# Почти комплексные квазиторические многообразия.

А. Кустарев

**Abstract**

В работе доказывается существование T-эквивариантной почти комплексной структуры на произвольном квазиторическом многообразии с положительной полиориентацией. Тем самым, дается ответ на вопрос, поставленный в классической работе М. Дэвиса и Т. Янушкиевича. Также устанавливается, что любая T-эквивариантная почти комплексная структура стабильно эквивалентна канонической T-эквивариантной стабильно комплексной структуре, построенной в работе В. М. Бухштабера, Т. Е. Панова и Н. Рэя, при этом разные T-эквивариантные почти комплексные структуры на одном многообразии не обязательно эквивалентны друг другу.

Явное описание класса почти комплексных квазиторических многообразий позволяет найти область допустимых значений их характеристических чисел Черна для случая вещественной размерности 4. Из доказанного также следует, что число классов эквивалентности T-эквивариантных почти комплексных структур на данном квазиторическом многообразии соответствует некоторому чисто комбинаторному варианту многогранника, являющегося пространством орбит действия тора.

## 1 Формулировки и определения

Ориентированное компактное $2n$-мерное многообразие $M$ без края называется *квазиторическим* над простым $n$-мерным многогранником $P$ ([6], [10]), если:

1. на $M$ задано локально стандартное действие $\alpha$ тора $T^n$;
2. существует отображение $\pi : M \to P$, разлагающееся в композицию проекции на пространство орбит $M \to M/T^n$ и гомеоморфизма многообразий с углами $M/T^n \simeq P$.

Любое неособое проективное торическое многообразие является квазиторическим, но обратное неверно. На любом квазиторическом многообразии существует каноническая гладкая структура ([11]), причем действие $\alpha$ тора $T^n$ относительно этой структуры является гладким.

*Характеристическими подмногообразиями* называются многообразия $\pi^{-1}(F_j) \subset M$, $j = 1 \dots m$, где $F_j \subset P$ – гипергрань, а $m$ – число гиперграней. Каждое характеристическое подмногообразие является квазиторическим над многогранником $F_j$.

Говорят, что на квазиторическом многообразии $M$ задана *полиориентация*, если, помимо ориентации многообразия $M$, фиксированы ориентации всех его характеристических подмногообразий. Таким образом, всего на данном квазиторическом многообразии существует $2^{m+1}$ различных полиориентаций. По каждой полиориентации можно построить на $M$ каноническую стабильно комплексную $T^n$-эквивариантную структуру [11], которая задается *характеристическим отображением* $\lambda : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$.

В работе [6] (Prob.7.6, p.450) был поставлен вопрос: найти критерий существования $T^n$-эквивариантной почти комплексной структуры на квазиторическом многообразии $M$ в терминах характеристического отображения $\lambda$. Решению этой проблемы посвящена настоящая работа.

$T^n$-эквивариантная стабильно комплексная структура на многообразии $M$ с действием $\alpha$ тора $T^n$ задает изоморфизм $c_\tau : \tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2m-2n} \simeq \eta$, где $\eta$ – некоторое комплексное расслоение. При этом композиция отображений

$$\eta \xrightarrow{c_\tau^{-1}} \tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2m-2n} \xrightarrow{d\alpha(t)\oplus I} \tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2m-2n} \xrightarrow{c_\tau} \eta$$

является комплексно-линейной для любого $t \in T^n$.

Если $v$ – неподвижная точка действия $T^n$ на $M$, то определено сквозное отображение

$$\tau_v(M) \xrightarrow{i} \eta_v \xrightarrow{\pi'} \mathbb{C}^n,$$

где $i$ – композиция вложения и изоморфизма $c_\tau$, $\pi'$ – проекция вдоль подпространства в $\eta_v$, неподвижного при действии $T^n$. Знак $\mathrm{sign}(v)$ неподвижной точки $v$ – это знак определителя отображения $\pi' \circ i$.

Эквивалентное определение знака, которым мы будем пользоваться, таково: мы полагаем $\mathrm{sign}(v) = +1$, если ориентации касательного пространства в $v$, индуцируемые ориентацией $M$ и ориентациями характеристических подмногообразий, совпадают, и $\mathrm{sign}(v) = -1$ в противном случае.

В терминах матрицы отображения $\lambda$ знак вершины $v = F_1 \cap \dots \cap F_n$ может быть определен следующим образом. Пусть $e_j$ – нормальный вектор к гиперграни $F_j$, направленный внутрь $P$. Тогда $\mathrm{sign}(v)$ равен произведению определителя $\det(e_j)$ на определитель, образованный столбцами матрицы $\lambda$, соответствующими гиперграням $F_1 \dots F_n$. Ясно, что это определение не зависит от порядка гиперграней, сходящихся в вершине $v$.

Полиориентация называется *положительной*, если соответствующие ей знаки всех неподвижных точек положительны.

# 2 Результаты

**Теорема 2.1** *Квазиторическое многообразие $M$ допускает $T^n$-эквивариантную почти комплексную структуру тогда и только тогда, когда оно обладает положительной полиориентацией.*

Схема доказательства теоремы 2.1 следующая. Мы фиксируем на $M$ инвариантную риманову метрику ([3]) и строим согласованную с этой метрикой $T^n$-эквивариантную почти комплексную структуру $J$ по индукции – предполагая, что $J$ построена на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ – прообразе $(i-1)$-мерного остова многогранника $P$, мы продолжаем $J$ на $\pi^{-1}(sk_i(P))$. Препятствием к продложению $J$ оказывается клеточная коцепь $\sigma_J^i \in C^i(P, \pi_{i-1}(SO(2i)/U(i)))$, аккуратное построение которой требует работы. После этого доказываются стандартные для теории препятствий утверждения, что $\sigma_J^i$ – коцикл, и что если $\sigma_J^i = \delta\beta$, то $J$ может быть изменена на прообразе внутренностей $(i-1)$-мерных клеток $P$ и продолжена на $\pi^{-1}(sk_i(P))$.

**Теорема 2.2** *Пусть $J_0$ и $J_1$ – две $T^n$-эквивариантные комплексные структуры на расслоении $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$, $l > 0$, индуцирующие одну полиориентацию на $M$. Тогда $J_0$ и $J_1$ эквивариантно гомотопны. Иными словами, существует непрерывное по $t$ семейство $J(t)$ эквивариантных комплексных структур на $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$ такое, что $J(0) = J_0$ и $J(1) = J_1$.*

Прокомментируем условие теоремы 2.2. Любая $T^n$-эквивариантная комплексная структура $J$ на расслоении $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$ обязательно индуцирует ориентацию на $M$, так как действие $T^n$ на слагаемом $\mathbb{R}^{2l}$ тривиально и подрасслоение $\tau(M) \subset \tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$ $J$-инвариантно. Кроме того, $J$ индуцирует также и ориентацию любого характеристического подмногообразия $\pi^{-1}(F_j) \subset M$, так как $\pi^{-1}(F_j)$ инвариантно относительно действия $T^n$, и следовательно, касательное расслоение $\tau(\pi^{-1}(F_j)) \subset \tau(M)|_{\pi^{-1}(F_j)}$ также $J$-инвариантно. Следовательно, $M$ является полиориентированным квазиторическим многообразием.

Доказательство теоремы 2.2 состоит в построении эквивариантной гомотопии между $J_0$ и $J_1$ индукцией по остовам. Аналогично стандартной теории препятствий, мы показываем, что продолжение гомотопии с $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ на $\pi^{-1}(sk_i(P))$ равносильно обращению в ноль некоторой различающей коцепи $d^i(J_0, J_1) \in C^i(P, \pi_i(SO(2i)/U(i)))$. Как будет ясно ниже, условие $l > 0$ в формулировке теоремы нельзя отбросить.

Мы получаем немедленное следствие из теоремы 2.2:

**Следствие 2.3** *Пусть $J$ - произвольная $T^n$-эквивариантная почти комплексная структура $J$, индуцирующая на $M$ полиориентацию $o$. Тогда $J$ эквивариантно гомотопна канонической стабильно комплексной структуре [11], построенной по $o$.*

Из доказательств теорем 2.1 и 2.2 следует ряд утверждений о структуре множества $T^n$-эквивариантных почти комплексных структур на данном квазиторическом многообразии.

**Следствие 2.4** *Пусть $J_0$ и $J_1$ – две $T^n$-эквивариантные почти комплексные структуры на квазиторическом многообразии $M$, согласованные с одной полиориентацией $o$. Тогда $J_0$ и $J_1$ гомотопны в классе неэквивариантных почти комплексных структур на $M$.*

**Следствие 2.5** *Пусть $J_0$ и $J_1$ – две $T^n$-эквивариантные почти комплексные структуры на квазиторическом многообразии $M$, согласованные с одной полиориентацией $o$ и совпадающие на $\pi^{-1}(sk_3(P^n))$. Тогда $J_0$ и $J_1$ гомотопны в классе эквивариантных почти комплексных структур на $M$.*

**Следствие 2.6** *Множество структур на $M^{2n}$, рассматриваемых с точностью до эквивариантной гомотопии и согласованных с данной положительной полиориентацией, может быть неканонически отождествлено с $\mathbb{Z}^{f_1(P)-f_0(P)+1}$. Здесь $f_1(P)$ – число ребер, $f_0(P)$ – число вершин многогранника $P$.*

**Следствие 2.7** *На любом квазиторическом многообразии $M^{2n}, n > 1$ с положительной полиориентацией существует бесконечное количество эквивариантно негомотопных друг другу $T^n$-эквивариантных почти комплексных структур.*

В частности, уже на многообразии $\mathbb{C}P^2$ имеется бесконечное количество $T^2$-эквивариантных почти комплексных структур, между которыми не существует эквивариантной гомотопии.

Доказательства всех следствий можно найти в п. 5.3.

Раздел 6 посвящен исследованию некоторых комбинаторных аспектов, таких, как существование в каждой четной размерности квазиторического многообразия, не допускающего никакой положительной полиориентации (предложение 6.1). Кроме того, мы вводим новый комбинаторный инвариант $i(P)$ многогранника $P$, устанавливаем его простейшие свойства и связь с неэквивариантными классами эквивалентности почти комплексных структур.

В разделе 7 приводится краткий обзор задачи географии чисел Черна для различных классов многообразий – комплексных алгебраических, связных почти комплексных, квазиторических многообразий. Теорема 2.1 позволяет полностью описать характеристические числа почти комплексных квазиторических многообразий в размерности 4 (предложение 7.6).

Автор благодарен научному руководителю В.М.Бухштаберу и Т.Е.Панову за внимание к работе и ценные обсуждения, а также Н.Э.Добринской за ценную переписку. Для $n \leqslant 7$ утверждение теоремы 2.1 было ранее доказано Н.Э.Добринской. Существенные результаты был получен в работе [12], в частности, там фактически содержится доказательство теоремы 2.1 для случая $n = 2$. Тем не менее, использованные другими авторами методы отличаются от примененного нами. Насколько известно автору, построение коцепи, принимающей значения на гранях многогранника как клеточного комплекса, не использовалось ранее для иследования препятствий к существованию эквивариантных структур на квазиторических многообразиях.

# 3 Примеры и замечания

Из результатов работы [8], в частности, следует, что для квазиторического многообразия $M$ с положительной полиориентацией и соответствующей ей стабильно комплексной структуры $J$ имеет место равенство $c_n(J) = \chi(M)$. Поэтому в силу [2], $M$ автоматически должно обладать некоторой почти комплексной структурой – которая не обязательно эквивариантна.

Как известно, на любом неособом проективном торическом многообразии $M$ существует каноническая $T^n$-эквивариантная комплексная структура. Поскольку $M$ проективно, оно обладает инвариантной симплектической формой $\omega$, и определено *отображение моментов* $\pi : M \to P$ ([4]), задающее на $M$ структуру квазиторического многообразия ($P$ – простой многогранник). Комплексная структура на $M$ задает положительную полиориентацию на $M$, поскольку все характеристические подмногообразия также являются комплексными.

Отметим, что уже в размерности 6 существуют неособые торические многообразия, не являющиеся проективными (см. [10]), на которых, тем не менее, имеется локально стандартное действие тора $T^3$, причем факторпространство диффеоморфно простому многограннику.

Рассмотрим теперь примеры неалгебраических квазиторических многообразий. Пусть $\mathbb{C}P^2_k$ – связная сумма $k$ экземпляров $\mathbb{C}P^2$ со стандартной ориентацией и гладкостью. Как следует из конструкции эквивариантной связной суммы ([6],[11]), все многообразия $\mathbb{C}P^2_k$ являются квазиторическими, и при нечетном $k$ многообразие $\mathbb{C}P^2_k$ допускает положительную полиориентацию. При четном $k$ многообразие $\mathbb{C}P^2_k$ не может быть почти комплексным.

**Теорема 3.1** *([1]) Ориентированное четырехмерное многобразие $M$ является почти комплексным, если и только если число $td(M) = \frac{1}{4}(\chi(M) + \mathrm{sign}(M))$ целое. Здесь $\mathrm{sign}(M) = (b_2^+(M) - b_2^-(M))$ – сигнатура формы пересечений многообразия $M$.*

Для многообразия $\mathbb{C}P^2_k$ имеем $td(\mathbb{C}P^2_k) = \frac{k+1}{2}$. Отсюда следует несуществование почти комплексной структуры на $\mathbb{C}P^2_k$ для четных $k$. Как следует из теоремы 2.1, многообразие $\mathbb{C}P^2_k$ при нечетном $k$ обладает локально стандартным действием тора $T^2$ и эквивариантной почти комплексной структурой. Тем не менее, при $k \geqslant 3$ многообразие $\mathbb{C}P^2_k$ не может быть торическим – поскольку любое торическое многообразие рационально и, следовательно, имеет род Тодда, равный единице.

Как следует из результатов [9], на $\mathbb{C}P^2_k$ при $k \geqslant 2$ также не существует $T^2$-эквивариантной симплектической структуры.

**Теорема 3.2** *([9]). Пусть $M$ – многообразие с симплектическим действием окружности, имеющее лишь изолированные неподвижные точки. Тогда $\mathrm{td}(M) = 1$ или $0$ в зависимости, соответственно, от того, является действие окружности гамильтоновым или нет.*

Наконец, имеет место следующий результат, доказательство которого основано на теории инвариантов Зайберга-Виттена четырехмерных симплектических многообразий.

**Теорема 3.3** *([7]). Многообразие $\mathbb{C}P^2_k$ не является симплектическим при $k \geqslant 2$.*

Таким образом, многобразия $\mathbb{C}P_k^2$ с нечетным $k \geqslant 3$ являются примерами многообразий, обладающих эквивариантной почти комплексной структурой, но не являющихся ни симплектическими, ни торическими.

# 4 Доказательство теоремы 2.1

Часть "только тогда" теоремы 2.1 очевидна. Если $J$ – искомая структура, то все характеристические подмногообразия $J$-инвариантны, откуда следует положительность знаков всех неподвижных точек. Содержательной частью является часть "тогда": доказать, что существование положительной полиориентации на $M$ влечет существование эквивариантной почти комплексной структуры.

## 4.1 Обозначения

Через $sk_i(P)$ мы будем обозначать объединение всех граней размерности $i$ многогранника $P$. Пусть $\iota : P \to M$ – вложение многогранника $P$ в $M$, удовлетворяющее условиям:

1. $\pi \circ \iota = id$;
2. ограничение $\iota$ на $Int\, G$ является гладким для любой грани $G \subset P$.

Вложение $\iota$ строится как композиция $P \to P \times T^n \to M$, где последняя стрелка – отображение факторизации ([6]).

Мы будем предполагать, что на $M$ задана $T^n$-инвариантная риманова метрика $g$ (см. [3]). Структуру $J$ будем строить в виде ортогонального оператора на $\tau(M)$, удовлетворяющего условию $J^2 = -1$.

Напомним, что пространство комплексных структур на $2i$-мерном вещественном пространстве, согласованных с данной метрикой и индуцирующих заданную ориентацию, гомеоморфно $SO(2i)/U(i)$.

Слова "структура на $X$" здесь и далее будут расшифровываться, как "$T^n$-эквивариантная комплексная структура на расслоении $\tau(M)$, ограниченном на подмножество $X \subset M$".

Если $M_G = \pi^{-1}(G)$ – квазиторическое подмногообразие размерности $2i$ в $M$, то через $\xi_1 \dots \xi_{n-i}$ будем обозначать двумерные вещественные расслоения над $M$, соответствующие $n-i$ стационарным торическим подгруппам $T_1 \dots T_{n-i}$ ([6]). Расслоения $\xi_j$ и подгруппы $T_j$, естественно, зависят от грани $G$, но мы не будем отражать эту зависимость в обозначениях, так как это не приведет к путанице. По определению, слои расслоений $\xi_j$ над $M_G$ $J$-инвариантны.

Будем называть структуру $J$ на $\pi^{-1}(Int\, G)$ *согласованной* с $o$, если она индуцирует ту же ориентацию на всех расслоениях $\xi_1, \dots, \xi_{n-i}$, что и исходная полиориентация $o$.

Если $V$ – вещественное евклидово пространство четной размерности с фиксированной ориентацией, то через $\mathbb{J}(V)$ будем обозначать пространство всех комплексных структур на $V$, согласованных с метрикой и ориентацией $V$. Для наших приложений будет важен случай $V = \tau(M_G)|_x$, где $G \subset P$ – некоторая грань, а $x \in \iota(G)$. Отметим, что после выбора базиса в $V$ пространство $\mathbb{J}(V)$ естественно отождествляется с $SO(2i)/U(i)$, где $i = \dim G$. В частности, $\mathbb{J}(V)$ всегда односвязно.

Расслоение над $\iota(G)$ со слоем $\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)$ над точкой $x \in \iota(G)$, ассоциированное с $\tau(M_G)|_{\iota(G)}$, будем для краткости обозначать через $\mathbb{J}_G$. Очевидно, что $\mathbb{J}_G$ тривиально. Рассмотрим теперь пространство $\mathrm{Aut}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$ гомеоморфизмов слоя $\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)$ в себя, индуцированных заменой базиса в пространстве $\tau(M_G)|_x$.

Фиксируем произвольную тривиализацию расслоения $\tau(M_G)$ над $\iota(G)$ (определяющую также тривиализацию ассоциированного расслоения $\mathbb{J}_G$). Тогда все остальные тривиализации расслоения $\mathbb{J}_G$, определяемые некоторой тривиализацией $\tau(M_G)$ над $\iota(G)$, задаются непрерывными отображениями $G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$, где $x \in \iota(G)$ – некоторая фиксированная точка. Поскольку пространство замен базиса в $\tau(M_G)|_x$ гомеоморфно $SO(2i)$ и, тем самым, связно, $\mathrm{Aut}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$ также связно. Следовательно, связным является и пространство тривиализаций расслоения $\mathbb{J}_G$, задаваемых некоторой тривиализацией $\tau(M_G)$ над $\iota(G)$.

## 4.2 Условие положительности и переход к 1-остову

**Лемма 4.1** *Если $M_G \subset M$ – квазиторическое подмногообразие, то $\xi_j \perp M_G$ и $\xi_j \perp \xi_k$ при $j \neq k$.*

□ Пусть $v \in \tau(M_G)$, $v_j \in \xi_j$, $v_k \in \xi_k$ – ненулевые вектора, приложенные к точке $x \in M_G$, а $t_\pi \in T_j$ – элемент торической подгруппы $T_j$, соответствующий повороту на угол $\pi$. Тогда $g(v, v_j) = g(v, t_\pi v_j) = g(v, -v_j) = 0$ и $g(v_j, v_k) = g(t_\pi v_j, v_k) = g(-v_j, v_k) = 0$, так как $T_j$ действует тривиально на $\xi_k$ и $\tau(M_G)$. □

Пусть $o$ – некоторая, не обязательно положительная, полиориентация $M$. Тогда $o$ задает структуру $J$ на $\pi^{-1}(sk_0(P))$ следующим образом: на каждом инвариантном двумерном вещественном подпространстве $\xi_1|_x, \dots, \xi_n|_x$ в неподвижной точке $x \in M$ структура $J$ является поворотом на угол $\pi/2$ в направлении, определяемом $o$. Наша задача –

продолжить $J$ последовательно на прообразы всех остовов многогранника $P$.

**Лемма 4.2** *Пусть $J$ – структура на $\pi^{-1}(sk_0(P))$, построенная по некоторой полиориентации $o$. Структура $J$ продолжается на $\pi^{-1}(sk_1(P))$, тогда и только тогда, когда полиориентация $o$ положительна.*

□ Докажем часть "тогда". Пусть $I$ – ребро $P$, соединяющее вершины $x_0$ и $x_1$, а $T_1, \ldots, T_{n-1}$ – торические подгруппы, соответствующие $I$. Над $\pi^{-1}(I)$ имеется разложение касательного расслоения в прямую сумму $\tau(M) = \tau(\pi^{-1}(I)) \oplus \xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_{n-1}$. Задание полиориентации $o$ определяет ориентацию расслоений $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ над $\pi^{-1}(I)$.

Обозначим за $W_0$ и $W_1$ ортогональные дополнения к $\xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_{n-1}$ в точках $\pi^{-1}(x_0)$ и $\pi^{-1}(x_1)$ соответственно. Поскольку $J$ построена по полиориентации $o$, $J$ является поворотом на $\pi/2$ в пространствах $W_0$ и $W_1$. Заметим, что $W_0$ и $W_1$ – касательные пространства к $\pi^{-1}(I)$ в точках $\pi^{-1}(x_0)$ и $\pi^{-1}(x_1)$. Положительность $o$ влечет согласованность ориентаций $W_0$ и $W_1$ как касательных пространств к точкам сферы $S^2 = \pi^{-1}(I)$. Поэтому мы можем доопределить $J$ на все $\tau(\pi^{-1}(I))$ как поворот на угол $\pi/2$ в положительном направлении. На расслоениях $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ структура $J$ определяется как поворот на $\pi/2$ в направлении, продиктованном ориентациями $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$.

Для доказательства части "только тогда" теперь достаточно заметить, что если $J$ задана на всей сфере $\pi^{-1}(I)$, то ориентации $M$ в точках $\pi^{-1}(x_0)$ и $\pi^{-1}(x_1)$ согласованы – и это верно для любых вершин $x_0$ и $x_1$, соединенных ребром. Поскольку 1-остов любого многогранника связен, все вершины $P$ обязаны иметь один знак. □

## 4.3 Тривиальность высших препятствий

Перейдем к случаю $i > 1$: предположим, что структура $J$ задана на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ и попытаемся продолжить ее на прообраз $i$-мерного остова $P$. Пусть $G \subset P$ – некоторая $i$-мерная грань, $M_G = \pi^{-1}(G)$ – соответствующее квазиторическое подмногообразие.

**Лемма 4.3** *Пространство структур $J$ на $\pi^{-1}(Int\, G)$, согласованных с полиориентацией $o$, гомеоморфно пространству непрерывных отображений $\mathrm{Map}(Int\, G, \mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$, где $x \in \iota(Int\, G)$ – произвольная точка.*

□ Эквивариантность и согласованность структуры $J$ с $o$ гарантируют, что $J$ однозначно задана на расслоении $\xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_{n-i} \simeq$

$\tau(\pi^{-1}(Int\,G))^{\perp} \subset \tau(M)|_{M_G}$. Таким образом, достаточно определить $J$ на касательном расслоении $\tau(\pi^{-1}(IntG)) \simeq \tau(M_G)|_{Int\,G}$.

Если $T^{n-i}$ – стабилизатор подмногообразия $\pi^{-1}(G)$, то факторгруппа $T^n/T^{n-i}$ изоморфна $i$-мерному тору и действует на $\pi^{-1}(Int\,G)$ свободно, причем пространство орбит гомеоморфно $Int\,G$. В силу эквивариантности, структуру $J$ тогда достаточно задать на $\iota(Int\,G)$. Расслоение $\tau(M_G)$ при ограничении на $\iota(Int\,G)$ становится тривиальным $2i$-мерным ориентированным расслоением, на котором $J$ может быть задана произвольным образом. Если фиксировать тривиализацию ассоциированного расслоения $\mathbb{J}_G$ над $\iota(Int\,G)$, то структура $J$ определяется непрерывным отображением $Int\,G \to \mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)$, где $x \in \iota(G)$ – некоторая фиксированная точка. $\square$

Заметим, что расслоение $\tau(M_G)$, ограниченное на $\iota(G)$, также тривиально. Отсюда следует, что для любых двух точек $x, y \in \iota(G)$ гомотопические группы $\pi_*(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$ и $\pi_*(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_y))$ канонически изоморфны. Действительно, искомый изоморфизм задается произвольным путем $\gamma(t)$, $t \in [0,1]$ таким, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ и $\gamma(t) \in \iota(G)$, причем любые два таких пути гомотопны в $\iota(G)$. Кроме того, гомотопическая группа $\pi_*(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$ не зависит от выбора отмеченной точки в $\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)$, поскольку $\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)$ односвязно (см. п. 3.1).

Фиксируем произвольную точку $x \in \iota(G)$ и тривиализацию расслоения $\tau(M_G)$ над $\iota(G)$. Тогда расслоение $\mathbb{J}_G$ также тривиализуется. Поскольку структура $J$ уже задана на $\iota(\partial G) \subset \pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$, она определяет некоторое непрерывное отображение $f : \partial G \to \mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)$. Гомотопический класс сфероида $f$ мы обозначим через $C_G$.

Покажем, что класс $C_G$ определен корректно. Из сказанного выше следует, что $C_G$ не зависит от выбора точки $x \in \iota(G)$. Предположим теперь, что мы изменили тривиализацию расслоения $\tau(M_G)$ над $\iota(G)$. В силу сказанного в п. 4.1, новая тривиализация расслоения $\mathbb{J}_G$ тогда задается некоторым непрерывным отображением $\phi : G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$ из $G$ в пространство гомеоморфизмов слоя $\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)$ в себя, индуцированных заменой базиса в $\tau(M_G)|_x$. В новой тривиализации отображение $f$ заменяется на отображение $g : \partial G \to \mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)$, действующее по формуле $g(y) = \phi(y) \circ f(y)$. Пусть $\phi_t : G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$ – непрерывное семейство отображений такое, что $\phi_0(y) = id$ для любого $y \in \iota(G)$, и $\phi_1 = \phi$ (оно существует в силу связности пространства отображений $G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$, см. п. 4.1). Тогда семейство отображений $\phi_t(y) \circ f(y)$ задает гомотопию $f$ и $g$, откуда следует, что гомотопические классы сфероидов $f$ и $g$ совпадают.

Отметим, кроме того, что при определении $C_G$ существенна ориентация грани $G$.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

**Лемма 4.4** *Структура $J$, согласованная с $o$, продолжается с $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P)) \cup M_G$, если и только если $C_G = 0$ в группе $\pi_{i-1}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$, где $x \in \iota(G)$ – некоторая фиксированная точка.*

Каждый многогранник $P$ обладает каноническим клеточным разбиением, в котором клетками являются грани $P$. Определим клеточную коцепь $\sigma_J^i \in C^i(P, \pi_{i-1}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)))$ по правилу $\sigma_J^i(G) = C_G$. По построению, $\sigma_J^i$ тождественно равна нулю, если и только если структура $J$ продолжается с $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ на $\pi^{-1}(sk_i(P))$.

Строго говоря, функция $\sigma_J^i$ не может называться коцепью до тех пор, пока мы каноническим образом не отождествим между собой гомотопические группы $\pi_{i-1}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$ для всех граней $G$ размерности $i$. Покажем, как это возможно сделать.

**Лемма 4.5** *Пусть* $\dim G = i$, $j \leqslant 2i - 2$, $x \in \iota(G)$, $y \in \iota(P)$. *Тогда гомотопические группы* $\pi_j(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$ *и* $\pi_j(\mathbb{J}(\tau(M)|_y))$ *канонически изоморфны.*

□ Прежде чем приступить к доказательству, отметим, что поскольку группы $\pi_j(\mathbb{J}(\tau(M)|_y))$ канонически изоморфны между собой для всех точек $y \in \iota(P)$, нужное нам утверждение вытекает из леммы 4.5, так как $i - 1 \leqslant 2i - 2$. Поэтому без ограничения общности можем считать, что $x = y$.

Рассмотрим сперва произвольное вложение двух граней $H \subset L$, размерности которых различаются на единицу и обе не меньше $i$. Пусть $x \in \iota(H)$. Тогда имеется вложение пространств комплексных структур

$$c(H, L) : \mathbb{J}(\tau(M_H)|_x) \to \mathbb{J}(\tau(M_L)|_x),$$

определенное формулой $J \to J \oplus t_{\pi/2}$, где $t_{\pi/2}$ – поворот на угол $\pi/2$ в двумерном ортогональном дополнении $\tau(M_H)|_x^{\perp} \subset \tau(M_L)|_x$. Направление поворота продиктовано коориентацией $\tau(M_H)|_x$ в $\tau(M_L)|_x$.

Если мы фиксируем вещественные базисы в $\tau(M_H)|_x$ и $\tau(M_L)|_x$ так, чтобы один из них являлся частью другого, то $c(H, L)$ превратится в каноническое вложение однородных пространств $c : SO(2r)/U(r) \to SO(2r + 2)/U(r + 1)$, где $r = \dim H$.

**Лемма 4.6** *Отображение*

$$c_* : \pi_j(SO(2r)/U(r)) \to \pi_j(SO(2r + 2)/U(r + 1))$$

*является изоморфизмом при* $j \leqslant 2r - 2$.

□ Вложение $c$ раскладывается в композицию отображений

$$SO(2r)/U(r) \to SO(2r+2)/U(r) \to SO(2r+2)/U(r+1),$$

где первая стрелка является вложением слоя в пространство расслоения над базой $SO(2r+2)/SO(2r)$, вторая – проекцией расслоения со слоем $S^{2r+1}$. Из гомотопической точной последовательности расслоения следует, что $c$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп до размерности $2r-2$ включительно, так как гомотопические группы многообразия Штифеля $\pi_j(SO(2r+2)/SO(2r))$ тривиальны при $j \leqslant 2r-1$ ([5]). □

Рассмотрим теперь произвольную цепочку вложений $G = G_0 \subset \ldots \subset G_{n-i} = P$, в которой размерности любых двух соседних граней различаются на единицу. Для $j \leqslant 2i-2$ определим изоформизм $c_*(G,P) : \pi_j(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)) \to \pi_j(\mathbb{J}(\tau(M)|_x))$ по формуле $c_*(G,P) = c_*(G_{n-i-1}, G_{n-i}) \circ \ldots \circ c_*(G_0, G_1)$. Мы утверждаем, что изоморфизм $c_*(G,P)$ и есть искомый; достаточно доказать следующее утверждение.

**Лемма 4.7** *Изоморфизм $c_*(G,P)$ не зависит от выбора цепочки $G = G_0 \subset \ldots \subset G_{n-i} = P$.*

□ Рассмотрим произвольный отрезок цепочки вида $G_{s-1} \subset G_s \subset G_{s+1}$. Тогда существует единственная грань $Q \subset P$ такая, что $G_{s-1} \subset Q \subset G_{s+1}$ и $Q \neq P$. Если $x \in G_{s-1}$, то диаграмма вложений

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{J}(\tau(M_{G_{s-1}})|_x)) & \longrightarrow & \mathbb{J}(\tau(M_{G_s})|_x)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{J}(\tau(M_Q)|_x)) & \longrightarrow & \mathbb{J}(\tau(M_{G_{s+1}})|_x) \end{array}$$

коммутативна, поэтому замена грани $G_s$ в цепочке на $Q$ не изменит изоморфизма $c_*(G,P)$.

Будем говорить, что две цепочки граней, соединяющие $G$ и $P$, эквивалентны, если их можно соединить последовательностью только что рассмотренных операций. Докажем индукцией по $n-i$, что любые две цепочки граней, соединяющие $G$ и $P$, эквивалентны. База $(n-i=1)$ очевидна, так как цепочка единственна. Пусть теперь $G = G_0^1 \subset \ldots \subset G_{n-i}^1 = P$ и $G = G_0^2 \subset \ldots \subset G_{n-i}^2 = P$ – две разные цепочки, соединяющие $G$ и $P$. Рассмотрим грань $Q$ такую, что $\dim Q = i+2$, $G_1^1 \subset Q$ и $G_1^2 \subset Q$ и произвольную цепочку $\zeta$, соединяющую $Q$ и $P$. В силу предположения индукции, цепочки $G_1^1 \subset G_2^1 \subset \ldots \subset P$ и $G_1^1 \subset Q \subset \ldots \subset P$, где $Q$ соединена с $P$ цепочкой $\zeta$, эквивалентны. Поэтому эквивалентны цепочки $G \subset G_1^1 \subset G_2^1 \subset \ldots \subset P$ и $G \subset G_1^1 \subset Q \subset \ldots \subset P$. Далее, цепочка

$G \subset G_1^1 \subset Q \subset \ldots \subset P$ эквивалентна $G \subset G_1^2 \subset Q \subset \ldots \subset P$, в силу выбора грани $Q$. Наконец, снова применяя предположение индукции, получаем, что цепочки $G \subset G_1^2 \subset Q \subset \ldots \subset P$ и $G \subset G_1^2 \subset G_2^2 \subset \ldots \subset P$ эквивалентны. $\square$

Таким образом, построение препятствующей коцепи закончено. Суммируем все вышесказанное в следующем утверждении.

**Лемма 4.8** *Пусть структура $J$ задана на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ и согласована с о. Тогда определена препятствующая коцепь $\sigma_J^i \in C^i(P, \pi_{i-1}(SO(2i)/U(i))$ – функция на $i$-мерных гранях $P$, равная нулю, если и только если $J$ продолжается на $\pi^{-1}(sk_i(P))$ как согласованная с о структура.*

Следующая наша цель – доказать, что коцепь $\sigma_J^i$ является коциклом.

**Лемма 4.9** *Предположим, что структура $J$ согласована с о и определена на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$, $Q$ – некоторая $(i+1)$-мерная грань $P$. Тогда*

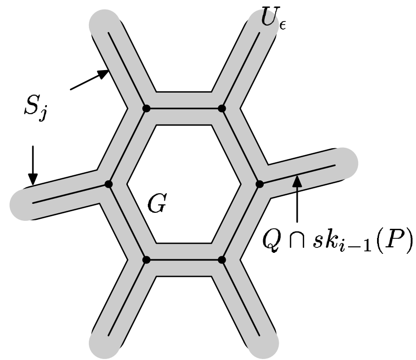
$$\sum_{G \subset \partial Q} \sigma_J^i(G) = 0.$$

$\square$ В силу леммы 4.5 мы можем использовать одно обозначение $c_*$ для всех изоморфизмов $c_*(G,Q) : \pi_{i-1}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)) \to \pi_{i-1}(\mathbb{J}(\tau(M_Q)|_y))$, $x \in \iota(G)$, $y \in \iota(Q)$.

Достаточно показать, что сумма $\sum\limits_{G \subset \partial Q} c_* \sigma_J^i(G)$ равна нулю в гомотопической группе $\pi_{i-1}(\mathbb{J}(\tau(M_Q)|_y)) \simeq \pi_{i-1}(SO(2i+2)/U(i+1))$.

Как уже говорилось, структура $J$ на расслоении $\tau(M_G)|_{\iota(G)}$ автоматически определяет структуру $c(J)$ на расслоении $\tau(M_Q)|_{\iota(G)}$ по формуле $J \to J \oplus t_{\pi/2}$. Расслоение $\tau(M_Q)$ тривиализуется над $\iota(Q)$. Поскольку $\iota(G) \subset \iota(Q)$ для всех $G$, корректно определено отображение $f_J : Q \cap sk_{i-1}(P) \to \mathbb{J}(\tau(M_Q)|_y)$, $y \in \iota(Q)$ – некоторая фиксированная точка. По построению, гомотопический класс ограничения $f_J$ на $\partial G$ совпадает с $c_* \sigma_J^i(G)$.

Пусть $U_\epsilon$ – замкнутая $i$-мерная трубчатая окрестность $Q \cap sk_{i-1}(P)$ в $\partial Q$ (такая, что $G \setminus U_\epsilon \neq \emptyset$ для всех $G \subset \partial Q$). Множество $Q \cap sk_{i-1}(P)$ является деформационным ретрактом окрестности $U_\epsilon$, и композиция с ретракцией задает непрерывное отображение $\tilde{f}_J : U_\epsilon \to \mathbb{J}(\tau(M_L)|_y)$. Окрестность $U_\epsilon$ гомеоморфна $i$-мерной сфере с $k$ вырезанными $i$-мерными шарами; пусть $S_1, \ldots, S_k$ – границы этих шаров.




Тогда если $S_j \subset G$, то гомотопический класс ограничения $\tilde{f}_J|_{S_j}$ совпадает с $c_*\sigma^i_J(G)$. Поскольку сумма сфероидов $\tilde{f}_J|_{S_j}$ гомотопна нулю, это завершает доказательство того, что $\sigma^i_J$ – коцикл. $\square$

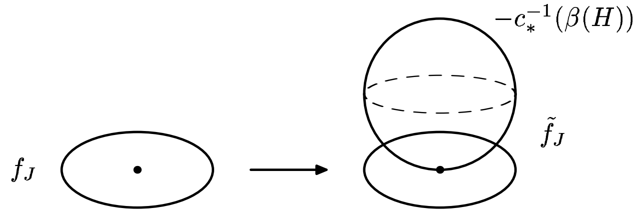
**Лемма 4.10** *Если структура $J$ согласована с $o$, определена на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ и препятствующая коцепь $\sigma^i_J$ является кограницей, то можно так изменить $J$ на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$, не меняя на $\pi^{-1}(sk_{i-2}(P))$, что для новой структуры $J'$ будем иметь $\sigma^i_{J'} = 0$.*

$\square$ Согласно лемме 4.6, вложение $c : SO(2i-2)/U(i-1) \to SO(2i)/U(i)$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп до размерности $2i-4$ включительно. При $i \geqslant 3$ имеем $i-1 \leqslant 2i-4$, поэтому отображение $c_* : \pi_{i-1}(SO(2i-2)/U(i-1)) \to \pi_{i-1}(SO(2i)/U(i))$ является изоморфизмом. При $i = 2$ оба пространства $SO(2i-2)/U(i-1)$ и $SO(2i)/U(i)$ являются односвязными.

Пусть $\sigma^i_J = \partial\beta$ и $H$ – некоторая $(i-1)$-мерная грань. Отметим, что из доказательства леммы 4.5 следует, что мы можем использовать одно обозначение $c_*$ для всех изоморфизмов вида $c_*(H, G_i) : \pi_{i-1}(\mathbb{J}(\tau(M_H)|_x)) \to \pi_{i-1}(\mathbb{J}(\tau(M_{G_i})|_y))$, где $x \in H$, $y \in G_i$, $H \subset G_i$, $\dim G_i = i$. Воспользуемся теперь леммой 4.3: пространство структур на $\pi^{-1}(Int\, H)$, согласованных с $o$, гомеоморфно пространству непрерывных отображений $Int\, H \to \mathbb{J}(\tau(M_H)|_x)$. Пусть $f_H : Int\, H \to \mathbb{J}(\tau(M_H)|_x)$ – соответствующее структуре $J$ отображение.

Отождествим $Int\, H$ со внутренностью единичного $(i-1)$-мерного шара в $\mathbb{R}^{i-1}$. Рассмотрим непрерывное отображение $\tilde{f}_H : Int\, H \to \mathbb{J}(\tau(M_H)|_x)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- $\tilde{f}_H(x) = f_H((2|x|-1)\cdot x)$ при $1/2 \leqslant |x| \leqslant 1$;
- гомотопический класс сфероида, полученного ограничением отображения $\tilde{f}_H$ на шар $|x| \leqslant 1/2$, равен $(-c_*^{-1}\beta(H))$:




Замена отображения $f_H$ на $\tilde f_H$ соответствует изменению структуры $J$ на новую структуру $J'$. Тогда для всех $i$-мерных граней $G$, содержащих $H$, имеем $\sigma^i_{J'}(G) = \sigma^i_J(G) - \beta(H)$, поскольку вложение $\mathbb{J}(\tau(M_H)|_x) \to \mathbb{J}(\tau(M_{G_i})|_x)$, $x \in H$ индуцирует совпадающий с $c_*$ изоморфизм соответствующих гомотопических групп.

Если мы теперь изменим отображения $f_H$ не для одной грани $H$, а для всех $(i-1)$-мерных граней многогранника $P$ по аналогичному правилу $\tilde f_H = f_H - c_*^{-1}\beta(H)$, то из условия $\sigma^i_J = \partial\beta$ следует, что для полученной структуры $J'$ верно $\sigma^i_{J'} = 0$. $\Box$

### 4.4 Окончание доказательства

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы 2.1. Напомним, идея доказательства состояла в построении структуры $J$ последовательно на прообразах $i$-мерных остовов многогранника $P$. Лемма 4.2 и положительность полиориентации $o$ гарантируют, что продолжение $J$ с $\pi^{-1}(sk_0(P))$ на $\pi^{-1}(sk_1(P))$ возможно. В силу лемм 4.8 и 4.9, при $i > 1$ препятствием к продолжению $J$ с $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ на $\pi^{-1}(sk_i(P))$ является коцепь $\sigma^i_J \in C^i(P, \pi_{i-1}(SO(2i)/U(i)))$, причем $\partial\sigma^i_J = 0$. Так как многогранник $P$ ацикличен как клеточный комплекс, $\sigma^i_J$ является кограницей, и, в силу леммы 4.10, существует $T^n$-эквивариантная почти комплексная структура $J'$ на $\pi^{-1}(sk_i(P))$.

## 5 Доказательство теоремы 2.2 и следствий

### 5.1 Согласованность с инвариантной метрикой

Напомним формулировку утверждения, доказательство которого сейчас является основной целью.

**Теорема 2.2** *Пусть $J_0$ и $J_1$ – две $T^n$-эквивариантные комплексные структуры на расслоении $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$, $l > 0$, индуцирующие одну полиориентацию на $M$. Тогда $J_0$ и $J_1$ эквивариантно гомотопны.*

*Иными словами, существует непрерывное по $t$ семейство $J(t)$ эквивариантных комплексных структур на $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$ такое, что $J(0) = J_0$ и $J(1) = J_1$.*

Действие $T^n$ на слагаемом $\mathbb{R}^{2l}$ предполагается тривиальным. Отметим еще раз, что теорема перестает быть верной при $l = 0$.

Схема доказательства такова. Сперва мы покажем, что структуры $J_0$ и $J_1$ можно считать согласованными с некоторой инвариантной метрикой и совпадающими на $\pi^{-1}(sk_0(P))$. После этого будем строить эквивариантную гомотопию между $J_0$ и $J_1$ индуктивно – предполагая, что гомотопия задана на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$, продолжим ее на $\pi^{-1}(sk_i(P))$.

**Лемма 5.1** *Пусть $J$ – структура на $M$. Существует $T^n$-инвариантная риманова метрика на $M$, относительно которой $J$ является ортогональным оператором.*

□ Достаточно построить произвольную риманову метрику на $M$, согласованную с $J$, искомая инвариантная метрика может быть затем получена интегрированием по слоям действия $T^n$. Действительно, если $g'(x, y) = \int\limits_{t \in T^n} g(tx, ty) d\mu$, где $\mu$ – мера на $T^n$ (даже не обязательно инвариантная в данном случае), то

$$g'(Jx, Jy) = \int\limits_{t \in T^n} g(tJx, tJy) d\mu = \int\limits_{t \in T^n} g(Jtx, Jty) d\mu = \int\limits_{t \in T^n} g(tx, ty) d\mu = g'(x, y),$$

так как $J$ коммутирует с действием $T^n$ и $g(Jx, Jy) = g(x, y)$.

Пусть теперь $x \in M$ – произвольная точка. Тогда вектора $e_1, Je_1, e_2, Je_2, \ldots, e_n, Je_n \in \tau_x(M)$ такие, что $e_{i+1}$ не лежит в линейной оболочке $e_1, \ldots, Je_i$, можно взять за ортонормированный базис для некоторой метрики на $\tau_x(M)$, относительно которой оператор $J$ ортогонален. Таким образом, мы можем считать, что у каждой точки $x \in M$ существует окрестность $U(x)$, в которой задана метрика $g_x$, согласованная с $J$. Продолжим каждую метрику $g_x$ вне $U(x)$ нулем. Выберем теперь из множеств вида $U(x)$, $x \in M$ конечное подпокрытие $U(x_1) \ldots U(x_k)$ и склеим соответствующие метрики $g_{x_i}$ при помощи разбиения единицы – получим всюду определенную непрерывную метрику $g$ на $M$. □

**Лемма 5.2** *Пусть $J_0$ и $J_1$ – две структуры на $M$. Тогда существует непрерывное семейство структур $J(t)$ на $M$ такое, что $J(0) = J_0$ и структуры $J(1)$ и $J_1$ являются ортогональными операторами относительно некоторой $T^n$-инвариантной метрики $g$ на $M$.*

$\square$ Пользуясь предыдущей леммой, построим две инвариантные метрики $g_0$ и $g_1$, относительно которых операторы $J_0$ и $J_1$ являются ортогональными. Пространство всех (инвариантных) римановых метрик на многообразии выпукло, поэтому $g_0$ и $g_1$ соединяются гомотопией вида $g(t) = tg_0 + (1-t)g_1$, также в классе инвариантных метрик.

Рассмотрим непрерывное по $t$ семейство операторов $C(t)$ на $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$ таких, что $g(t)(C(t)u, v) = g_0(u, v)$ для любых векторов $u, v \in TM|_x$, $x \in M$. Такой оператор $C(t)$ существует и единственен для каждого $t$, диагонализуем, все его собственные значения положительны. Собственные подпространства, отвечающие различным собственным значениям $C(t)$, ортогональны (относительно метрики $g_0$). Кроме того, $C(t)$ является $T^n$-эквивариантным оператором, поскольку метрики $g_0$ и $g_t$ инвариантны относительно действия $T^n$.

Из этих свойств $C(t)$ следует, что на $M$ существует непрерывное семейство $T^n$-эквивариантных операторов $C'(t)$ таких, что $C'(t)^2 = C(t)$, причем все собственные значения $C'(t)$ также положительны. Поскольку собственные подпространства $C'(t)$, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны относительно $g_0$, имеем $g_0(C'(t)u, v) = g_0(u, C'(t)v)$ для всех $t$ и $u, v \in TM_x$, $x \in M$. Поэтому $g_t(u, v) = g_0(C'(t)^2 u, v) = g_0(C'(t)u, C'(t)v)$ для всех $t$ и $u, v \in TM_x$, $x \in M$.

Покажем теперь, что $J(t) = C'(t)^{-1} J_0 C'(t)$ – требуемое семейство операторов. Очевидно, что $J(t)^2 = -1$.

Имеем

$$\begin{gathered}
g_1(J(1)u, J(1)v) = \\
= g_1(C'(1)^{-1} J_0 C'(1)u, C'(1)^{-1} J_0 C'(1)v) = \\
= g_0(J_0 C'(1)u, J_0 C'(1)v) = \\
= g_0(C'(1)u, C'(1)v) = \\
= g_1(u, v),
\end{gathered}$$

что и требовалось доказать. $\square$

**Лемма 5.3** *Пусть $J_0$ и $J_1$ – две $T^n$-эквивариантные комплексные структуры на расслоении $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$, согласованные с инвариантной метрикой $g$ и ориентацией $M$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- *$J_0$ и $J_1$ совпадают на $\pi^{-1}(sk_0(P))$;*
- *$J_0$ и $J_1$ индуцируют одну полиориентацию на $M$;*

$\square$ В каждой неподвижной точке действия $x \in M$ имеется ортогональное разложение касательного пространства $\tau(M)|_x$ в прямую сумму $V_1, \dots, V_n$ двумерных $T^n$-инвариантных пространств. Каждое из них является нормальным к соответствующему характеристическому подмногообразию. Поэтому ясно, что второе условие влечет первое. Если же $J_0$ и $J_1$ совпадают на $\pi^{-1}(sk_0(P))$, то тогда индуцированные ориентации на нормальных расслоениях к характеристическим подмногообразия также совпадают. Действительно, эти ориентации заданы всюду (так как и $J_0$, и $J_1$ всюду определены) и совпадают между собой в неподвижных точках. $\square$

## 5.2 Построение и свойства различающей коцепи

**Лемма 5.4** *Пусть $J_0$ и $J_1$ – две $T^n$-эквивариантные комплексные структуры на расслоении $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$, $l > 0$, совпадающие на $\pi^{-1}(sk_0(P))$ и согласованные с инвариантной метрикой $g$. Тогда $J_0$ и $J_1$ гомотопны в классе $T^n$-эквивариантных структур, согласованных с $g$.*

$\square$ Доказательство мы проведем в несколько шагов. Общая схема аналогична доказательству теоремы 2.1: в предположении, что $J_0$ и $J_1$ гомотопны на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$, определяется различающая коцепь $d^i(J_0, J_1) \in \pi_i(\mathbb{J}(\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}|_x))$, где $x \in P$ – произвольная точка (от выбора точки $x$ ничего не зависит, как будет показано в лемме 5.6). Свойства коцепи $d^i(J_0, J_1)$ аналогичны свойствам коцепи $\sigma^i_J$, рассмотренной нами выше.

Структура $J$ на $\tau(M_G) \oplus \mathbb{R}^{2l}\big|_{\pi^{-1}(Int\,G)}$ называется *согласованной с $o$*, если $J$ индуцирует полиориентацию на расслоениях $\xi_1, \dots, \xi_{n-i} \subset \tau(M_G)$, совпадающую с полиориентацией, индуцированной $o$.

**Лемма 5.5** *Пусть $x \in \iota(Int\,G)$ – некоторая точка. Пространство $T^n$-эквивариантных почти комплексных структур $J$ на $\tau(M_G) \oplus \mathbb{R}^{2l}\big|_{\pi^{-1}(Int\,G)}$, согласованных с метрикой $g$ и полиориентацией $o$, гомеоморфно* $\mathrm{Map}(Int\,G, \mathbb{J}(\tau(M_G)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l}))$, *$x \in G$ – некоторая точка.*

$\square$ Доказательство аналогично лемме 4.3. Единственная модификация состоит в том, что тор $T^{n-i}$, являющийся стационарной подгруппой $M_G$, действует на слагаемом $\mathbb{R}^{2l}|_{\pi^{-1}(Int\,G)} \subset \tau(M_G) \oplus \mathbb{R}^{2l}|_{\pi^{-1}(Int\,G)}$ тривиально, а тор $T^n/T^{n-i}$ – свободно. $\square$

Отметим, что гомеоморфизм из предыдущей леммы, опять же, зависит не только от точки $x \in \iota(Int\,G)$, но и от выбора тривиализации расслоения $\tau(M_G)|_{\iota(Int\,G)}$ (задающей очевидно, тривиализацию $\tau(M_G) \oplus \mathbb{R}^{2l}\big|_{\iota(Int\,G)}$).

Тривиализуем теперь $\tau(M_G)$ над $\iota(G)$. Тогда структуры $J_0$ и $J_1$ соответствуют некоторым непрерывным отображениям $f_1$, $f_2 : G \to \mathbb{J}(\tau(M_G)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l})$. По условию, на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ структуры $J_0$ и $J_1$ эквивариантно гомотопны. Гомотопия задает отображение $f_h : \partial G \times I \to \mathbb{J}(\tau(M_G)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l})$, поскольку пространство $\tau(M_G)|_y \oplus \mathbb{R}^{2l}$ должно быть $J$-инвариантным для любой точки $y \in \iota(\partial G) \subset \iota(G)$ и $T^n$-эквивариантной структуры $J$ на $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}\big|_{\iota(G)}$. Мы можем склеить отображения $f_1$, $f_2$ и $f_h$ в одно корректно определенное отображение $f_G : S^i \to \mathbb{J}(\tau(M_G)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l})$.

Аналогично тому, как это было сделано ранее, показывается, что гомотопический класс отображения $f_G$ не зависит от выбора точки $x \in \iota(G)$ и тривиализации расслоения $\tau(M_G)$ над $\iota(G)$. Более того, в силу леммы 5.5 класс $[f_G]$ равен нулю, если и только если гомотопия между $J_0$ и $J_1$ продолжается на $M_G$ в классе эквивариантных структур.

Определим различающую коцепь $d^i(J_0, J_1) \in C^i(\pi_i(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l})))$ по правилу $d^i(J_0, J_1)(G) = [f_G]$.

Нужно показать, что $d^i(J_0, J_1)$ действительно является клеточной коцепью.

**Лемма 5.6** *Пусть $x \in \iota(G)$, $y \in \iota(P)$, $j \leqslant 2i + 2l - 2$, $i = \dim G, l > 0$. Тогда гомотопические группы $\pi_j(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l}))$ и $\pi_j(\mathbb{J}(\tau(M)|_y \oplus \mathbb{R}^{2l}))$ канонически изоморфны.*

□ Доказательство этой леммы полностью аналогично доказательству леммы 4.5. Искомый изоморфизм является композицией изоморфизмов вида $c_* : \pi_j(\mathbb{J}(\tau(M_Q)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l})) \to \pi_j(\mathbb{J}(\tau(M_L)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l}))$, где $Q \subset L$ – грани $P$, $\dim L = \dim Q + 1$. То, что $c_*$ – изоморфизм, следует из леммы 4.6. Доказательство независимости искомого изоморфизма от цепочки вложенных граней, соединяющих $G$ и $P$, совпадает с доказательством леммы 4.7. □

**Лемма 5.7** $\delta d^i(J_0, J_1) = 0$.

□ Достаточно доказать следующее утверждение. Пусть $\dim Q = i+1$, $\partial Q = G_1 + \ldots + G_k$. Тогда $\sum\limits_{G \subset \partial Q} d^i(J_0, J_1)(G) = 0$.

Прежде всего отметим, что если $i = 1$, то коцепь $d^i(J_0, J_1)$ принимает значения в нулевой группе и условие леммы выполнено. Поэтому далее можно считать, что $i > 1$.

Рассмотрим пространство

$$Y = \{0\} \times \partial Q \cup \{1\} \times \partial Q \cup I \times (\partial Q \cap sk_{i-1}(P))$$

и его подпространства

$$Y_j = \{0\} \times G_j \cup \{1\} \times G_j \cup I \times \partial G_j.$$

Очевидно, $Y_j$ гомеоморфно $S^i$.

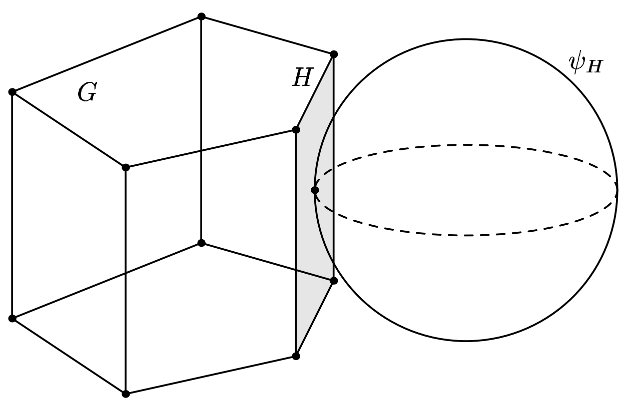
Мы можем построить непрерывное отображение $h : Y \to \mathbb{J}(\tau(M_Q)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l})$, $x \in \iota(Q)$ такое, что $[h|_{Y_j}] = [f_{G_i}]$, используя то, что на $\iota(Q \cap sk_{i-1}(P))$ гомотопия между структурами $J_0$ и $J_1$ уже задана.

Отметим, что фиксировав тривиализацию расслоения $\tau(M_Q)$ над $\iota(Q)$, мы можем отождествить между собой пространства $\mathbb{J}(\tau(M_Q)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l})$ для всех $x \in \iota(Q)$.

Заметим теперь, что ограничения построенного отображения $h$ на $\{0\} \times \partial Q$ и $\{1\} \times \partial Q$ гомотопны нулю, так как структуры $J_0$ и $J_1$ по условию обе продолжаются на $M_Q$. Отсюда следует, что сумма классов $\sum [h|_{Y_j}]$ также гомотопна нулю – доказательство завершается аналогично доказательству леммы 4.8. $\square$

**Лемма 5.8** *Предположим, что $d^i(J_0, J_1) = \delta\beta$, $i + 2l \geqslant 4$. Тогда можно изменить уже построенную гомотопию на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P) \setminus sk_{i-2}(P))$ так, чтобы коцепь $d^i(J_0, J_1)$ стала нулевой.*

$\square$ Пусть $G$ – $i$-мерная грань, $H \subset \partial G$, $\dim H = i - 1$. Поскольку $i + 2l \geqslant 4$, $i \leqslant 2i + 2l - 4$, поэтому изоморфизм $c_*^{-1} : \pi_i(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l})) \to \pi_i(\mathbb{J}(\tau(M_H)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l}))$, $x \in H$, корректно определен в силу леммы 4.6.




Так как гомотопия уже задана на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$, для грани $H$ определено отображение $h_H : I \times Int\, H \to \mathbb{J}(\tau(M_H)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l})$, задающее эту гомотопию. Рассмотрим произвольное отображение $\psi_H : S^i \to \mathbb{J}(\tau(M_H)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l})$, $y \in H$ – некоторая точка, такое, что $[\psi_H] = [-c_*^{-1}(\beta(H))]$. "Подкрутим" теперь отображение $h_H$ на $\psi_H$, аналогично тому, как это было сделано в доказательстве леммы 4.10. Тогда для каждой $i$-мерной грани

$G$ значение $d^i(J_0, J_1)(G)$ изменится на сумму $\sum\limits_{H \subset \partial G} (-\beta(H))$. Поскольку $d^i(J_0, J_1) = \delta\beta$, лемма доказана. □

## 5.3 Доказательства следствий

**Следствие 2.4** *Пусть $J_0$ и $J_1$ – две $T^n$-эквивариантные почти комплексные структуры на квазиторическом многообразии $M$, согласованные с одной полиориентацией $o$. Тогда $J_0$ и $J_1$ гомотопны в классе неэквивариантных почти комплексных структур на $M$.*

□ Из теоремы 2.2 следует, что и $J_0$, и $J_1$ эквивалентны канонической стабильно комплексной структуре, построенной по полиориентации $o$. Следовательно, $J_0$ и $J_1$ стабильно эквивалентны между собой.

Структуры $J_0$ и $J_1$ соответствуют отображениям $f_0, f_1 : M \to BU(n)$ в классифицирующее пространство $BU(n)$ $n$-мерных комплексных векторных расслоений. Если $i : BU(n) \to BU(n+l)$ – стандартное вложение, то отображения $i \circ f_0$ и $i \circ f_1$ должны быть гомотопны. Вложение $i$ эквивалентно расслоению гомотопических типов $BU(n) \to BU(n+l)$ со слоем $U(n+l)/U(n)$, гомотопические группы которого тривиальны до размерности $2n$ включительно ([5]). Поэтому задача построения гомотопии между $f_0$ и $f_1$ эквивалентна задаче построения гомотопии между сечениями расслоения над $M$, индуцированного с $i$. Поскольку $\dim M = 2n$ и $\pi_j(U(n+l)/U(n)) = 0$ при $j \leqslant 2n$, такая гомотопия существует. □

Отметим, что не любая почти комплексная структура на квазиторическом многообразии $M^{2n}$ обязана быть эквивалентна некоторой $T^n$-эквивариантной. Уже в размерности 4 можно привести контрпример, используя теорему Ву ([1]).

Рассмотрим многообразие $\mathbb{C}P^2 \# 4\overline{\mathbb{C}P^2}$. Его форма пересечений, очевидно, диагональна и может быть задана с помощью образующих: $x^2 = 1, y_1^2 = y_2^2 = y_3^2 = y_4^2 = -1$. В силу теоремы Ву, число почти комплексных структур на $\mathbb{C}P^2 \# 4\overline{\mathbb{C}P^2}$ равно числу классов, в квадрате равных 5. Таких классов ровно шестнадцать: они имеют вид $\pm 3x \pm 2y_i) \in H^2(\mathbb{C}P^2 \# 4\overline{\mathbb{C}P^2}, \mathbb{Z})$, $y = 1, \ldots, 4$.

С другой стороны, поскольку на любом четырехмерном квазиторическом многообразии ровно четыре положительных полиориентации, число различных $T^n$-эквивариантных структур на нем, которые попарно неэквивалентны, в силу следствия 2.4 заведомо не более четырех.

Этот пример показывает, что конструкция "усреднения" почти комплексной структуры по орбитам действия тора – если бы ее удалось как-то провести – не может быть использована для доказательства теоремы 2.1: не любая почти комплексная структура эквивалентна эквивариантной.

Перейдем теперь к исследованию множества $T^n$-эквивариантных почти комплексных структур с точностью до эквивариантной гомотопии.

**Следствие 2.5** *Пусть $J_0$ и $J_1$ – две $T^n$-эквивариантные почти комплексные структуры на квазиторическом многообразии $M$, согласованные с одной полиориентацией $o$ и совпадающие на $\pi^{-1}(sk_2(P^n))$. Тогда $J_0$ и $J_1$ гомотопны в классе эквивариантных почти комплексных структур на $M$.*

□ Проследим, как изменится доказательство теоремы 2.2, если указать в условии случай $l = 0$ – случай, соответствующий почти комплексным структурам. Единственное условие, которое могло бы быть нарушено – это условие $i + 2l \geqslant 4$ в доказательстве леммы 5.8. Из того, что $J_0$ и $J_1$ совпадают на $\pi^{-1}(sk_2(P^n))$ следует, что $i \geqslant 3$. В случае $i = 3$, $l = 0$ соответствующая группа коэффициентов равна $\pi_3(SO(3)/U(3))$ и является стабильной. В работе [17] показано, что эта группа тривиальна. □

**Следствие 2.6** *Множество структур на $M^{2n}$, рассматриваемых с точностью до эквивариантной гомотопии и согласованных с данной положительной полиориентацией, может быть неканонически отождествлено с $\mathbb{Z}^{f_1(P)-f_0(P)+1}$. Здесь $f_1(P)$ – число ребер, $f_0(P)$ – число вершин многогранника $P$.*

□ Поскольку полиориентация положительна, на $M^{2n}$ есть хотя бы одна $T^n$-эквивариантная почти комплексная структура $J_0$. Предположим, что $J_1$ – другая структура на $M^{2n}$, согласованная с той же полиориентацией. В силу леммы 5.2 мы можем считать, что $J_1$ и $J_2$ согласованы с одной инвариантной метрикой, в силу леммы 5.3 – что $J_1$ и $J_2$ совпадают на $\pi^{-1}(sk_1(P))$. С другой стороны, предыдущее следствие гарантирует, что если $J_0$ и $J_1$ совпадают на $\pi^{-1}(sk_2(P))$, то они эквивариантно гомотопны.

Мы знаем, что препятствующие коцепи $\sigma^2_{J_0}$ и $\sigma^2_{J_1}$ обе являются нулевыми. Поэтому различающая коцепь $d^2(J_0, J_1)$ является коциклом. С другой стороны, если фиксировать структуру $J_0$ и некоторый коцикл $\beta \in C^2(P, \pi_2(SO(4)/U(2))) = C^2(P, \mathbb{Z})$, то в силу леммы 4.10 можно изменить структуру $J_0$, "подкрутив" соответствующие отображения двумерных граней $G_j$ в $\mathbb{J}(\tau(M_{G_j}))$ на гомотопические классы $\beta(G_j)$. Условие $\delta\beta = 0$, гарантирует то, что препятствующая коцепь останется нулевой.

Это означает, что после того, как мы фиксировали структуру $J_0$, искомое множество всех структур может быть отождествлено с группой $\operatorname{Ker}\delta_2$, где $\delta_2 : C^2(P,\mathbb{Z}) \to C^3(P,\mathbb{Z})$ – стандартный дифференциал в коцепном комплексе. Группа $\operatorname{Ker}\delta_2$ – свободная абелева. Поскольку $P$ ацикличен как цепной комплекс, размерность этой группы легко вычисляется – она равна $f_1(P) - f_0(P) + 1$. □

**Следствие 2.7** *На любом квазиторическом многообразии $M^{2n}$, $n > 1$ с положительной полиориентацией существует бесконечное количество эквивариантно негомотопных друг другу $T^n$-эквивариантных почти комплексных структур.*

□ Поскольку $f_1(P) = \frac{n}{2} f_0(P)$, имеем $f_1(P) - f_0(P) + 1 = f_0(P)\frac{n-2}{2} + 1$. Это число всегда положительно при $n > 1$. □

В качестве простейшего иллюстрирующего примера мы можем рассмотреть многообразие $\mathbb{C}P^2$. На нем имеется бесконечно много попарно эквивариантно негомотопных структур, которые становятся эквивалентными, если разрешить неэквивариантную гомотопию.

# 6 Связь с комбинаторикой многогранника. Инвариант $i(P)$

Теорема 2.1 показывает, что существование $T$-эквивариантной почти комплексной структуры на полиориентированном квазиторическом многообразии $M^{2n}$ равносильно положительности его полиориентации. Предположим теперь, что полиориентация на $M^{2n}$ не является положительной. Верно ли, что можно всегда изменить ориентации характеристических подмногообразий так, чтобы получить положительную полиориентацию? Ответ на этот вопрос отрицательный, как показывает пример многообразия $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$. Более того, имеет место следующее утверждение.

**Предложение 6.1** *Для каждого целого положительного числа $n \geqslant 2$ существует квазиторическое многообразие $M^{2n}$, не обладающее ни одной положительной полиориентацией (и следовательно, не допускающее никакой $T^n$-эквивариантной почти комплексной структуры).*

□ Рассмотрим многогранник $P = \Delta^{n-1} \times I$ и построим над ним характеристическую функцию $\lambda_n$, для которой знаки всех вершин, кроме одной, положительны. Это несложно сделать: достаточно рассмотреть матрицу размера $n \times (n+2)$, имеющую вид единичной матрицы, к которой приписаны два столбца – один целиком состоящий из минус единиц, во втором минус единицы стоят на всех позициях, кроме одной, где стоит единица.

Докажем индукцией по $n$, что на рассмотренном многообразии нельзя сменить полиориентацию так, чтобы получить во всех вершинах одинаковые знаки. Для $n = 2$ утверждение верно, так как многогранник $P$ является квадратом, и число отрицательных знаков при любой замене полиориентации будет оставаться нечетным. Отметим, что случай $n = 2$ соответствует многообразию $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$.

Сведем теперь задачу для функции $\lambda_n$ к $\lambda_{n-1}$ по индукции. Предположим, что удалось изменить ориентации некоторых характеристических многообразий на $P$ так, что знаки всех вершин стали одинаковыми. Пусть $v$ – та единственная вершина, знак которой изначально был отрицателен. Назовем гипергрань отрицательной, если ее новая ориентация не совпадает с прежней.

Если $w \in P$ – некоторая вершина, то знак $w$ должен был измениться, если к $w$ примыкает нечетное число отрицательных гиперграней.

Рассмотрим теперь произвольную гипергрань $F \subset P$ вида $\Delta^{n-2} \times I$, содержащую вершину $v$. Назовем теперь гипергрань $G \subset F$ (являющуюся гранью коразмерности 2 в $P$) отрицательной, если $G$ является в $P$ пересечением $F$ с отрицательной гипергранью. Теперь рассмотрим саму грань $F = \Delta^{n-2} \times I$ как многогранник и заметим, что четность числа отрицаьельных граней, примыкающих к $v$ и к любой другой вершине, различны.

Получаем, что для многогранника $F$ и характеристической функции $\lambda_{n-1}$ можно так поменять ориентации характеристических подмногообразий, что все знаки станут одинаковы. □

**Проблема 6.2** *Найти эффективный критерий существования положительной полиориентации на квазиторическом многообразии. Под эффективностью понимается полиномиальная сложность соответствующего алгоритма по числу гиперграней многогранника (и по другим компонентам $f$-вектора).*

Предположим теперь, что на квазиторическом многообразии $M^{2n}$ есть хотя бы одна положительная полиориентация $o$. Если $M^{2n}$ с полиориентацией $o$ соответствует паре $(P, \Lambda)$, то тогда определен гомоморфизм

$$\phi_P : \mathbb{Z}_2^{m+1} \to \mathbb{Z}_2^l,$$

где $m$ – число гиперграней, $l$ – число вершин $P$ (мы предполагаем, что оба множества упорядочены). Гомоморфизм $\phi_P$ устроен очень просто: каждой полиориентации, множество которых мы можем отождествить с группой $\mathbb{Z}_2^{m+1}$, соответствует $l$-мерный вектор знаков вершин $P$. Ядро этого гомоморфизма соответствует положительным полиориентациям $M^{2n}$. Обозначим его размерность за $i(P)$. Это – комбинаторный инвариант многогранника $P$.

Из доказанного следствия о неэквивариантной эквивалентности структур на $M^{2n}$ вытекает следующее утверждение.

**Следствие 6.3** *Число $T^n$-эквивариантных почти комплексных структур на многообразии $M^{2n}$, задаваемом комбинаторными данными $(P, \Lambda)$, не превосходит $2^{i(P)}$. Структуры здесь рассматриваются с точностью до гомотопии, не обязательно являющейся эквивариантной.*

Неравенство в следствии нестрогое, поскольку структуры, соответствующие различным полиориентациям, могут также быть неэквивариантно эквивалентны. Отметим, что необходимым и достаточным условием их совпадения является совпадение классов Черна соответствующих структурам комплексных расслоений. Это вытекает из того, что многообразие $M^{2n}$ имеет клетки лишь в четных размерностях, и характер Черна, следовательно, определяет мономорфное вложение комплексного $K$-функтора $M^{2n}$ в пространство четных рациональных когомологий.

При $n = 2$, очевидно, $i(P)$ всегда равно 2, поскольку $P$ – многоугольник. Уже в случае $n = 3$ вычисление инварианта $i(P)$ представляет интерес.

**Предложение 6.4** *Если $m$ – число гиперграней $P$, то $i(P) < m - \log_2(m) - 1$.*

□ Это следует из того, что образ $\phi_P$ всегда содержит больше, чем $2m$ элементов. Последнее нетрудно проверить явно. □

**Предложение 6.5** *Пусть $P'$ – многогранник, полученный из многогранника $P$ срезанием вершины $v \in P$. Тогда*

- *$i(P') = i(P) + 1$, если вектор $\bar{v} \in \mathbb{Z}^l$ с минус единицей на месте $v$*

*и единицами на местах остальных вершин лежит в образе $\phi_P$;*

- $i(P') = i(P)$ *в противном случае.*

□ Пусть $x \in \mathbb{Z}_2^{m+2}$ – элемент ядра гомоморфизма $\phi_{P'}$ ($m$ – число гиперграней $P$). Обозначим за $F \subset P'$ гипергрань, образовавшуюся после срезания $v$. Имеются очевидные гомоморфизмы $s : \mathbb{Z}_2^{m+1} \to \mathbb{Z}_2^{m+2}$ и $s' : \mathbb{Z}_2^{m+2} \to \mathbb{Z}_2^{m+1}$, являющиеся, соответственно, вложением и проекцией на подпространство.

Назовем гипергрань в $P'$ отрицательной, если на соответствующей позиции в векторе $x$ стоит минус единица. Все гиперграни в $P'$, смежные с $F$, либо одновременно отрицательны, либо нет. Возможны два различных случая: когда их знак совпадает со знаком $F$ и когда это не так.

Первый случай отвечает тому, что вектор $s'(x)$ лежит в ядре $\phi_P$. Второй – что $\phi_P(s'(x)) = \bar{v}$. С другой стороны, можно явно проверить, что любому вектору из $\operatorname{Ker}\phi_P$ или полного прообраза $\phi_P^{-1}(\bar{v})$ (если он непуст) можно сопоставить вектор из $\operatorname{Ker}\phi_{P'}$, задав нужным образом знак гиперграни $F$. □

**Предложение 6.6** *Существует бесконечное семейство трехмерных простых многогранников $P_m$, $m \geqslant 4$, таких, что $i(P_m) = [\frac{m-2}{2}]$ (число гиперграней $P_m$ равно $m$).*

□ Искомое семейство многогранников строится по индукции:

$P_4$ – симплекс с вершинами $A$, $B$, $C$, $D$;

$P_5$ – трехгранная призма, полученная из $P_4$ срезанием вершины $A$;

$P_m$ получается из $P_{m-1}$ путем срезания смежной с $B$ вершины на гиперграни, образовавшейся после срезания вершины у $P_{m-2}$.

Для доказательства того, что $i(P_m) = [\frac{m-2}{2}]$, воспользуемся предыдущим утверждением. Достаточно проверить явно, что для четных $m$ существует замена ориентаций гиперграней, делающая выделенную вершину отрицательной, а при нечетных $m$ такой замены нет. Это – комбинаторное рассуждение, которое доказывается перебором случаев. □

# 7 Характеристические числа

## 7.1 Многообразия без действия тора

Вопрос о том, какие характеристические числа в принципе достижимы на данном классе многообразий ("география характеристических чисел"), хорошо известен. Мы будем иметь дело исключительно с характеристическими классами и числами Черна. Для их определения необходимо, чтобы многообразие было гладким и замкнутым, а в его касательном расслоении была введена комплексная, почти комплексная или стабильно комплексная структура.

Наиболее общим классом является класс многообразий со стабильно комплексной структурой в касательном расслоении, порождающий кольцо комплексных кобордизмов.

При помощи методов спектральной последовательности Адамса было доказано ([15], [13]), что это кольцо изоморфно $\mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots]$, где $a_1, a_2, \ldots$ – классы кобордизмов некоторых стабильно комплексных многообразий вещественной размерности $2, 4, \ldots$ соответственно. В частности, любое нечетномерное стабильно комплексное многообразие комплексно кобордантно нулю.

Основное утверждение, связывающее теорию комплексных кобордизмов с характеристическими числами, таково.

**Теорема 7.1** *([15],[13]). Два стабильно комплексных многообразия комплексно кобордантны, если и только если их наборы характеристических чисел совпадают.*

При этом не каждый набор целых чисел может служить набором характеристических чисел некоторого стабильно комплексного многообразия – существуют различные ограничения на их делимость. Например, в вещественной размерности 2 единственное характеристическое число $c_1(M)$ обязано быть четным. В вещественной размерности 4 сумма характеристических чисел $c_1^2(M)$ и $c_2(M)$ обязана делиться на 12 – это вытекает из целочисленности рода Тодда, о котором мы еще скажем ниже.

Гораздо интереснее задача становится, если ограничить ее на класс неособых комплексных алгебраических многообразий. Если дополнительно потребовать связность многообразия, то уже в комплексной размерности 1 появляется новое ограничение: теперь $c_1(M) \leqslant 2$.

В комплексной размерности 2 также имеется ограничение – неравенство Богомолова-Мияока-Яо $c_1(M)^2 \leqslant 3c_2(M)$ для связных комплексных поверхностей.. Обобщение этого неравенства на высшие размерности выглядит следующим образом ([14], стр. 376):

$$(-1)^n c_2(M) c_1(M)^{n-2} \geqslant \frac{(-1)^n n}{2(n+1)} c_1(M)^n$$

Тем не менее, полное описание множества характеристических чисел связных алгебраических многообразий до сих пор не получено. Эта задача известна как проблема Хирцебруха.

Если же убрать требование связности алгебраического многообразия, то в этом случае все ограничения, кроме делимостей, пропадают.

**Предложение 7.1** *Набор чисел Черна любого стабильно комплексного многообразия является также и набором чисел Черна некоторого неособого комплексного алгебраического многообразия, возможно, несвязного.*

Доказательство можно найти в [16]. Оно существенно опирается на следующий результат Милнора, вытекающий из свойств гиперповерхностей $H_{r,t}$ ([15]).

**Теорема 7.2** *Набор полиномиальных образующих в кольце комплексных кобордизмов может быть выбран в классе несвязных комплексных алгебраических многообразий.*

Отсюда очевидно следует тот факт, что любой класс комплексных кобордизмов представим почти комплексным многообразием, не обязательно связным.

**Теорема 7.3** *Любой класс комплексных кобордизмов вещественной размерности более трех представим связным почти комплексным многообразием.*

Доказательство можно найти в работе [18]. Основная часть – доказательство существования операции "суммы" в классе почти комплексных многообразий. Более точно, имеет место следующее утверждение.

**Предложение 7.4** *Пусть $M^{2n}$ и $N^{2n}$ – почти комплексные многообразия. Тогда многообразие $X^{2n} = M^{2n} \# S^2 \times S^{2n-2} \# N^{2n}$ также допускает почти комплексную структуру, причем соответствующий ей класс комплексных кобордизмов равен сумме классов $[M]$ и $[N]$.*

Доказательство последнего утверждения основано на теории препятствий.

## 7.2 Полиориентированные квазиторические многообразия

Онсовной результат, связывающий теорию квазиторических многообразий и характеристических чисел, был получен в работе [11].

**Теорема 7.5** *Любой класс комплексных кобордизмов в размерности более двух реализуется квазиторическим многообразием, стабильно комплексная структура на котором определена его полиориентацией.*

Доказательство состоит из двух основных частей:

1. Конструкция эквивариантной связной суммы ([6],[11]). Пусть $M_1$ и $M_2$ – квазиторические многообразия, $P_1$ и $P_2$ – соответствующие им простые многогранники. Если $v_1$ и $v_2$ – неподвижные точки действия тора на $M_1$ и $M_2$ соответственно, то тогда определено квазиторическое многообразие $M_1 \#_{v_1 v_2} M_2$, диффеоморфное связной сумме $M_1$ и $M_2$, причем фактор по действию тора изоморфен связной сумме многогранников $P_1$ и $P_2$.

   Более того, полиориентации $M_1$ и $M_2$ допускают продолжение на $M_1 \#_{v_1 v_2} M_2$ – здесь существенно, что знаки неподвижных точек $v_1$ и $v_2$ различны. В силу формулы для классов Черна полиориентированного квазиторического многообразия ([10]) мы заключаем, что класс кобордизмов $[M_1 \#_{v_1 v_2} M_2]$ равен сумме классов $[M_1]$ и $[M_2]$.

   Отсюда следует, что множество классов кобордизмов, реализуемое квазиторическими многообразиями, образует подгруппу в кольце $U_*(pt)$. Взятие обратного элемента соответствует обращению ориентации многообразия. Если $M_1$ и $M_2$ – многообразия, все неподвижные точки которых имеют один знак, то для взятия эквивариантной связной суммы можно применить следующий трюк: взять в качестве промежуточного многообразия квазиторическое многообразие $S^2 \times \ldots \times S^2$ с полиориентацией, соответствующей произведению $S^2$ с тривиальной стабильно комплексной структурой. Это многообразие имеет неподвижные точки обоих знаков и кобордантно нулю в $U_*(pt)$.

2. Как известно, система полиномиальных образующих в комплексных кобордизмах может быть описана следующим образом. В каждой размерности соответствующая полиномиальная образующая $a_n$ может быть реализована алгебраическим многообразием, не обязательно связным. Это многообразие является дизъюнктным

объединением некоторого количества проективных пространств $\mathbb{C}P^n$ и гиперповерхностей Милнора $H_{r,t}, r+t=n+1$ ([**?**]). Многообразие $H_{r,t}$ квазиторическим при $r>1, t>1$ не является (см. [10]). Но оказывается, что башня Ботта $B_{r,t}$ допускает отображение степени 1 на $H_{r,t}$ и имеет то же значение "числа Милнора" $s_{(n)}$, что и $H_{r,t}$. Поэтому в каждой размерности $n$ существует представитель, являющийся несвязным объединением квазиторических многообразий. Теперь достаточно применить конструкцию эквивариантной связной суммы.

Таким образом, в размерности больше двух можно наблюдать следующую картину: любой класс кобордизмов реализуется с одной стороны, некоторым полиориентированным квазиторическим многообразием, с другой – связным почти комплексным.

Оказывается, тот факт, что любой класс реализуется почти комплексным квазиторическим многообразием, неверен. Одно из тривиальных ограничений, которое этому препятствует – положительность старшего числа Черна $c_n$. Действительно, для почти комплексных многообразий старшее число Черна совпадает с эйлеровой характеристикой. Эйлерова характеристика квазиторических многообразий совпадает с числом неподвижных точек действия и, следовательно, положительна.

Менее тривиальным ограничением является положительность рода Тодда, которая следует из явных комбинаторных формул, полученных Т.Е.Пановым в работе [8].

Приведем полное описание характеристических чисел почти комплексных квазиторических многообразий в размерности 4.

**Предложение 7.6** *Любая пара целых чисел $(p,q)$, удовлетворяющая условию делимости $12|(p+q)$ и неравенству $12-q \leqslant p \leqslant 5q-6$, является парой характеристических чисел $(c_1^2(M), c_2(M))$ некоторого почти комплексного четырехмерного квазиторического многообразия $M$.*

□ Докажем сперва необходимость обоих условий. Пусть $b_2^+$ и $b_2^-$ – число положительных и отрицательных квадратов в диагонализации формы пересечений $M$. Поскольку $M$ односвязно, имеем

$$\chi(M) = 2 + b_2^+ + b_2^-$$

$$\mathrm{sign}(M) = b_2^+ - b_2^-$$

Получаем, что $td(M) = \frac{1+b_2^+}{2}$, откуда следует, что на полиориентированном квазиторическом многообразии число $b_2^+$ нечетно. В частности, $b_2^+ \geqslant 1$. Кроме того, очевидно, $b_2^- \geqslant 0$. Оба числа $\chi(M)$ и $\mathrm{sign}(M)$ выражаются через числа Черна $M$ следующим образом: $\chi(M) = c_2(M)$, $\mathrm{sign}(M) = \frac{c_1^2(M)-2c_2(M)}{3}$. Отсюда следует, что $c_1^2(M) + c_2(M) \geqslant 12$ и $c_1^2(M) \leqslant 5c_2(M) - 6$. Условие делимости – это в точности условие целочисленности рода Тодда.

Достаточность удобнее всего доказывать в терминах чисел $b_2^+$ и $b_2^-$. Прежде всего отметим, что условие целочисленности рода Тодда в точности эквивалентно тому, что число $b_2^+$ нечетно. Нужно теперь доказать, что любая пара целых чисел $(a, b)$, где $b$ – положительное, $a$ – нечетное положительное, может служить парой чисел $(b_2^+, b_2^-)$ для некоторого четырехмерного почти комплексного квазиторического многообразия.

Для случая $b_2^- = 0$ искомые многообразия являются связной суммой нечетного числа $\mathbb{C}P^2$. Действительно, многообразие $\mathbb{C}P^2$ допускает положительную полиориентацию, так как является торическим, а многообразие $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ – полиориентацию, в которой знаки всех вершин, кроме одной, положительны. Отсюда при помощи конструкции эквивариантной связной суммы получаем, что связная сумма нечетного числа $\mathbb{C}P^2$ допускает положительную полиориентацию.

От квазиторического многообразия, соответствующего паре $(b_2^+, 0)$, можно перейти к многообразию с $(b_2^+, b_2^-)$ при помощи $(b_2^-)$ операций раздутия неподвижной точки. Заметим, что раздутие – локальная операция, и для ее проведения достаточно ввести $T^2$-эквивариантную комплексную структуру в окрестности неподвижной точки действия. На топологическом же уровне раздутие четырехмерного многообразия соответствует взятию связной суммы с $\overline{\mathbb{C}P^2}$ – это завершает доказательство. □

# Литература


[1] W.-T. Wu. Sur le classes caractéristique des structures fibros sphériques // Actualites Sci. Industr. 1183 (1952).

[2] E. Thomas. Complex structures on real vector bundles // Amer. J. Math. 1967. V.89. P.887-908.

[3] Г.Бредон. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980.

[4] M. F. Atiyah. Convexity and commuting Hamiltonians // Bull. London Math. Soc. 1982. V.14, 1. P. 1-15.

[5] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.

[6] M. Davis, T. Januskiewicz. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions // Duke Math J. 1991. V.62 N2 P. 417-451.

[7] C.H.Taubes. The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms // Math. Res. Lett. 1994. V.1. P.809-822.

[8] Т.Е.Панов. Роды Хирцебруха многообразий с действием тора // Известия РАН, сер.матем. 2001. Т.65, вып.3. С.123-138.

[9] K.E.Feldman. Hirzebruch genera of manifolds equipped with a Hamiltonian circle action. arXiv:math/0110028v2

[10] В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов, Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: МЦНМО, 2004.

[11] V. Buchstaber, T. Panov, N. Ray. Spaces of Polytopes and Cobordism of Quasitoric Manifolds // Moscow Math. J (2007) V.7 N2.

[12] M. Masuda. Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index // Tohoku Math. J (1999) V.51, p. 237-265.

[13] С. П. Новиков. Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов. Изв. АН СССР. Сер. матем., 31:4 (1967), 855-951.

[14] Международный конгресс математиков в Киото 1990 г.: Избранные доклады (сост. Тихомиров В.М.).

[15] J. Milnor. On the cobordism ring $\Omega^*$ and a complex analogue, I. Amer. J. Math. 82 (1960).

[16] Р. Стонг. Заметки по теории кобордизмов. М.: Мир, 1973 г. 505-521.

[17] W. Massey. Obstructions to the existence of almost complex structures. Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961) 559-564.

[18] H. Geiges. Chern numbers of almost complex manifolds. Proc. AMS, Volume 129, Number 12, Pages 3749-3752.