УДК 517.984

Обратная задача спектрального анализа для матричного уравнения Штурма-Лиувилля

Н.П. Бондаренко

Аннотация. Исследуется обратная спектральная задача для матричного уравнения Штурма-Лиувилля на конечном интервале. Приведены свойства спектральных характеристик, получена конструктивная процедура решения обратной задачи и необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

1. Введение

1.1. В данной работе исследуется обратная спектральная задача для матричного уравнения Штурма-Лиувилля. Обратные задачи состоят в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Скалярный случай достаточно хорошо изучен (см. монографии [1–3]).

Матричный случай, представляющий собой обобщение скалярного, является существенно более трудным для исследования. В работах [4], [7] и [8] представлены различные постановки обратных спектральных задач в матричном случае и доказаны соответствующие теоремы единственности. В статье [5] приведена конструктивная процедура восстановления, но только для частного случая простого спектра.

В работе [6] были получены необходимые и достаточные условия для случая с существенным ограничением, заключающимся в асимптотической простоте спектра. Кроме того, метод, использованный в [6], не дает конструктивной процедуры решения. Отметим также, что в статье [9] были получены необходимые и достаточные условия для операторов Штурма–Лиувилля с матричными потенциалами из пространства Соболева W_2^{-1}. Этот класс потенциалов отличается от рассматриваемого в данной работе.

В данной работе изучается самосопряженный матричный оператор Штурма-Лиувилля в общем случае, без априорных ограничений на спектр. Исследуются свойства спектральных характеристик, получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. Приведена конструктивная процедура решения, представляющая собой обобщение алгоритма, описанного в [5].

Основным методом исследования является развитие идей метода спектральных отображений [3].

1.2. Рассмотрим краевую задачу $L = L(Q(x), h, H)$ для матричного уравнения Штурма-Лиувилля:

$$\ell Y := -Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \quad x \in (0, \pi), \tag{1}$$

$$U(Y) := Y'(0) - hY(0) = 0, \quad V(Y) := Y'(\pi) + HY(\pi) = 0. \tag{2}$$

Здесь $Y(x) = [y_k(x)]_{k=\overline{1,m}}$ — вектор-столбец, λ — спектральный параметр и $Q(x) = [Q_{jk}(x)]_{j,k=\overline{1,m}}$, причем $Q_{jk}(x) \in L_2(0, \pi)$ — комплекснозначные функции. Матрицу $Q(x)$ в дальнейшем будем называть *потенциалом*. Краевые условия задаются матрицами $h = [h_{jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$, $H = [H_{jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$, где h_{jk} и H_{jk} — комплексные числа. В данной работе будем рассматривать самосопряженный случай, когда $Q = Q^*$, $h = h^*$, $H = H^*$.

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ и $S(x, \lambda)$ являются матричными решениями уравнения (1) при начальных условиях

$$\varphi(0, \lambda) = I_m, \quad \varphi'(0, \lambda) = h, \quad S(0, \lambda) = 0_m, \quad S'(0, \lambda) = I_m.$$

где I_m — единичная $m\times m$ матрица, 0_m — нулевая $m\times m$ матрица. Функция $\Delta(\lambda) := \det[V(\varphi)]$ называется *характеристической функцией* краевой задачи L. Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ и имеет не более чем счетное множество нулей. Нули характеристической функции совпадают с собственными значениями краевой задачи L с учетом кратностей и являются вещественными (см. лемму 3).

Пусть $\omega = \omega^*$ — некоторая $m\times m$ матрица. Будем говорить, что задача $L(Q(x), h, H)$ принадлежит классу $A(\omega)$, если она имеет потенциал из $L_2(0,\pi)$ и $h+H+\frac{1}{2}\int_0^\pi Q(x)\,dx = \omega$. Без ограничения общности можно считать, что $L\in A(\omega)$, где $\omega\in D = \{\omega\colon \omega = \operatorname{diag}\{\omega_1,\dots,\omega_m\}, \omega_1\leqslant\dots\leqslant\omega_m\}$. Выполнения этого условия можно добиться применением к задаче L унитарного преобразования.

Для формулировки основной теоремы нам потребуются следующие две леммы, которые будут доказаны в разделе 2.

Лемма 1. *Пусть $L\in A(\omega)$, $\omega\in D$. Краевая задача L имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_{nq}\}_{n\geqslant 0, q=\overline{1,m}}$. При этом*

$$\rho_{nq} = \sqrt{\lambda_{nq}} = n + \frac{\omega_q}{\pi n} + \frac{\varkappa_{nq}}{n}, \quad \{\varkappa_{nq}\}_{n\geqslant 0}\in l_2,\ q=\overline{1,m}. \tag{3}$$

Пусть $\Phi(x,\lambda) = [\Phi_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ — матричное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям $U(\Phi) = I_m$, $V(\Phi) = 0_m$. Будем называть $\Phi(x,\lambda)$ *решением Вейля* задачи L. Положим $M(\lambda) := \Phi(0,\lambda)$. Матрица $M(\lambda) = [M_{jk}(\lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ называется *матрицей Вейля* задачи L. Матрица Вейля представляет собой обобщение функции Вейля для скалярного уравнения Штурма-Лиувилля (см. [1], [3]). Функции Вейля и их обобщения часто возникают в приложениях и фундаментальной математике, они являются наиболее естественными спектральными характеристиками в теории обратных задач для различных классов дифференциальных операторов.

Используя определение $M(\lambda)$, нетрудно показать, что

$$M(\lambda) = -(V(\varphi))^{-1}V(S). \tag{4}$$

Из представления (4) следует, что матрица-функция $M(\lambda)$ мероморфна по λ с простыми полюсами в точках, совпадающих с собственными значениями $\{\lambda_{nq}\}$ задачи L (см. лемму 4).

Обозначим

$$\alpha_{nq} := \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nq}} M(\lambda).$$

Величины $\Lambda := \{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\geqslant 0,\, q=\overline{1,m}}$ будем называть *спектральными данными* задачи L.

Пусть $\{\lambda_{n_k q_k}\}_{k\geqslant 0}$ — все различные собственные значения из набора $\{\lambda_{nq}\}_{n\geqslant 0, q=\overline{1,m}}$. Положим

$$\alpha'_{n_k q_k} := \alpha_{n_k q_k},\ k\geqslant 0, \quad \alpha'_{nq} = 0_m,\ (n,q)\notin\{(n_k,q_k)\}_{k\geqslant 0}.$$

Обозначим

$$1 = m_1 < \dots < m_{p+1} = m+1,$$
$$\omega_{m_s} = \dots = \omega_{m_{s+1}-1} =: \omega^{(s)}, \quad s=\overline{1,p}$$

где p — количество различных значений среди чисел $\{\omega_q\}_{q=\overline{1,m}}$. Пусть

$$\alpha_n^{(s)} = \sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1} \alpha'_{nq}, \quad s=\overline{1,p}.$$

Лемма 2. *Пусть* $L \in A(\omega)$, $\omega \in D$. *Тогда справедливы соотношения*

$$\alpha_n^{(s)} = \frac{2}{\pi} I^{(s)} + \frac{\varkappa_n^{(s)}}{n}, \quad \{\|\varkappa_n^{(s)}\|\}_{n \geqslant 0} \in l_2, \; s = \overline{1,p}, \tag{5}$$

где

$$I^{(s)} = [I_{jk}^{(s)}]_{j,k=\overline{1,m}}, \quad I_{jk}^{(s)} = \begin{cases} 1, & m_s \leqslant j = k \leqslant m_{s+1} - 1, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases}$$

и $\|.\|$ *— норма матрицы:* $\|a\| = \max_{j,k} |a_{jk}|$.

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Обратная задача 1. По заданным спектральным данным Λ построить Q , h и H .

Будем говорить, что величины $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n \geqslant 0, q=\overline{1,m}} \in \mathrm{Sp}$, если $\lambda_{nq} = \lambda_{kl}$ всегда соответствуют $\alpha_{nq} = \alpha_{kl}$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть* $\omega \in D$. *Для того чтобы величины* $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n \geqslant 0, q=\overline{1,m}} \in Sp$ *были спектральными данными некоторой задачи* $L \in A(\omega)$ *необходимо и достаточно выполнение следующих условий*

1) Верны асимптотические формулы (3) и (5).

2) Все λ_{nq} *вещественные,* $\alpha_{nq} = (\alpha_{nq})^*$, $\alpha_{nq} \geqslant 0$ *при всех* $n \geqslant 0$, $q = \overline{1,m}$ *и ранги матриц* α_{nq} *равны кратностям* λ_{nq} .

3) Для любого вектора-строки $\gamma(\lambda)$, *который является целой функцией и удовлетворяет оценке*

$$\gamma(\lambda) = O(\exp(|Im\sqrt{\lambda}|\pi)), \quad |\lambda| \to \infty,$$

из выполнения условия $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$ *при всех* $n \geqslant 0$, $q = \overline{1,m}$ *следует, что* $\gamma(\lambda) \equiv 0$.

Необходимость условий теоремы 1 будет доказана в разделе 2, достаточность — в разделе 4. В разделе 3 приведена конструктивная процедура решения обратной задачи 1.

2. Необходимость

2.1. В данном подразделе исследуются свойства спектральных данных задачи L .

Лемма 3. *Нули характеристической функции* $\Delta(\lambda)$ *совпадают с собственными значениями краевой задачи* L . *Кратность каждого нуля* λ_0 *целой функции* $\Delta(\lambda)$ *равна геометрической кратности соответствующего собственного значения (т. е. количеству отвечающих ему линейно независимых собственных вектор-функций).*

Доказательство. 1) Пусть λ_0 — собственное значение задачи L , и пусть Y^0 — отвечающая ему собственная вектор-функция. Покажем, что $Y^0(x) = \varphi(x,\lambda_0)Y^0(0)$. Ясно, что $Y^0(0) = \varphi(0,\lambda)Y^0(0)$. Из условия $U(Y^0) = 0$ вытекает $Y^{0\prime}(0) = hY^0(0) = \varphi(0,\lambda)Y^0(0)$. Таким образом, $Y^0(x)$ и $\varphi(x,\lambda_0)Y^0(0)$ являются решениями одной и той же задачи Коши для уравнения (1) и, следовательно, совпадают.

Пусть собственному значению λ_0 отвечают k линейно независимых собственных функций Y^1 , Y^2 , ..., Y^k . Выберем невырожденную $m \times m$ матрицу C так, чтобы первые k столбцов матрицы $\varphi(x,\lambda_0)C$ совпадали с собственными функциями. Рассмотрим $Y(x,\lambda) := \varphi(x,\lambda)C$, $Y(x,\lambda) = [Y_q(x,\lambda)]_{q=\overline{1,m}}$, $Y_q(x,\lambda_0) = Y^q(x)$, $q = \overline{1,k}$. Ясно, что нули функции $\Delta_1(\lambda) := \det V(Y) = \det V(\varphi)\cdot\det C$ совпадают с нулями $\Delta(\lambda)$ с учетом кратностей. Заметим, что $\lambda=\lambda_0$ является нулем каждого из столбцов $V(Y_1)$, ..., $V(Y_k)$. Следовательно, если λ_0 — нуль определителей $\Delta_1(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ кратности p , то $p\geqslant k$.

3) Предположим, что $p>k$. Представим $\Delta_1(\lambda)$ в виде

$$\Delta_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k\Delta_2(\lambda),$$

$$\Delta_2(\lambda)=\det\left[\frac{V(Y_1)}{\lambda-\lambda_0},\ldots,\frac{V(Y_k)}{\lambda-\lambda_0},V(Y_{k+1}),\ldots,V(Y_m)\right].$$

Исходя из нашего предположения, имеем $\Delta_2(\lambda_0)=0$, т. е. существуют коэффициенты α_q , $q=\overline{1,m}$, не все равные нулю, для которых выполнено равенство

$$\sum_{q=1}^{k}\alpha_q\frac{dV(Y_q(x,\lambda_0))}{d\lambda}+\sum_{q=k+1}^{m}\alpha_q V(Y_q(x,\lambda_0))=0. \qquad (6)$$

Если $\alpha_q=0$ при $q=\overline{1,k}$, то функция

$$Y^+(x,\lambda):=\sum_{q=k+1}^{m}\alpha_q Y_q(x,\lambda)$$

при $\lambda=\lambda_0$ является собственной функцией, соответствующей собственному значению λ_0 , причем Y^q , $q=\overline{1,k}$ и $Y^+(x,\lambda_0)$ линейно независимы. Приходим к противоречию, поскольку собственному значению λ_0 соответствуют ровно k линейно независимых собственных функций.

Иначе рассмотрим функцию

$$Y^+(x,\lambda):=\sum_{q=1}^{k}\alpha_q Y_q(x,\lambda)+(\lambda-\lambda_0)\sum_{q=k+1}^{m}\alpha_q Y_q(x,\lambda).$$

Нетрудно убедиться, что

$$\ell(Y^+(x,\lambda))=\lambda Y^+(x,\lambda),\quad \ell\left(\frac{d}{d\lambda}Y^+(x,\lambda)\right)=\lambda\frac{d}{d\lambda}Y^+(x,\lambda)+Y^+(x,\lambda),$$

$$U(Y^+)=U\left(\frac{d}{d\lambda}Y^+\right)=0,\quad V(Y^+(x,\lambda_0))=0.$$

Равенство (6) эквивалентно соотношению

$$V\left(\frac{d}{d\lambda}Y^+(x,\lambda_0)\right)=0.$$

Таким образом, получаем, что $Y^+(x,\lambda_0)$ — собственная функция и $\frac{d}{d\lambda}Y^+(x,\lambda_0)$ — так называемая *присоединенная функция* (см. [10]), соответствующие собственному значению λ_0 . Если мы покажем, что рассматриваемый оператор Штурма-Лиувилля не имеет присоединенных функций, то также придем к противоречию с условием $\Delta_2(\lambda_0)\neq 0$ и в итоге получим, что $k=p$.

4) Покажем, что самосопряженный оператор, задаваемый уравнением (1) и краевыми условиями (2), не имеет присоединенных функций. Пусть λ_0 — собственное значение

задачи L, и пусть Y^0 и Y^1 — отвечающие ему собственная и присоединенная функция соответственно, т. е. Y^0 и Y^1 удовлетворяют условиям (2) и

$$(\ell-\lambda_0)Y^0=0, \quad (\ell-\lambda_0)Y^1=Y^0.$$

Отсюда следует

$$((\ell-\lambda_0)^2Y^1,Y^1)=0,$$

где скалярное произведение определяется следующим образом:

$$(Y,Z):=\int_0^\pi Y^*(x)Z(x)\,dx.$$

В самосопряженном случае имеем: $(\ell Y,Z)=(Y,\ell Z)$ для всех Y и Z, удовлетворяющих (2). Кроме того, собственное значение λ_0 вещественное. Следовательно,

$$((\ell-\lambda_0)Y^1,(\ell-\lambda_0)Y^1)=(Y^0,Y^0)=0,$$

и $Y^0=0$. Вспоминая, что Y^0 — собственная функция, приходим к противоречию. $\square$

Лемма 4. *Все полюсы матрицы Вейля $M(\lambda)$ простые и ранги вычетов совпадают с кратностями соответствующих собственных значений задачи L.*

Доказательство. Пусть λ_0 — собственное значение задачи L кратности k, Y^1, Y^2, ..., Y^k — линейно независимые собственные вектор-функции, отвечающие λ_0. Следуя доказательству леммы 3, рассмотрим невырожденную матрицу C такую, что $Y^q(x)=\varphi(x,\lambda_0)C_q$, $q=\overline{1,k}$. Пусть $Y(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)C$. Очевидно, что $(V(\varphi))^{-1}=C(V(Y))^{-1}$. Представим $V(Y(x,\lambda))$ в виде

$$V(Y(x,\lambda))=[(\lambda-\lambda_0)W_1(\lambda),\dots,(\lambda-\lambda_0)W_k(\lambda),W_{k+1}(\lambda),\dots,W_m(\lambda)],$$

где

$$W_q(\lambda)=\frac{V(Y_q(x,\lambda))}{\lambda-\lambda_0}, \quad q=\overline{1,k},$$

$$W_q(\lambda)=V(Y_q(\lambda)), \quad q=\overline{k+1,m}.$$

Ясно, что $W_q(\lambda)$ — целые функции и $\det W(\lambda)=\det[W_1(\lambda),\dots,W_m(\lambda)]\neq 0$ при λ из достаточно малой окрестности λ_0 (поскольку иначе кратность собственного значения λ_0 была бы больше k). Вычислим обратную матрицу:

$$\det V(Y(x,\lambda))=(\lambda-\lambda_0)^k\det W(\lambda),$$

$$(V(Y(x,\lambda)))^{-1}=\left[\frac{X_1(\lambda)}{\lambda-\lambda_0},\dots,\frac{X_k(\lambda)}{\lambda-\lambda_0},X_{k+1}(\lambda),\dots,X_m(\lambda)\right]^t,$$

где $X_q(\lambda)$ аналитичны в некоторой окрестности λ_0 (t обозначает транспонирование). Используя (4), получаем

$$\alpha_0=\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0}M(\lambda)=-\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0}(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}V(S(x,\lambda))$$

$$=-\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0}C\left[\frac{X_1(\lambda)}{\lambda-\lambda_0},\dots,\frac{X_k(\lambda)}{\lambda-\lambda_0},X_{k+1}(\lambda),\dots,X_m(\lambda)\right]^tV(S(x,\lambda))$$

$$=-C\,[X_1(\lambda_0),\dots,X_k(\lambda_0),0,\dots,0]^t\,V(S(x,\lambda_0))=-XV(S(x,\lambda_0)).$$

Отсюда видно, что полюсы матрицы Вейля простые и $rank\,\alpha_0 \leqslant k$.

Докажем противоположное неравенство. Заметим, что

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0}(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}V(\varphi(x,\lambda)) = 0_m = XV(\varphi(x,\lambda_0)).$$

Пусть $\psi(x,\lambda_0)$ — решение уравнения (1) при $\lambda = \lambda_0$, удовлетворяющее начальному условию $V(\psi) = X^*$. Поскольку столбцы матриц $\varphi(x,\lambda_0)$ и $S(x,\lambda_0)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), поэтому $\psi(x,\lambda_0)$ можно представить в виде

$$\psi(x,\lambda_0) = \varphi(x,\lambda_0)A + S(x,\lambda_0)B,$$

$$XX^* = XV(\psi(x,\lambda_0)) = XV(\varphi(x,\lambda_0))A + XV(S(x,\lambda_0))B = -\alpha_0 B.$$

С одной стороны, поскольку $\det W \neq 0$, векторы $X_q(\lambda_0)$ линейно независимы и, следовательно, $rank\, XX^* = k$. С другой стороны, $rank\,\alpha_0 B \leqslant rank\,\alpha_0$. Получаем $rank\,\alpha_0 \geqslant k$, завершая тем самым доказательство леммы. ☐

Лемма 5. *Пусть* λ_0 , λ_1 *— собственные значения задачи* L , $\lambda_0 \neq \lambda_1$, *и* $\alpha_i = \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_i} M(\lambda)$, $i = 0,1$. *Тогда справедливы соотношения*

$$\alpha_0^* \int_0^\pi \varphi^*(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0)\,dx\,\alpha_0 = \alpha_0^*,$$

$$\alpha_0^* \int_0^\pi \varphi^*(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_1)\,dx\,\alpha_1 = 0_m.$$

Из первого соотношения, в частности, следует, что

$$\alpha_0 = \alpha_0^* \geqslant 0.$$

Доказательство. Обозначим

$$\ell^* Z := -Z'' + ZQ(x), \quad V^*(Z) := Z'(\pi) + Z(\pi)H, \quad \langle Z, Y\rangle := Z'Y - ZY',$$

где $Z = [Z_k]^t_{k=\overline{1,m}}$ — вектор-строка (t обозначает транспонирование). Тогда

$$\langle Z, Y\rangle_{x=\pi} = V^*(Z)Y(\pi) - Z(\pi)V(Y).$$

Если $Y(x,\lambda)$ и $Z(x,\mu)$ удовлетворяют уравнениям $\ell Y(x,\lambda) = \lambda Y(x,\lambda)$ и $\ell^* Z(x,\mu) = \mu Z(x,\mu)$ соответственно, то $\frac{d}{dx}\langle Z, Y\rangle = (\lambda - \mu)ZY$. В частности, при $\lambda = \mu$ $\langle Z, Y\rangle$ не зависит от x .

Поскольку λ_0 — вещественное число, $\varphi^*(x,\lambda_0)$ удовлетворяет уравнению $\ell^* Z = \lambda_0 Z$. Следовательно,

$$\int_0^\pi \varphi^*(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0)\,dx = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{\langle \varphi^*(x,\lambda_0), \varphi(x,\lambda)\rangle|_0^\pi}{\lambda - \lambda_0}$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{V^*(\varphi^*(x,\lambda_0))\varphi(x,\lambda) - \varphi^*(x,\lambda_0)V(\varphi(x,\lambda))}{\lambda - \lambda_0}.$$

Из (4) и леммы 4 вытекает

$$V(\varphi(x,\lambda_0))\alpha_0 = -\lim_{\lambda\to\lambda_0}(\lambda-\lambda_0)V(\varphi(x,\lambda))(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}V(S(x,\lambda)) = 0_m.$$

Аналогично $\alpha_0^* V^*(\varphi^*(x,\lambda_0)) = 0_m$. Следовательно, вычисляем

$$\alpha_0^* \int_0^\pi \varphi^*(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0)\,dx\,\alpha_0 = \alpha_0^*\varphi^*(\pi,\lambda_0)\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{V(\varphi(x,\lambda))}{\lambda-\lambda_0}$$

$$\times \lim_{\lambda\to\lambda_0}(\lambda-\lambda_0)(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}V(S(x,\lambda)) = \alpha_0^*\varphi^*(\pi,\lambda_0)V(S(x,\lambda_0))$$

$$= -\alpha_0^*\langle\varphi^*(x,\lambda_0), S(x,\lambda_0)\rangle_{x=\pi} = -\alpha_0^*\langle\varphi^*(x,\lambda_0), S(x,\lambda_0)\rangle_{x=0} = \alpha_0^*.$$

Аналогичным образом можно получить второе соотношение леммы. □

2.2. В данном подразделе получены асимптотические формулы для спектральных данных.

Обозначим $\rho := \sqrt{\lambda}$, $\operatorname{Re}\rho \geqslant 0$, $\tau := \operatorname{Im}\rho$, $G_\delta = \{\rho\colon |\rho - k| \geqslant \delta, k = 0, \pm1, \pm2, \dots\}$, $\delta > 0$. Следующая оценка может быть получена стандартным образом (см. [3, п. 1.1]):

$$\Delta(\lambda) = (-\rho\sin\rho\pi)^m + O(|\rho|^{m-1}\exp(m|\tau|\pi)) = (-\rho\sin\rho\pi)^m + (-\rho\sin\rho\pi)^{m-1}O(\exp(|\tau|\pi))$$

$$+ \ldots + (-\rho\sin\rho\pi)O(\exp((m-1)|\tau|\pi)) + O(\exp(m|\tau|\pi)), \quad |\rho|\to\infty. \tag{7}$$

Доказательство леммы 1. 1) Рассмотрим контуры $\Gamma_N = \{\lambda\colon |\lambda| = (N+1/2)^2\}$. В силу (7)

$$\Delta(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda), \quad f(\lambda) = (-\rho\sin\rho\pi)^m, \quad |g(\lambda)| \leqslant C|\rho|^{m-1}\exp(m|\tau|\pi).$$

При достаточно больших N для $\lambda\in\Gamma_N$ выполнено неравенство $|f(\lambda)| > |g(\lambda)|$. Тогда по теореме Руше количество нулей аналитической функции $\Delta(\lambda)$ внутри Γ_N совпадает с количеством нулей $f(\lambda)$ (с учетом кратностей), т. е. равно $(N+1)m$. Таким образом, в круге $|\lambda| < (N+1/2)^2$ расположены ровно $(N+1)m$ собственных значений задачи L : $\{\lambda_{nq}\}_{n=\overline{0,N},q=\overline{1,m}}$.

Применяя теорему Руше к кругу $\gamma_n(\delta) = \{\rho\colon |\rho - n| \leqslant \delta\}$, заключаем, что при достаточно больших n ровно m нулей $\Delta(\rho^2)$ лежат внутри $\gamma_n(\delta)$, а именно $\{\rho_{nq}\}_{q=\overline{1,m}}$. В силу произвольности $\delta > 0$ имеем

$$\rho_{nq} = n + \varepsilon_{nq}, \quad \varepsilon_{nq} = o(1), \quad n\to\infty. \tag{8}$$

Подставляя в (7) $\rho = \rho_{nq}$, получаем

$$(-\rho_{nq}\sin\rho_{nq}\pi)^m + (-\rho_{nq}\sin\rho_{nq}\pi)^{m-1}O(1) + \ldots + (-\rho_{nq}\sin\rho_{nq}\pi)O(1) + O(1) = 0, \quad n\to\infty.$$

Обозначим $s_{nq} := |\rho_{nq}\sin\rho_{nq}\pi|$ и перепишем полученную формулу в виде

$$s_{nq}^m \leqslant C_0 + C_1 s_{nq} + \ldots + C_{m-1}s_{nq}^{m-1}. \tag{9}$$

Из (9) вытекает, что $s_{nq} \leqslant \max\{1, \sum_{k=0}^{m-1} C_k\}$, иначе приходим к противоречию:

$$s_{nq}^m > \sum_{k=0}^{m-1} C_k s_{nq}^{m-1} \geqslant \sum_{k=0}^{m-1} C_k s_{nq}^k.$$

Таким образом, $|\rho_{nq}\sin\rho_{nq}\pi| \leqslant C$. Используя (8), получаем

$$\sin\rho_{nq}\pi = \sin\varepsilon_{nq}\pi\cos n\pi = O(n^{-1}), \quad \varepsilon_{nq} = O(n^{-1}), \quad n\to\infty.$$

Вместе с (8) это дает

$$\rho_{nq} = n + O(n^{-1}), \quad n\to\infty.$$

2) Перейдем к получению более точных асимптотических формул. Нетрудно видеть, что

$$V(\varphi) = -\rho\sin\rho\pi\cdot I_m + \omega\cos\rho\pi + \varkappa(\rho),$$

где

$$\varkappa(\rho) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi Q(t)\cos\rho(\pi-2t)\,dt + O\left(\frac{1}{\rho}\exp(|\tau|\pi)\right).$$

Введем линейные отображения $z_n(\rho)$, переводящие круги $\{\rho\colon |\rho-n| \leqslant C/n\}$, в которых при фиксированном достаточно большом C лежат ρ_{nq} , в круг $\{z\colon |z|\leqslant R\}$:

$$\rho = n + \frac{z_n(\rho)}{\pi n}.$$

При $|z|\leqslant R$ имеем

$$V(\varphi) = (-1)^n(\omega - z_n(\rho)I_m + \varkappa_n(z_n(\rho))). \tag{10}$$

Учитывая представление для $\varkappa(\rho)$, имеем $\varkappa_n(z) = o(1)$, $n\to\infty$, причем сходимость равномерная по z в круге $\{z\colon |z|\leqslant R\}$. Кроме того, для любой последовательности $\{z_n^0\}_{n\geqslant 0}\subset\{z\colon |z|\leqslant R\}$ $\{\|\varkappa_n(z_n^0)\|\}_{n\geqslant 0}\in l_2$, причем $\sum\limits_{n\geqslant 0}\|\varkappa_n(z_n^0)\|^2 < C$. Следовательно,

$$\Delta(\rho^2) = \pm f(z_n(\rho)) + g_n(z_n(\rho)),$$

где $f(z) = \det(\omega - zI_m)$ — многочлен с нулями $\{\omega_q\}_{q=\overline{1,m}}$, $g_n(z) = o(1)$, $n\to\infty$ (сходимость равномерная при $|z|\leqslant R$), выбор знака $\pm$ зависит только от n .

Фиксируем $0 < \delta < 1/2\min\limits_{q,l\colon \omega_q\neq\omega_l}|\omega_q - \omega_l|$ и введем в рассмотрение контуры $\gamma_q = \{z\colon |z-\omega_q| = \delta\}$. Очевидно, что $|f(z)|\geqslant\varepsilon > 0$ при $z\in\gamma_q$ и при достаточно больших n верно неравенство $|f(z)| > |g_n(z)|$ на γ_q . Поскольку функции $f(z)$ и $g_n(z)$ аналитичны в круге $\{z\colon |z|\leqslant R\}\supset\gamma_q$, по теореме Руше функции $\Delta(\rho_n^2(z))$ и $f(z)$ имеют одинаковое количество нулей внутри γ_n (ρ_n — обратное отображение к z_n). Таким образом, имеем:

$$\rho_{nq} = n + \frac{\omega_q}{\pi n} + \frac{\varkappa_{nq}}{n}, \quad \varkappa_{nq} = o(1),\, n\to\infty, \quad q = \overline{1,m}.$$

Подставим полученную формулу в (10):

$$V(\varphi) = (-1)^n(\omega - \omega_q I_m - \pi\varkappa_{nq}I_m + \varkappa_n(z_n(\rho_{nq}))).$$

Поскольку $\{\|\varkappa_n(z_n(\rho_{nq}))\|\}\in l_2$, получаем, что $\{\varkappa_{nq}\}\in l_2$. $\square$

Доказательство леммы 2. 1) Пусть $\tilde{M}(\lambda)$ — матрица Вейля задачи $\tilde{L}(\tilde{Q},\tilde{h},\tilde{H})$ такой, что $\tilde{Q}(x) = \frac{2}{\pi}\omega$, $\tilde{h} = \tilde{H} = 0_m$. Тогда $\tilde{\alpha}^{(s)} = \frac{2}{\pi}I^{(s)}$, $s = \overline{1,p}$.

Введем контуры $\gamma_n^{(s)} = \{\lambda\colon |\lambda - (n^2 + \frac{2}{\pi}\omega^{(s)})| = R\}$, $R = \frac{1}{\pi} \min\limits_{q,l\colon \omega_q \neq \omega_l} |\omega_q - \omega_l|$. Учитывая лемму 1, по основной теореме о вычетах получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n^{(s)}} (M(\lambda) - \tilde{M}(\lambda))\, d\lambda = \sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1} \alpha'_{nq} - \sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1} \tilde{\alpha}'_{nq} = \alpha_n^{(s)} - \frac{2}{\pi} I^{(s)}, n \geqslant n^*,\ s = \overline{1,p}.$$

Нетрудно видеть, что $M_{jk}(\lambda) = -\frac{\Delta_{jk}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$, где

$$\Delta_{jk}(\lambda) = \det[V(\varphi_1), \ldots, V(\varphi_{j-1}), V(S_k), V(\varphi_{j+1}), \ldots, V(\varphi_m)].$$

Используя данное представление, находим:

$$M_{jk}(\lambda) - \tilde{M}_{jk}(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)\tilde{\Delta}_{jk}(\lambda) - \Delta_{jk}(\lambda)\tilde{\Delta}(\lambda)}{\Delta(\lambda)\tilde{\Delta}(\lambda)}, \quad j, k = \overline{1,m}. \tag{11}$$

Воспользуемся отображениями z_n , введенными при доказательстве леммы 1:

$$\rho = n + \frac{z_n(\rho)}{\pi n}.$$

Если $\lambda \in \gamma_n^{(s)}$, то $0 < \delta_1 \leqslant |z_n(\rho) - \omega_q|$ для всех $q = \overline{1,m}$ и $|z_n(\rho) - \omega^{(s)}| \leqslant \delta_2$. Следовательно, верна оценка для $\Delta(\lambda)$, полученная при доказательстве леммы 1 (предел равномерный по λ): $\Delta(\lambda) = \pm f(z_n(\rho)) + o(1)$, $\lambda \in \gamma_n^{(s)}$, $n \to \infty$.

Аналогично получаем асимптотические формулы:

$$\Delta_{jk}(\lambda) = \pm \frac{f(z_n(\rho))}{z_n(\rho) - \omega_j} + o(1) \quad \text{при}\, j = k,$$

$$\Delta_{jk}(\lambda) = o(1) \quad \text{при}\, j \neq k,$$
$$\lambda \in \gamma_n^{(s)},\, n \to \infty, \quad j, k = \overline{1,m}.$$

Сходимость остаточных членов равномерна по λ , выбор знака $\pm$ зависит только от n . Аналогичные соотношения верны для $\tilde{\Delta}(\lambda)$ и $\tilde{\Delta}_{jk}(\lambda)$.

Подставляя полученные оценки в (11) и учитывая, что $C_1 \leqslant |f(z_n(\rho))| \leqslant C_2$ при $\lambda \in \gamma_n^{(s)}$, в итоге получаем:

$$M_{jk}(\lambda) - \tilde{M}_{jk}(\lambda) = o(1), \quad j, k = \overline{1,m}, \quad \lambda \in \gamma_n^{(s)},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n^{(s)}} (M(\lambda) - \tilde{M}(\lambda))\, d\lambda = o(1), \quad \alpha_n^{(s)} = \frac{2}{\pi} I^{(s)} + \eta_n^{(s)},\, \eta_n^{(s)} = o(1), \quad n \to \infty.$$

2) Далее через $\{\varkappa_n\}$ будем обозначать различные последовательности матриц такие, что $\{\|\varkappa_n\|\} \in l_2$. Используя стандартную асимптотику:

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \rho x \cdot I_m + Q_1(x) \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int\limits_0^x \frac{\sin \rho(x - 2t)}{2\rho} Q(t)\, dt + O\left(\frac{\exp |\tau| x}{\rho}\right),$$

$$|\rho| \to \infty, \quad x \in [0, \pi],$$

где $Q_1(x) = h + \int\limits_0^x Q(t)\,dt$, нетрудно показать, что

$$\int\limits_0^\pi \varphi^*(x,\lambda_{nq})\varphi(x,\lambda_{nl})\,dx = \frac{\pi}{2}I_m + \frac{\varkappa_n}{n}, \quad \{n|\rho_{nq}-\rho_{nl}|\} \in l_2.$$

Применяя лемму 5, получаем

$$\alpha_{nq}\left(\frac{\pi}{2}I_m + \frac{\varkappa_n}{n}\right)\alpha_{nq} = \alpha_{nq}, \quad n \geqslant 0, \quad q = \overline{1,m}.$$

Ясно, что $\|\alpha_{nq}\| \leqslant C$, $n \geqslant 0$, $q = \overline{1,m}$. Следовательно, $\frac{\pi}{2}\alpha_{nq}^2 = \alpha_{nq} + \frac{\varkappa_n}{n}$. Аналогично выводим: $\alpha_{nq}\alpha_{nl} = \frac{\varkappa_n}{n}$, $m_s \leqslant q, l \leqslant m_{s+1}-1$, $q \neq l$, $s = \overline{1,p}$. Таким образом,

$$\frac{\pi}{2}(\alpha_n^{(s)})^2 = \frac{\pi}{2}\left(\sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1}\alpha'_{nq}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1}(\alpha'_{nq})^2 + \frac{\varkappa_n}{n} = \sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1}\alpha'_{nq} + \frac{\varkappa_n}{n} = \alpha_n^{(s)} + \frac{\varkappa_n}{n}.$$

Подставим в полученное равенство результат пункта 1:

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{\pi}I^{(s)} + \eta_n^{(s)}\right)^2 = \frac{2}{\pi}I^{(s)} + \eta_n^{(s)} + \frac{\varkappa_n}{n},$$

$$(I_m - 2I^{(s)})\eta_n^{(s)} = \frac{\pi}{2}(\eta_n^{(s)})^2 + \frac{\varkappa_n}{n}.$$

Следовательно, $\eta_n^{(s)} = \frac{\varkappa_n}{n}$. □

2.3. **Доказательство теоремы 1 (необходимость).** Выполнение первых двух условий доказано в леммах 1, 2, 4, 5.

Пусть $\gamma(\lambda)$ — функция, описанная в условии 3. Вспомним, что

$$V(\varphi(x,\lambda_{nq}))\alpha_{nq} = 0_m.$$

Так как

$$rank\, V(\varphi(x,\lambda_{nq})) + rank\, \alpha_{nq} = m$$

и $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$, получаем $\gamma(\lambda_{nq}) = C_{nq}V(\varphi(x,\lambda_{nq}))$, т. е. каждая строка $\gamma(\lambda_{nq})$ представляет собой линейную комбинацию строк матрицы $V(\varphi(x,\lambda_{nq})$ (C_{nq} — строка коэффициентов).

Рассмотрим вектор-функцию

$$f(\lambda) = \gamma(\lambda)(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}.$$

Как было показано при доказательстве леммы 3, функция $(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}$ имеет простые полюса в точках $\lambda = \lambda_{nq}$, поэтому вычисляем:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nq}} f(\lambda) = \gamma(\lambda_{nq}) \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nq}} (V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}$$

$$= C_{nq}\lim_{\lambda\to\lambda_{nq}} V(\varphi(x,\lambda)) \lim_{\lambda\to\lambda_{nq}} (\lambda-\lambda_{nq})(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1} = 0.$$

Следовательно, $f(\lambda)$ — целая функция. Можно показать, что

$$\|(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}\| \leqslant C_\delta|\rho|^{-1}\exp(-|\tau|\pi), \quad \rho \in G_\delta,$$

где $G_\delta = \{\rho\colon |\rho - k| \geqslant \delta, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\delta > 0$. Отсюда заключаем, что $\|f(\lambda)\| \leqslant \frac{C}{|\rho|}$ в G_δ. По принципу максимума модуля для аналитических функций полученная оценка верна во всей комплексной плоскости. По теореме Лиувилля $f(\lambda) \equiv 0$ и, следовательно, $\gamma(\lambda) \equiv 0$. □

Заметим, что в скалярном случае выполнение условия 3 следует из первых двух условий теоремы 1.

Действительно, в скалярном случае соотношения $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$ принимают вид $\gamma(\lambda_n)\alpha_n = 0$, $n \geqslant 0$, где α_n — положительные вещественные числа. Следовательно, $\gamma(\lambda_n) = 0$. Используя заданный спектр $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ можно построить характеристическую функцию (см. [3, с. 16]):

$$\Delta(\lambda) = \pi(\lambda - \lambda_0) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n^2},$$

и, применяя асимптотические формулы (3), получить оценку

$$\|\Delta(\lambda)\| \geqslant C_\delta |\rho| \exp(|\tau|\pi), \quad \rho \in G_\delta.$$

Далее рассмотрим функцию $f(\lambda) = \frac{\gamma(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ и повторим рассуждения доказательства необходимости условий теоремы 1.

Однако в матричном случае условие 3 существенно и не может быть опущено, что показывает следующий пример.

Пример 1. Пусть $m = 2$, $\lambda_{01} \neq \lambda_{02}$, $\lambda_{n1} = \lambda_{n2} = n^2$, $n \geqslant 1$,

$$\alpha_{01} = \alpha_{02} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_{n1} = \alpha_{n2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\pi} \end{bmatrix}, n \geqslant 1.$$

Приведенные величины $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}$ удовлетворяют условиям 1-2 теоремы 1. Покажем, что они не удовлетворяют условию 3 и, следовательно, не могут быть спектральными данными задачи L. Условия $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$, $n \geqslant 0$, $q = \overline{1,m}$ в данном случае можно переписать в виде $\gamma(\lambda) = [\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda)]$, $\gamma_1(\lambda_{01}) = \gamma_1(\lambda_{02}) = \gamma_1(n^2) = 0$, $\gamma_2(n^2) = 0$, $n \geqslant 1$. Ясно, что если мы положим $\gamma_1(\lambda) = 0$, $\gamma_2(\lambda) = \frac{\sin \rho\pi}{\rho}$, то получим противоречие с условием 3.

Далее условие 3 будет изучено для двух специальных случаев.

Пример 2 (полные кратности). Пусть $\lambda_{n1} = \lambda_{n2} = \ldots = \lambda_{nm} =: \lambda_n$ для всех $n \geqslant 0$. Тогда $rank\ \alpha_{nq} = m$, и каждая из линейных систем $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$ имеет единственное решение $\gamma(\lambda_n) = 0$. Мы пришли к ситуации, аналогичной скалярному случаю. В силу асимптотики (3) последовательность $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ можно рассматривать как собственные значения некоторой скалярной краевой задачи. Таким образом, в случае полных кратностей условие 3 также следует из условий 1 и 2.

Будем говорить, что соотношения $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$, $q = \overline{1,m}$ *распадаются* для некоторого фиксированного n, если из них следует, что $\gamma_q(\lambda_{nq}) = 0$ для всех $q = \overline{1,m}$. Например, они распадаются в случае полных кратностей или когда матрицы α_{nq} имеют определенный диагональный вид.

Пример 3. Пусть соотношения $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$ распадаются для всех $n > n_0$. Тогда каждая компонента $\gamma_q(\lambda)$ имеет нули $\{\lambda_{nq}\}_{n>n_0}$. Если $\gamma(\lambda)$ — функция из условия 3, каждая из функций $\gamma_q(\lambda)$ не может иметь более n_0 дополнительных нулей (с учетом кратностей). Иначе можно рассматривать ее нули как собственные значения некоторой скалярной задачи и показать, что $\gamma_q(\lambda) \equiv 0$.

Если $\gamma(\lambda)$ — целая функция и $\gamma(\lambda) = O(\exp(|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}|\pi))$, $|\lambda| \to \infty$, ее порядок не превосходит $1/2$. Следовательно, по теореме Адамара функции $\gamma_q(\lambda)$ допускают следующие разложения на множители

$$\gamma_q(\lambda) = (C_{q0} + C_{q1}\lambda + C_{q2}\lambda^2 + \ldots + C_{q,n_0}\lambda^{n_0})P_q(\lambda), \quad P_q(\lambda) = \prod_{n>n_0}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{nq}}\right).$$

Далее мы подставим данные представления в равенства $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$, $n \leqslant n_0$, $q = \overline{1,m}$ и получим систему линейных уравнений относительно коэффициентов C_{q0} , C_{q1} , ..., C_{qn_0} , $q = \overline{1,m}$.

Пусть λ_1 , ..., λ_N — первые $N = (n_0+1)m$ собственных значений, и пусть α_1 , ..., α_N — соответствующие вычеты. Для каждого $j = \overline{1,N}$ выберем ненулевой столбец v_j матрицы α_j . В случае если среди λ_j , $j = \overline{1,N}$, имеется группа кратных, им соответствует общая матрица α_j и ее ранг совпадает с их кратностью. Тогда мы выберем линейно независимые столбцы. Рассмотрим $N \times N$ матрицу P со столбцами вида

$$[v_{j1}P_1(\lambda_j), v_{j1}\lambda_j P_1(\lambda_j), \ldots, v_{j1}\lambda_j^{n_0}P_1(\lambda_j), \ldots, v_{jm}P_m(\lambda_j), \ldots, v_{jm}\lambda_j^{n_0}P_m(\lambda_j)],$$

$j = \overline{1,N}$. Ясно, что соотношения $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$, $n \leqslant n_0$, $q = \overline{1,m}$ эквивалентны системе линейных уравнений с матрицей P . Каждое решение системы соответствует вектор-функции $\gamma(\lambda)$, удовлетворяющей условию 3 теоремы 1, и обратно. Таким образом, условие 3 выполнено тогда и только тогда, когда определитель матрицы P неравен нулю.

3. Решение обратной задачи 1

3.1. Предположим, что нам известны спектральные данные Λ краевой задачи $L = L(Q,h,H) \in A(\omega)$, $\omega \in D$. Обозначим

$$D(x,\lambda,\mu) = \frac{\langle \varphi^*(x,\bar{\mu}), \varphi(x,\lambda)\rangle}{\lambda - \mu} = \int_0^x \varphi^*(t,\bar{\mu})\varphi(x,\lambda)\,dt. \tag{12}$$

Выберем модельную краевую задачу $\tilde{L} = L(\tilde{Q},\tilde{h},\tilde{H}) \in A(\omega)$ (например, можно взять $\tilde{Q}(x) = \frac{2}{\pi}\omega$, $\tilde{h} = 0_m$, $\tilde{H} = 0_m$). Условимся, что если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к задаче L , то символ $\tilde{\gamma}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{L}$. Положим

$$\xi_n = \sum_{q=1}^{m}|\rho_{nq} - \tilde{\rho}_{nq}| + \sum_{s=1}^{p}\sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1}|\rho_{nq} - \rho_{nm_s}| + \sum_{s=1}^{p}\sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1}|\tilde{\rho}_{nq} - \tilde{\rho}_{nm_s}| + \sum_{s=1}^{p}\|\alpha_n^{(s)} - \tilde{\alpha}_n^{(s)}\|.$$

Согласно леммам 1 и 2,

$$\Omega := \left(\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)\xi_n)^2\right)^{1/2} < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\xi_n < \infty.$$

Введем обозначения

$$\lambda_{nq0}=\lambda_{nq},\quad \lambda_{nq1}=\tilde\lambda_{nq},\quad \rho_{nq0}=\rho_{nq},\quad \rho_{nq1}=\tilde\rho_{nq},\quad \alpha'_{nq0}=\alpha'_{nq},\quad \alpha'_{nq1}=\tilde\alpha'_{nq},$$
$$\varphi_{nqi}(x)=\varphi(x,\lambda_{nqi}),\quad \tilde\varphi_{nqi}(x)=\tilde\varphi(x,\lambda_{nqi}),$$
$$F_{klj,nqi}(x)=\alpha'_{klj}D(x,\lambda_{nqi},\lambda_{klj}),\quad \tilde F_{klj,nqi}(x)=\alpha'_{klj}\tilde D(x,\lambda_{nqi},\lambda_{klj}),$$
$$n,k\geqslant 0,\quad q,l=\overline{1,m},\quad i,j=0,1.$$

Стандартным образом (см. [3, лемма 1.4.2]), используя лемму Шварца, получаем следующее утверждение.

Лемма 6. *При* $x\in[0,\pi]$, $n,k\geqslant 0$, $r,s=\overline{1,m}$, $m_r<q<m_{r+1}$, $m_s<l<m_{s+1}$, $i,j=0,1$ *справедливы следующие оценки:*

$$\|\varphi_{nqi}(x)\|\leqslant C,\quad \|\varphi_{nm_r0}(x)-\varphi_{nm_r1}(x)\|\leqslant C\xi_n,$$
$$\|\varphi_{nqi}(x)-\varphi_{nm_ri}(x)\|\leqslant C\xi_n,\quad \|F_{klj,nqi}(x)\|\leqslant \tfrac{C}{|n-k|+1},$$
$$\left\|\sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1}(F_{kl0,nm_r1}(x)-F_{kl1,nm_r1}(x))\right\|\leqslant \tfrac{C\xi_k}{|n-k|+1},$$
$$\|F_{klj,nqi}(x)-F_{klj,nm_ri}(x)\|,\ \|F_{klj,nm_r0}(x)-F_{klj,nm_r1}(x)\|\leqslant \tfrac{C\xi_n}{|n-k|+1},$$
$$\left\|\sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1}(F_{kl0,nqi}(x)-F_{kl0,nm_ri}(x)-F_{kl1,nqi}(x)+F_{kl1,nm_ri}(x))\right\|\leqslant \tfrac{C\xi_n\xi_k}{|n-k|+1},$$
$$\left\|\sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1}(F_{kl0,nm_r0}(x)-F_{kl0,nm_r1}(x)-F_{kl1,nm_r0}(x)+F_{kl1,nm_r1}(x))\right\|\leqslant \tfrac{C\xi_n\xi_k}{|n-k|+1}.$$

Аналогичные оценки верны для $\tilde\varphi_{nqi}(x)$ *и* $\tilde F_{klj,nqi}(x)$.

Следующая лемма была доказана в [5] при помощи метода контурного интеграла.

Лемма 7. *Справедливы соотношения*

$$\tilde\varphi(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}(\varphi_{kl0}(x)\alpha'_{kl0}\tilde D(x,\lambda,\lambda_{kl0})-\varphi_{kl1}(x)\alpha'_{kl1}\tilde D(x,\lambda,\lambda_{kl1}))\tag{13}$$

$$\tilde D(x,\lambda,\mu)-D(x,\lambda,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}(D(x,\lambda_{kl0},\mu)\tilde D(x,\lambda,\lambda_{kl0})-D(x,\lambda_{kl1},\mu)\tilde D(x,\lambda,\lambda_{kl1}).$$

Ряды сходятся абсолютно и равномерно по $x\in[0,\pi]$ *и* λ, μ *на компактах.*

Аналогично может быть получено следующее соотношение

$$\tilde\Phi(x,\lambda)=\Phi(x,\lambda)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\varphi_{klj}(x)\alpha'_{klj}\frac{\langle\tilde\varphi^*_{klj}(x),\tilde\Phi(x,\lambda)\rangle}{\lambda-\lambda_{klj}}.\tag{14}$$

Из леммы 7 вытекает

$$\tilde\varphi_{nqi}(x)=\varphi_{nqi}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}(\varphi_{kl0}\tilde F_{kl0,nqi}(x)-\varphi_{kl1}\tilde F_{kl1,nqi}(x)),\tag{15}$$

$$\tilde F_{\eta p\omega,nqi}(x)-F_{\eta p\omega,nqi}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}(F_{\eta p\omega,kl0}(x)\tilde F_{kl0,nqi}(x)-F_{\eta p\omega,kl1}(x)\tilde F_{kl1,nqi}(x))\tag{16}$$

при $n,\eta \geqslant 0$, $q,p=\overline{1,m}$, $i,\omega=0,1$.

Обозначим

$$\varepsilon_0(x)=\sum_{(k,l,j)\in V}(-1)^j\varphi_{klj}(x)\alpha'_{klj}\tilde{\varphi}^*_{klj}(x), \quad \varepsilon(x)=-2\varepsilon'_0(x). \tag{17}$$

Используя (5) и лемму 6, нетрудно проверить, что ряд в (17) сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$, функция $\varepsilon_0(x)$ абсолютно непрерывна и элементы матрицы $\varepsilon(x)$ принадлежат $L_2(0,\pi)$.

Лемма 8. *Справедливы соотношения*

$$Q(x)=\tilde{Q}(x)+\varepsilon(x), \quad h=\tilde{h}-\varepsilon_0(0), \quad H=\tilde{H}+\varepsilon_0(\pi), \tag{18}$$

Доказательство. Дифференцируя (13) дважды по x и используя (12) и (17), получаем

$$\tilde{\varphi}'(x,\lambda)-\varepsilon_0(x)\tilde{\varphi}(x,\lambda)=\varphi'(x,\lambda)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\varphi'_{klj}(x)\alpha'_{klj}\tilde{D}(x,\lambda,\lambda_{klj}),$$

$$\tilde{\varphi}''(x,\lambda)=\varphi''(x,\lambda)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j[\varphi''_{klj}(x)\alpha'_{klj}\tilde{D}(x,\lambda,\lambda_{klj})$$
$$+2\varphi'_{klj}(x)\alpha'_{klj}\tilde{\varphi}^*_{klj}(x)\tilde{\varphi}(x,\lambda)+\varphi_{klj}(x)\alpha'_{klj}(\tilde{\varphi}^*_{klj}(x)\tilde{\varphi}(x,\lambda))'].$$

Заменим вторые производные, используя уравнение (1), и $\varphi(x,\lambda)$, используя (13):

$$\tilde{Q}(x)\varphi(x,\lambda)=Q(x)\tilde{\varphi}(x,\lambda)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j[\varphi_{klj}(x)\alpha'_{klj}\langle\tilde{\varphi}^*_{klj}(x),\tilde{\varphi}(x,\lambda)\rangle$$
$$+2\varphi'_{klj}(x)\alpha'_{klj}\tilde{\varphi}^*_{klj}(x)\tilde{\varphi}(x,\lambda)+\varphi_{klj}(x)\alpha'_{klj}(\tilde{\varphi}^*_{klj}(x)\tilde{\varphi}(x,\lambda))'].$$

После уничтожения слагаемых с $\tilde{\varphi}'(x,\lambda)$ приходим к $Q(x)=\tilde{Q}(x)+\varepsilon(x)$.

Далее,

$$\tilde{\varphi}'(0,\lambda)-(h+\varepsilon_0(0))\tilde{\varphi}(0)=U(\varphi)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=0}^{1}(-1)^jU(\varphi_{klj})\alpha'_{klj}D(0,\lambda,\lambda_{klj})=0_m.$$

Так как $\tilde{\varphi}(0,\lambda)=I_m$, $\tilde{\varphi}'(0,\lambda)=\tilde{h}$, получаем $h=\tilde{h}-\varepsilon_0(0)$.

Аналогично, используя (14), получаем

$$\tilde{\Phi}'(\pi,\lambda)+(H-\varepsilon_0(\pi))\Phi(\pi,\lambda)=V(\Phi)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=0}^{1}(-1)^jV(\varphi_{klj})\alpha'_{klj}\frac{\langle\tilde{\varphi}^*_{klj}(x),\tilde{\Phi}(x,\lambda)\rangle_{|x=\pi}}{\lambda-\lambda_{klj}}.$$

Для $j=0$ имеем: $V(\varphi_{kl0})\alpha'_{kl0}=0_m$. Для $j=1$

$$\langle\tilde{\varphi}^*_{kl1}(x),\tilde{\Phi}(x,\lambda)\rangle_{|x=\pi}=\tilde{V}^*(\tilde{\varphi}^*_{kl1})\tilde{\Phi}(\pi,\lambda)-\tilde{\varphi}^*_{kl1}(\pi)\tilde{V}(\tilde{\Phi}).$$

Вспомним, что $V(\Phi)=0_m$, $\tilde{V}(\tilde{\Phi})=0_m$ и $\alpha'_{kl1}\tilde{V}^*(\tilde{\varphi}^*_{kl1})=0_m$. Следовательно, в итоге получаем $\tilde{\Phi}'(\pi,\lambda)+(H-\varepsilon_0(\pi))\Phi(\pi,\lambda)=0_m$. Вместе с $\tilde{V}(\tilde{\Phi})=0_m$ это дает $H=\tilde{H}+\varepsilon(\pi)$.
$\square$

При любом фиксированном $x \in [0, \pi]$ соотношения (15) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно $\varphi_{nqi}(x)$, $n \geqslant 0$, $q = \overline{1,m}$, $i = 0,1$. Но ряд в (15) сходится лишь «со скобками». Поэтому неудобно использовать (15) в качестве основного уравнения обратной задачи. Ниже мы преобразуем (15) к линейному уравнению в соответствующем банаховом пространстве последовательностей.

3.2. Введем обозначение $\chi_n := \xi_n^{-1}$ при $\xi_n \neq 0$ и $\chi_n = 0$ при $\xi_n = 0$. Пусть V — множество индексов $u = (n, q, i)$, $n \geqslant 0$, $q = \overline{1,m}$, $i = 0,1$. При каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$ определим вектор-строку $\psi(x) = [\psi_u(x)]_{u \in V}$ и матрицу $R(x) = [R_{v,u}(x)]_{v,u \in V}$, $v = (k, l, j)$, $u = (n, q, i)$, по формулам

$$\left.\begin{array}{c}
\psi_{nm_s0}(x) = \chi_n(\varphi_{nm_s0}(x) - \varphi_{nm_s1}(x)), \quad \psi_{nm_s1}(x) = \varphi_{nm_s1}(x), \\
\psi_{nqi}(x) = \chi_n(\varphi_{nqi}(x) - \varphi_{nm_si}(x)), \\
R_{km_s0,nm_r0}(x) = \chi_n \xi_k \sum\limits_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nm_r0}(x) - F_{kl0,nm_r1}(x)), \\
R_{km_s0,nm_r1}(x) = \xi_k \sum\limits_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} F_{kl0,nm_r1}(x), \\
R_{km_s0,nqi}(x) = \chi_n \xi_k \sum\limits_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nqi}(x) - F_{kl0,nm_ri}(x)), \\
R_{klj,nm_r0}(x) = (-1)^j \chi_n \xi_k (F_{klj,nm_r0}(x) - F_{klj,nm_r1}(x)), \\
R_{klj,nm_r1}(x) = (-1)^j \xi_k F_{klj,m_r1}(x), \\
R_{klj,nqi}(x) = (-1)^j \chi_n \xi_k (F_{klj,nqi}(x) - F_{klj,nm_ri}(x)), \\
R_{km_s1,nm_r0}(x) = \chi_n \sum\limits_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nm_r0}(x) - F_{kl0,nm_r1}(x) \\
-F_{kl1,nm_r0}(x) + F_{kl1,nm_r1}(x)), \\
R_{km_s1,nqi}(x) = \chi_n \sum\limits_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nqi}(x) - F_{kl0,nm_ri}(x) - F_{kl1,nqi}(x) + F_{kl1,nm_ri}(x)), \\
R_{km_s1,nm_r1}(x) = \sum\limits_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nm_r1}(x) - F_{kl1,nm_r1}(x)), \\
n, k \geqslant 0, \quad r, s = \overline{1,p}, \quad m_s < l < m_{s+1}, \quad m_r < q < m_{r+1}.
\end{array}\right\} \qquad (19)$$

Аналогично определяются $\tilde{\psi}(x)$, $\tilde{R}(x)$, заменой в предыдущих определениях $\varphi_{nqi}(x)$ на $\tilde{\varphi}_{nqi}(x)$ и $F_{klj,nqi}(x)$ на $\tilde{F}_{klj,nqi}(x)$.

Мы будем также использовать более короткую запись. Рассмотрим векторы-строки с матричными компонентами

$$\varphi_n(x) = [\varphi_{n10}(x), \varphi_{n11}(x), \varphi_{n20}(x), \varphi_{n21}(x), \ldots, \varphi_{nm0}(x), \varphi_{nm1}(x)],$$

$$\psi_n(x) = [\psi_{n10}(x), \psi_{n11}(x), \psi_{n20}(x), \psi_{n21}(x), \ldots, \psi_{nm0}(x), \psi_{nm1}(x)], \quad n \geqslant 0,$$

и аналогично определенные $2m \times 2m$ матрицы $F^-_{k,n}(x)$, $R_{k,n}(x)$, $n, k \geqslant 0$, $F^-_{klj,nqi}(x) = (-1)^j F_{klj,nqi}(x)$. Тогда определения (19) для $\psi_{nqi}(x)$ и $R_{klj,nqi}(x)$ можно переписать в виде

$$\psi_n = \varphi_n X_n, \quad R_{k,n} = X_k^{-1} F^-_{k,n} X_n, \quad n, k \geqslant 0. \qquad (20)$$

где X_n — числовые $2m \times 2m$ матрицы, элементы которых однозначно определяются из (19). Аналогично вводятся $\tilde{\varphi}_n(x)$, $\tilde{\psi}_n(x)$ и $\tilde{F}^-_{k,n}(x)$, $\tilde{R}_{k,n}(x)$. Соотношения (15) и (16) могут быть переписаны в виде

$$\tilde{\varphi}_n = \varphi_n + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \tilde{F}^-_{k,n}, \quad n \geqslant 0, \qquad (21)$$

$$\tilde{F}^-_{\eta,n} - F^-_{\eta,n} = \sum_{k=0}^{\infty} F^-_{\eta,k}\tilde{F}^-_{k,n} \tag{22}$$

В силу леммы 6

$$\|\psi_{nqi}(x)\|,\ \|\tilde{\psi}_{nqi}(x)\| \leqslant C,$$

$$\|R_{klj,nqi}(x)\|,\ \|\tilde{R}_{klj,nqi}(x)\| \leqslant \frac{C\xi_k}{|n-k|+1}, \tag{23}$$

где C не зависит от x, n, q, i, k, l, j

Пусть a_u , $u \in V$, — матрицы размера $m \times m$. Рассмотрим банахово пространство B ограниченных последовательностей $a = [a_u]_{u\in V}$ с нормой $\|a\|_B = \sup_{u\in V}\|a_u\|$. Из (23) следует, что при каждом фиксированном $x \in [0,\pi]$ операторы $I+\tilde{R}(x)$ и $I-R$ (где I — единичный оператор), действующие из B в B , являются линейными ограниченными операторами.

Теорема 2. *При каждом фиксированном $x \in [0,\pi]$ вектор $\psi(x) \in B$ удовлетворяет уравнению*

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x)(I + \tilde{R}(x)) \tag{24}$$

в банаховом пространстве B . Кроме того, оператор $I + \tilde{R}(x)$ имеет ограниченный обратный, т. е. уравнение (24) однозначно разрешимо.

Доказательство. Используя (20), получаем

$$\varphi_n = \psi_n X_n^{-1}, \quad F^-_{k,n} = X_k R_{k,n} X_n^{-1}.$$

Подставляя полученные соотношения в (21), выводим

$$\tilde{\psi}_n X_n^{-1} = \psi_n X_n^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k X_k^{-1} X_k \tilde{R}_{k,n} X_n^{-1} = \psi_n X_n^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \tilde{R}_{k,n} X_n^{-1} \quad n \geqslant 0.$$

Умножая результат справа на X_n , приходим к (24).

Аналогично, используя (22), получаем

$$\tilde{R}_{\eta,n} - R_{\eta,n} = \sum_{k=0}^{\infty} R_{\eta,k}\tilde{R}_{k,n}.$$

Отсюда следует $\tilde{R}(x) - R(x) - R(x)\tilde{R}(x) = 0$, т. е. $(I - R(x))(I + \tilde{R}(x)) = I$. Симметрично выводим: $(I + \tilde{R}(x))(I - R(x)) = I$. Следовательно, оператор $(I + \tilde{R}(x))^{-1}$ существует и является линейным ограниченным оператором. □

Уравнение (24) называется *основным уравнением* обратной задачи. Разрешая (24), находим вектор $\psi(x)$ и, следовательно, функции $\varphi_{nqi}(x)$ по формулам

$$\begin{gathered}\varphi_{nm_s1}(x) = \psi_{nm_s1}(x), \quad \varphi_{nm_s0}(x) = \varphi_{nm_s1}(x) + \xi_n\psi_{nm_s0}(x),\\ \varphi_{nqi}(x) = \varphi_{nm_si}(x) + \xi_n\psi_{nqi}(x),\\ n \geqslant 0,\ s = \overline{1,p},\ m_s < q < m_{s+1},\ i = 0, 1.\end{gathered} \tag{25}$$

Далее можно построить потенциал $Q(x)$ и коэффициенты краевых условий h и H по формулам (18). Таким образом, мы получили следующий алгоритм решения обратной задачи 1.

Алгоритм 1. *Даны величины* Λ.
(1) Выбираем $\tilde{L} \in A(\omega)$ *и вычисляем* $\tilde{\psi}(x)$ *и* $\tilde{R}(x)$.
(2) Находим $\psi(x)$ *из уравнения (24) и вычисляем* $\varphi_{nqi}(x)$.
(3) Строим $Q(x)$, h *и* H *по формулам (18).*

4. Достаточность

4.1. Пусть даны величины $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\geqslant 0, q=\overline{1,m}} \in \mathrm{Sp}$, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Выберем $\tilde{L} \in A(\omega)$, построим $\tilde{\psi}(x)$, $\tilde{R}(x)$ и рассмотрим уравнение (24).

Лемма 9. *При каждом фиксированном* $x \in [0,\pi]$ *оператор* $I + \tilde{R}(x)$ *, действующий из* B *в* B *, имеет ограниченный обратный, и основное уравнение (24) имеет единственное решение* $\psi(x) \in B$ *.*

Доказательство. Достаточно доказать, что однородное уравнение

$$\beta(x)(I + \tilde{R}(x)) = 0, \tag{26}$$

где $\beta(x) = [\beta_u(x)]_{u\in V}$, $\beta_u(x)$ — $m\times m$ матрицы, имеет только нулевое решение. Пусть $\beta(x) \in B$ — решение (26), т. е.

$$\beta_{nqi}(x) + \sum_{(k,l,j)\in V} \beta_{klj}(x)\tilde{R}_{klj,nqi}(x) = 0_m.$$

Обозначим

$$\gamma_{nm_s1}(x) = \beta_{nm_s1}(x), \quad \gamma_{nm_s0}(x) = \gamma_{nm_s1}(x) + \xi_n\beta_{nm_s0}(x),$$
$$\gamma_{nqi}(x) = \gamma_{nm_si}(x) + \xi_n\beta_{nqi}(x),$$
$$n \geqslant 0,\ s = \overline{1,p},\ m_s < q < m_{s+1},\ i = 0,1.$$

Тогда $\gamma_{nqi}(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_{nqi}(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}(\gamma_{kl0}(x)\tilde{F}_{kl0,nqi}(x) - \gamma_{kl1}(x)\tilde{F}_{kl1,nqi}(x)) = 0_m, \quad n \geqslant 0, \tag{27}$$

и оценкам

$$\begin{gathered}\|\gamma_{nqi}(x)\| \leqslant C(x), \quad n \geqslant 0, \quad q = \overline{1,m},\\ \|\gamma_{nm_s0}(x) - \gamma_{nm_s1}(x)\|, \|\gamma_{nqi}(x) - \gamma_{nm_si}(x)\| \leqslant C(x)\xi_n,\\ s = \overline{1,p},\ m_s < q < m_{s+1}.\end{gathered} \tag{28}$$

Построим матрицы-функции $\gamma(x,\lambda)$, $\Gamma(x,\lambda)$ и $B(x,\lambda)$ по формулам

$$\gamma(x,\lambda) = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\left[\gamma_{kl0}(x)\alpha'_{kl0}\frac{\langle\tilde{\varphi}^*_{kl0}(x), \tilde{\varphi}(x,\lambda)\rangle}{\lambda - \lambda_{kl0}} - \gamma_{kl1}(x)\alpha'_{kl1}\frac{\langle\tilde{\varphi}^*_{kl1}(x), \tilde{\varphi}(x,\lambda)\rangle}{\lambda - \lambda_{kl1}}\right], \tag{29}$$

$$\Gamma(x,\lambda) = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\left[\gamma_{kl0}(x)\alpha'_{kl0}\frac{\langle\tilde{\varphi}^*_{kl0}(x), \tilde{\Phi}(x,\lambda)\rangle}{\lambda - \lambda_{kl0}} - \gamma_{kl1}(x)\alpha'_{kl1}\frac{\langle\tilde{\varphi}^*_{kl1}(x), \tilde{\Phi}(x,\lambda)\rangle}{\lambda - \lambda_{kl1}}\right], \tag{30}$$

$$B(x,\lambda) = \gamma^*(x,\bar{\lambda})\Gamma(x,\lambda).$$

В силу (12) матрица-функция $\gamma(x,\lambda)$ является целой по λ при каждом фиксированном x . Функции $\Gamma(x,\lambda)$ и $B(x,\lambda)$ являются мероморфными по λ с простыми полюсами λ_{nqi} . Согласно (29) имеем: $\gamma(x,\lambda_{nqi}) = \gamma_{nqi}(x)$. Вычислим вычеты $B(x,\lambda)$, для простоты предполагая, что $\{\lambda_{nq0}\}\cap\{\lambda_{nq1}\}=\emptyset$:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nq0}} B(x,\lambda) = \gamma^*(x,\lambda_{nq0})\gamma(x,\lambda_{nq0})\alpha_{nq0}, \quad \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nq1}} B(x,\lambda) = 0_m.$$

Рассмотрим контурный интеграл

$$I_N(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N} B(x,\lambda)\,d\lambda,$$

где $\Gamma_N = \{\lambda\colon |\lambda| = (N+1/2)^2\}$. Покажем, что при фиксированном $x\in[0,\pi]$

$$\lim_{N\to\infty} I_N(x) = 0_m.$$

В самом деле, из (12) и (29) вытекает

$$-\gamma(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{p}\sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1}\Big[\gamma_{kl0}(x)\alpha'_{kl0}\tilde D(x,\lambda,\lambda_{kl0}) - \gamma_{kl1}(x)\alpha'_{kl1}\tilde D(x,\lambda,\lambda_{kl1})\Big]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{p}\Big[(\gamma_{km_s0}(x)-\gamma_{km_s1}(x))\sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1}\alpha'_{kl0}\tilde D(x,\lambda,\lambda_{kl0}) + \gamma_{km_s1}(x)\alpha_k^{(s)}(\tilde D(x,\lambda,\lambda_{km_s0})$$

$$-\tilde D(x,\lambda,\lambda_{km_s1})) + \gamma_{km_s1}(x)(\alpha_k^{(s)}-\tilde\alpha_k^{(s)})\tilde D(x,\lambda,\lambda_{km_s1}) + \gamma_{km_s1}(x)\sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1}\sum_{j=0}^{1}\alpha'_{klj}(\tilde D(x,\lambda,\lambda_{klj})$$

$$-\tilde D(x,\lambda,\lambda_{km_sj})) + \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1}\sum_{j=0}^{1}(\gamma_{klj}(x)-\gamma_{km_sj}(x))\alpha'_{klj}\tilde D(x,\lambda,\lambda_{klj})\Big].$$

В силу оценок леммы 6, (5) и (28) имеем

$$\|\gamma(x,\lambda)\| \leqslant C(x)\exp(|\tau|x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi_k}{|\rho-k|+1}, \quad \operatorname{Re}\rho\geqslant 0.$$

Аналогично, используя (30), при достаточно больших $\rho^*>0$ получаем

$$\|\Gamma(x,\lambda)\| \leqslant \frac{C(x)}{|p|}\exp(-|\tau|x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi_k}{|\rho-k|+1}, \operatorname{Re}\rho\geqslant 0,\ |\rho|\geqslant\rho^*,\ \rho\in G_\delta.$$

Тогда

$$\|B(x,\lambda)\| \leqslant \frac{C(x)}{|\rho|}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi_k}{|\rho-k|+1}\right)^2 \leqslant \frac{C(x)}{|\rho|^3}, \quad \lambda\in\Gamma_N.$$

Отсюда вытекает $\lim\limits_{N\to\infty} I_N(x) = 0_m$.

С другой стороны, вычисляя интеграл $I_N(x)$ по основной теореме о вычетах, заключаем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{m}\gamma^*_{kl0}(x)\gamma_{kl0}(x)\alpha'_{kl0} = 0_m.$$

Так как $\alpha_{kl0} = \alpha^*_{kl0} \geqslant 0$, отсюда следует

$$\gamma^*_{kl0}(x)\gamma_{kl0}(x)\alpha_{kl0} = 0_m,$$

$$\gamma(x, \lambda_{kl0})\alpha_{kl0} = 0_m, \quad k \geqslant 0, \quad l = \overline{1, m}.$$

Так как $\gamma(x, \lambda)$ — целая функция по λ и

$$\gamma(x, \lambda) = O(\exp(|\tau|x))$$

при каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$, согласно условию 3 теоремы 1, $\gamma(x, \lambda) \equiv 0_m$. Поэтому $\gamma_{nqi}(x) = 0_m$ при всех $n \geqslant 0$, $q = \overline{1, m}$, $i = 0, 1$, т. е. однородное уравнение (26) имеет только тривиальное решение. □

4.2. Далее приведем общую схему доказательства достаточности условий теоремы 1. Доказательства лемм 10–12 аналогичны описанным в [3, п. 1.4.2].

Пусть $\psi(x) = [\psi_u(x)]_{u \in V}$ — решение основного уравнения (24).

Лемма 10. *При* $n \geqslant 0$, $q = \overline{1, m}$, $i = 0, 1$ *справедливы соотношения*

$$\psi_{nqi}(x) \in C^1[0, \pi], \quad \|\psi^{(\nu)}_{nqi}\| \leqslant C(n+1)^\nu, \quad \nu = 0, 1 \quad x \in [0, \pi],$$
$$\|\psi_{nqi}(x) - \tilde\psi_{nqi}(x)\| \leqslant C\Omega\eta_n, \quad \|\psi'_{nqi}(x) - \tilde\psi'_{nqi}(x)\| \leqslant C\Omega, \quad x \in [0, \pi],$$

где

$$\eta_n := \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2(|n-k|+1)^2}\right).$$

Построим матрицы-функции $\varphi_{nqi}(x)$ по формулам (25). Тогда в силу леммы 10 справедливы соотношения

$$\begin{gathered} \|\varphi^{(\nu)}_{nqi}(x)\| \leqslant C(n+1)^\nu, \quad \nu = 0, 1, \\ \|\varphi_{nqi}(x) - \tilde\varphi_{nqi}(x)\| \leqslant C\Omega\eta_n, \quad \|\varphi'_{nqi}(x) - \tilde\varphi'_{nqi}(x)\| \leqslant C\Omega, \quad q = \overline{1, m}, \\ \|\varphi_{nm_s0}(x) - \varphi_{nm_s1}(x)\|, \|\varphi_{nqi}(x) - \varphi_{nm_si}(x)\| \leqslant C\xi_n, \quad s = \overline{1, p},\ m_s < q < m_{s+1}. \end{gathered} \tag{31}$$

Далее, построим матрицы-функции $\varphi(x, \lambda)$ и $\Phi(x, \lambda)$ по формулам

$$\varphi(x, \lambda) = \tilde\varphi(x, \lambda) - \sum_{(k,l,j) \in V} (-1)^j \varphi_{klj}(x)\alpha'_{klj} \frac{\langle \tilde\varphi^*_{klj}(x), \tilde\varphi(x, \lambda)\rangle}{\lambda - \lambda_{klj}},$$

$$\Phi(x, \lambda) = \tilde\Phi(x, \lambda) - \sum_{(k,l,j) \in V} (-1)^j \varphi_{klj}(x)\alpha'_{klj} \frac{\langle \tilde\varphi^*_{klj}(x), \tilde\Phi(x, \lambda)\rangle}{\lambda - \lambda_{klj}},$$

а также краевую задачу $L(Q(x), h, H)$, используя (18). Ясно, что $\varphi(x, \lambda_{nqi}) = \varphi_{nqi}(x)$.

Применяя оценки (31), можно показать, что компоненты $\varepsilon_0(x)$ абсолютно непрерывны и компоненты $\varepsilon(x)$ принадлежат $L_2(0, \pi)$. Следовательно, верна

Лемма 11. $Q_{jk}(x) \in L_2(0, \pi)$, $j, k = \overline{1, m}$.

Лемма 12. *Справедливы соотношения*

$$\ell\varphi_{nqi}(x) = \lambda_{nqi}\varphi_{nqi}(x), \quad \ell\varphi(x, \lambda) = \lambda\varphi(x, \lambda), \quad \ell\Phi(x, \lambda) = \lambda\Phi(x, \lambda),$$

$$\varphi(0, \lambda) = I_m, \quad \varphi'(0, \lambda) = h, \quad U(\Phi) = I_m, \quad V(\Phi) = 0_m.$$

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось показать, что набор $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}$ совпадает со спектральными данными построенной краевой задачи $L(Q, h, H)$. По лемме 12 матрица-функция $\Phi(x, \lambda)$ является решением Вейля задачи L . Получим выражение для матрицы Вейля:

$$M(\lambda) = \Phi(0, \lambda) = \tilde{M}(\lambda) - \sum_{(k,l,j)\in V} \varphi_{klj}(0)\alpha'_{klj} \frac{\langle \tilde{\varphi}^*_{klj}(x), \tilde{\Phi}(x, \lambda)\rangle_{x=0}}{\lambda - \lambda_{klj}} \tilde{M}(\lambda)$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\alpha'_{kl0}}{\lambda - \lambda_{kl1}} - \frac{\alpha'_{kl1}}{\lambda - \lambda_{kl1}} \right).$$

Используя равенство (см. [4])

$$\tilde{M}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} \frac{\alpha'_{kl1}}{\lambda - \lambda_{kl1}},$$

приходим к соотношению

$$M(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} \frac{\alpha'_{kl0}}{\lambda - \lambda_{kl0}}.$$

Следовательно, $\{\lambda_{kl0}\}$ — простые полюсы матрицы Вейля $M(\lambda)$, а $\{\alpha_{kl0}\}$ — вычеты относительно полюсов. Заметим, что кратности собственных значений совпадают с количествами одинаковых значений среди $\{\lambda_{kl0}\}$, потому что эти количества равны рангам вычетов $\{\alpha_{kl0}\}$. Теорема 1 полностью доказана. □

Библиографический список

1. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука, 1984.

2. *Марченко В. А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1972.

3. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.

4. *Yurko V. A.* Inverse problems for matrix Sturm-Liouville operators. // Rus. J. Math. Phys., Vol. 13, No 1, 2006, pp. 111–118.

5. *Yurko V. A.* Inverse problems for the matrix Sturm-Liouville equation on a finite interval. // Inverse Problems, Vol. 22, 2006, pp. 1139–1149.

6. *Chelkak D., Korotyaev E.* Weyl-Titchmarsh functions of vector-valued Sturm-Liouville operators on the unit interval. // J. Func. Anal., Vol. 257, 2009, pp. 1546–1588.

7. *Carlson R.* An inverse problem for the matrix Schrödinger equation. // J. Math. Anal. Appl., Vol. 267, 2002, pp. 564–575.

8. *Malamud M. M.* Uniqueness of the matrix Sturm-Liouville qquation given a part of the monodromy matrix, and Borg type results. Sturm-Liouville Theory. Past and present, pp. 237–270, Birkhauser, Basel, 2005.

9. *Mykytyuk Ya. V., Trush N. S.* Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with matrix-valued potentials. // Inverse Problems, Vol. 26, 2010, pp. 015009.

10. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.