v. **175**, 1995, p. 287–319.

[17] Andrè C.A.M. The basic character table of the unitriangular group. J. Algebra, v. **241**, 2001, p. 437–471.

[18] Andrè C.A.M. Basic characters of the unitriangular group (for arbitrary primes). Proc. Amer. Math. Soc., v. **130**, №2, 2002, p. 1943–1954.

[19] Andrè C.A.M., Neto A.M. Super-characters of finite unipotent groups of types B_n, C_n and D_n. J. Algebra, v. **305**, 2006, p. 394–429.

[20] Andrè C.A.M., Neto A.M. A supercharacter theory for the Sylow p-subgroups of the finite symplectic and orthogonal groups. J. Algebra, v. **322**, 2009, p. 1273–1294.

[21] Boyarchenko M. Characters of unipotent groups over finite fields, arXiv: `math.RT/0712.2614v1` (2007).

[22] Boyarchenko M., Drinfeld V. A motivated introduction to character sheaves and the orbit method for unipotent groups in positive characteristic, arXiv: `math.RT/0609769v1` (2006).

[23] Boyarchenko M., Drinfeld V. Character sheaves on unipotent groups in positive characteristic: foundations, arXiv: `math.RT/0810.0794v1` (2008).

[24] Isaacs M. Characters of groups associated with finite algebras. J. Algebra, v. **177**, 1995, p. 708–730.

[25] Huppert B. Character theory of finite groups. — New York, de Gruyter. — 618 p.

[26] Kazhdan D. Proof of Springer's hypothesis. Israel J. Math., v. **28**, 1977, p. 272–286.

[27] Kirillov A.A. Variations on the triangular theme. Amer. Math. Soc. Transl., v. **169**, 1995, p. 43–73.

[28] Lehrer G.I. Discrete series and the unipotent subgroup. Compositio Math., v. **28**, fasc. 1, 1974, p. 9–19.

[29] Mukherjee S. Coadjoint orbits for A^+_{n-1}, B^+_n and D^+_n, arXiv: `math.RT/051332v1` (2005).

[30] Sangroniz J. Character of algebra groups and unitriangular groups. // Ho C.Y., Sin P., Tiep P.H., Turull A. (eds.). Finite groups 2003. Proceedings of the Gainesville Conference on Finite Groups, March 6–12, 2003. — New York/Berlin, de Gruyter, 2004, p. 335–349.

[31] Srinivasan B. Representations of finite Chevalley groups. Lecture Notes in Math., v. **764**. — New York/Berlin, Springer, 1979. — 177 p.

[32] Steinberg R. Conjugacy classes in algebraic groups. Lecture Notes in Math., v. **366**. — New York/Berlin, Springer, 1974. — 159 p.

[33] Vergne M. Construction de sous-algèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de Lie résoluble. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A–B, v. **270**, 1970, p. A173–A175.

[34] Yan N. Representation theory of finite unipotent linear groups. Ph.D. thesis, Department of Math., University of Pennsylvania, 2001.