

Диагонали рядов Лорана рациональных функций Почкутов Д.Ю.

Аннотация

Рассматривается проблема алгебраичности диагональных рядов для разложений Лорана рациональных функций, геометрически идентифицируемых с помощью амёбы знаменателя, либо с помощью целочисленной точки из многогранника Ньютона знаменателя. Основываясь на фактах из теории многомерных вычетов, и используя топологические свойства дополнений наборов комплексных гиперповерхностей на комплексно аналитических многообразиях, даются достаточные условия алгебраичности диагоналей.

1. Введение

Диагональные ряды (диагонали) степенных рядов от многих переменных естественно возникают в проблемах алгебраичности или D -финитности сумм степенных рядов ([1], гл. 2).

Диагональю степенного ряда (ряда Лорана)

$$F(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha$$

назовём производящую функцию подпоследовательности коэффициентов $\{c_\alpha\}_{\alpha \in L}$, пронумерованной некоторой подрешёткой $L \subset \mathbb{Z}^n$. Такие диагонали мы будем называть *полными*. Диагонали различают по размерности (рангу) указанной подрешётки. Наибольший интерес представляют два предельных случая: ранга 1 и ранга $n - 1$. Эти два случая и рассматриваются в данной статье для рядов Лорана рациональных функций. В случае ранга 1 полная диагональ естественно разбивается в сумму односторонних диагоналей: подрядов по положительным и отрицательным степеням. Аналогично, в произвольном случае можно рассматривать аналог односторонней диагонали как производящую функцию подпоследовательности, пронумерованной некоторой полуподрешёткой $L' \subset L$.

Ранее были изучены лишь диагонали степенных рядов по положительным степеням (т.е. рядов Тейлора):

$$F(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha z^\alpha.$$

В этом случае известно (см. [3], [2], а также расширенную библиографию в [1]), что любая диагональ рациональной функции над конечным полем всегда является алгебраической функцией. Диагонали двумерного ряда Тейлора комплексной рациональной функции также являются алгебраическими функциями [3]. В [4] было показано, что диагональ D -финитного степенного ряда является D -финитной. Напомним, что ряд F называется D -финитным, если все производные F порождают конечномерное векторное пространство над полем рациональных функций.

Для исследования диагоналей лорановских рядов рациональных функций в настоящей статье используется геометрический способ идентификации этих рядов с помощью амёбы полярной гиперповерхности исходной рациональной функции, либо с помощью целочисленной точки из многогранника Ньютона её знаменателя (подробнее см. п. 2). В п. 3 доказано, что полная диагональ рациональной функции двух переменных всегда является алгебраической. В то же время односторонняя диагональ может быть трансцендентной. В п. 4 доказано, что полная $(n - 1)$ -мерная диагональ является алгебраической функцией.

2. Одномерные диагонали и их интегральные представления

Пусть дана рациональная функция n переменных

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_1, \dots, z_n)}{Q(z_1, \dots, z_n)},$$

где P и Q - несократимые полиномы. Рассмотрим произвольный ряд Лорана для F с центром в нуле:

$$F(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}. \quad (1)$$

В $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ зафиксируем направление q , которое определяет две диагональные подпоследовательности $\{c_{l \cdot q}\}_{l \in \mathbb{Z}_+}$ и $\{c_{l \cdot q}\}_{l \in \mathbb{Z}_-}$ кратной последовательности $\{c_\alpha\}$ (для определенности полагаем, что \mathbb{Z}_+ - это множество неотрицательных целых чисел, а \mathbb{Z}_- - множество отрицательных целых чисел).

Производящие функции

$$d_q^\pm(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}_\pm} c_{l \cdot q} t^l \quad (2)$$

указанных подпоследовательностей назовем *односторонними q -диагоналями ряда (1)*. Соответственно, сумму $d_q^+ + d_q^-$ назовем *полной q -диагональю*.

Замечание. Фактически достаточно изучать лишь диагонали для направления $q_0 = (1, \dots, 1)$. В самом деле, унимодулярным преобразованием $\beta = A\alpha$ решётки \mathbb{Z}^n любой несократимый вектор $q \in \mathbb{Z}^n$ можно перевести в q_0 . Соответственно биномиальная замена переменных $w = z^A$ сохранит свойство рациональности функции $F(z)$.

В случае, когда F голоморфна в начале координат (т.е. $Q(0) \neq 0$), один из рядов Лорана функции $F(z)$ - это её ряд Тейлора с центром в нуле, и для каждого $q \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$ полная диагональ $d_q(t)$ совпадает с односторонней $d_q^+(t)$. Согласно [5] для q -диагонали ряда Тейлора справедливо интегральное представление

$$d_q(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\rho} F(z) \frac{z^q}{z^q - t} \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n}, \quad (3)$$

где z^q - это моном $z_1^{q_1} \dots z_n^{q_n}$, цикл

$$\Gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| = \rho_1, \dots, |z_n| = \rho_n\}$$

выбирается так, что
а) в замкнутом поликруге

$$\overline{U}_\rho = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| \leq \rho_1, \dots, |z_n| \leq \rho_n\}$$

нет полюсов функции $F(z)$;
б) $\rho^q > |t|$.

Чтобы получить интегральное представление для диагональных рядов произвольных рядов Лорана (1), отметим, что области сходимости последних логарифмически выпуклые (доказывается также как для рядов Тейлора, см., например, [6], п. 3). Эти области сходимости представляют собой в логарифмической шкале связные компоненты дополнения так называемой амёбы гиперповерхности полюсов.

Определение ([7], п. 6.1). Амёбой \mathcal{A}_V алгебраической гиперповерхности

$$V = \{z \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n : Q(z) = 0\}$$

(или полинома Q) называется образ V при отображении $\text{Log} : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, определённом формулой

$$\text{Log} : (z_1, \dots, z_n) \rightarrow (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|).$$

Термин амёба мотивирован специфичным видом \mathcal{A}_V в случае $n = 2$ – это фигура с тонкими щупальцами, уходящими на бесконечность (см. Рис. 1).

Обозначим, через $N(Q)$ многогранник Ньютона полинома Q , т.е. выпуклую оболочку в \mathbb{R}^n всех показателей мономов, участвующих в полиноме Q . Известно [8], что на множестве связных компонент $\{E\}$ дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ существует инъективная функция порядка

$$\nu : \{E\} \rightarrow \mathbb{Z}^n \cap N(Q)$$

такая, что двойственный конус $C_{\nu(E)}^\vee$ к многограннику Ньютона в точке $\nu(E)$ есть конус рецессии компоненты E (напомним, что конус рецессии выпуклого множества E – это наибольший конус, который некоторым сдвигом, можно поместить в E). Таким образом, дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ состоит из конечного числа связных выпуклых компонент, которые можно перечислять (кодировать) в виде E_ν с помощью целочисленных векторов $\nu \in N(Q)$. Имеется взаимнооднозначное соответствие между связными компонентами $\{E_\nu\}$ дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ и разложениями Лорана (с центром в нуле) несократимой дроби $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ (см. [7], п. 6.1). Множества $\text{Log}^{-1}(E_\nu)$ и есть области сходимости соответствующих разложений Лорана.

В случае двух переменных конусом рецессии компоненты E_ν может быть плоский двумерный конус (когда ν – вершина $N(Q)$), луч (когда ν – целочисленная точка на внутренней ребра из $N(Q)$) и точка (когда ν – внутренняя целочисленная точка $N(Q)$).

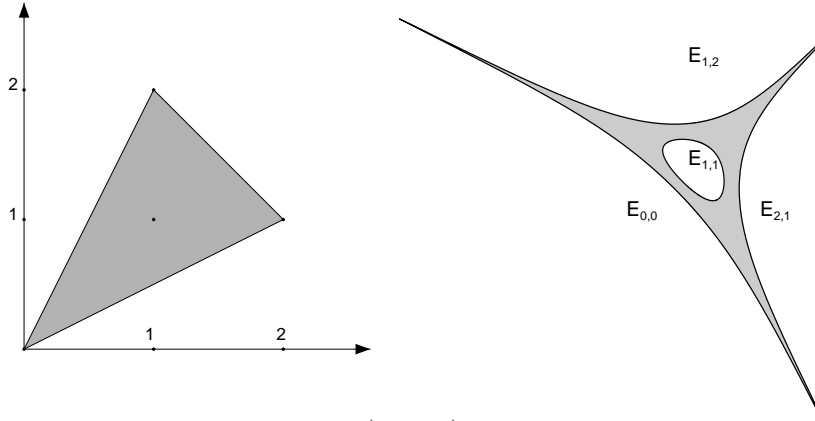


Рис. 1. Многогранник Ньютона (слева), амёба и компоненты дополнения E_ν (справа) для многочлена $Q = z_1^2 z_2 - 4z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + 1$.

Предложение 1. Пусть ряд Лорана (1) сходится в области $\text{Log}^{-1}(E)$, где E – связная компонента дополнения к амёбе гиперповерхности $V = \{Q = 0\}$, и пусть x, y – две любые точки из E такие, что для выбранного направления $q \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ выполняется неравенство $\langle y, q \rangle < \langle x, q \rangle$. Тогда для полной диагонали $d_q(t)$ ряда Лорана (1) справедливо интегральное представление

$$d_q(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{z^q}{z^q - t} \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_n}{z_n}, \quad (4)$$

где $e^{\langle y, q \rangle} < |t| < e^{\langle x, q \rangle}$, $\Gamma = \text{Log}^{-1}(x) - \text{Log}^{-1}(y)$.

Логарифмический образ гиперболы $z_1^{q_1} z_2^{q_2} = t$ разбивает компоненту E на две части. Указанное неравенство говорит о том, что точки x и y выбираются из различных частей этого разбиения (см. Рис. 2).

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I_x(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{z^q}{z^q - t} \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_n}{z_n}$$

и подставим вместо дроби $\frac{P(z)}{Q(z)}$ соответствующий ей ряд Лорана (1), а вместо дроби $\frac{1}{z^q - t}$ ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными степенями t . Тогда, при $|t| < e^{\langle x, q \rangle}$, получим

$$I_x(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n} c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{z_1^{q_1 k - 1} \cdots z_n^{q_n k - 1}} dz.$$

Очевидно, что ненулевой вклад в данный интеграл внесут только мономы с коэффициентами c_{kq_1, \dots, kq_n} при $k > 0$, таким образом, данный интеграл равен

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{kq_1, \dots, kq_n} t^k = d_q^+(t).$$

Аналогично, раскладывая в интеграле I_y по $\text{Log}^{-1}(y)$ дробь $\frac{1}{z^q - t}$ в ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии с отрицательными степенями t , при $|t| > e^{\langle y, q \rangle}$ получим $-d_q^-(t)$.

Разность интегралов $I_x - I_y$ и будет полной диагональю

$$d_q(t) = d_q^+(t) + d_q^-(t)$$

ряда Лорана (1). □

3. Диагонали для рациональных функций двух переменных

Пусть F – рациональная функция двух переменных, представленная несократимой дробью

$$F(z_1, z_2) = \frac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)}.$$

Рассмотрим её произвольный ряд Лорана с центром в нуле:

$$F(z_1, z_2) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2} c_{\alpha_1 \alpha_2} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}. \quad (5)$$

Как отмечалось выше, в предположении несократимости дроби $\frac{P}{Q}$, этот ряд сходится в области $\text{Log}^{-1}(E)$, соответствующей компоненте E из дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus A_V$.

Теорема 1. *Для любого $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ полная диагональ*

$$d_q(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{kq_1, kq_2} t^k$$

всякого ряда Лорана (5) является алгебраической функцией.

Для доказательства нам потребуются сведения из теории многомерных вычетов и понятие циклов, разделяющих наборы комплексных гиперповерхностей на комплексных аналитических многообразиях.

Определение ([9], п. 9). *Пусть S_1, \dots, S_n – n гиперповерхностей (дивизоров) на n -мерном комплексном аналитическом многообразии X . Цикл размерности n*

$$\Gamma \in Z_n(X \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_n))$$

называется разделяющим дивизоры S_1, \dots, S_n , если $\Gamma \sim 0$ в областях

$$X \setminus (S_1 \cup \dots \cup [j] \cup \dots \cup S_n), \quad j = 1, \dots, n.$$

В монографии ([9], п. 9) доказан следующий критерий разделяющих циклов.

Теорема А. *Если $H_{2n-1}(X) \simeq 0$ и $X \setminus S_j$ – штейново многообразие для всех $j = 1, \dots, n$, то цикл Γ разделяет дивизоры тогда и только, когда он представляется в виде линейной комбинации*

$$\sum_{a \in S_1 \cap \dots \cap S_n} n_a \Gamma_a$$

локальных циклов

$$\Gamma_a = \{z \in U_a : |f_j(z)| = \varepsilon_j, j = 1, \dots, n\},$$

где $\{f_j = 0\} = S \cap U_a$, т.е. f_j – функция, локально определяющая S_j в некоторой окрестности U_a изолированной точки a пересечения $S_1 \cap \dots \cap S_n$.

Замечание. В случае двух переменных эта теорема доказана без требования штейновости дополнений $X \setminus S_1$ и $X \setminus S_2$ ([9], п. 9).

Локальный цикл Γ_a участвует в определении локального вычета (вычета Гротендика), ассоциированного с голоморфным отображением (или векторным полем) $f = (f_1, \dots, f_n)$. Условие алгебраичности локального вычета, зависящего от параметра, даёт следующий результат (см. [10], или [9], п. 10).

Теорема В. Пусть $f_1(z, t), \dots, f_n(z, t)$ – полиномы переменных $z \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}^m$, которые при $t = t^0$ имеют изолированный общий нуль $z = a$. Тогда интеграл рациональной формы

$$\int_{\Gamma_a} \frac{h(z, t) dz}{f_1(z, t) \cdot \dots \cdot f_n(z, t)}$$

по локальному циклу Γ_a определяет аналитический элемент алгебраической функции по t .

Доказательство Теоремы 1. Согласно Предложению 1 для $d_q(t)$ справедливо интегральное представление

$$d_q(t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)} \frac{z_1^{q_1-1} z_2^{q_2-1}}{z_1^{q_1} z_2^{q_2} - t} dz_1 dz_2, \quad (6)$$

по циклу $\Gamma = \text{Log}^{-1}(x) - \text{Log}^{-1}(y)$, где $x, y \in E$, причем $e^{\langle y, q \rangle} < |t| < e^{\langle x, q \rangle}$.

Рассмотрим подынтегральную дифференциальную форму в (6) в проективной компактификации $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ пространства \mathbb{C}^2 . В зависимости от степени полинома P эта форма может иметь полюс на бесконечно удалённой прямой $\mathbb{P}_{\infty} = \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2$. Разобьём семейство трёх дивизоров на две группы

$$S_1 = \overline{\{Q = 0\}} \cup \mathbb{P}_{\infty}, \quad S_2 = \overline{\{z^q - t = 0\}},$$

где черта означает замыкание аффинного множества в $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, и докажем, что Γ разделяет S_1 и S_2 .

Имеем, $\Gamma = \partial C^1$, где цепь $C^1 = \text{Log}^{-1}\gamma$ это прообраз отрезка $\gamma = [x, y]$, соединяющего точки x и y . Компонента E выпуклая, следовательно, $\gamma \cap \mathcal{A}_V = \emptyset$, поэтому прообраз $\text{Log}^{-1}\gamma$ отрезка не пересекает $\{Q = 0\}$. Отсюда заключаем, что $C^1 \cap S_1 = \emptyset$.

Аналогично, $\Gamma = \partial C^2$, где $C^2 = \overline{\text{Log}^{-1}(r_+ \cup r_-)}$. Здесь r_{\pm} – лучи, выходящие из точек x и y соответственно и являющиеся продолжением отрезка γ , а замыкание берётся в $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Точки x и y лежат в разных частях разбиения компоненты E логарифмическим образом $\{z^q - t = 0\}$. Поэтому $C^2 \cap S_2 = \emptyset$.

Заметим, что $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus S_j$, $j = 1, 2$ являются штейновыми многообразиями (см., например, [11]), и $H_3(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) \simeq 0$ (напомним, что комплексные проективные пространства допускают клеточные разбиения лишь с чётномерными клетками).

Таким образом, многообразие $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ и дивизоры S_1, S_2 удовлетворяют условию Теоремы А, а цикл Γ разделяет дивизоры S_1 и S_2 . Согласно Теореме А он представим в виде линейной комбинации локальных циклов

$$\Gamma = \sum_{a \in S_1 \cap S_2} c_a \Gamma_a.$$

Тем самым, интеграл (6) равен линейной комбинации локальных вычетов от рациональной формы, которые, по теореме В, являются алгебраическими функциями. Линейная комбинация алгебраических функций является алгебраической функцией. \square

Теорема 2. *Для любого $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ односторонняя диагональ ряда Лорана (5), связанного с неограниченной компонентой E , является алгебраической функцией.*

Следующий пример показывает, что Теорема 1 неверна для рядов, соответствующих ограниченными компонентам E_ν .

Пример. Рассмотрим рациональную функцию двух переменных

$$F(z_1, z_2) = \frac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)} = \frac{1}{z_1^2 z_2 - 4z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + 1}.$$

Заметим, что на единичном остоле $|z_1| = |z_2| = 1$ модуль монома $4z_1 z_2$ больше суммы модулей трёх остальных мономов, поэтому точка $(0, 0) = (\log 1, \log 1)$ не принадлежит амёбе полинома Q и, более того, она лежит в компоненте с порядком $\nu = (1, 1)$ (см. Предложение 2.7 из [8]). Так как точка $(1, 1)$ – внутренняя точка многогранника Ньютона $N(Q)$, то $E_{1,1}$ – ограниченная компонента.

Разложение Лорана для F в $\text{Log}^{-1}(E_{1,1})$ следующее:

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2) &= -\frac{1}{4z_1 z_2} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1 + z_1 z_2^2 + z_1^2 z_2}{4z_1 z_2} \right)^k = \\ &= -\frac{1}{4z_1 z_2} \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{N}^2} \frac{(k_1 + k_2)!}{k_1! k_2!} \frac{(z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2)^{k_1}}{(4z_1 z_2)^{k_1 + k_2}} = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} c_{\alpha_1, \alpha_2} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}, \end{aligned}$$

где

$$c_{\alpha_1, \alpha_2} = \sum_{k \in \mathbb{N}^2: k_1 - 2k_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2} \frac{1}{4^{k_1 + k_2 + 1}} \binom{k_1 + k_2}{k_1} \binom{\alpha_2 + k_2 + 1}{k_1}.$$

Согласно Предложению 1 полная $(1,1)$ -диагональ для $F(z_1, z_2)$ выражается следующим интегралом

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{1}{z_1^2 z_2 - 4z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + 1} \frac{dz_1 dz_2}{z_1 z_2 - t}, \quad (7)$$

где $\Gamma = \text{Log}^{-1}(x) - \text{Log}^{-1}(y)$, точки x и y выбираются в $E_{1,1}$ по разные стороны от амёбы гиперболы $z_1 z_2 = t$, как показано на Рис. 2.

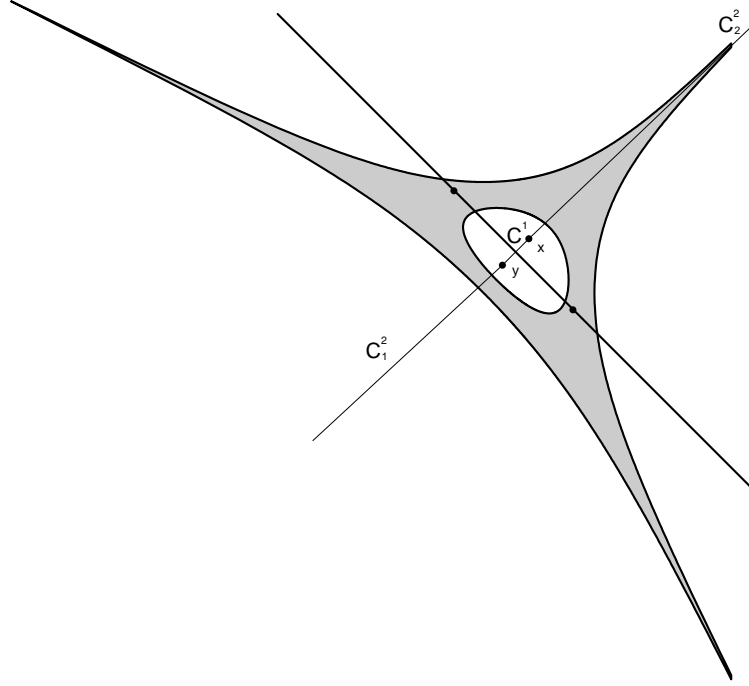


Рис. 2. Амёбы полиномов Q (затемнённая) и $z_1 z_2 - t$ (жирная прямая), цепи C^1 , $C^2 = C_1^2 + C_2^2$.

Ввиду высокой степени знаменателя в (7), бесконечноудалённая прямая \mathbb{P}_∞ не является полярным дивизором для подынтегрального выражения, т.е. в $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ полярными дивизорами служат замыкания аффинных кривых $\{z_1^2 z_2 - 4z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + 1 = 0\}$, $\{z_1 z_2 - t = 0\}$.

В данной ситуации $\Gamma = \partial C^k$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus S_k$, $k = 1, 2$, где C^1 и $C^2 = C_1^2 + C_2^2$ представляются отрезком и лучами в логарифмической шкале (см. Рис. 2). Цепь $C^2 - C^1$ ограничивает область $G \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, которая на рисунке представляется полуплоскостью слева от прямой, составленной из C^1 , C^2 (ввиду симметрии можно считать, что $C^2 - C^1$ – это замыкание вещественной гиперплоскости $|z_1| = |z_2|$, а G – внутренность замыкания множества $|z_1| > |z_2|$). Согласно Следствию 1 ([9], п. 9) интеграл (7) равен сумме локальных вычетов по точкам пересечения дивизоров S_1 и S_2 , лежащим в области G . В область G попадают одна из конечных точек

$$p_{\pm}(t) = \left(\frac{2t^2}{4t - 1 \pm s(t)}, \frac{4t - 1 \pm s(t)}{2t} \right), \text{ где } s(t) = \sqrt{1 - 8t + 16t^2 - 4t^3},$$

пересечения $S_1 \cap S_2$ и бесконечноудалённая точка $(1 : 0 : 0)$.

Оказывается, вычеты в обеих точках на бесконечности равны нулю. Следовательно, полная $(1, 1)$ -диагональ указанного разложения Лорана равна вычету в точке $p_+(t)$, который по формуле Коши равен

$$d_{(1,1)}(t) = \frac{1}{J(p_+(t))} = \frac{4t + s(t) - 1}{4t^3 - 16t^2 + 8t - 4ts(t) + s(t) - 1},$$

где J – якобиан полиномов Q и $z_1 z_2$. Таким образом, полная диагональ является алгебраической функцией.

Докажем, что односторонняя диагональ, выраженная интегралом

$$d_{(1,1)}^-(t) = -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\text{Log}^{-1}(y)} \frac{1}{z_1^2 z_2 - 4z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + 1} \frac{dz_1 dz_2}{z_1 z_2 - t},$$

является неалгебраической функцией.

Этот интеграл можно свести к интегралу по 1-циклу на римановой поверхности

$$V = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_1^2 z_2 - 4z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + 1 = 0\},$$

представив цикл интегрирования $\text{Log}^{-1}(y)$ в виде трубки над 1-циклом на V . Следуя схеме из Предложения 6 статьи [12], получаем, что таким 1-циклом можно взять $\sigma = V \cap C_1^2$.

Тогда согласно формуле Лере ([13], п. 16)

$$d_{(1,1)}^-(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{dz_2}{(2z_1 z_2 - 4z_1 + z_1^2)(z_1 z_2 - t)} \Big|_V. \quad (8)$$

Уточним расположение σ на римановой поверхности V . Амёба \mathcal{A}_V имеет максимальное количество компонент дополнения, и её граница $\partial\mathcal{A}_V$ является гладкой, тогда Log -проекция V на \mathcal{A}_V является $2 \rightarrow 1$ отображением, а у точек границы $\partial\mathcal{A}_V$ имеется только один прообраз (см. [12]). Поэтому цикл σ является поднятием на V отрезка $C_1^2 \cap \mathcal{A}_V$, соединяющего ограниченную компоненту $E_{1,1}$ с компонентой $E_{0,0}$. На римановой поверхности V он соответствует одному из канонических разрезов тора (см. Рис. 3 на развёртке тора, представляющей эллиптическую кривую V).

Гипербола пересекает кривую V в точках $p_{\pm}(t)$, сливающихся при $t_j \in \mathbb{C}$ таких, что $s(t_j) = 0$, $j = 1, 2, 3$. Геометрически это соответствует ситуации, когда гипербола касается кривой V . Если t_j пронумерованы так, что $|t_1| < |t_2| < |t_3|$, то нас интересует значение t_2 , при котором на Рис. 2. логарифмический образ гиперболы касается нижней границы ограниченной компоненты $E_{1,1}$ (при таком значении t цикл $\text{Log}^{-1}(y)$ становится “зажимающимся”).

Пусть γ – окружность малого радиуса вокруг точки t_2 . Проследим на развёртке тора для V (см. Рис. 3) поведение цикла σ при обходе параметра t вдоль петли γ . При однократном обходе вдоль γ точки p_- и p_+ переставляются местами, а вариация цикла

$$\text{var}_{\gamma} \sigma = \sigma_1 - \sigma_2,$$

где σ_1, σ_2 – петли вокруг точек p_+ и p_- соответственно. При двухкратном обходе вдоль γ точки $p_{\pm}(t)$ два раза меняются местами, а вариация цикла

$$\text{var}_{\gamma} \sigma = 2(\sigma_1 - \sigma_2).$$

Заметим, что $J(p_+(t)) = -J(p_-(t))$, поэтому

$$\begin{aligned} d_{(1,1)}(t) &= \int_{\sigma_1} \frac{dz_2}{(2z_1 z_2 - 4z_1 + z_1^2)(z_1 z_2 - t)} \Big|_V = \\ &= - \int_{\sigma_2} \frac{dz_2}{(2z_1 z_2 - 4z_1 + z_1^2)(z_1 z_2 - t)} \Big|_V. \end{aligned}$$

Таким образом, при аналитическом продолжении вдоль петли γ аналитический элемент $d_{(1,1)}^-(t)$, заданный интегралом (8), переходит в $d_{(1,1)}^-(t) + 2d_{(1,1)}(t)$, а при продолжении вдоль петли 2γ он переходит в $d_{(1,1)}^-(t) + 4d_{(1,1)}(t)$. При k -кратном обходе γ аналитический элемент будет получать приращение, равное $2kd_{(1,1)}(t)$.

Алгебраическая функция не может иметь такое ветвление. Следовательно, односторонняя диагональ $d_{(1,1)}^-(t)$ является неалгебраической функцией. \square

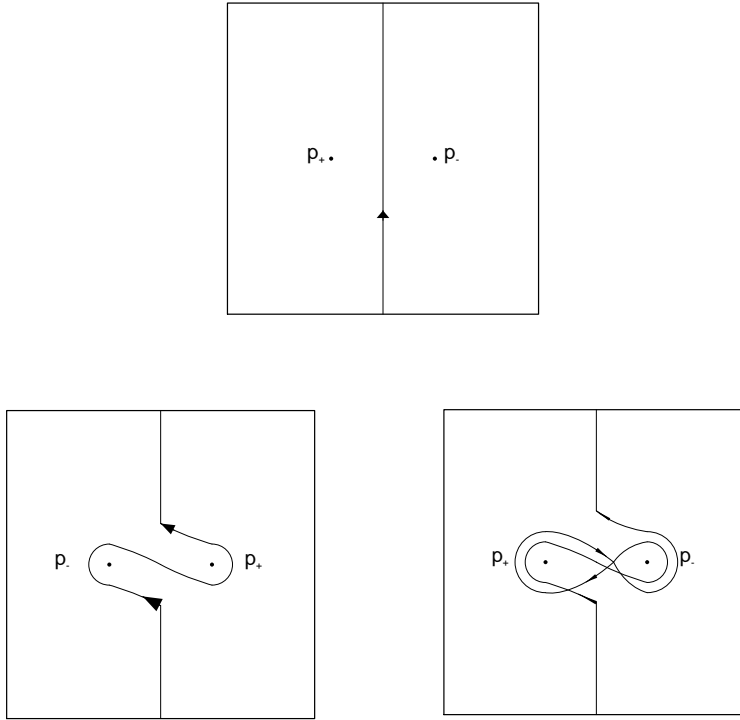


Рис. 3. Цикл σ (меридиан тора на верхнем рисунке) и его поведение при обходе параметра t вдоль γ и 2γ .

Доказательство Теоремы 2. Аналогично доказательству Теоремы 1 покажем, что в интегральном представлении для односторонней диагонали цикл, по которому введётся интегрирование, является разделяющим. Тогда согласно Теореме А он представим в виде линейной комбинации локальных циклов, вычеты по которым являются алгебраическими функциями параметра (Теорема В).

Пусть гиперповерхность задается в торе знаменателем функции $F(z)$:

$$V = \{z \in \mathbb{T}^2 : Q(z) = 0\}.$$

Для доказательства удобно рассматривать торическую компактификацию \mathbb{X} пространства \mathbb{T}^2 , построенную по многограннику Ньютона $N(Q)$, точнее по вееру Σ двойственному к $N(Q)$ (см. [14]).

Заметим, что нечётномерные гомологии компактного торического многообразия являются тривиальными, в частности, $H_3(\mathbb{X}) \simeq 0$ ([14], п. 4.5).

Моментное отображение μ переводит \mathbb{X} в многоугольник Ньютона $N(Q)$ (Рис. 4), при этом \mathbb{T}^2 переводится во внутренность $N(Q)$ ([7], п. 6.1).

Полином $Q(z)$ определяет в \mathbb{X} гиперповерхность \bar{V} . Образ $\mu(\bar{V}) \subset N(Q)$ называется *компактифицированной амёбой*. Типичное расположение компактифицированной амёбы относительно $N(Q)$ представлено на Рис. 4.

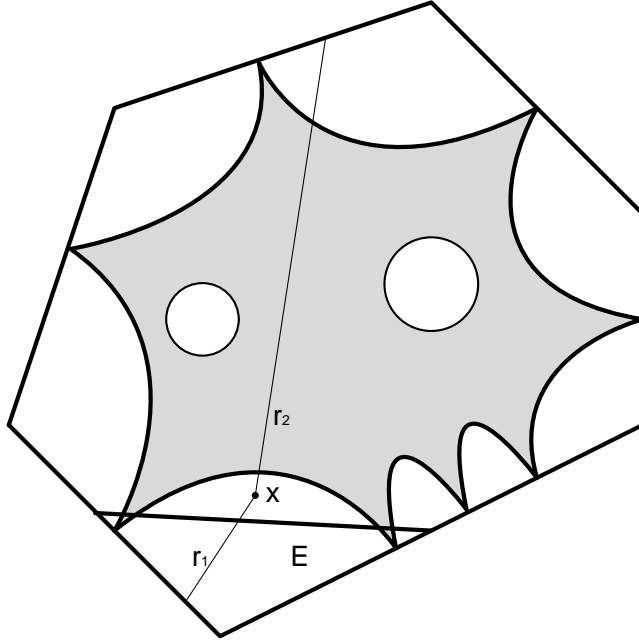


Рис. 4. Компактифицированные амёбы для Q (затемнённая часть) и $z_1^{q_1} z_2^{q_2} - t$ (жирный отрезок).

Рассмотрим первый случай, когда E – компонента с невырожденным конусом рецессии. Выберем точку $x \in E$, как показано на Рис. 4. Интеграл

$$I = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \frac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)} \frac{z_1^{q_1-1} z_2^{q_2-1}}{z_1^{q_1} z_2^{q_2} - t} dz_1 dz_2 \quad (9)$$

равен какой то из односторонних диагоналей с точностью до знака (см. доказательство Предложения 1).

Пусть D_i – \mathbb{T}_N -инвариантный дивизор, являющийся замыканием 1-мерных орбит ([14]). Некоторые \mathbb{T}_N -инвариантные дивизоры являются потенциально полярными для подынтегральной формы в (9). При моментном отображении \mathbb{T}_N -инвариантные дивизоры D_i переходят в рёбра $\mu(D_i)$ многоугольника $N(Q)$.

Пусть соседние щупальцы амёбы, разделенные компонентой E , пересекают $\mu(D_i)$ и $\mu(D_j)$.

Разобьём семейство полярных дивизоров в (9) на две группы. Пусть дивизор S_1 состоит из \bar{V} и нескольких \mathbb{T}_N -инвариантных дивизоров (среди которых нет D_i и D_j), а S_2 состоит из замыкания в \mathbb{X} гиперболы $\{z^q - t = 0\}$ и дивизоров D_i, D_j .

Докажем, что цикл $\Gamma = \text{Log}^{-1}(x)$ разделяет дивизоры S_1 и S_2 .

Имеем, $\Gamma = \partial C^{(1)}$, где цепь $C^{(1)} = \overline{\text{Log}^{-1}(r_1)}$, r_1 – это выходящий из точки x луч, лежащий в компоненте E и пересекающий прямую $\langle q, u \rangle = \log |t|$. Луч не пересекает амёбу, поэтому, его прообраз не будет пересекать $Q = 0$. Таким образом, $C^{(1)} \cap S_1 = \emptyset$.

Аналогично $\Gamma = \partial C^{(2)}$, где цепь $C^{(2)} = \overline{\text{Log}^{-1}(r_2)}$, r_2 – это выходящий из точки x луч, противоположно направленный лучу r_1 . Луч r_2 не пересекает $\langle q, u \rangle = \log |t|$. Следовательно, $C^{(2)} \cap S_2 = \emptyset$.

Таким образом, цикл Γ разделяет дивизоры S_1, S_2 .

Теперь повторяя рассуждения, завершающие доказательство Теоремы 1, получаем, что одна из односторонних диагоналей является алгебраической.

Согласно Теореме 1 полная диагональ, равная сумме двух односторонних, является алгебраической. Следовательно, и другая односторонняя диагональ есть алгебраическая функция.

Рассмотрим второй случай, когда E – компонента, у которой конус рецессии есть луч, и прямая $\langle q, u \rangle = \log |t|$ разбивает E на неограниченную и ограниченную части. Выберем точку x из ограниченной части, тогда интеграл

$$I = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \frac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)} \frac{z_1^{q_1-1} z_2^{q_2-1}}{z_1^{q_1} z_2^{q_2} - t} dz_1 dz_2 \quad (10)$$

равен одной из односторонних диагоналей с точностью до знака.

Пусть соседние щупальцы амёбы, разделенные компонентой E , пересекают $\mu(D_i)$.

Докажем, что $\Gamma = \text{Log}^{-1}(x)$ разделяет дивизоры S_1 , состоящий из \bar{V} и нескольких \mathbb{T}_N -инвариантных дивизоров (среди которых нет D_i), и S_2 , состоящий из замыкания в \mathbb{X} гиперболы $\{z^q - t = 0\}$ и дивизора D_i .

Имеем, $\Gamma = \partial C^{(1)}$, где цепь $C^{(1)} = \overline{\text{Log}^{-1}(r_1)}$, r_1 – это выходящий из точки x луч, лежащий в компоненте E и пересекающий прямую $\langle q, u \rangle = \log |t|$. Прообраз r_1 не будет пересекать $Q = 0$, т.к. сам луч не пересекает амёбу. Таким образом, $C^1 \cap S_1 = \emptyset$.

Аналогично $\Gamma = \partial C^{(2)}$, где цепь $C^{(2)} = \overline{\text{Log}^{-1}(r_2)}$, r_2 – это выходящий из точки x луч, противоположно направленный лучу r_1 . Луч r_2 не пересекает $\langle q, u \rangle = \log |t|$. Следовательно, $C^2 \cap S_2 = \emptyset$.

Цикл Γ разделяет дивизоры S_1, S_2 .

Тогда как и в предыдущем случае получаем, что односторонняя диагональ является алгебраической функцией.

Рассмотрим третий случай, когда E – компонента, у которой конус рецессии есть луч, и прямая $\langle q, u \rangle = \log |t|$ разбивает E на две неограниченные части. Выберем точку $x \in E$ из компоненты, тогда интеграл

$$I = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \frac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)} \frac{z_1^{q_1-1} z_2^{q_2-1}}{z_1^{q_1} z_2^{q_2} - t} dz_1 dz_2 \quad (11)$$

равен какой то из односторонних диагоналей с точностью до знака.

Пусть соседние щупальцы амёбы, разделенные компонентой E , пересекают $\mu(D_i)$.

Докажем, что $\Gamma = \text{Log}^{-1}(x)$ разделяет дивизоры S_1 , состоящий из \bar{V} , замыкания в \mathbb{X} гиперболы $\{z^q - t = 0\}$ и нескольких \mathbb{T}_N -инвариантных дивизоров (среди которых нет D_i), и S_2 , состоящий из \mathbb{T}_N -инвариантного дивизора D_i .

Имеем, $\Gamma = \partial C^{(1)}$, где цепь $C^{(1)} = \overline{\text{Log}^{-1}(r_1)}$, r_1 – это выходящий из точки x луч, лежащий в компоненте E , следовательно, непересекающий прямую $\langle q, u \rangle = \log |t|$. Прообраз r_1 не будет пересекать $Q = 0$, т.к. r_1 не пересекает амёбу. Таким образом, $C^1 \cap D_1 = \emptyset$.

Аналогично $\Gamma = \partial C^{(2)}$, где цепь $C^{(2)} = \overline{\text{Log}^{-1}(r_2)}$, r_2 – это выходящий из точки x луч, перпендикулярный конусу рецессии. Очевидно, что $C^2 \cap D_2 = \emptyset$.

Цикл Γ разделяет дивизоры S_1, S_2 .

Также как и в первом случае получаем, что односторонняя диагональ является алгебраической функцией. \square

4. Полные диагонали ранга $n - 1$ (примитивные диагонали)

Рассмотрим для ряда Лорана (1) следующую $n - 1$ -мерную диагональ

$$I_{12} := \sum_{(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}} c_{\alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_n} t_2^{\alpha_2} t_3^{\alpha_3} \dots t_n^{\alpha_n}. \quad (12)$$

В статье [2], где такие диагонали рассматриваются для степенных рядов по положительным степеням, они названы примитивными. По аналогии назовём (12) *полной примитивной* диагональю ряда Лорана (1).

Заметим, что полная $(1, \dots, 1)$ -диагональ является композицией примитивных, например, при $n = 3$

$$d_{(1,1,1)}(t) = I_{23}(I_{12}(F)).$$

Для краткости обозначим $(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ через α' . Вся решетка \mathbb{Z}^{n-1} представляется дизъюнктивной суммой ортаэдров $\mathbb{Z}^{n-1} = \bigcup_{\varepsilon} \mathbb{Z}_{\varepsilon_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{\varepsilon_n}$, где $\varepsilon = (\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ с компонентами $\varepsilon_j = \pm 1$, а $\mathbb{Z}_{\varepsilon_j}$ равно \mathbb{Z}_+ , если $\varepsilon_j = +1$, и равно \mathbb{Z}_- , если $\varepsilon_j = -1$.

Соответственно, диагональ I_{12} представляется суммой ортаэдральных диагоналей $I_{12} = \sum_{\varepsilon} I_{12}^{\varepsilon}$, где

$$I_{12}^{\varepsilon} = \sum_{\alpha' \in \mathbb{Z}_{\varepsilon_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{\varepsilon_n}} c_{\alpha_2 \alpha'} t^{\alpha'}.$$

В случае $n = 2$ ортаэдральные диагонали I_{12}^{\pm} совпадают с односторонними диагоналями $d_{(1,1)}^{\pm}$.

Пусть ряд Лорана (1) сходится в области $\text{Log}^{-1}(E)$, где E связная компонента дополнения амёбы для Q . Выберем $t = (t_2, \dots, t_n)$ так, чтобы плоскости (амёбы полиномов $z_1 z_2 - t_2, z_3 - t_3, \dots, z_n - t_n$)

$$u_1 + u_2 = \log |t_2|, u_3 = \log |t_3|, \dots, u_n = \log |t_n|$$

пересекались в некоторой точке из E .

Предложение 2. Пусть x^{ε} – произвольная точка из пересечения E с куском

$$\varepsilon_2(e^{x_1+x_2} - |t_2|) > 0, \varepsilon_3(e^{x_3} - |t_3|) > 0, \dots, \varepsilon_n(e^{x_n} - |t_n|) > 0.$$

Тогда для полной примитивной диагонали (12) ряда Лорана (1) в $\text{Log}^{-1}(E)$ справедливо интегральное представление

$$I_{12} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{dz}{(z_1 z_2 - t_2)(z_3 - t_3) \dots (z_n - t_n)}, \quad (13)$$

где

$$\Gamma = \sum_{\varepsilon} (\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n) \text{Log}^{-1}(x^{\varepsilon}).$$

Доказательство. Будем для определенности считать, что точка x^{ε} такая, что $\varepsilon_j = +1$ при $j = \overline{2, m}$, и $\varepsilon_j = -1$ при $j = \overline{m+1, n}$.

Рассмотрим интеграл

$$I_{x^\varepsilon}(t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(x^\varepsilon)} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{dz}{(z_1 z_2 - t_2)(z_3 - t_3) \dots (z_n - t_n)}.$$

Подставим в интеграл вместо дроби F ее ряд Лорана (1), вместо дроби $\frac{1}{z_1 z_2 - t_2}$ ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными степенями t_2 , вместо дробей $\frac{1}{z_j - t_j}, j = \overline{3, m}$ ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными степенями t_j , а вместо дробей $\frac{1}{z_j - t_j}, j = \overline{m+1, n}$ ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии с отрицательными степенями t_j . Тогда получаем, что интеграл I_{x^ε} равен

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{(2\pi i)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(x^\varepsilon)} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\beta z^\beta \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \frac{t_2^{\alpha_2}}{(z_1 z_2)^{\alpha_2+1}} \prod_{j=3}^m \sum_{\alpha_j=0}^{\infty} \frac{t_j^{\alpha_j}}{z_j^{\alpha_j+1}} \times \\ & \times \prod_{j=m+1}^n \sum_{\alpha_j=0}^{\infty} \frac{z_j^{\alpha_j}}{t_j^{\alpha_j+1}} dz. \end{aligned}$$

Ненулевой вклад в данный интеграл внесут только мономы $c_\beta z^\beta$ при $\beta_1 = \beta_2 = \alpha_2 \geq 0, \beta_j = \alpha_j \geq 0, j = \overline{3, \dots, m}, \beta_j = \alpha_j < 0, j = \overline{m+1, \dots, n}$. Таким образом, данный интеграл равен

$$\sum_{\alpha_2 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0, \alpha_{m+1} < 0, \dots, \alpha_n < 0} c_{\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n} t_2^{\alpha_2} t_3^{\alpha_3} \dots t_n^{\alpha_n}.$$

Тогда комбинация интегралов $\sum_\varepsilon (\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n) I_{x^\varepsilon}$ и будет диагональю I_{12} . \square

Теорема 3. *Полная примитивная диагональ (12) ряда Лорана (1), связанная с компонентой E , является алгебраической функцией.*

Доказательство. Согласно Предложению 2 для $I_{12}(t)$ справедливо интегральное представление

$$I_{12}(t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{dz}{(z_1 z_2 - t_2)(z_3 - t_3) \dots (z_n - t_n)}$$

где цикл $\Gamma = \sum_\varepsilon (\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n) \text{Log}^{-1}(x^\varepsilon)$.

Рассмотрим подынтегральную дифференциальную форму в (13) в проективной компактификации $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ пространства \mathbb{C}^n . В зависимости от степени полинома P эта форма может иметь полюс на бесконечно удалённой плоскости $\mathbb{P}_\infty = \mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{C}^n$. Разобьём семейство дивизоров на n групп

$$S_1 = \overline{\{Q = 0\}} \cup \mathbb{P}_\infty,$$

$$S_2 = \overline{\{z_1 z_2 = t_2\}}, S_3 = \overline{\{z_3 = t_3\}}, \dots, S_n = \overline{\{z_n = t_n\}},$$

где черта означает замыкание аффинного множества в $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, и докажем, что Γ разделяет S_1, \dots, S_n .

Имеем, $\Gamma = \partial C^1$, где цепь $C^1 = \overline{\text{Log}^{-1} \bigcup_\varepsilon (\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n) r_\varepsilon}$, r_ε — луч, выходящий из точки x_ε , не пересекая дивизоры S_2, \dots, S_n .

Имеем, $\Gamma = \partial C^2$, где цепь $C^2 = \text{Log}^{-1} \bigcup_{\varepsilon} (\varepsilon_3 \cdots \varepsilon_n) [x_{+1, \varepsilon}, x_{-1, \varepsilon}]$, $[x_{+1, \varepsilon}, x_{-1, \varepsilon}]$ – отрезок, пересекающий дивизор D_2 и непересекающий дивизоры S_1, S_3, \dots, S_n .

Цепи C^3, \dots, C^n строятся аналогично цепи C_2 .

Как уже отмечалось выше, дополнение до дивизора в проективном пространстве является штейновым. Таким образом, утверждение теоремы следует из теорем А и В.

□

Список литературы

- [1] Stanley R. Enumerative combinatorics. V. 2, volume 62 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [2] Denef J., Lipshitz L. Algebraic power series and diagonals // J. Number Theory 1987. V.26, P.46-67.
- [3] Furstenberg H. Algebraic functions over finite fields // J. of Algebra. 1967. V.7, P.271-277.
- [4] Lipshitz L. D -finite power series // J. of Algebra. 1989. V.122, P.353-373.
- [5] Djoković D.Ž. A properties of the Taylor expansion of rational function in several variables // J. of Math. Anal. and Appl. 1978. V.66, P. 679-685.
- [6] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 2. М.: Наука, 1985.
- [7] Gelfand I, Kapranov M., Zelevinsky A. Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants. Boston: Birkhäuser, 1994.
- [8] Forsberg M., Passare M., Tsikh A. Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas // Adv. in Math. 2000. V.151, P.45-70.
- [9] Цих А.К. Многомерные вычеты и их приложения. Новосибирск: Наука, 1988.
- [10] Сафонов К.В., Цих А.К. Об особенностях вычета Гротендика, зависящего от параметра, и диагонали двойных степенных рядов / Изв. вузов. Математика. 1984. N4, С. 57-58.
- [11] Kiselman С.О. On entire functions of exponential type and indicators of analytic functionals // Acta Math. T. 117. 1967. С.1-35.
- [12] Лейнартас Е., Пассаре М., Цих А. Многомерные версии теоремы Пуанкаре для разностных уравнений. // Матем. сб. Т. 199. 2008. N10, С.87-104.
- [13] Айзенберг И.А., Южаков А.П. Интегральные представления и вычеты многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
- [14] Fulton W. Introduction to toric varieties. Princeton university press, V. 131, 1993.