

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ НА ЧИСЛО ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ В ОБОБЩЁННЫХ УРАВНЕНИЯХ ЛЬЕНАРА НЕЧЁТНОГО ТИПА

Гриша Колоцкий

АННОТАЦИЯ. Мы находим явные верхние оценки на число предельных циклов полиномиальных векторных полей на плоскости специального вида, так называемых обобщённых уравнений Льенара. Основным инструментом служит продолжение отображения Пуанкаре в комплексную область и последующее применение теоремы, связывающей число нулей и рост голоморфной функции [Гуа]. Получаемая оценка трижды экспоненциальна по степени многочленов в обобщённых уравнениях Льенара и дважды экспоненциальна по максимуму модулей коэффициентов многочленов, задающих векторное поле, а также зависит от ещё одного параметра, имеющего прозрачный геометрический смысл.

Ключевые слова и фразы. Предельные циклы, отображение Пуанкаре, уравнения Льенара, обобщённые уравнения Льенара, 16-я проблема Гильберта, проблема Гильберта-Смейла.

Mathematics Subject Classification 2000. Primary 34C07, Secondary 34M10.

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Введение. История проблемы Гильберта-Смейла	2
2.	Формулировка основного результата	3
3.	Схема получения оценок на число предельных циклов	5
4.	Особые точки обобщённых уравнений Льенара	7
5.	Канонический вид обобщённых уравнений Льенара	8
6.	Выталкивающие окрестности бесконечности	8
7.	Свойства C -многочленов и унитарных C -многочленов	11
8.	Глобальная геометрия обобщённых уравнений Льенара	12
9.	Построение оснащённого мешка Бендиксона для обобщённых уравнений Льенара нечётного типа	16
10.	Оценки индекса Бернштейна	19
11.	Окрестность особой точки. Функция Ляпунова	25
12.	Комплексификация отображения Пуанкаре	27
13.	Верхние оценки на число предельных циклов	29

Исследования автора были поддержаны грантами РФФИ 7-01-00017-а и 08-01-00342-а, грантом Президента РФ по поддержке ведущих научных школ No. НШ-3038.2008.1 и грантом Российские Университеты No. РНИ.2.1.1.5055.

14. Благодарности	29
Список литературы	29

1. ВВЕДЕНИЕ. ИСТОРИЯ ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА-СМЕЙЛА

В 1928 году в статье [L] Льенар рассмотрел уравнения вида

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0, \quad (1)$$

где $f(x)$ — это многочлен чётной степени. Эти уравнения возникли в качестве обобщения знаменитого уравнения Ван Дер Поля, подробно исследовавшего случай $f(x) = x^2 - 1$ (1922, [V]). Причём обобщение было не формально-математическим, а естественно возникало из рассмотренного Льенаром нелинейного затухания в электрических цепях.

Дифференциальное уравнение второго порядка (1) эквивалентно дифференциальному уравнению, заданному векторным полем на плоскости с координатами (x, y) :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - yf(x). \end{cases} \quad (2)$$

Преобразование Льенара: $(x, y) \mapsto (x, y + I(x))$, где $I(x) = \int_0^x f(s)ds$, сопрягает систему (2) с системой:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (3)$$

Уравнения Льенара попали в поле зрения специалистов по второй части 16-й проблемы Гильберта (поиск верхних оценок на число предельных циклов полиномиальных векторных полей на плоскости) после исследования Линса Нето, Ди Мелу и Пью (1977, [LMP]), показавших, что отображение Пуанкаре для системы (3), у которой степень многочлена $F(x)$ нечётна, глобально определено и не тождественно. Также ими была решена проблема конечности для таких систем.

Напомним, что проблема конечности (вопрос о конечности числа предельных циклов индивидуального полиномиального векторного поля на плоскости) была решена в полной общности много позднее независимо Ильяшенко (1991, [I1]) и Экалем (1992, [E]).

Также авторы [LMP] оценили число предельных циклов, рождающихся в окрестности единственной особой точки при возмущении центра по линейным членам, и выдвинули гипотезу о том, что число предельных циклов уравнений Льенара нечётной степени $n = 2k + 1$ не превосходит k .

Необходимо отметить, что в 2007 году Дюмортье, Панаццоло и Руссари построили контрпример к гипотезе Линса Нето, Ди Мелу и Пью в статье [DPR]. Они предложили пример уравнений Льенара

(3) нечётной степени $n = 2k + 1$, для которого доказали существование не менее, чем $k + 1$ предельного цикла.

В 1998 году Смейл включил гипотезу Линса Нето, Ди Мелу и Пью в свой список «Математических проблем 21 века» [S], немного ослабив её. Он предположил, что искомое число предельных циклов допускает некоторую полиномиальную оценку (по степени n многочлена $F(x)$).

Первую явную оценку на число предельных циклов в уравнениях Льенара нечётной степени получили Ильяшенко и Панов в 2001 году [IP]. Их оценка (тройная экспонента по n) также зависела от константы C , ограничивающей сверху модуль коэффициентов многочлена $F(x)$ (размера компакта в пространстве параметров). Основная идея Ильяшенко и Панова состояла в том, чтобы локализовать единственное гнездо предельных циклов, продолжить отображение Пуанкаре в комплексную область и применить теорему о нулях и росте голоморфных функций [ГҮа].

Несколько лет спустя Ильяшенко предложил обобщить их с Пановым результат на случай обобщённых уравнений Льенара:

$$\begin{cases} \dot{x} = yH(x) - xF(x), \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (4)$$

Основной результат нашей работы состоит в нахождении верхних оценок на число предельных циклов обобщённых уравнений Льенара нечётного типа. Здесь «нечётный тип» обозначает ненакопление предельных циклов к бесконечности, что является естественным обобщением, иллюстрирующим геометрическое различие фазовых портретов уравнений Льенара нечётной и чётной степеней.

Как и результат Ильяшенко и Панова [IP], наша оценка трижды экспоненциальна по степени многочлена $F(x)$ (мы рассматриваем системы, в которых $\deg H(x) \leq \deg F(x)$) и дважды экспоненциальна по C , максимуму модулей коэффициентов многочленов, задающих векторное поле, а также зависит от положительной константы θ , отделяющей многочлен $H(x)$ от нуля в «оснащённом мешке Бендиксона» — области, содержащей единственное гнездо предельных циклов системы (4).

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим систему, также называемую обобщённым уравнением Льенара:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \tilde{F}(x) - y\tilde{G}(x), \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь \tilde{F} — многочлен степени n , \tilde{G} — многочлен степени не выше $n - 1$.

Предложение 1. Система (5) при условии $\tilde{G}(0) \neq 0$ приводится линейными преобразованиями (и, при необходимости, обращением времени) к **каноническому виду**, т.е. к системе (4), удовлетворяющей условиям:

$$\deg F(x) = n - 1, \quad \deg H(x) \leq n - 1, \quad (6)$$

коэффициент при x^{n-1} многочлена $F(x)$ равен 1.

При этом условие $\tilde{G}(0) \neq 0$ в новых координатах принимает вид $H(0) \neq 0$.

Обозначим через $I(x)$ компоненту рациональной кривой, заданной уравнением $y = x \frac{F(x)}{H(x)}$, содержащую начало координат (т.е. вертикальную изоклину, проходящую через ноль).

Без ограничения общности можно считать, что в системе (4) выполнено: $H(0) > 0$. Действительно, если $H(0) \leq 0$, то у системы (4) нет предельных циклов. См. теорему 4 и рис. 2.

Уравнения *нечётного типа* выделяются следующим требованием: множество значений функции $I(x)$ должно быть всей осью OY . Неформально говоря это означает, что положительная и отрицательная ветви вертикальной изоклины «уходят на разные бесконечности». В противном случае говорят, что система (4) *чётного типа*.

Теорема 1. Пусть $F(x) = x^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} a_j x^j$, $H(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$. Предположим, что все коэффициенты a_j и b_j не превосходят по модулю некоторой константы $C \geq 100$.

Наложим на систему (4) следующее условие общности положения:

$$\text{многочлены } F(x) \text{ и } H(x) \text{ не имеют общих нулей на } \mathbb{R}. \quad (7)$$

Тогда для системы (4) *нечётного типа* при условии (7) существует полоса $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x_- < x < x_+\}$ (здесь x_- и x_+ строятся явно по многочленам $F(x)$ и $H(x)$, подробнее см. ниже), содержащая все предельные циклы системы (4), в которой многочлен $H(x)$ отделён от нуля некоторой константой $\theta \in (0, \frac{1}{2})$:

$$\forall x \in [x_-, x_+] : \quad H(x) \geq \theta.$$

Обозначим через $\#LC(n, C, \theta)$ число предельных циклов системы (4) *нечётного типа*, на которую наложено условие (7). Тогда имеет место оценка:

$$\#LC(n, C, \theta) \leq \exp \left(\exp \left(\frac{8C^{6n^2+12n+11}}{\theta^{6n^2+13n+8}} \right) \right).$$

Отрезок $[x_-, x_+]$ определяется по-разному в следующих четырёх случаях, потому что для системы (4) нечётного типа при условии (7) существует ровно 4 принципиально различных типа глобальной геометрии:

- (1) Многочлен $H(x)$ не имеет вещественных корней и n — нечётно.
- (2) Все корни многочлена $H(x)$ отрицательны.
- (3) Все корни многочлена $H(x)$ положительны и n — нечётно.
- (4) Многочлен $H(x)$ имеет как положительные, так и отрицательные корни.

Пусть r_- - наибольший из отрицательных корней многочлена $H(x)$, а r_+ - наименьший из его положительных корней. Тогда требование нечётности типа влечёт следующие неравенства на F : $F(r_-) > 0$ в случае 2, $F(r_+) < 0$ в случае 3, $F(r_-)$ и $F(r_+)$ разных знаков в случае 4.

Отрезок $[x_-, x_+]$ определяется следующим образом. Положим $S_- = \max(2C|r_-|^n, 2^{n+1}C)$, $S_+ = \max(2Cr_+^n, 2^{n+1}C)$. Тогда x_- — это самый левый корень уравнения $|I(x)| = S_-$ на отрезке $[r_-, 0]$ в случаях 2 и 4, а x_+ — это самый правый корень уравнения $|I(x)| = S_+$ на отрезке $[0, r_+]$ в случаях 3 и 4. В случаях 1 и 2: $x_+ = 16C^2$, в случаях 1 и 3: $x_- = -16C^2$.

Фазовые портреты обобщённых уравнений Льенара (как нечётного, так и чётного типов) изображены на рис. 2—4.

Замечание. Видимо, случаи не общего положения принципиально ни чем не отличаются от разобранных нами. Мы не исследуем их, чтобы не утяжелять и так технически непростую работу.

3. СХЕМА ПОЛУЧЕНИЯ ОЦЕНОК НА ЧИСЛО ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ

В этой работе мы следуем стратегии Ильясенко, применённой ранее в статьях [I2] и [IP]. Она заключается в следующем: сначала локализуются гнёзда предельных циклов из чисто геометрических соображений (качественного анализа векторного поля). Далее, для каждого гнезда строится мешок Бендиксона, оснащённый отрезком D трансверсали, пересекающим все предельные циклы этого гнезда. Таким образом предельные циклы рассматриваемого гнезда — это неподвижные точки отображения Пуанкаре $P(x)$ на D , т.е. нули функции невязки $Q(x) = P(x) - x$. Затем отображение $Q(x)$ аналитически продолжается в комплексную окрестность трансверсали D , после чего оказывается применимой теорема о нулях и росте голоморфных функций [ГҮа]. Мы будем пользоваться версией этой теоремы, приспособленной к оценке числа предельных циклов.

Введём некоторые обозначения: $U^\varepsilon(K)$ — ε -окрестность множества K в произвольном метрическом пространстве, $|D|$ — длина отрезка D . Если отрезок D' содержит отрезок D , то через $d(D, \partial D')$ мы обозначим хаусдорфово расстояние между D и $\partial D'$. В нашей работе метрики в \mathbb{C} и \mathbb{C}^2 задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho(z, w) &= |z - w|, & z, w \in \mathbb{C}; \\ \rho(z, w) &= \max(|z_1 - w_1|, |z_2 - w_2|), & z, w \in \mathbb{C}^2.\end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть Γ — трансверсаль к аналитическому векторному полю v на \mathbb{R}^2 , $D \subset \Gamma$ — отрезок. Пусть P — отображение Пуанкаре для системы

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (8)$$

определённое на D , и $D \subset D' = P(D)$. Предположим, что P может быть аналитически продолжено в $U = U^\varepsilon(D) \subset \mathbb{C}$, $\varepsilon < 1$ и $P(U) \subset U^1(D') \subset \mathbb{C}$. Тогда $\#LC(D)$ — число предельных циклов векторного поля v , пересекающих D , допускает следующую верхнюю оценку:

$$\#LC(D) \leq e^{2|D|\varepsilon^{-1}} \log \frac{|D'| + 2}{d(D, \partial D')}. \quad (9)$$

То же верно, если P заменить на P^{-1} .

Доказательство. См. в [IP]. □

Для применения теоремы 2 необходимо оценить размер комплексной окрестности ε , в которую аналитически продолжается отображение Пуанкаре. Мы применяем для этого следующую теорему, доказанную Ильяшенко и Пановым в [IP].

Теорема 3. Пусть Γ — трансверсаль к аналитическому векторному полю v на \mathbb{R}^2 , $D \subset \Gamma$ — отрезок. Пусть $P : D \rightarrow D'$ — отображение Пуанкаре для системы (8). Для каждого $x \in D$ обозначим через $\varphi_{x,P(x)}$ дугу фазовой кривой системы (8), соединяющую точки x и $P(x)$. Пусть

$$\Omega(D) = \bigcup_{x \in D} \varphi_{x,P(x)},$$

и

$$1 \leq \mu = \max_{U^2(\Omega)} |v|, \quad L = 2\mu. \quad (10)$$

Пусть $t(x)$ — время движения вдоль траектории $\varphi_{x,P(x)}$, и

$$T_{\max} = \max_{x \in D} t(x), \quad T = T_{\max} + 1.$$

Положим

$$\delta \leq e^{-LT}, \quad \lambda = \sqrt{\delta}, \quad \varepsilon = \delta^2. \quad (11)$$

Предположим, что (z_1, z_2) — координаты в \mathbb{C}^2 , ${}^{\mathbb{C}}\Gamma = \{z_1 = 0\}$, $v = (v_1, v_2)$.

Пусть $K \subset D$ — отрезок, $K' = P(K)$, $\Pi_\delta = U^\delta(0) \times U^\lambda(K') \subset \mathbb{C}^2$. Предположим, что

$$\left| \frac{v_2}{v_1} \right| \leq \mu \text{ в } \Pi_\delta. \quad (12)$$

Тогда отображение Пуанкаре $P : K \rightarrow K'$ может быть аналитически продолжено в $U^\varepsilon(K) \subset {}^c\Gamma$ и $P(U^\varepsilon(K)) \subset U^1(K')$.

Как показано в следующем параграфе, у обобщённых уравнений Льенара могут быть предельные циклы только в случае, когда особая точка единственна. В каноническом виде её координаты: $(0, 0)$. Соответственно, единственное гнездо предельных циклов условно можно разделить на две части: одна — окрестность начала координат, а другая — окрестность бесконечности, т.н. *циклы большой амплитуды*. В нашей работе мы исследуем только тот случай, когда циклов большой амплитуды нет — это и называется *нечётными типом*.

В параграфе 9 мы начинаем строить оснащённый мешок Бендиксона для всех видов обобщённых уравнений Льенара, оценивая сверху размер области определения обратного отображения Пуанкаре $|D'|$. В параграфе 10 мы достраиваем оснащённый мешок Бендиксона и оцениваем сверху индекс Бернштейна $\log \frac{|D'|+2}{d(D, \partial D')}$ из теоремы о нулях и росте. После этого остаётся только оценить ширину комплексной области ε , в которую продолжается отображение Пуанкаре, т.е. убедиться, что выполнены все условия теоремы 3. Этому посвящён параграф 12. В качестве подготовки к параграфу 12 в параграфе 11 мы исследуем поведение траекторий вблизи начала координат. Наконец, в параграфе 13 мы «смешиваем все ингредиенты, полученные ранее», т.е. получаем окончательные верхние оценки на число предельных циклов обобщённых уравнений Льенара нечётного типа.

4. ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОБОБЩЁННЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЬЕНАРА

Особые точки системы (5) задаются системой:

$$\begin{cases} x = 0, \\ \tilde{F}(0) = y(1 - \tilde{G}(0)). \end{cases}$$

Возможны 3 случая:

- $\tilde{G}(0) \neq 1$ — особая точка единственна: $\left(0, \frac{\tilde{F}(0)}{1-\tilde{G}(0)}\right)$,
- $\tilde{G}(0) = 1, \tilde{F} \neq 0$ — особых точек нет,
- $\tilde{G}(0) = 1, \tilde{F} = 0$ — прямая особых точек: $x = 0$.

Замечание. *Предельные циклы у системы (5) могут быть только в случае:*

$$\tilde{G}(0) \neq 1. \quad (13)$$

Поэтому далее в нашей работе условие (13) полагается выполненным. Этому условия достаточно для приводимости системы (5) к каноническому виду, что сформулировано выше, а доказано ниже.

5. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ОБОБЩЁННЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЬЕНАРА

Доказательство предложения 1. Рассмотрим линейную замену переменных:

$$x \rightarrow ax + b, y \rightarrow cy + d. \quad (14)$$

Тогда $\dot{x} \rightarrow a\dot{x}$, $\dot{y} \rightarrow c\dot{y}$. После замены (14) система (5) примет вид:

$$\begin{cases} a\dot{x} = cy + d - \tilde{F}(ax + b) - (cy + d)\tilde{G}(ax + b), \\ c\dot{y} = -ax - b. \end{cases} \quad (15)$$

Чтобы система (15) была обобщённым уравнением Льенара необходимо: $b = 0$, $c = a$. При этих условиях (15) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{a} \left(d - \tilde{F}(ax) - d\tilde{G}(ax) \right) - y\tilde{G}(ax), \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Положим $\bar{G}(x) = \tilde{G}(ax)$, $\bar{F}(x) = \frac{1}{a} \left(d - \tilde{F}(ax) - d\tilde{G}(ax) \right)$. В виду условия (13) можно подобрать d так, что $\bar{F}(0) = 0$. А подбором a можно сделать старший коэффициент $\bar{F}(x)$ равным 1 (может ещё понадобится обращение времени и замена $y \mapsto -y$ в пару к нему).

Теперь обозначим $\bar{F}(x) = xF(x)$, $H(x) = 1 - \bar{G}(x)$. Заметим, что $\deg F(x) = n - 1$, $\deg H(x) \leq n - 1$, а коэффициент при старшем члене x^{n-1} у многочлена $F(x)$ равен 1. \square

Замечание. По условию (13): $H(0) \neq 0$. Следовательно, у обобщённых уравнений Льенара в каноническом виде особая точка единственна, её координаты: $(0, 0)$.

6. ВЫТАЛКИВАЮЩИЕ ОКРЕСТНОСТИ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Рассмотрим поведение системы (4) в окрестности бесконечности, для чего перейдём к аффинной карте:

$$(u, v) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x} \right). \quad (16)$$

После замены (16) система (4) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = -\frac{\dot{x}}{x^2} = \frac{xF(x) - yH(x)}{x^2} = u \left(F\left(\frac{1}{u}\right) - vH\left(\frac{1}{u}\right) \right), \\ \dot{v} = -1 + \frac{yxF(x) - y^2H(x)}{x^2} = -1 + v \left(F\left(\frac{1}{u}\right) - vH\left(\frac{1}{u}\right) \right). \end{cases}$$

Сделаем замену времени $t \rightarrow u^{n-1}t$ и положим:

$$\hat{F}(u) = u^{n-1}F\left(\frac{1}{u}\right), \quad \hat{H}(u) = u^{n-1}H\left(\frac{1}{u}\right).$$

Получим новую систему:

$$\begin{cases} \dot{u} = u\left(\hat{F}(u) - v\hat{H}(u)\right), \\ \dot{v} = -u^{n+1} + v\left(\hat{F}(u) - v\hat{H}(u)\right). \end{cases} \quad (17)$$

Линеаризация системы (17) в окрестности особой точки $(u, v) = (0, 0)$ имеет вид: $\dot{u} = u$, $\dot{v} = v$, т.к. свободный член $\hat{F}(u)$ равен 1.

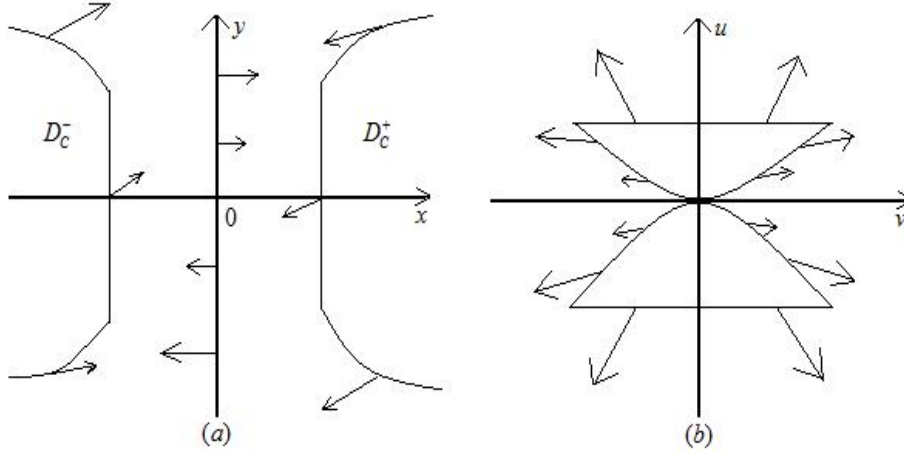


РИС. 1. Выталкивающие окрестности бесконечности (a): в (x, y) -координатах, (b): в (u, v) -координатах.

Напомним, что $F(x) = x^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} a_j x^j$, $H(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$.

Лемма 1. Пусть система (4) удовлетворяет условиям:

$$n - \text{нечётно}, \quad |a_j| \leq C, \quad |b_j| \leq C, \quad C > 2. \quad (18)$$

Тогда множества:

$$\begin{aligned} D_C^+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 16C^2, |y| \leq \sqrt{x}\} \\ D_C^- &= \{(-x, y) \in D_C^+\} \end{aligned} \quad (19)$$

являются **выталкивающими** для системы (4), т.е. векторное поле на их границе направлено наружу.

Доказательство. Поскольку n — нечётно, образ векторного поля (4) под действием замены (16) равняется векторному полю (17),

умноженному на *неотрицательную* функцию. Множества (19) под действие замены (16) переходят в:

$$v^2 \leq |u| \leq a, \quad a = \frac{1}{16C^2}. \quad (20)$$

Поэтому достаточно показать, что область (20) является выталкивающей для векторного поля (17).

Для доказательства того факта, что векторное поле, заданное системой (17), на границе области (20) направлено наружу, продифференцируем функции, задающие куски границы множеств D_C^\pm , в силу системы (4).

На отрезке $u = a$, $|v| \leq \sqrt{a}$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}}{u} &= \hat{F}(u) - v\hat{H}(u) \geq 1 - \sum_{j=1}^{n-1} Ca^j - \sqrt{a} \sum_{j=0}^{n-1} Ca^j > 1 - 2C(a + \sqrt{a}) = \\ &= 1 - \frac{1}{8C} - \frac{1}{2} > 0, \text{ поскольку } C > 2, \sqrt{a} = \frac{1}{4C} \text{ и } \forall k \in \mathbb{N} : \frac{1 - a^k}{1 - a} < 2. \end{aligned}$$

На дуге параболы $u = v^2$, $v \leq \sqrt{a}$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v^2 - u) &= 2v\dot{v} - \dot{u} = \\ &= 2v \left(-v^{2n+2} + v \left(\hat{F}(v^2) - v\hat{H}(v^2) \right) \right) - v^2 \left(\hat{F}(v^2) - v\hat{H}(v^2) \right) = \\ &= v^2 \left(\hat{F}(v^2) - v\hat{H}(v^2) - 2v^{2n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{v^2} \frac{d}{dt}(v^2 - u) &= \hat{F}(v^2) - v\hat{H}(v^2) - 2v^{2n+1} \geq \\ &\geq 1 - \sum_{j=1}^{n-1} C\sqrt{a}^{2j} - \sqrt{a} \sum_{j=0}^{n-1} C\sqrt{a}^{2j} - 2\sqrt{a}^{2n+1} > \\ &> 1 - \frac{1}{8C} - \frac{1}{2} - \frac{2}{4C} > 0, \end{aligned}$$

ввиду того, что $a^n < 1$, и предыдущей выкладки.

На отрезке $u = -a$, $|v| \leq \sqrt{a}$ и на дуге параболы $u = -v^2$, $v \leq \sqrt{a}$ проводятся полностью аналогичные рассуждения.

Из положительности вычисленных производных следует, что векторное поле на границе областей направлено наружу. Лемма доказана. \square

Замечание. Если n — чётно, то D_C^+ остаётся выталкивающей окрестностью бесконечности, а D_C^- становится поглощающей (выталкивающей в обратном времени).

7. СВОЙСТВА C -МНОГОЧЛЕНОВ И УНИТАРНЫХ
 C -МНОГОЧЛЕНОВ

В этом (достаточно техническом) параграфе собраны воедино разнообразные оценки на многочлены из системы (4), которые нам понадобятся в дальнейшем. При первом чтении этот параграф можно смело пропустить.

Определение 1. Многочлен $H(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$ у которого все коэффициенты ограничены по модулю: $|b_j| < C$, где $C > 2$, называется C -многочленом (степени n).

Лемма 2 (Свойства C -многочленов). Пусть $H(x)$ — C -многочлен степени $n - 1$. Тогда выполнены следующие неравенства:

$$|H(x)| < 2C|x|^{n-1}, \quad \text{если } |x| \geq 2. \quad (21)$$

$$|H(x)| < C2^n, \quad \text{если } |x| \leq 2. \quad (22)$$

$$\max_{[0, X]} \left| \frac{d}{dx} H(x) \right| < n^2 C X^{n-2}, \quad \text{если } X \geq 1. \quad (23)$$

$$|zH(z)| < 2C|z|, \quad \text{если } z \in \mathbb{C}, |z| \leq \frac{1}{2}. \quad (24)$$

Доказательство. Пусть $H(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$.

(21): $|H(x)| \leq C \sum_{j=0}^{n-1} |x|^j$, следовательно $|H(x)| \leq C \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}$, но $\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} < 2|x|^{n-1}$ при $|x| \geq 2$, т.к. $2|x|^{n-1} - 1 < |x|^n$.

(22): $|H(x)| \leq C \sum_{j=0}^{n-1} |x|^j \leq C \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = C(2^n - 1) < C2^n$.

(23): $\max_{[0, X]} \left| \frac{d}{dx} H(x) \right| \leq nC(1 + X + X^2 + \dots + X^{n-2}) < n^2 C X^{n-2}$.

(24): $|zH(z)| \leq |z| C \sum_{j=0}^{n-1} |z|^j = C|z| \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|} \leq C|z| \frac{1}{1 - |z|} \leq 2C|z|$, т.к. $1 - |z| \geq \frac{1}{2}$. \square

Определение 2. Многочлен $F(x) = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$ у которого все коэффициенты ограничены по модулю: $|b_j| < C$, где $C > 2$, называется унитарным C -многочленом (степени n).

Замечание. Многочлен $xF(x)$ будет унитарным C -многочленом, если и только если многочлен $F(x)$ является унитарным C -многочленом.

Лемма 3 (Свойства унитарных C -многочленов). Пусть $F(x)$ — унитарный C -многочлен степени $n - 1$ и $F(0) = a_0$. Тогда для

многочлена $G(x) = xF(x)$ выполнены следующие неравенства:

$$\min_{x>0} G(x) \geq -(C+1)^n, \quad (25)$$

$$G(x) > 0, \quad \text{если } x \geq C+1, \quad (26)$$

$$\max_{x \in [0, A]} |G(x)| \leq 2A^n, \quad \text{если } A \geq C+1, \quad (27)$$

$$|G(x)| \geq \frac{1}{2}x^n, \quad \text{если } |x| \geq 2C+1, \quad (28)$$

$$\max_{x \in [0, X]} \left| \frac{d}{dx} G(x) \right| \leq Cn^2 X^{n-1}, \quad \text{если } X \geq 1, \quad (29)$$

$$|G(z)| \leq (|a_0| + 2C|z|)|z| \leq 2C|z|, \quad \text{если } z \in \mathbb{C}, |z| \leq \frac{1}{2}. \quad (30)$$

Доказательство смотри в [IP]. \square

8. ГЛОБАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОБОБЩЁННЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЬЕНАРА

Для доказательства основной теоремы нашей работы (теорема 1) необходимо вначале построить фазовые портреты для каждого из случаев 1 – 4, описанных в параграфе 2, по-отдельности (во всей работе мы будем следовать введённой там нумерации случаев).

В случае обычных уравнений Льенара ключевым для изучения глобальной геометрии является исследование поведения траекторий вблизи бесконечности, проделанное в позапрошлом параграфе. Оказывается, что для обобщённых уравнений Льенара ещё необходимо изучить расположение нулей многочлена $H(x)$. Грубо говоря, если на луче $(0, +\infty)$ (или $(-\infty, 0)$) многочлен $H(x)$ обращается в ноль, то область D_C^+ (соответственно D_C^-) не играет никакой роли при локализации предельных циклов. Мы разберём все случаи (наличия и расположения нулей $H(x)$).

Глобальное поведение траекторий системы (4) существенно различается в зависимости от некоторых дополнительных условий (см. теорему 1). Далее мы разберём все те случаи, о которых там идёт речь.

Но сначала исследуем простую ситуацию, в которой предельных циклов нет вовсе.

Теорема 4. *У системы (4) в случае $H(0) \leq 0$ предельных циклов нет.*

Замечание. *Если $H(0) = 0$, то у системы (4) прямая особых точек $x = 0$, а значит, предельных циклов нет.*

Доказательство теоремы 4. Пусть $H(0) \neq 0$, т.е. $H(0) < 0$. Напомним, что мы обозначим через $I(x)$ компоненту рациональной

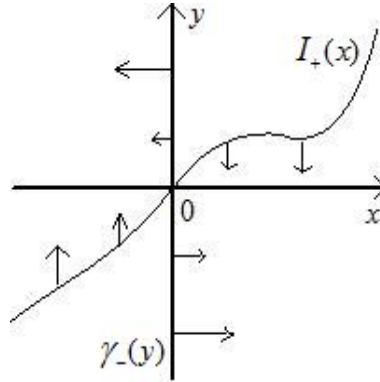


Рис. 2. Отсутствие предельных циклов у системы (4) в случае $H(0) < 0$.

кривой, заданной уравнением $y = x \frac{F(x)}{H(x)}$, содержащую точку $(0, 0)$. Эта кривая будет вертикальной изоклиной системы (4), см. рис. 2.

Обозначим через $I_+(x)$ часть кривой $I(x)$, лежащую в полуплоскости $x \geq 0$. На $I_+(x)$ векторное поле, заданное системой (4) направлено вертикально вниз: $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = -x < 0$.

Пусть $\gamma(y)$ — ось OY с координатой y на ней, $\gamma_-(y)$ — луч на оси OY , заданный неравенством $y < 0$. Тогда кривая $\gamma(y)$ — тоже изоклина (горизонтальная) системы (4). На луче $\gamma_-(y)$ векторное поле направлено горизонтально вправо: $\dot{y} = 0$, $\dot{x} = yH(0) > 0$, т.к. $y < 0$ и $H(0) < 0$.

Рассмотрим область, ограниченную кривыми $I_+(x)$ и $\gamma_-(y)$: векторное поле на всех точках границы (за исключением начала координат) направлено внутрь, но любой предельный цикл системы (4) (если он существует) охватывает начало координат, следовательно, проходит через рассматриваемую область, что невозможно. \square

Далее нам понадобится утверждение, связывающее поведение изоклин при приближении к нулям многочлена $H(x)$ со знаком значений многочлена $F(x)$ на этих нулях.

Лемма 4 (О согласованности).

- (1) Пусть $r_- < 0$ таково, что $H(r_-) = 0$ и $H(x) > 0$ на интервале $(r_-, 0)$. Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow r_- + 0} I(x) = -\text{sign } F(r_-) \cdot \infty.$$

- (2) Пусть $r_+ > 0$ таково, что $H(r_+) = 0$ и $H(x) > 0$ на интервале $(0, r_+)$. Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow r_+ - 0} I(x) = \text{sign } F(r_+) \cdot \infty.$$

Доказательство. Действительно, $\lim_{x \rightarrow r_-+0} H(x) = \lim_{x \rightarrow r_+-0} H(x) = +0$, а $\forall c \in \mathbb{R}: \lim_{x \rightarrow c} xF(x) = cF(c)$ из непрерывности многочлена. Осталось отметить, что $F(r_-) \neq 0 \neq F(r_+)$ в рассматриваемых нами случаях 2 – 4 из теоремы 1. \square

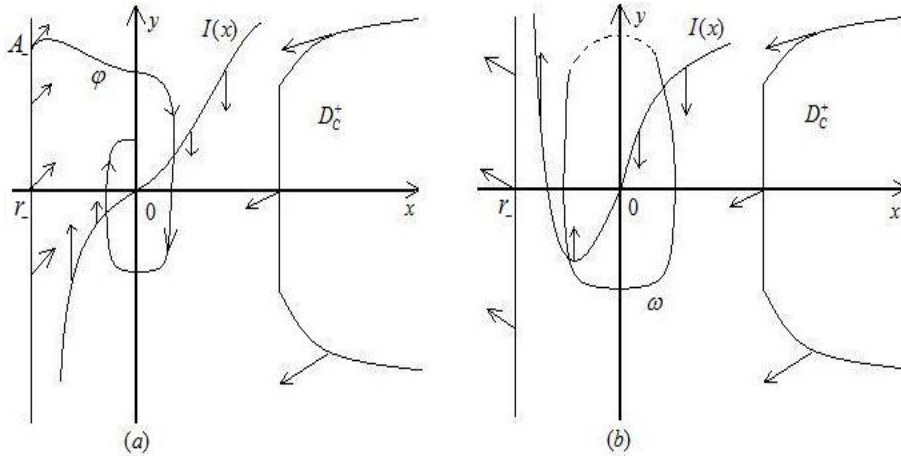


РИС. 3. Векторное поле, заданное системой (4), в случае, когда многочлен $H(x)$ обращается в ноль только слева от 0, $H(0) > 0$.

(a): $F(r_-) > 0$ — нечётный тип,

(b): $F(r_-) < 0$ — чётный тип.

Случай 2. Напомним, что $H(0) > 0$, $H(x)$ обращается в 0 только слева от нуля, а $r_- < 0$ таково, $H(r_-) = 0$ и $\forall x \in (r_-, +\infty): H(x) > 0$.

Заметим, что на прямой $x = r_-$ векторное поле постоянно: $\dot{x} = -r_-F(r_-)$, $\dot{y} = -r_-$. Оно направлено вправо или влево в зависимости от знака $F(r_-)$. Таким образом, все предельные циклы системы (4) локализируются в области, ограниченной прямой $x = r_-$ слева и областью D_C^+ справа. См. рис. 3.

Случай 3. Напомним, что $H(0) > 0$, $H(x)$ обращается в 0 только справа от нуля, а $r_+ > 0$ таково, что $H(r_+) = 0$ и $\forall x \in (-\infty, r_+): H(x) > 0$.

Аналогично случаю 2, все предельные циклы системы (4) локализируются в области, ограниченной прямой $x = r_+$ справа и областью D_C^- слева.

Случай 4. Напомним, $H(0) > 0$, $H(x)$ обращается в 0 слева и справа от нуля, а $r_- < 0 < r_+$ таковы, что $H(r_-) = 0 = H(r_+)$ и $\forall x \in (r_-, r_+): H(x) > 0$.

Как и в случаях 2 и 3, на прямых $x = r_-$ и $x = r_+$ векторное поле постоянно (и отлично от нуля), а потому все предельные циклы системы (4) заключены в полосе $r_- < x < r_+$. См. рис. 4.

Случай 1. Напомним, что многочлен $H(x)$ положителен на всей числовой оси.

Все предельные циклы системы (4) локализуются в области, ограниченной областью D_C^- слева и областью D_C^+ справа. См. рис. 5.

Замечание. В случае 1 нечётный тип означает в точности то, что число $n = \deg xF(x)$ нечётно.

Определение 3. Мешком Бендиксона называют множество, ограниченное куском траектории векторного поля v и отрезком трансверсали к этому полю, на котором векторное поле направлено внутрь. Так что получается, что все остальные траектории векторного поля либо не пересекаются с мешком, либо, попав туда единожды, остаются в нём навсегда.

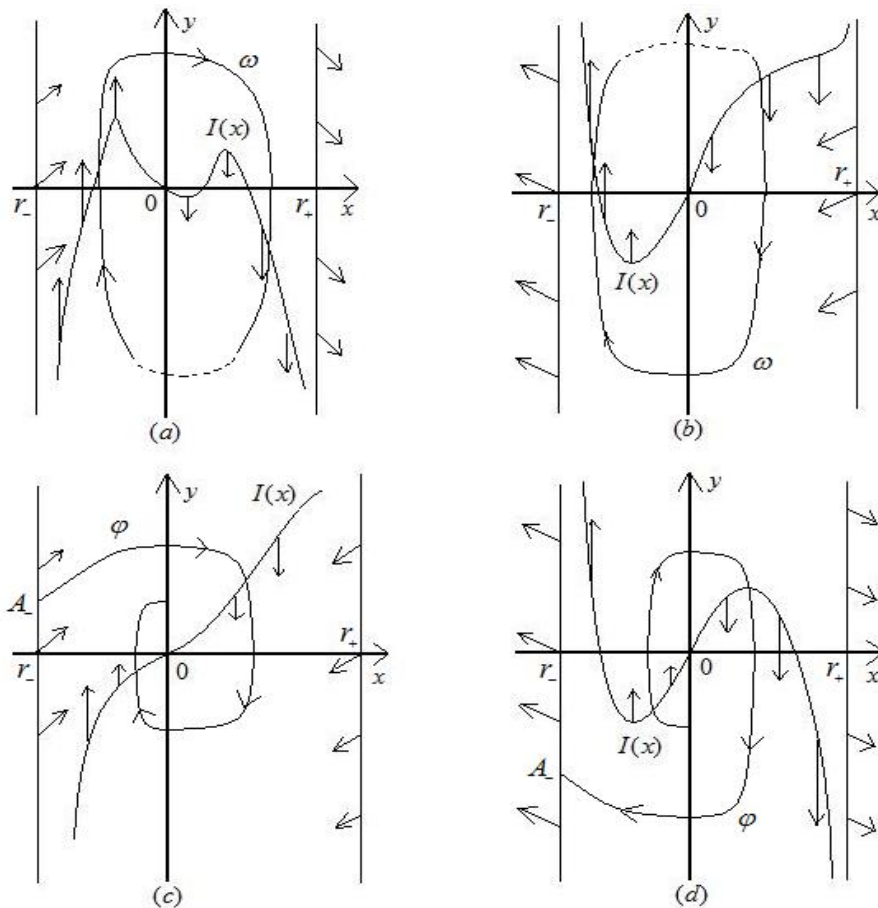


РИС. 4. Глобальная геометрия обобщённых уравнений Льенара в случае обращения многочлена $H(x)$ в ноль по обе стороны от нуля, $H(0) > 0$.

(a): $F(r_-) > 0$ и $F(r_+) > 0$, (b): $F(r_-) < 0$ и $F(r_+) < 0$,
 (c): $F(r_-) > 0$ и $F(r_+) < 0$, (d): $F(r_-) < 0$ и $F(r_+) > 0$.
 (a) и (b) — чётный тип, (c) и (d) — нечётный тип.

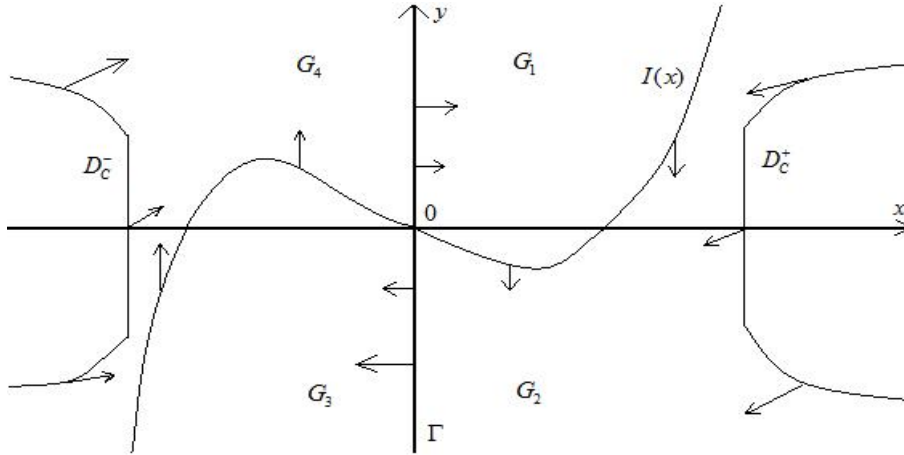


Рис. 5. Векторное поле, заданное системой (4), в случае положительности многочлена $H(x)$ на всей оси $0x$ (нечётный тип).

Как мы увидим в следующем параграфе, именно для обобщённых уравнений Льенара нечётного типа удаётся построить оснащённый мешок Бендиксона, схожий с конструкцией для (обычных) уравнений Льенара нечётной степени (см. [IP]).

9. ПОСТРОЕНИЕ ОСНАЩЁННОГО МЕШКА БЕНДИКСОНА ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЬЕНАРА НЕЧЁТНОГО ТИПА

Случай 3 аналогичен случаю 2. В случаях 1, 2, 4 (для каждого по-отдельности) мы построим мешок Бендиксона, содержащий все предельные циклы системы (4) и оснащённый отрезком D , пересекающим все предельные циклы, на котором отображение Пуанкаре возможно аналитически продолжить в его (отрезка D) комплексную окрестность. Мы начнём со случая 1, фазовый портрет в котором более всего похож на уравнения Льенара нечётной степени.

Векторное поле, заданное системой (4), обозначим через v .

Случай 1. Напомним, что $n = \deg xF(x)$ нечётно.

Многочлен $H(x)$ положителен при всех $x \in \mathbb{R}$, поэтому существует такое число $\theta \in (0, \frac{1}{2})$, что $\forall x \in \mathbb{R}: H(x) \geq \theta$.

Положим: $k = (C + 1)^n$. Обозначим: $l = \frac{k}{\theta}$.

Прямая $\Gamma: x = 0$ является горизонтальной изоклиной системы (4), а кривая $I(x)$ — вертикальной. Старший коэффициент многочлена $xF(x)$ равен 1, $\deg xF(x) > \deg H(x)$, n — нечётно, поэтому $I(x)$ стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ и к $-\infty$ при $x \rightarrow -\infty$. Изоклины Γ и $I(x)$ делят \mathbb{R}^2 на четыре области, различающиеся направлением v в терминах «вправо-влево» и «вверх-вниз» (см. рис. 5). В области $G_1: x > 0, yH(x) > xF(x)$ поле v направлено вправо-вниз, в $G_2: x > 0, yH(x) < xF(x)$ влево-вниз, в $G_3: x < 0, yH(x) < xF(x)$ влево-вверх, в $G_4: x < 0, yH(x) > xF(x)$ вправо-вверх.

Заметим, что значение $|\dot{y}|$ ограничено в любой полосе $|x| \leq \alpha$. Следовательно, любая орбита, стартующая из точки $y \in \Gamma$, возвращается на Γ . Эта орбита может попасть в особую точку $(0, 0)$, где Γ не трансверсальна v . Иначе, отображение Пуанкаре определено в точке y и её окрестности.

При обращении времени не каждая орбита, стартующая с Γ , возвращается на Γ : например, она может попасть в одно из множеств D_C^+ , D_C^- , которые становятся поглощающими после обращения времени. Теперь мы оценим сверху размер области определения D' обратного отображения Пуанкаре. А точнее, мы построим отрезок Σ такой, что P^{-1} не определено ни в одной точке вне Σ .

Далее предполагаем, что отображение Пуанкаре имеет непустую область определения, иначе предельных циклов нет.

Лемма 5. *Если $H(x) > \theta \in (0, \frac{1}{2})$ на всей числовой оси, то область определения обратного отображения Пуанкаре для системы (4) содержится в отрезке*

$$\Sigma = \left\{ y : |y| \leq Y := 17 \frac{k^3}{\theta^4} = 17 \frac{l^3}{\theta} \right\} \subset \Gamma. \quad (31)$$

Любая замкнутая орбита системы (4) пересекает отрезок $\Sigma^- = \{-Y \leq y \leq 0\}$.

Доказательство. Рассмотрим точку $A = (4l^2, -2l) \in D_C^+$.

Полуорбита φ , стартующая из точки A в положительном времени, будет двигаться влево и вниз, пока не пересечёт Γ или I . Но второй случай невозможен, т.к. в правой полуплоскости векторное поле v на I направлено вниз.

Обозначим через B точку первого пересечения φ и Γ , пусть $Y_0 = |y(B)|$.

Каждая орбита системы (4), стартующая с Γ в обратном времени ниже B , попадает на D_C^+ и поглощается. Следовательно, обратное отображение Пуанкаре не определено на Γ для $y < -Y_0$. Поэтому каждая замкнутая орбита пересекает $[0, -Y_0]$.

Теперь мы оценим Y_0 сверху. В области $x > 0$, $y < -2l$ выполнено:

$$\dot{x} = yH(x) - xF(x) \leq yH(x) + k < -2l \cdot \theta + k = -2k + k = -k,$$

т.к. $\min_{x>0} xF(x) \geq -k$, в виду условия (25). Следовательно, $\dot{x} < -k$,

поэтому $|\dot{x}| > k$, а значит время движения по дуге фазовой кривой $\varphi_{A,B}$ не превосходит $\frac{x(A)}{k} = \frac{4l^2}{k} = \frac{4k}{\theta^2}$. С другой стороны, в полосе $0 \leq x \leq 4l^2$ мы имеем: $\dot{y} = -x \geq -4l^2$, $|\dot{y}| \leq 4l^2$. Следовательно,

$$Y_0 = |y(B)| \leq \left| -2l - 4l^2 \frac{4k}{\theta^2} \right| < 17 \frac{k^3}{\theta^4}.$$

Аргументы для области G_4 при $y > 0$ получаются из вышеизложенных посредством симметрии; тем самым доказано, что P^{-1} не определено при $y \geq Y$ на Γ .

Таким образом, доказана лемма 5. При этом мы доказали также, что каждая периодическая орбита пересекает отрезок $[0, B]$. \square

Замечание. (1) Оценка на Y_0 очень груба. Мы доказали также, что $Y_0 + 2 < Y$.

(2) Рассуждение, полностью аналогичное изложенному выше, показывает, что орбита, стартующая в точке $A^- = (-4l^2, 2l)$, пересекает ось Oy в точке ниже, чем $(0, Y)$. Поэтому любая орбита, стартующая с Γ , пересекает отрезок $[0, Y]$ после полного оборота вокруг особой точки $(0, 0)$.

Случай 4. Пусть $r_- < 0 < r_+$ таковы, что $H(r_-) = 0 = H(r_+)$, $F(r_-) > 0$, $F(r_+) < 0$, $\forall x \in (r_-, r_+) : H(x) > 0$ (случай $F(r_-) < 0$, $F(r_+) > 0$ исследуется полностью аналогично, т.к. получается из рассматриваемого обращением времени).

Определим x_- и x_+ также, как в параграфе 2.

Теперь существует $\theta \in (0, \frac{1}{2})$:

$$\forall x \in (x_-, x_+) : H(x) \geq \theta. \quad (32)$$

Напомним, что $S_- = \max(2Cr_-^n, 2^{n+1}C)$, $S_+ = \max(2Cr_+^n, 2^{n+1}C)$, $S = \max(S_-, S_+)$. Далее, в случаях 2 и 3 мы определим S аналогичным образом, при этом полагая его равным тому из значений S_- или S_+ , которое определено. Заметим, что $S_- \geq 2C+1$, $S_+ \geq 2C+1$.

В виду (21) и (22) при $x \in (r_-, r_+) : |xF(x)| \leq S$.

Рассмотрим точку $A = (r_-, \frac{2S}{\theta})$.

Полуорбита φ , стартующая из A в положительном времени, будет двигаться вправо и вверх, пока не пересечёт Γ в точке B . За время 1 орбита φ сдвинется правее x_- . На отрезке $[x_-, 0]$:

$$|\dot{x}| \geq |yH(x)| - |xF(x)| \geq \frac{2S}{\theta}\theta - S = S.$$

Следовательно, время движения t_1 вдоль φ от A до B легко оценивается сверху: $t_1 \leq 1 + \frac{|x_-|}{S} < 2$.

Заметим, что в полосе $[r_-, r_+] \times \mathbb{R} : |y| = |x| < S$. Теперь оценим $Y_0 = y(B)$ сверху:

$$Y_0 < \left| \frac{2S}{\theta} + 2S \right| < \frac{3S}{\theta}.$$

Замечание. Аналогичную конструкцию можно провести для точки $A' = (r_+, -\frac{2S}{\theta})$. Тогда мы получим, что вне отрезка $[-S, S] \subset \Gamma$ обратное отображение Пуанкаре не определено.

Случай 2. Пусть число $r_- < 0$ такого, что $H(r_-) = 0$, $F(r_-) > 0$, $\forall x \in (r_-, +\infty) : H(x) > 0$.

Многочлен $H(x)$ положителен при всех $x \in \mathbb{R}_+$, поэтому существует такое число $\theta \in (0, \frac{1}{2})$, что $\forall x \in \mathbb{R}_+ : H(x) \geq \theta$.

Изоклины Γ и $I(x)$ делят $(r_-, -\infty) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ на четыре области G_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, различающиеся направлением v в терминах «вправо-влево» и «вверх-вниз» и определяемых также, как и в предыдущих случаях.

Точка B строится аналогично случаю 5.

Случай 3, где число $r_+ > 0$ такого, что $H(r_+) = 0$, $F(r_+) < 0$, $\forall x \in (-\infty, r_+)$: $H(x) > 0$ исследуется полностью аналогично, т.к. получается из рассматриваемого центральной симметрией относительно начала координат).

Замечание. (1) Аналогично лемме 5 нетрудно показать, что в случае 2 любая замкнутая орбита системы (4) пересекает отрезок

$$\hat{\Sigma} = \left\{ -Y = -17 \frac{k^3}{\theta^4} \leq y < 0 \right\} \subset \Gamma.$$

(2) Обратное отображение Пуанкаре не определено вне отрезка $[-Y, S]$ в случае 2 и вне отрезка $[-S, Y]$ в случае 3.

Искомый мешком Бендиксон будет область, содержащая начало координат, ограниченная дугой траектории φ от точки B до точки $P(B)$ и отрезком $[P(B), B] \subset 0Y$.

10. ОЦЕНКИ ИНДЕКСА БЕРНШТЕЙНА

В этом параграфе для каждого из случаев 2, 4, 5 мы строим отрезок D , который принадлежит области определения обратного отображения Пуанкаре и который пересекается с каждой периодической орбитой системы (4). Пусть точка B построена также, как в предыдущем параграфе, а E — неподвижная точка отображения Пуанкаре P системы (4) с минимальной по модулю отрицательной y -координатой. Положим:

$$D' = \begin{cases} [0, B], & \text{если } a_0^2 \leq b_0 \\ [E, B], & \text{если } a_0^2 > b_0 \end{cases}, \quad D = P(D'). \quad (33)$$

Каждая периодическая орбита пересекает D' , а, следовательно, D .

Рассмотрение двух случаев по-отдельности объясняется следующим образом: в первом случае ($a_0^2 \leq b_0 < 4b_0$) особая точка $(0, 0)$ — это фокус. Область определения отображения Пуанкаре и его комплексификации легко исследуются вблизи нуля, в т.ч. время прохождения по траекториям системы (4) оценивается снизу (см. параграф 11). Во втором случае у особой точки (т.е. у начала координат) есть легко оцениваемая (при помощи функции Ляпунова) область притяжения в прямом или обратном времени. Периодические орбиты системы (4) не могут заходить в эту область. Поэтому в случае 2 мы рассматриваем отображение Пуанкаре на отрезке, отделённом от нуля.

Заметим, что в обоих случаях верхний конец D (0 или E) отображается в себя под действием P . Поэтому в обоих случаях $\rho := d(D, \partial D') = |B - P(B)|$. Ниже мы оценим ρ снизу, что позволит оценить рост обратного отображения Пуанкаре сверху (а значит, и индекс Бернштейна).

Случай 1. Пусть известно, что

$$\forall x \in \mathbb{R} : H(x) \geq \theta, \quad \text{где } \theta \in (0, \frac{1}{2}). \quad (34)$$

Пусть $A' = (\frac{9}{4}l^2, -\frac{3}{2}l)$, ψ — полуорбита, стартующая из точки A' в положительном времени. Аналогично рассуждениям прошлого параграфа можно показать, что ψ пересекает Γ . Обозначим через $B' \in [0, B]$ точку первого пересечения ψ и Γ . Положим: $Y_1 = |y(B')|$.

Обратное отображение Пуанкаре не определено для любой точки $y \in \Gamma$, лежащей ниже B' , потому что, каждая полуорбита, стартующая с Γ ниже B' в отрицательном времени, пересекает D_C^+ и поглощается, а поэтому никогда не возвращается на Γ . Следовательно, $P(B)$ лежит выше B' , а потому:

$$\rho \geq Y_0 - Y_1.$$

Мы докажем, что ρ не превосходит константы порядка l .

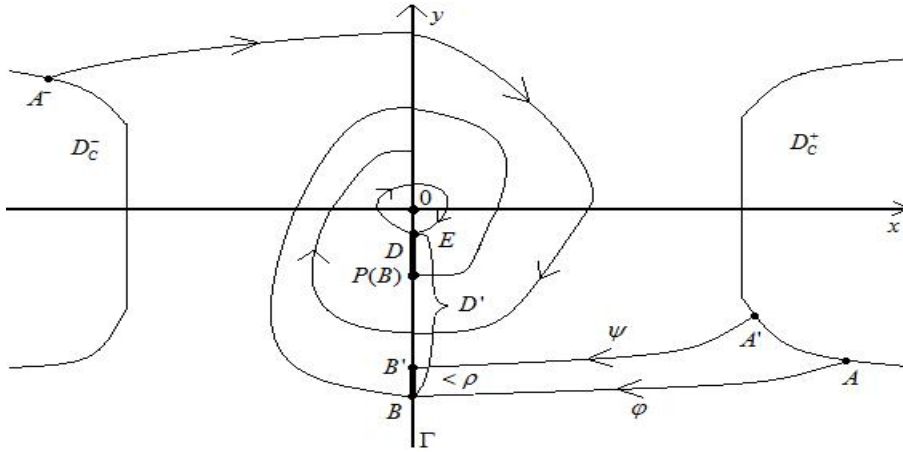


Рис. 6. Область определения отображения Пуанкаре системы (4) и оценка снизу индекса Бернштейна в случае положительности многочлена $H(x)$ на всей оси $0x$.

Предложение 2. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{xF(x) - yH(x)}, \quad (35)$$

соответствующие системе (4), удовлетворяющей условию (34). Пусть $x_0 \geq 2l^2$, $y_j(x_0) \leq -\frac{3}{2}l$, $j = 1, 2$. Тогда

$$|y_1(0) - y_2(0)| \geq \frac{1}{2}|y_1(x_0) - y_2(x_0)|.$$

Следствие 1. Для системы (4), удовлетворяющей условию (34) выполнено $\rho = d(D, \partial D') \geq \frac{l}{4}$.

Доказательство. Пусть $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ — орбиты системы (4), проходящие через A и A' , рассматриваемые на $[0, 4l^2]$ и на $[0, \frac{9}{4}l^2]$ соответственно. Пусть $x_0 = \frac{9}{4}l^2$. Тогда $y_1(x_0) < -2l$, $y_2(x_0) = -\frac{3}{2}l$. По предложению 2,

$$Y_1 - Y_2 = y_2(0) - y_1(0) \geq \frac{1}{2}(y_2(x_0) - y_1(x_0)) \geq \frac{l}{4} = \frac{k}{4\theta}. \quad \square$$

Доказательство предложения 2. Пусть $y(x_0, y_0)$ — решение уравнения (35) с начальными условиями $y(x_0, y_0) = y_0$. Рассмотрим уравнение в вариациях по начальным условиям для (35), положив $\xi = \frac{\partial y(x_0, y_0)}{\partial y_0}$:

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{xH(x)}{(xF(x) - yH(x))^2} \xi. \quad (36)$$

Решение $y(x, y_0)$ системы (35) монотонно растёт на $[0, x_0]$ при условии $y_0 < -l$. Действительно, в силу (26) имеем $\frac{xF(x)}{H(x)} > -l$ при $x > 0$ и, следовательно, движение в области $\{x \in [0, x_0]; y < -l\}$ происходит строго «влево-вниз», откуда следует монотонность $y(x, y_0)$.

Следовательно, в (36): $y = y(x, y_0) \leq -l$ при $x \in [0, x_0]$. Обозначим:

$$a(x, y_0) = \frac{xH(x)}{(xF(x) - yH(x))^2}.$$

Тогда

$$\xi(x, y_0) = \exp \int_{x_0}^x a(x, y_0) dx := \exp I(x, y_0).$$

Мы покажем, что $I(0, y_0) > -\log 2$, если $y_0 \leq -\frac{3}{2}l$. Это докажет предложение 2.

Пусть $T = 2C + 2$. Разобьём $I(0, y_0) = \int_{x_0}^0 a(x, y_0) dx$ в сумму трёх интегралов:

$$I(0, y_0) = \int_{x_0}^T a(x, y_0) dx + \int_T^2 a(x, y_0) dx + \int_2^0 a(x, y_0) dx. \quad (37)$$

Оценим первое слагаемое в сумме (37). Ввиду (28): $|xF(x)| \geq \frac{1}{2}x^n$ при $|x| \geq 2C + 1$. Поэтому для $x \in [2C + 2, x_0]$ выполнено неравенство:

$$xF(x) - yH(x) > \frac{x^n}{2},$$

т.к. $-yH(x) > 0$ при $y < 0$. При $x > 2$ выполнено: $|H(x)| < 2C|x|^{n-1}$ ввиду (21). Следовательно, при $x \in [2C + 2, x_0]$:

$$a(x, y_0) \leq \frac{2Cx^n}{(x^n/2)^2} = \frac{8C}{x^n}.$$

Поэтому для тех же x ($x \in [2C + 2, x_0]$) при $C \geq 15$, $n \geq 3$:

$$I(x, y_0) \geq \int_{x_0}^x \frac{8C}{x^n} dx = \left(\frac{8C}{(n-1)x_0^{n-1}} - \frac{8C}{(n-1)x^{n-1}} \right) \geq -\frac{1}{16}. \quad (38)$$

Действительно, правое неравенство из (38) эквивалентно неравенству:

$$\left(-\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x_0^{n-1}} \right) \geq -\frac{n-1}{128C},$$

что следует из неравенства $\frac{1}{x^{n-1}} \leq \frac{n-1}{128C}$, которое нетрудно проверить, заменив n на 3, а x на $2C + 2$.

Оценим второе слагаемое в сумме (37). Ввиду (25): $xF(x) \geq -k$. Также $-yH(x) > \frac{3}{2}k$, т.к. по условию $y < -\frac{3}{2}l$ и $H(x) \geq \theta$. Поэтому $xF(x) - yH(x) > \frac{k}{2}$.

Ввиду (21): $|H(x)| < 2C|x|^{n-1}$. Следовательно, при $x \in [2, 2C + 2]$:

$$a(x, y_0) \leq \frac{2Cx^n}{(k/2)^2}.$$

Таким образом, если $x \in [2, 2C + 2]$, то при $C \geq 64$, $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} I(x, y_0) &\geq \int_{2C+2}^2 \frac{8C}{k^2} x^n dx = \frac{8C}{k^2} \left(\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{(2C+2)^{n+1}}{n+1} \right) = \\ &= \frac{2^{n+4}C}{(n+1)k^2} (1 - k(C+1)) \geq -\frac{1}{2}. \quad (39) \end{aligned}$$

Чтобы доказать последнее неравенство в (39), мы воспользуемся следующей цепью рассуждений:

$$-\frac{2^{n+4}C(C+1)}{(n+1)k} \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2^{n+5}}{n+1} \leq \frac{(C+1)^{n-1}}{C} \Leftrightarrow \frac{2^{n+5}}{4} \leq (C+1)^{n-2},$$

что легко доказать индукцией по n , $n \geq 3$.

Оценим третье слагаемое в сумме (37). В рассматриваемом случае ($x \in [0, 2]$), как и в предыдущем, выполнено: $xF(x) - yH(x) > \frac{k}{2}$. Ввиду (22): $|H(x)| < C2^n$. Следовательно,

$$a(x, y_0) \leq \frac{C2^n}{(k/2)^2} x.$$

Таким образом, если $x \in [0, 2]$, то при $C \geq 12$, $n \geq 3$:

$$I(x, y_0) \geq \int_2^0 \frac{4C}{k^2} 2^n x dx = \frac{2^{n+2}C}{k^2} \cdot -2 \geq -\frac{1}{16}. \quad (40)$$

Неравенство (40) эквивалентно:

$$-\frac{2^{n+3}C}{k^2} \geq -\frac{1}{16} \Leftrightarrow 2^7 \leq \left(\frac{C+1}{2}\right)^n \frac{(C+1)^n}{C} \Leftrightarrow 128 < (C+1)^2.$$

Нам удалось доказать, что

$$I(0, y_0) \geq -\frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = -\frac{3}{8} > -\log 2. \quad \square$$

Замечание. В случае 2 оценка следствия 1 выполнена из совершенно аналогичных соображений. Ну, а случай 3 в свою очередь полностью аналогичен случаю 2.

Получим аналогичную оценку в случае 4.

Предложение 3. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения (35), соответствующие системе (4), удовлетворяющей условию (32). Пусть $y_j(x_+) \leq -\frac{3}{2}l$, $j = 1, 2$. Тогда

$$|y_1(0) - y_2(0)| \geq \frac{1}{2}|y_1(x_+) - y_2(x_+)|.$$

Следствие 2. Для системы (4), удовлетворяющей условию (32) выполнено $\rho = d(D, \partial D') \geq \frac{l}{4}$.

Доказательство. Пусть $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ — орбиты системы (4), проходящие через $A = (x_+, -2l)$ и $A' = (x_+, -\frac{3}{2}l)$, рассматриваемые на $[0, x_+]$. Тогда $y_1(x_+) = -2l$, $y_2(x_+) = -\frac{3}{2}l$. По предложению 3,

$$Y_1 - Y_2 = y_2(0) - y_1(0) \geq \frac{1}{2}(y_2(x_+) - y_1(x_+)) \geq \frac{l}{4} = \frac{k}{4\theta}. \quad \square$$

Доказательство предложения 3. Пусть $y(x, y_0)$ — решение уравнения (35) с начальными условиями $y(x_0, y_0) = y_0$. Рассмотрим уравнение в вариациях по начальным условиям (36).

Решение $y(x, y_0)$ системы (35) монотонно растёт на $[0, x_+]$, если $y_0 < -l$. Это доказывается также, как в предложении 2. Следовательно, в (36): $y = y(x, y_0) \leq -l$ при $x \in [0, x_+]$.

Доказательство того, что $I(0, y_0) > -\log 2$, если $y_0 \leq -\frac{3}{2}l$, проводится полностью аналогично доказательству предложения 2. Необходимо отметить только то, что во-первых, если $x_+ < \frac{9}{4}l^2$, то отрезок интегрирования уменьшается, а тогда значение $I(0, y_0)$ возрастает, во-вторых, если $x_+ \geq \frac{9}{4}l^2$, то это влияет только на первое слагаемое в сумме (37), но неравенство (38) верно при сколь угодно больших x_+ . \square

Обозначим через γ_y дугу фазовой кривой системы (4), (34), проходящую в обратном времени от y к $P^{-1}(y)$, $y \in D$.

Положим:

$$\Omega = \bigcup_{y \in D} \gamma_y.$$

Предложение 4. Область Ω при условии (34) принадлежит прямоугольнику

$$\begin{aligned} \Pi &= \Upsilon \times \Sigma, & \Upsilon &\subset 0x, & \Sigma &\subset 0y = \Gamma, \\ \Sigma &= \left\{ |y| \leq Y := 17 \frac{k^3}{\theta^4} \right\}, & \Upsilon &= \left\{ |x| \leq X := 68C \frac{k^3}{\theta^4} \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Доказательство. Максимальное значение $x(y)$ координаты x на γ_y достигается в точке $a(y)$ пересечения γ_y и $I(x)$ в правой полуплоскости:

$$a(y) = \left\{ x(y), x(y) \frac{F(x(y))}{H(x(y))} \right\}.$$

Мы хотим доказать, что $x(y) \leq X$. Вследствие замечания после леммы 5, точка $a(y)$ ниже, чем Y . Поэтому,

$$x(y) \frac{F(x(y))}{H(x(y))} \leq Y.$$

Предположим, что $x \geq 2C + 1$, иначе предложение доказано. Тогда, ввиду (28):

$$|x(y)F(x(y))| \geq \frac{1}{2}x^n(y).$$

По (21): $|H(x)| < 2Cx^{n-1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} Y \geq x(y) \frac{F(x(y))}{H(x(y))} &> \frac{1}{2}x^n(y) \cdot \frac{1}{2Cx^{n-1}(y)} \\ &\Rightarrow 17 \frac{k^3}{\theta^4} > \frac{x(y)}{4C} \Leftrightarrow x(y) < 68C \frac{k^3}{\theta^4} = X. \end{aligned}$$

Оценка $x(y) \geq -X$ на γ_y получается полностью аналогично из соображений симметрии. \square

Замечание. Область Ω в случае 2 (случай 3 симметричен) принадлежит прямоугольнику

$$\begin{aligned} \Pi &= \Upsilon \times \Sigma, & \Upsilon &\subset 0x, & \Sigma &\subset 0y = \Gamma, \\ \Sigma &= \left\{ -Y \leq y \leq \frac{3S}{\theta} \right\}, & \Upsilon &= \{r_- \leq x \leq X\}, \end{aligned} \quad (42)$$

а в случае 4 прямоугольнику

$$\begin{aligned} \Pi &= \Upsilon \times \Sigma, & \Upsilon &\subset 0x, & \Sigma &\subset 0y = \Gamma, \\ \Sigma &= \left\{ |y| \leq \frac{3S}{\theta} \right\}, & \Upsilon &= \{r_- \leq x \leq r_+\}. \end{aligned} \quad (43)$$

11. ОКРЕСТНОСТЬ ОСОБОЙ ТОЧКИ. ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА

Введём полярные координаты r и φ на \mathbb{R}^2 . Соответственно, \dot{r} и $\dot{\varphi}$ — производные в силу системы (4).

Предложение 5. Пусть $a_0^2 \leq b_0$. Тогда для системы (4) выполнено $\dot{\varphi} \leq -\frac{\theta}{2}$ в диске

$$D_\beta : r \leq \beta = \frac{\theta}{8C}. \quad (44)$$

Отображение Пуанкаре и обратное к нему определены вблизи нуля и могут быть аналитически продолжены в диск $|z| \leq \beta e^{-\frac{4\pi}{\theta}}$. Более того, в этом диске:

$$\left| \frac{P(z)}{z} \right| \leq C e^{\frac{4\pi}{\theta}}, \quad \left| \frac{P^{-1}(z)}{z} \right| \leq C e^{\frac{4\pi}{\theta}}. \quad (45)$$

Доказательство. Положим $\varrho = \arccos \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + (1-b_0)^2}}$. Вычислим:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = -\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j + \sin \varphi \cos \varphi \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j = \\ &= -\frac{\cos 2\varphi + 1}{2} - b_0 \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + a_0 \frac{\sin 2\varphi}{2} + O_1(r, \varphi) = \\ &= -\frac{1 + b_0}{2} + \frac{1}{2} (a_0 \sin 2\varphi + (b_0 - 1) \cos 2\varphi) + O_1(r, \varphi) = \\ &= -\frac{1 + b_0}{2} + \frac{\sqrt{(1-b_0)^2 + a_0^2}}{2} \sin(2\varphi + \varrho) + O_1(r, \varphi), \end{aligned}$$

где $O_1(r, \varphi) = \sum_{j=1}^{n-1} (a_j \sin \varphi \cos \varphi - b_j \sin^2 \varphi) (r \cos \varphi)^j$.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = r \sin \varphi \cos \varphi \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j - 1 \right) - r \cos^2 \varphi \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j = \\ &= r \frac{\sin 2\varphi}{2} (b_0 - 1) - r \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} a_0 + r O_2(r, \varphi) = \\ &= \frac{r}{2} \left(-a_0 - \sqrt{(1-b_0)^2 + a_0^2} \cos(2\varphi + \varrho) \right) + r O_2(r, \varphi), \end{aligned}$$

где $O_2(r, \varphi) = \sum_{j=1}^{n-1} (b_j \sin \varphi \cos \varphi - a_j \cos^2 \varphi) (r \cos \varphi)^j$.

Комплексифицируем r , заменив его $z \in \mathbb{C}$. Тогда в области:

$$U_\beta : |z| \leq \beta, \quad \varphi \in S^1,$$

мы имеем $\dot{\varphi} = \operatorname{Re} \Phi$, где

$$\Phi(z, \varphi) = -\frac{1 + b_0}{2} + \frac{\sqrt{(1-b_0)^2 + a_0^2}}{2} \sin(2\varphi + \varrho) + O_1(z, \varphi). \quad (46)$$

Ввиду (24), для $|z| \leq \beta$, $\varphi \in S^1$ выполнено:

$$|O_1(z, \varphi)| \leq 4C|z|, \quad |O_2(z, \varphi)| \leq 4C|z|. \quad (47)$$

Докажем теперь, что $\dot{\varphi} \leq -\theta$.

Во-первых, $1 + b_0 - \theta > \sqrt{(1 - b_0)^2 + b_0}$, т.к.

$$1 + b_0^2 + \theta^2 + 2b_0 - 2\theta(1 + b_0) > 1 + b_0^2 - b_0 \Leftrightarrow \theta^2 + 3b_0 > 2\theta(1 + b_0),$$

что верно: $2b_0 \geq 2\theta$, $\theta^2 \geq 0$ и $b_0 \geq 2\theta b_0$, т.к. $\theta < \frac{1}{2}$.

Во-вторых, в U_β : $|O_1(z, \varphi)| \leq \frac{\theta}{2}$, т.к.

$$\beta = \frac{\theta}{8C} \Rightarrow |z| \leq \frac{\theta}{8C} \Rightarrow |O_1(z, \varphi)| \leq 4C \frac{\theta}{8C} = \frac{\theta}{2}.$$

Следовательно, $|\dot{\varphi}| \geq \frac{b_0+1}{2} - \frac{\sqrt{(1-b_0)^2+a_0^2}}{2} - \frac{\theta}{2} \geq \theta - \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$, $\text{Re } \Phi \leq -\frac{\theta}{2}$ в U_β , что доказывает первое утверждение предложения.

Докажем второе утверждение. Пусть $\dot{z} = R$, где

$$R(z, \varphi) = \frac{z}{4} \left(-a_0 - \sqrt{(1 - b_0)^2 + a_0^2} \cos(2\varphi + \varrho) \right) + \frac{z}{2} O_2(z, \varphi). \quad (48)$$

В U_β : $|O_2(z, \varphi)| \leq \frac{\theta}{2}$ по (47). Поэтому

$$\left| \frac{\dot{z}}{z} \right| \leq \frac{1}{2} \left| -a_0 - \sqrt{(1 - b_0)^2 + a_0^2} + \theta \right| \leq \frac{1}{2} (b_0 + 2|a_0| + 1 + \theta) \leq 2C,$$

т.к. $\forall x, y \in \mathbb{R}: \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$ и $1 + \theta < 100 \leq C$.

Для системы (46), (48), время первого возвращения для орбиты, не покидающей U_β , не превосходит $|\frac{4\pi}{\theta}|$, что следует из неравенства $\dot{\varphi} = \text{Re } \Phi \leq -\frac{\theta}{2}$. Следовательно, орбита с начальными условиями:

$$|z| \leq \beta e^{-\frac{2\pi}{\theta}}, \quad \varphi = 0$$

не покидает U_β в течение как минимум одного круга вдоль S^1 и возвращается в диск $|z| \leq \beta$, $\varphi = 0$. Поэтому отображение Пуанкаре для системы (46), (48) может быть аналитически продолжено в диск $|z| \leq \beta e^{-\frac{4\pi}{\theta}}$. Те же аргументы доказывают это утверждение для P^{-1} .

Утверждение (45) следует из неравенств $|\frac{\dot{z}}{z}| \leq C$, $|\dot{\varphi}| \geq \frac{\theta}{2}$. \square

Замечание. В случае $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ угол ϱ не определён. Но аналогично последнему предложению можно получить:

$$\dot{\varphi} = -1 + O_1(r, \varphi), \quad \dot{r} = rO_2(r, \varphi).$$

А значит, все оценки, полученные в предложении (5), верны и при $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ тоже.

Предложение 6. Пусть $a_0^2 > b_0$. Тогда для системы (4) функцией Ляпунова будет

$$F = \frac{1}{2}x^2 + \frac{b_0}{2}y^2.$$

В круге U_β (см. (44)) предельных циклов у системы (4) нет.

Доказательство. Найдём производную F в силу системы (4):

$$\begin{aligned}\dot{F} &= x\dot{x} + b_0y\dot{y} = x(yH(x) - xF(x)) - b_0xy = \\ &= -a_0x^2 + x \sum_{j=1}^{n-1} (b_jyx^j - a_jx^{j+1}) = -a_0x^2 + xO(x, y),\end{aligned}$$

где $O(x, y) = y \sum_{j=1}^{n-1} b_jx^j - x \sum_{j=1}^{n-1} a_jx^j := yxH_1(x) + x^2F_1(x)$, здесь F_1 и H_1 — C -многочлены степени $n - 2$.

Ввиду (47) в U_β :

$$|xO(x)| \leq |x|(\beta 2C|x| + |x|2C|x|) = 4C\beta|x|^2 = \frac{\theta}{2}|x|^2.$$

По условию $|a_0| > \sqrt{b_0} \geq \sqrt{\theta}$, а значит: $|a_0| > \frac{\theta}{\sqrt{2}}$, т.к. $\theta < \frac{1}{2}$. Следовательно, в U_β : $|\dot{F}| \geq \left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} - \frac{\theta}{2}\right)|x|^2 > 0$. \square

12. КОМПЛЕКСИФИКАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ

Положим $\varepsilon = \exp\left(-\frac{C^5X^{2n+1}}{\theta^3}\right)$, $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, $\lambda = \sqrt{\delta}$.

Предложение 7. Пусть D, D' определены также, как в (33). Тогда отображение Пуанкаре $P : D \rightarrow D'$ продолжается в $U^\varepsilon(D) \subset \mathbb{C}^n$.

Доказательство. Мы хотим применить теорему 3, для чего необходимо проверить условия (10) – (12).

Напомним, что $Y = 17\frac{(C+1)^{3n}}{\theta^4}$, $X = 4CY = 68C\frac{(C+1)^{3n}}{\theta^4}$. Уменьшим θ , соответственно переопределим так Y и X , чтобы для всех случаев 1-4 область Ω , содержащая все предельные циклы системы (4), лежала бы в прямоугольнике

$$\Pi = \Upsilon \times \Sigma = \{|y| \leq Y\} \times \{|x| \leq X\}.$$

Обозначим: $\omega = \frac{\theta^2}{24C^2}$, $\alpha = \frac{\theta^3}{72C^3X^n} = \frac{\omega\theta}{3CX^n}$. Пусть $v = (v_1, v_2)$ — векторное поле, заданное системой (4).

Во-первых, оценим $|v|$ в Π :

$$|v| \leq |v_1| + |v_2| \leq X + Y \max_{x \in \Pi} |H(x)| + \max_{x \in \Pi} |xF(x)| \leq X + 2CYX^{n-1} + 2X^n,$$

где последнее неравенство верно в виду (21) и (27). После чего несложно показать, что:

$$|v| \leq 3X^n = \mu, \quad L = 2\mu. \quad (49)$$

Во-вторых, оценим T_{\max} — максимальное время прохождения по дуге фазовой траектории γ_y при всех $y \in D$. Дуга γ_y лежит целиком в полосе $\{|x| \leq X\}$ и не попадает в $U^\beta(0)$ при $a_0^2 > b_0$ или проводит в $U^\beta(0)$ не более $\left|\frac{4\pi}{\theta}\right|$ при $a_0^2 \leq b_0$.

Область $G = (\Pi \setminus U^\beta(0))$ мы разделим на три части: $|\dot{x}| \leq \alpha$, $\dot{x} \leq -\alpha$ и $\dot{x} \geq \alpha$. Во второй и третьей частях области G траектория γ_y проводит не более $\frac{2X}{\alpha}$ времени в каждом. Мы докажем, что время, проведённое орбитой γ_y в области:

$$S_\alpha = \{(x, y) \in (\Pi \setminus U^\beta(0)) : |yH(x) - xF(x)| \leq \alpha\},$$

не превосходит 1. Учитывая соображения симметрии, достаточно показать, что в $S_\alpha \cap \{x > 0\}$:

$$\frac{d}{dt}(yH(x) - xF(x)) \leq -2\alpha.$$

Вначале покажем от противного, что в S_α : $|x| > \omega$. Действительно, пусть $|x| \leq \omega$, $|yH(x) - xF(x)| \leq \alpha$. Тогда $(x, y) \in U^\beta(0)$, потому что:

$$|x| + |y| \leq \omega + \max_{x \in [0, \omega]} \frac{\alpha + |xF(x)|}{|H(x)|} \leq \omega + \frac{\alpha + 2C\omega}{\theta},$$

т.к. $|H(x)| \geq \theta$ и $\max_{x \in [0, \omega]} |xF(x)| \geq 2C\omega$ в виду (30). Таким образом,

$$|x| + |y| < \omega \frac{1 + \alpha + 2C}{\theta} < \omega \frac{3C}{\theta} = \beta.$$

Мы только что доказали, что в S_α : $|x| > \omega$. Следовательно, в S_α : $-xH(x) > -\omega\theta$. Вычислим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(yH(x) - xF(x)) &= \\ &= -xH(x) + (yH(x) - xF(x)) \left(y \frac{d}{dx} H(x) - \frac{d}{dx} (xF(x)) \right) \leq \\ &\leq -\omega\theta + \alpha \left(Y \left| \frac{d}{dx} H(x) \right| + \left| \frac{d}{dx} (xF(x)) \right| \right) \leq \\ &\leq -\omega\theta + \alpha (YCn^2 X^{n-2} + Cn^2 X^{n-1}) \leq -\omega\theta + \alpha 2Cn^2 X^{n-1}, \end{aligned}$$

в виду (23), (27) и (29). Несложно видеть, что $X > n^2$. Теперь легко показать:

$$\frac{d}{dt}(yH(x) - xF(x)) \leq -\omega\theta + 2CX^n \alpha \leq -2\alpha.$$

Оценим сверху $T = T_{\max} + 1$:

$$T \leq 1 + 2 \frac{2X}{\alpha} + 1 + \left| \frac{2\pi}{\theta} \right| < 5 \frac{X}{\alpha} = \frac{360C^3 X^{n+1}}{\theta^3}. \quad (50)$$

В-третьих, проверим условие (12) в $\Pi'_\delta = U^\delta(0) \times U^\lambda(D)$, здесь $\Pi'_\delta \supset \Pi_\delta$, $z = (z_1, z_2)$. В виду (30), $|z_1 F(z_1)| \leq 2C\delta$ в Π'_δ . Поэтому в Π'_δ выполнено:

$$|v_1(z)| \geq ||z_2 H(z_1)| - |z_1 F(z_1)|| \geq (\beta - \lambda)\theta - 2C\delta > \delta,$$

потому что $\frac{\beta}{2} > \lambda$ и $\frac{\beta}{2} > \frac{(2C+1)\delta}{\theta}$, что нетрудно показать.

С другой стороны, $v_2 = -x$. В Π'_δ выполнено $|v_2(z)| \leq \delta$. Следовательно,

$$\left| \frac{v_2}{v_1} \right| \leq 1 < \mu.$$

Наконец, проверим, что $\varepsilon \leq e^{-2LT}$ (напомним, что $C \geq 100$):

$$-2LT > -2 \cdot 6X^n \cdot \frac{360C^3 X^{n+1}}{\theta^3} > -\frac{C^5 X^{2n+1}}{\theta^3}.$$

Это неравенство проверяет условие (11) и завершает доказательство предложения. \square

13. ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ НА ЧИСЛО ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ

Доказательство теоремы 1. Подставим в теорему 2 оценки на размер области определения обратного отображения Пуанкаре, на индекс Бернштейна и на ширину области, в которую продолжается отображение Пуанкаре при комплексификации:

$$\begin{aligned} \#LC(n, C, \theta) &\leq \exp(2|D|\varepsilon^{-1}) \log \frac{|D'| + 2}{d(D, \partial D')} < \exp(2X\varepsilon^{-1}) \log \frac{X}{\frac{1}{4}} < \\ &< \exp\left(\frac{8X^2}{l\varepsilon}\right) < \exp\left(\exp\left(\frac{8X^2}{l} \cdot \frac{C^5 X^{2n+1}}{\theta^3}\right)\right) < \\ &< \exp\left(\exp\left(\frac{8C^5 X^{2n+3}}{(C+1)^n \theta^3}\right)\right) < \exp\left(\exp\left(\frac{8C^{6n^2+12n+11}}{\theta^{6n^2+13n+8}}\right)\right), \end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы 1. \square

14. БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность Д. В. Аносову за научное руководство, Ю. С. Ильяшенко за постановку задачи и постоянное внимание к работе, А. В. Клименко за ценные обсуждения и дружескую помощь, И. В. Щурову и А. Ю. Фишкину за чтение этого текста на разных этапах его подготовки.

Также автор благодарен Филдсовскому Институту, Торонто, Онтарио, Канада за отличные условия для работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [CD] M. Caubergh, F. Dumortier, *Hilbert's 16th problem for classical Liénard equations of even degree*, J. Differential Equations, **244** (2008), no. **6**, pp. 1359–1394.
- [DPR] F. Dumortier, D. Panazzolo, R. Roussarie, *More limit cycles than expected in Liénard equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), no. **6**, pp. 1895–1904.
- [E] J. Écalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Paris: Hermann, 1992.
- [I1] Yu. Ilyashenko, *Finiteness theorems for limit cycles*, Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1991.

- [I2] Yu. Pyashenko, *Hilbert-type numbers for Abel equations, growth and zeros of holomorphic functions*, Nonlinearity, **13** (2000), no. **4**, pp. 1337–1342.
- [IP] Yu. Pyashenko, A. Panov, *Some upper estimates of the number of limit cycles of planar vector fields with applications to Liénard equations*, Moscow Math. J., **1** (2001), no. **4**, pp. 583–599.
- [IYa] Yu. Ilyashenko, S. Yakovenko, *Counting real zeros of analytic functions satisfying linear ordinary differential equations*, J. Differential Equations, **126** (1996), no. **1**, pp. 87–105.
- [L] A. Liénard, *Etudes des oscillations entretenues*, Revue générale de l'Électricité, no. **23** (1928), pp. 901–912, 946–954.
- [LMP] A. Lins Neto, W. de Melo, C. C. Pugh, *On Liénard Equations*, Proc. Symp. Geom. and Topol., Springer Lectures Notes in Mathematics, **597** (1977), pp. 335–357.
- [S] S. Smale, *Mathematical Problems for the Next Century*, Math. Intelligencer, **20** (1998), no. **2**, pp. 7–15.
- [V] B. Van der Pol, *On oscillation hysteresis in a triode generator with two degree of freedom*, Phil. Mag., **6** (1922) no. **43**, pp. 700–719.

Гриша Колоцкий

Кафедра теории динамических систем

Механико-математический факультет

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

МГУ, ГСП, главное здание, Ленинские горы

119899 Москва, Россия

e-mail: kolutsky AT mcsme DOT ru