Давление и равновесные меры для действия аменабельных групп на пространстве конфигураций

Ал-й И.Буфетов

Аннотация

Изучается модель статистической физики на счётной аменабельной группе G. Для естественного действия G на пространстве конфигураций S^G, $|S| < \infty$, и для произвольного замкнутого инвариантного множества $X \subset S^G$ доказывается, что давление, соответствующее потенциалу с конечной нормой на X, существует как предел по любой фёльнеровской последовательности множеств в G. Также устанавливается существование равновесной меры.

1 Введение

Пусть S — конечное множество с дискретной топологией и G — счётная аменабельная группа. Последовательность конечных множеств $T_n \subset G$ называется фёльнеровской, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|gT_n \triangle T_n|}{|T_n|} = 0, \quad g \in G.$$

Обозначим символом e единицу группы G. Пусть S^G — множество отображений из G в S, снабженное топологией прямого произведения. При $V \subseteq G$ назовём $x \in S^V$ *конфигурацией* на V. Для любых $V \subseteq G$ и $g \in G$ определим отображение $\sigma_V^g : S^V \to S^{Vg^{-1}}$ формулой

$$(\sigma_V^g x)(g_1) = x(g_1 g), \quad g_1 \in Vg^{-1}, \quad x \in S^V.$$

Вместо σ_G^g будем писать σ^g.

Зафиксируем непустое замкнутое множество $X \subseteq S^G$, инвариантное относительно всех σ^g, и будем называть его множеством допустимых конфигураций. Обозначим символом x_V ограничение x на V, и пусть $X_V := \{x_V : x \in X\}$.

В [1] был предложен подход к определению давления, отвечающего заданной фёльнеровской последовательности, точнее, к доказательству его независимости от этой последовательности, который требует предварительного обоснования вариационного принципа для давления (заметим, что в [1] рассматривается в определенном смысле более общая ситуация, чем здесь). Прямое доказательство дано в [2], где, однако, накладываются некоторые ограничения как на G, так и на класс фёльнеровских последовательностей. Заметим также, что для частного случая $X = S^G$ доказательство, не связанное с вариационным принципом, имеется в [3], [4] (используемые при $X = S^G$ методы не работают в случае произвольного X).

Основное отличие настоящей работы от всех предыдущих, относящихся к данной тематике, состоит в том, что существование предела в определении давления (для произвольного X и произвольной фёльнеровской последовательности) доказывается здесь непосредственно, вне связи с вариационным принципом, который затем рассматривается отдельно. Такой порядок действий представляется более естественным и позволяет получить некоторые новые обобщения (см.замечание 2). Этот подход является, по-повидимому, новым даже для случая решетки $\mathbb{Z}^d$ (ср. [5]). В нем используется следствие одной леммы из [6], применявшейся там при доказательстве эргодической теоремы Биркгофа и теоремы Бреймана для действий аменабельной группы.

Напомним основные понятия термодинамического формализма, приспособленные к рассматриваемому случаю (см. [2], [5], [1]).

Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{V}(G)$ — семейство всех конечных подмножеств G.

Назовем *потенциалом* семейство U функций

$$U_V : X_V \to \mathbb{R}, \quad V \in \mathcal{V},$$

такое, что

$$U_{Vg}(x) = U_V(\sigma^g_{Vg} x), \quad g \in G, \quad V \in \mathcal{V}, \quad x \in X_{Vg}. \tag{1.1}$$

Будем предполагать, что

$$||U|| := \sum_{V: e \in V \in \mathcal{V}} \max_{X_V \ni x} |U_V(x)| < \infty.$$

Сумма

$$E(V, x) = \sum_{V' \subset V} U_{V'}(x_{V'}), \quad V' \in \mathcal{V}, \ V \in \mathcal{V}, \quad x \in X_V,$$

называется энергией конфигурации $x \in X_V$, а выражение

$$Z(V) = \sum_{x \in X_V} \exp[-E(V, x)], \quad V \in \mathcal{V}, \quad x \in X_V,$$

статистической суммой на V (при этом естественно считать, что $E(\emptyset, x) \equiv 0$ и $Z(\emptyset) = 1$). Если предел

$$P(U, \{T_n\}) = \lim_{n\to\infty} |T_n|^{-1} \ln Z(T_n)$$

существует, то $P(U, \{T_n\})$ называется *давлением*, соответствующим U и $\{T_n\}$. Основным результатом этой статьи является

Теорема 1. *Для всякой фёльнеровской последовательности $\{T_n\}$ существует давление $P(U, \{T_n\})$, которое не зависит от $\{T_n\}$.*

Для любого $V \in \mathcal{V}$ и любой вероятностной меры λ на X_V определим *энтропию* $H(V, \lambda)$ равенством

$$H(V, \lambda) = -\sum_{x \in X_V} \lambda(x) \ln \lambda(x).$$

Пусть $\mathcal{M}_0$ — множество вероятностных мер на X, инвариантных относительно всех σ^g. Для $\mu \in \mathcal{M}_0$ будем писать $\mu(f)$ вместо $\int f d\mu$. Для любых множеств $V \subseteq G$ и $W \subseteq V$ введем естественную проекцию $\pi_W^V : S^V \to S^W$. Для всякой меры ν на S^V обозначим через ν_W^V ее образ под действием π_W^V. Вместо ν_W^G будем писать ν_W.

Хорошо известно (см., например, [7], [4]), что если $\mu \in \mathcal{M}_0$ и $\{T_n\}$ — фёльнеровская последовательность, то существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} |T_n|^{-1} H(T_n, \mu_{T_n}) =: h(\mu),$$

$$\lim_{n\to\infty} |T_n|^{-1} \sum_{x \in X_{T_n}} E(T_n, x)\mu_{T_n}(x) = \mu(\hat{f}_{(U)}),$$

где

$$\hat{f}_{(U)}(x) = \sum_{V: e \in V \in \mathcal{V}} |V|^{-1} U_V(x_V), \quad x \in X$$

Известно также (см.лемму 3.2 из [2]), что если $P(U, \{T_n\})$ существует, то для всех $\mu \in \mathcal{M}_0$

$$h(\mu) \leq P(U, \{T_n\}) + \mu(\hat{f}_{(U)}) \tag{1.2}$$

(вариационный принцип). Мера $\mu \in \mathcal{M}_0$ называется *равновесной*, если

$$h(\mu) = P(U) + \mu(\hat{f}_{(U)}).$$

С помощью теоремы 1 доказывается

Теорема 2. *Для всякого потенциала U с $||U|| < \infty$ существует равновесная мера.*

В следующем параграфе будет доказана теорема 1, параграф 3 посвящен доказательству теоремы 2; там же сделаны замечания, касающиеся гиббсовского свойства равновесной меры и аналогичным задачам в более общей ситуации.

Б.М.Гуревич поставил данную задачу и предложил использовать метод из [6]; я глубоко благодарен ему за это. Я благодарен М.Л.Бланку за замечания, способствовавшие улучшению текста, и А.М.Стёпину за внимание к работе.

2 Существование давления: доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 основано на возможности "почти разбить"любой элемент фёльнеровской последовательности с достаточно большим номером на множества, полученные с помощью сдвигов из нескольких начальных элементов этой последовательности. Рассуждения распадаются на несколько шагов.

Шаг 1

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство и, как и раньше, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(G)$ — совокупность конечных подмножеств группы G. Будем называть случайным множеством всякое измеримое отображение $\varphi : \Omega \to \mathcal{V}$. Как обычно, интеграл по мере $\mathbf{P}$ (математическое ожидание) будет обозначаться символом $\mathbf{E}$.

Для конечного набора $\mathcal{C}$ множеств $C \subset G$ назовем кратностью покрытия функцию

$$\Lambda_{\mathcal{C}}(g) := \sum_{C \in \mathcal{C}} I_C(g), \quad g \in G. \tag{2.1}$$

Лемма 1. *Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $l = l(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что если заданы $F_1, F_2, \ldots, F_l \in \mathcal{V}$, $A_1, A_2, \ldots, A_l \in \mathcal{V}$ и $F \in \mathcal{V}$, удовлетворяющие условиям*

$$|\bigcup_{j=1}^{k} F_j^{-1} F_{k+1}| < (1+\varepsilon)|F_{k+1}|, \quad k = 1, \ldots, l-1, \tag{2.2}$$

$$F_k A_k \subseteq F, \quad |A_k| > (1-\varepsilon)|F|, \quad k = 1, 2, \ldots, l, \tag{2.3}$$

то существуют случайные множества $B(i,a)$, $i = 1,\dots,l$, $a \in A_i$, такие, что

$$B(i,a) = F_i a \text{ или } \emptyset, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{E}\sum_{i,a} |B(i,a)| > (1-2\varepsilon)|F| \tag{2.5}$$

и для всякой точки $g \in F$ выполняется неравенство

$$\mathbf{E}(\Lambda_{\{B(i,a)\}}(g) | \Lambda_{\{B(i,a)\}}(g) > 0) < 1+\varepsilon. \tag{2.6}$$

Эта лемма непосредственно вытекает из леммы 2.4 в [6] (в которой следует положить $N_i = 1$, $D = \{e\}$, где e — единичный элемент группы G).

Шаг 2

Лемма 2. *Если $D \in \mathcal{V}$ и $\{T_n\}$ — фёльнеровская последовательность, то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|T_n|} |\{v \in T_n : Dv \subseteq T_n\}| = 1. \tag{2.7}$$

Доказательство. Очевидно,

$$\{v \in T_n : Dv \nsubseteq T_n\} = \{v \in T_n : \text{ существует такое } d \in D, \text{ что } dv \notin T_n\} = \\ = \bigcup_{d\in D} \{v \in T_n : dv \notin T_n\} = \bigcup_{d \in D} \{v \in T_n : v \notin d^{-1}T_n\}.$$

Значит,

$$|\{v \in T_n : Dv \subseteq T_n\}| \geq |T_n| - \sum_{d\in D} |T_n \triangle d^{-1}T_n|,$$

откуда следует (2.7), так как $\{T_n\}$ — фёльнеровская последовательность и $|D| < \infty$. □

Шаг 3

Сначала предположим, что U — потенциал конечного радиуса, т.е. что существует $\Gamma \in \mathcal{V}$ со следующим свойством: если $Vg^{-1} \nsubseteq \Gamma$ для всех $g \in G$, то $U_V(x) = 0$. Для всякого $V \subseteq G$ введем множество

$$N(V) = \{v \in V : v_0 v \in G \backslash V \text{ для какого-нибудь } v_0 \in \Gamma\},$$

которое можно понимать как границу V по отношению к Γ. Непосредственно проверяется, что если $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$, то

$$Z(V_1 \cup V_2) \leq Z(V_1)|S|^{|V_2|} \exp(||U|| \cdot |V_2|), \tag{2.8}$$

$$Z(V_1 \cup V_2) \leq Z(V_1) Z(V_2) \exp(||U|||N(V_1)| + ||U|| \cdot |V_1 \cap V_2|). \tag{2.9}$$

Пусть $V_1, \ldots, V_m \in \mathcal{V}$. Из (2.9) по индукции получаем

$$Z\big(\bigcup_{i=1}^{m} V_i\big) \leq \prod_{i=1}^{m} Z(V_i) \exp\big[||U|| \sum_{i=1}^{m} |N(V_i)| + ||U|| \sum_{g \in \bigcup_{i=1}^{m} V_i} (\Lambda_{\{V_i\}}(g) - 1)\big]. \tag{2.10}$$

Шаг 4

Положим

$$P = \liminf_{n \to \infty} |T_n|^{-1} \ln Z(T_n), \tag{2.11}$$

где $\{T_n\}$ — заданная фёльнеровская последовательность. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и $l = l(\varepsilon)$ из леммы 1.

Лемма 3. *Найдутся такие $i_1 < \cdots < i_l < i_{l+1}$, что при k=1,. . . ,l*

$$|T_{i_k}|^{-1} |N(T_{i_k})| < \varepsilon, \tag{2.12}$$

$$|T_{i_k}|^{-1} \ln\, Z(T_{i_k}) < P + \varepsilon; \tag{2.13}$$

при $k = 1, \ldots, l - 1$

$$|\bigcup_{s=1}^{k} T_{i_s}^{-1} T_{i_{k+1}}| < (1 + \varepsilon)|T_{i_{k+1}}|; \tag{2.14}$$

при $k = 1, \ldots, l$ и всяком $n \geq i_{l+1}$

$$|\{g \in G : T_{i_k} g \subseteq T_n\}| > (1 - \varepsilon)|T_n|. \tag{2.15}$$

Доказательство. Будем действовать по индукции. Выберем i_1 так, чтобы при $k = 1$ выполнялись неравенства (2.12) и (2.13) (поскольку $|N(T_r)| = |T_r \backslash \{v \in T_r : \Gamma v \subset T_r\}| = o(|T_r|)$ при фиксированном Γ и $r \to \infty$ (по Лемме 2), то (2.12) выполняется для всех достаточно больших i_1, а из определения P видно, что (2.13) выполняется для бесконечно многих i_1). Если уже выбраны $i_1 < \cdots < i_m$ $(1 \leq m \leq l - 1)$, для которых при $1 \leq k \leq m$ выполняются неравенства (2.12) и (2.13), а при $1 \leq k \leq m - 1$ — неравенство (2.14), то, аналогично предыдущему, существует бесконечное множество натуральных чисел, каждое из которых можно взять в качестве i_{m+1} — тогда при $k = m+1$ будут выполняться (2.12) и (2.13), а при $k = m$ будет выполняться (2.14) (так как

$$|\bigcup_{s=1}^{k} T_{i_s}^{-1} T_r| \leq |\bigcup_{s=1}^{k} T_{i_s}^{-1} T_r \triangle T_r| + |T_r| = (1 + o(1))|T_r|,$$

при фиксированных $i_1, \ldots, i_k$ и $r \to \infty$). Зафиксируем одно из таких i_{m+1}. В итоге мы определим $i_1, \ldots, i_l$. Остается выбрать i_{l+1}. Лемма 2 показывает, что если в качестве i_{l+1} взять любое достаточно большое число, то при $1 \leq k \leq l$ и всяком $n \geq i_{l+1}$ будет выполняться (2.15). $\square$

Шаг 5

Положив в лемме 1

$$F_k := T_{i_k},\ F = T_n,\ A_k := \{g \in G : T_{i_k} g \subseteq T_i\},\ 1 \leq k \leq l,\ n \geq i_{l+1}, \quad (2.16)$$

убеждаемся, что выполняются условия (2.2) и (2.3). Пусть $B(i,a)$ ($1 \leq i \leq l$, $a \in A_i$) — случайные множества из этой леммы. Для краткости будем писать $\Lambda(g)$ вместо $\Lambda_{\{B(i,a)\}}$. Введем обозначение

$$Q = \bigcup_{1 \leq i \leq l} \bigcup_{a \in A_i} B(i,a).$$

Из (2.8) следует, что

$$Z(F) \leq Z(Q)|S|^{|F \setminus Q|} \exp(||U|| \cdot |F \setminus Q|).$$

Отсюда, применяя (2.10) и беря математическое ожидание, получаем

$$\ln Z(F) \leq ||U|| \big(\mathbf{E} \sum_{i,a} |N(B(i,a))| + \mathbf{E} \sum_{g \in Q} (\Lambda(g) - 1) + \\ + \mathbf{E}|F \setminus Q| \big) + (\ln|S|)\mathbf{E}|F \setminus Q| + \mathbf{E} \sum_{i,a} \ln Z(B(i,a)). \quad (2.17)$$

Оценим все математические ожидания в правой части (2.17).

В силу (2.6)

$$\mathbf{E} \sum_{g \in Q} (\Lambda(g) - 1) \leq |F| \cdot \mathbf{E}(\Lambda(g) - 1 | \Lambda(g) > 0) \leq \varepsilon |F|. \quad (2.18)$$

Заметим, что имеет место тождество

$$\sum_{g \in Q} \Lambda(g) = \sum_{i,a} |B(i,a)| \quad (2.19)$$

(см. определение кратности покрытия в (2.1)). Из (2.18) и (2.19) получим

$$\mathbf{E} \sum_{i,a} |B(i,a)| \leq |F| + \mathbf{E} \sum_{g \in Q} (\Lambda(g) - 1) \leq (1 + \varepsilon)|F|. \quad (2.20)$$

Из (2.4) и (2.12) видно, что $N(B(i,a)) \le \varepsilon|B(i,a)|$ при всех i, a. Вместе с (2.20) это дает

$$\mathbf{E}\sum_{i,a}|N(B(i,a))| \le \varepsilon\mathbf{E}\sum_{i,a}|B(i,a)| \le \varepsilon(1+\varepsilon)|F|. \tag{2.21}$$

Далее, в силу (2.18)–(2.20)

$$\mathbf{E}|Q| = \mathbf{E}\sum_{i,a}|B(i,a)| - \mathbf{E}\sum_{g\in Q}(\Lambda(g)-1) \ge (1-3\varepsilon)|F|$$

и, значит,

$$\mathbf{E}|F \setminus Q| \le 3\varepsilon|F|. \tag{2.22}$$

Наконец, из (2.4), инвариантности потенциала U (см. (1.1)) и неравенства (2.13) следует, что при всех i, a

$$\ln Z(B(i,a)) \le |B(i,a)|(P+\varepsilon).$$

Поэтому (см. (2.20))

$$\mathbf{E}\sum_{i,a}\ln Z(B(i,a)) \;\le\; (P+\varepsilon)\mathbf{E}\sum_{i,a}|B(i,a)| \;\le\; (P+\varepsilon)(1+\varepsilon)|F|. \tag{2.23}$$

Подставив (2.18), (2.21)–(2.23) в (2.17) и вспомнив, что в качестве F можно взять T_n при любом $n \ge i_{l+1}$ (см. (2.16)), получим

$$\frac{\ln Z(T_n)}{|T_n|} \le P + \varepsilon \cdot const, \quad n \ge i_{l+1}.$$

Отсюда следует, что в (2.11) существует настоящий предел. Таким образом, доказано, что давление $P(U, \{T_n\})$ существует для всякого потенциала конечного радиуса. Используя стандартную аппроксимацию, заключаем, что $P(U, \{T_n\})$ существует для всякого U с $||U|| < \infty$.

Из существования предела сразу следует, что $P(U, \{T_n\})$ не зависит от $\{T_n\}$, так как объединение двух фёльнеровских последовательностей есть тоже фёльнеровская последовательность. □

3 Существование равновесной меры

Лемма 4. *Пусть* $\{T_n\}$ *— фёльнеровская последовательность,* $D \in \mathcal{V}(G)$ *и*

$$W_n := \{g \in T_n : |\{h \in G : Dh \subset T_n\}|\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} |W_n|/|T_n| = 1. \tag{3.1}$$

Доказательство. Заметим, что если $DD^{-1}g \subset T_n$, то $g \in W_n$. Поэтому утверждение следует из леммы 2. $\square$

При доказательстве теоремы 2 мы воспользуемся одним общим утверждением из теории множеств. Для всякого семейства $\mathcal{B}$ подмножеств (не обязательно различных) конечного множества B введем операцию замены любых двух множеств $B', B'' \in \mathcal{B}$ двумя другими множествами: $B' \cap B''$ и $B' \cup B''$. Скажем, что к $\mathcal{B}$ и (B', B'') применена операция $\star$, и обозначим полученное семейство множеств через $\star(B', B'')\mathcal{B}$.

Пусть $\Lambda_{\mathcal{B}}(g)$ — кратность покрытия (см. (2.1)). Заметим, что для любых $B', B'' \in \mathcal{B}$ и $b \in B$

$$\Lambda_{\mathcal{B}}(b) = \Lambda_{\star(B',B'')\mathcal{B}}(b)$$

Зафиксировав $k \in \mathbb{Z}_+$, положим $E := \{b \in B : \Lambda_{\mathcal{B}}(b) = k\}$.

Лемма 5. *В результате последовательного применения к $\mathcal{B}$ нескольких операций $\star$, можно получить семейство, в котором имеется k множеств, содержащих E.*

Доказательство. Не ограничивая общности, очевидно, можно считать, что $E \neq \emptyset$. Пусть $E = \{b_1, \ldots, b_r\}$. По определению, при каждом i найдется такое $B_i \in \mathcal{B}$, что $b_i \in B_i$.

Пусть $\mathcal{B}_1 = \star(B_1, B_2)\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_2 = \star(B_1 \cup B_2, B_3)\mathcal{B}_1$ и.т.д., на последнем шаге $\mathcal{B}_{r-1} = \star(B_1 \cup \ldots \cup B_{r-1}, B_r)\mathcal{B}_{r-2}$. В полученном таким образом наборе множеств $\mathcal{B}_{r-1}$ появилось множество $B_1 \cup \ldots \cup B_r$, содержащее E. Выбросив его, заметим, что каждый элемент $b \in E$ входит в ровно $k-1$ множеств из оставшихся в наборе. Поэтому можно применить те же рассуждения ещё $k-1$ раз и получить в итоге k множеств, содержащих E.

$\square$

Доказательство теоремы 2. Для любого $V \in \mathcal{V}$ определим вероятностную меру γ^V на X_V по формуле Гиббса:

$$\gamma^V(x) = (Z(V))^{-1} \exp(-E(V, x)), \qquad x \in X_V.$$

В [2] (формулы (3.13)-(3.16)) построена такая мера $\gamma \in \mathcal{M}_0$, что

$$\begin{aligned} h(\gamma) &= \lim_{k\to\infty} |T_k|^{-1} H(T_k, \gamma_{T_k}) \\ &\geq \overline{\lim_{k\to\infty}}\, \overline{\lim_{n\to\infty}}\, |T_k|^{-1} |T_n|^{-1} \sum_{g : T_k g \subset T_n} H(T_k g, \pi^{T_n}_{T_k g} \gamma^{T_n}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Пусть $B_{n,k} = \{b \in G : T_k b \subset T_n\}$, $\mathcal{A}_{n,k}$ — семейство множеств $T_k b$, $b \in B_{n,k}$, и $W_{n,k} = \{g \in T_n : \Lambda_{\mathcal{A}_{n,k}}(g) = |T_k|\}$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. По лемме 4 $|W_{n,k}| \geq (1-\varepsilon)|T_n|$, если k фиксировано и n достаточно велико. Сумма энтропий в правой части (3.2) имеет вид $\sum_{A \in \mathcal{A}_{n,k}} H(A, \pi_A^{T_n} \gamma^{T_n})$. Известно, что для любых множеств $C_1, C_2 \in \mathcal{V}(G)$ и любой меры $\alpha \in \mathcal{M}_0$

$$H(C_1, \alpha) + H(C_2, \alpha) \geq H(C_1 \cup C_2, \alpha) + H(C_1 \cap C_2, \alpha) \tag{3.3}$$

(см., например, [5], § 3.8) Значит, при замене набора множеств $\mathcal{A}_{n,k}$ на $\star\mathcal{A}_{n,k}$ сумма энтропий не увеличится. По лемме 5, последовательностью таких замен можно получить набор, в котором не менее $|T_k|$ множеств, содержащих $W_{n,k}$. Отсюда с учетом неотрицательности энтропии получаем

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|T_k|^{-1}|T_n|^{-1} \sum_{g: T_k g \subset T_n} H(T_k g, \pi_{T_k g}^{T_n} \gamma^{T_n}) \\
&\qquad\geq \overline{\lim_{k\to\infty}}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|T_k|^{-1}|T_n|^{-1}(|T_k| H(W_{n,k}, \pi_{W_{n,k}}^{T_n} \gamma^{T_n}) \\
&\qquad\geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|T_n|^{-1}(H(T_n, \gamma^{T_n}) - \varepsilon |T_n| \log(|S|)) \\
&\geq -\varepsilon \cdot \log(|S|) + \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|T_n|^{-1} \log(Z(T_n)) + \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|T_n|^{-1} \sum_{x \in X_{T_n}} \gamma^{T_n}(x) E(T_n, x).
\end{aligned}$$

По теореме 1 второе слагаемое в последней сумме равно $P(U)$, а третье равно $\gamma(f_{(U)})$ (см. [2]). Значит,

$$P(U) \leq h(\gamma) - \gamma(f_{(U)}).$$

Вместе с обратным неравенством (1.2) это приводит к утверждению теоремы. □

Замечание 1. Действуя аналогично доказательству теоремы 4.2 из [5] и используя теорему 2 (вместо теоремы 3.12 из [5]), можно показать, что всякая равновесная мера является гиббсовской, а при выполнении условия (D) из [5] всякая инвариантная гиббсовская мера является равновесной.

Замечание 2. Изложенное в § 2 доказательство теоремы 1 применимо и в более общем случае, когда множество состояний S является произвольным измеримым пространством с конечной мерой μ, а в качестве X берется произвольное подмножество прямого произведения S^G, инвариантное относительно всех преобразований σ^g (см. §1) и такое, что X_V измеримо в S^V при всяком $V \in \mathcal{V}$. Для $V = \{g_1, \ldots, g_n\}$ обозначим через

μ^V меру на S^V, равную прямому произведению $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$, где $\mu_i = \mu$ при всех i. Предположим, что $\mu^V(X_V) > 0$ для всех $V \in \mathcal{V}$. Потенциал $U = \{U_V(x),\, V \in \mathcal{V},\, x \in X_V\}$ предполагается измеримой (для каждого $V \in \mathcal{V}$) функцией с

$$||U|| := \sum_{V:e\in V\in\mathcal{V}} \sup_{x\in X_V} |U_V(x)| < \infty,$$

удовлетворяющей условию инвариантности (1.1), а статистическая сумма определяется равенством

$$Z(V) = \int_{x\in X_V} \exp[-E(V,x)])\mu^V(dx), \quad V \in \mathcal{V}.$$

Остальные понятия, участвующие в формулировке и доказательстве теоремы 1, определяются так же, как в § 1 (ср. [8]). Изменения в доказательстве касаются лишь шагов 3 и 5, так как шаги 1,2 и 4 связаны только с группой G. Шаг 3 состоит в установлении неравенств (2.8) и (2.9), в первом из которых в новой ситуации надо заменить $|S|$ на $\mu(S)$, а они, в свою очередь, вытекают из непосредственно проверяемых соотношений

$$E(V_1 \cup V_2, x) = E(V_1, x_{V_1}) + R_1,$$

$$E(V_1 \cup V_2, x) = E(V_1, x_{V_1}) + E(V_2 \setminus V_1, x_{V_2\setminus V_1}) + R_2,$$
$$E(V_2, x) = E(V_2 \setminus V_1, x_{V_2\setminus V_1}) + R_3,$$

где $x \in X_{V_1\cup V_2}$ и

$$|R_1| < ||U|| \cdot |V_2| \qquad |R_2| < ||U|| \cdot |N(V_1)| \qquad |R_3| < ||U|| \cdot |V_1 \cap V_2|.$$

Наконец, шаг 5 использует лишь результаты предыдущих шагов. В итоге мы приходим к утверждению теоремы 1 для потенциалов конечного радиуса. По-видимому, переход к потенциалам общего вида, основанный на аппроксимации, здесь также возможен.

Список литературы

[1] А.М. Стёпин, А.Т. Таги-Заде. Вариационный принцип для аменабельных групп преобразований. ДАН СССР, 254 (1980), 545–549.

[2] B.M. Gurevich, A.A.Tempelman. Hausdorff Dimension and Pressure in the DLR Thermodynamic Formalism. Amer.Math.Soc.Transl. (2) Vol.198, 2000.

[3] A.A. Tempelman. Specific characteristics and variational principle for homogeneous random fields, Z.Wahrschienlichkeistheorie Verw.Gebiete 65 (1984),341-365.

[4] A.A. Tempelman. Ergodic theorems for group actions. Kluwer, Dordrecht, 1992.

[5] D. Ruelle. Thermodynamic formalism. Addison-Wesley, Reading MA, 1978.

[6] E. Lindenstrauss. Pointwise theorems for amenable groups. Inventiones Mathematicae, 2001.

[7] D.S.Ornstein, B.Weiss. Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups. J. Anal. Math. 48 (1987), 1–141.

[8] X.- O. Георги. Гиббсовские меры и фазовые переходы. M., Мир, 1992.