Дзета-функция многочлена на полном пересечении и многогранники Ньютона

Г. Г. Гусев*

Аннотация

Для ростка однопараметрической (полиномиальной) деформации полного пересечения определяется его дзета-функция. Мы приводим явные формулы для этой дзета-функции в терминах соответствующих многогранников Ньютонаю в случае деформации, невырожденной относительно системы многогранников. Кроме того, мы получаем формулу для дзета-функции в нуле многочлена на полном пересечении, которая является аналогом теоремы Либгобера-Спербера.

1 Введение

Пусть $F_0, F_1, \ldots, F_k$ – набор функций на $\mathbb{C}^n$, заданных как многочлены от n комплексных переменных $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Рассмотрим семейство многообразий $V_c = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid F_0(\mathbf{z}) = c, F_i(\mathbf{z}) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k\}$. Оно является расслоением над проколотой окрестностью нуля со слоем V_c над точкой c (смотри ниже). В этой работе мы получаем формулу для дзета-функции монодромии этого расслоения в терминах многогранников Ньютона многочленов $F_0, F_1, \ldots, F_k$. Этот результат можно рассматривать как "глобальный" аналог Теоремы 1 из [3], а также аналог [7, Theorem 5.5], где вычислена дзета-функция многочлена на бесконечности. В параграфе 2 рассмотрен случай $F_0(\mathbf{z}) = z_n$. Общий случай рассматривается в параграфе 3. Работа отчасти мотивирована результатами С. Гусейн-Заде и Д. Сиерсма ([8]).

*При частичной поддержке грантов РФФИ-007-00593, РФФИ-08-01-00110-а, НШ-709.2008.1.

Пусть A является дополнением в $\mathbb{C}^n$ к некоторой аналитической гиперповерхности Y: $A = \mathbb{C}^n \setminus Y$. Пусть $Z = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid F_i = 0, i = 1, 2, \ldots, k\} \cap A$. Обозначим через $\mathbb{D}_r$ и $\mathbb{D}_r^*$ замкнутый диск в $\mathbb{C}$ радиуса r с центром в нуле и, соответственно, проколотый диск $\mathbb{D}_r^* = \mathbb{D}_r \setminus \{0\}$. Из [9, Theorem 5.1] следует, что существует конечное множество $B \subset \mathbb{C}$, такое что ограничение $F = F_0|_Z$ функции F_0 является расслоением над $\mathbb{C} \setminus B$. В частности, $F|_{Z \cap F^{-1}(\mathbb{D}_\delta^*)}$ $(F|_{Z \cap F^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_d)})$ является расслоением для достаточно малого δ (достаточно большого d). Обозначим через Z_c слой функции F над точкой c. Рассмотрим преобразование монодромии $h_{Z,0}\colon Z_c \to Z_c$ ($h_{Z,\infty}\colon Z_c \to Z_c$) этого расслоения, ограниченного на окружность $c \cdot \exp(2\pi i t)$, $t \in [0, 1]$, при достаточно малом $|c|$ (соответственно, при достаточно большом $|c|$).

Дзета-функцией преобразования $h\colon X \to X$ топологического пространства X называется рациональная функция: $\zeta_h(t) = \prod_{i \geq 0} (\det(\mathrm{Id} - t h_*|_{H_i^c(X;\mathbb{C})}))^{(-1)^i}$, где $H_i^c(X;\mathbb{C})$ обозначает i-ю группу гомологий с замкнутыми носителями.

Определение. Дзета-функция преобразования $h_{Z,0}$ называется дзета-функцией монодромии (в нуле) функции F_0 на множестве Z: $\zeta_{F_0,Z}(t) = \zeta_{h_{Z,0}}(t)$. Дзета-функция преобразования $h_{Z,\infty}$ называется дзета-функцикй монодромии на бесконечности функции F_0 на множестве Z: $\zeta^{\infty}_{F_0,Z}(t) = \zeta_{h_{Z,\infty}}(t)$.

Определение. Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_n \subset \mathbb{R}^n$, – набор выпуклых тел. Тогда $S_1 S_2 \cdots S_n$ обозначает их смешанный объем Минковского (см., напр., [1]). Пусть $T(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$ – однородный многочлен степени n. Выражение $T(S_1, S_2, \ldots, S_k)$ обозначает $\sum \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} S_{i_1} S_{i_2} \cdots S_{i_n}$.

Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_l \subset L \subset \mathbb{R}^n$, – набор выпуклых подмножеств l-мерного рационального аффинного подпространства L. Выражение $S_1 S_2 \cdots S_l$ будет обозначать l-мерный целочисленный смешанный объем, т. е. смешанный объем Минковского в аффинном подпространстве L, нормированный таким образом, что l-мерный объем минимального параллелепипеда с целочисленными вершинами равен единице.

В этой работы мы получаем формулу для дзета-функции $\zeta_{F_0,Z}(t)$, при F_0, Z, находящихся в общем положении, в терминах смешанных объемов граней многогранников Ньютона $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_k$, соответствующих многочленам $F_0, F_1, \ldots, F_k$.

2 Дзета-функция полиномиальной деформации

В этом параграфе мы рассматриваем случай $F_0(\mathbf{z}) = z_n$. Пусть $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ – система координат в $\mathbb{R}^n$, соответствующих переменным $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Можно рассматривать $\sigma = z_n$ как параметр деформаций $f_{i,\sigma}(z_1, \ldots, z_{n-1}) := F_i(z_1, \ldots, z_n, \sigma)$ функций $f_i := f_{i,0}$ на пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Пусть $V = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid F_1(\mathbf{z}) = F_2(\mathbf{z}) = \ldots = F_k(\mathbf{z}) = 0\}$.

Определение. Дзета-функция $\zeta_{z_n,V}(t)$ $(\zeta^{\infty}_{z_n,V}(t))$ называется дзета-функцией (на бесконечности) деформации $f_{i,\sigma}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

2.1 Формулы для дзета-функций деформации

Обозначим через $\Delta_i = \Delta(F_i)$ многогранник Ньютона многочлена F_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Рассмотрим следующее представление: $F_i = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n\cap\Delta_i} F_{i,\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}$. Индексным множеством будем называть подмножество $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Обозначим через $\mathbb{R}^I$, Δ_i^I множества $\{\mathbf{k} \mid k_i = 0,\, i \notin I\} \subset \mathbb{R}^n$ и $\Delta_i \cap \mathbb{R}^I$ соответственно.

Целочисленный ковектор называется примитивным, если он не кратен никакому другому целочисленному ковектору. Обозначим через P^I множество примитивных целочисленных ковекторов в двойственном пространстве $(\mathbb{R}^I)^*$. Пусть индексное множество содержит число n. Обозначим через $P^I_+ \subset P^I$ $(P^I_- \subset P^I)$ подмножество ковекторов $\alpha = \ldots + \alpha_n\, dk_n$ последняя компонента которых положительна: $\alpha_n > 0$; (последняя компонента которых отрицательна: $\alpha_n < 0$). Пусть $\alpha \in P^I$. Обозначим через $\Delta_i^{I,\alpha}$ грань многогранника Δ_i^I, на которой ковектор $\alpha|_{\Delta_i^I}$ достигает минимального значения: $\Delta_i^{I,\alpha} = \{\mathbf{x} \in \Delta_i^I \mid \alpha(\mathbf{x}) = \min(\alpha|_{\Delta_i^I})\}$ (при $\Delta_i^I = \emptyset$ полагаем $\Delta_i^{I,\alpha} = \emptyset$).

Обозначим: $F_i^{I,\alpha} = \sum_{\mathbf{k}\in\Delta_i^{I,\alpha}} F_{i,\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}$. Рассмотрим произвольный ковектор $\alpha \in P^I$.

Определение. Будем говорить, что система многочленов $F_1, F_2 \ldots, F_k$ является (I,α)-невырожденной относительно своих многогранников Ньютона $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$, если 1-формы $dF_i^{I,\alpha}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, линейно независимы во всех точках множества $\{\mathbf{z} \in (\mathbb{C}^*)^n \mid F_1^{I,\alpha}(\mathbf{z}) =$

$F_2^{I,\alpha}(\mathbf{z}) = \ldots = F_k^{I,\alpha}(\mathbf{z}) = 0\}$.

Будем говорить, что система многочленов $F_1, F_2, \ldots, F_k$ является σ-невырожденной (на бесконечности) относительно своих многогранников Ньютона, если для любого множества $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, содержащего число n, и ковектора $\alpha \in P_+^I$ ($\alpha \in P_-^I$) система многочленов является (I, α)-невырожденной относительно своих многогранников Ньютона.

Наконец, система многочленов $F_1, F_2, \ldots, F_k$ называется невырожденной относительно своих многогранников Ньютона, если для любого индексного множества I и ковектора $\alpha \in P^I$ система многочленов является (I, α)-невырожденной.

Рассмотрим произвольное индексное множество $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, для которого $n \in I$. Обозначим:

$$\zeta^I_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t) = \prod_{\alpha \in P_+^I} (1 - t^{\alpha(\frac{\partial}{\partial k_n})})^{l!\, R_l(\Delta_1^{I,\alpha}, \Delta_2^{I,\alpha}, \ldots, \Delta_k^{I,\alpha})},$$

$$\zeta^{I,\infty}_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t) = \prod_{\alpha \in P_-^I} (1 - t^{-\alpha(\frac{\partial}{\partial k_n})})^{l!\, R_l(\Delta_1^{I,\alpha}, \Delta_2^{I,\alpha}, \ldots, \Delta_k^{I,\alpha})},$$

где $l = |I| - 1$, $\frac{\partial}{\partial k_n}$ – вектор в $\mathbb{R}^I$ с единственной ненулевой координатой $k_n = 1$, и $R_l(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \left[\prod_{i=1}^k \frac{x_i}{1+x_i}\right]_l$, где $[\cdot]_l$ обозначает однородную часть степени l соответствующего степенного ряда. Пусть $P_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t) = (1-t)$, если $\Delta_i^{\{n\}} = \emptyset$ при всех $i = 1, 2, \ldots, k$, и $P_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t) = 1$ в остальных случаях.

Теорема 1 *Пусть система многочленов $F_1, F_2, \ldots, F_k$ σ-невырождена относительно своих многогранников Ньютона $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$. Тогда*

$$\zeta_{z_n, V\cap(\mathbb{C}^*)^n}(t) = \zeta^{\{1,2,\ldots,n\}}_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t), \tag{1}$$

$$\zeta_{z_n, V}(t) = P_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t) \times \prod_{I:\, n \in I \subset \{1,2,\ldots,n\}} \zeta^I_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t), \tag{2}$$

где $V = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid F_1(\mathbf{z}) = F_2(\mathbf{z}) = \ldots = F_k(\mathbf{z}) = 0\}$ – множество нулей системы.

Теорема 2 *Пусть система многочленов $F_1, F_2, \ldots, F_k$ σ-невырождена на бесконечности относительно своих многогранников Ньютона $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$. Тогда*

$$\zeta^\infty_{z_n, V\cap(\mathbb{C}^*)^n}(t) = \zeta^{\{1,2,\ldots,n\},\infty}_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t), \tag{3}$$

$$\zeta^{\infty}_{z_n,V}(t) = P_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t) \times \prod_{I:\, n\in I\subset\{1,2,\ldots,n\}} \zeta^{I,\infty}_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t), \qquad (4)$$

где $V = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid F_1(\mathbf{z}) = F_2(\mathbf{z}) = \ldots = F_k(\mathbf{z}) = 0\}$ *– множество нулей системы.*

Замечание. В случае $k = 1$ из формулы (1) получаем:

$$\zeta_{z_n,V\cap(\mathbb{C}^*)^n}(t) = \prod_{\alpha\in P_+^I} (1 - t^{\alpha(\frac{\partial}{\partial k_n})})^{(-1)^{l-1} l!\, Vol_l(\Delta_1^{I,\alpha})}, \qquad (5)$$

где $Vol_l(\cdot)$ обозначает l-мерный целочисленный объем. Это равенство похоже на формулу [3, Theorem 1, (1)] для дзета-функции деформации особенности. Действительно, обозначим через f_σ росток в нуле деформации, заданной уравнением $f_\sigma(z_1,\ldots,z_{n-1}) = F_1(z_1,\ldots,z_{n-1},\sigma)$. Тогда по формуле из [3] получаем: $\zeta_{f_\sigma|_{(C^*)^{n-1}}}(t) = \prod_{\alpha\in P_{++}^{I_0}} (1 - t^{\alpha(\frac{\partial}{\partial k_n})})^{(-1)^{n-1} n!\, Vol_{n-1}(\Delta_1^{I_0,\alpha})}$, где $P_{++}^{I_0}$ – подмножество ковекторов в $P_+^{I_0}$, все компоненты которых положительны, $I_0 = \{1,2,\ldots,n\}$. Это согласуется с тем фактом, что локальная дзета-функция $\zeta_{f_\sigma|_{(C^*)^{n-1}}}(t)$ является "естественным" множителем глобальной дзета-функции $\zeta_{z_n,V\cap(\mathbb{C}^*)^n}(t)$ (см., напр., [2]).

Пример. Пусть $n = 2$, $k = 1$. Рассмотрим многочлен $F_1(z_1,z_2) = z_1 + z_2(1+z_1^2)$. Тогда из формул (1), (2) и соответствующих формул из [3, Theorem 1] получаем: $\zeta_{f_\sigma}(t) = \zeta_{f_\sigma|_{(C^*)}}(t) = (1-t)$, $\zeta_{z_2,V}(t) = \zeta_{z_2,V\cap(\mathbb{C}^*)^2}(t) = (1-t)^2$. На самом деле, глобальный слой есть $V_\sigma = \{z_1 \mid F_1(z_1,\sigma) = 0\} = \{\frac{-1+\sqrt{1-4\sigma^2}}{2\sigma}\} = \{x_1(\sigma), x_2(\sigma)\}$, где $x_1(\sigma) \approx -\sigma$, $x_2(\sigma) \approx -\sigma^{-1}$ при $\sigma \ll 1$. Таким образом, глобальный слой состоит из двух точек, одна в окрестности нуля, другая – в окрестности бесконечности, а локальный слой $\{f_\sigma(z_1) = 0\} = \{x_1(\sigma)\}$ – из одной точки. Это подтверждает приведенные формулы для дзета-функций.

2.2 Доказательство теорем

По многогранникам Ньютона $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k$ многочленов $F_1,F_2,\ldots,F_k$ строится правильное разбиение Λ (на симплициальные конусы) пространства ковекторов $(\mathbb{R}^n)^*$, достаточно мелкое для системы

Δ_i, $i = 1, 2, \dots k$ в смысле [4]. Рассмотрим торическую компактификацию X_Λ тора $(\mathbb{C}^*)^n$, соответствующую разбиению Λ. Обозначим через $X'_\Lambda \subset X_\Lambda$ дополнение к тору $(\mathbb{C}^*)^n$. Пусть $\overline{V}$ – замыкание множества $V \cap (\mathbb{C}^*)^n$ в X_Λ, $V' = \overline{V} \cap X'_\Lambda$. Благодаря принципу локализации (см. [2]) вычисление дзета-функций часто сводится интегрированию по эйлеровой характеристике (см., напр., [10]).

Лемма 1 *Дзета-функцию деформации $f_{i,\sigma}$, $i = 1, 2, \dots, k$ (на бесконечности) можно представить в виде интеграла:*

$$\begin{aligned} \zeta_{z_n, V\cap(\mathbb{C}^*)^n}(t) &= \int_{V'} \zeta_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n}, x}(t)^{d\chi}, \\ \zeta^\infty_{z_n, V\cap(\mathbb{C}^*)^n}(t) &= \int_{V'} \zeta^\infty_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n}, x}(t)^{d\chi}, \end{aligned} \qquad (6)$$

где для функции f, конструктивного множества A и точки x, $\zeta_{f|_A, x}(t)$ обозначает дзета-функцию ростка в точке x функции f, ограниченной на A.

Доказательство. Можно считать, что Λ является подразбиением стандартного разбиения Π пространства $(\mathbb{R}^n)^*$, соответствующего компактификации $\mathbb{CP}^n \supset (\mathbb{C}^*)^n$ комплексного тора. Пусть $p\colon X_\Lambda \to \mathbb{CP}^n$ – отображение, соответствующее паре (Λ, Π). Деформация $\sigma_c(\mathbf{z}) = z_n - c$, $c \in \mathbb{C}$ функции $\sigma_0 = F_0$ на торе $T_{\{0\}} = (\mathbb{C}^*)^n$ достраивается до семейства соответствующих глобальных сечений s_c расслоения $\mathcal{O}(1)$ над $\mathbb{CP}^n$. Рассмотрим композицию $\pi = p \circ inj$, где $inj\colon \overline{V} \hookrightarrow X_\Lambda$ – отображение вложения. Пусть $S_c = \pi^*(s_c)$ – семейство сечений, поднятых на расслоение $\pi^*(\mathcal{O}(1))$. Аналогично, достроим деформацию $\sigma'_c(\mathbf{z}) = 1 - cz_n$, $c \in \mathbb{C}$ функции $\sigma'_0 = 1$ до семейства сечений s'_c расслоения $\mathcal{O}(1)$. Пусть $S'_c = \pi^*(s'_c)$. В силу простых переформулировок, а также мультипликативного свойства дзета-функций, получаем:

$$\zeta_{z_n, V\cap(\mathbb{C}^*)^n}(t) = \zeta_{S_c}(t)/\zeta_{S_c|_{\overline{V}'}}(t), \quad \zeta^\infty_{z_n, V\cap(\mathbb{C}^*)^n}(t) = \zeta_{S'_c}(t)/\zeta_{S'_c|_{\overline{V}'}}(t),$$

где дзета-функция однопараметрического семейства сечений определена в работе [2]. Легко видеть, что

$$\{S_0 = 0\}, \{S'_0 = 0\} \subset V'.$$

Применяя принцип локализации ([2]) к семействам S_c, S'_c, представляем дзета-функции в виде интегралов по эйлеровой характеристике:

$$\zeta_{S_c}(t) = \int_{V'} \zeta_{S_c, x}(t)^{d\chi}, \quad \zeta_{S_c|_{V'}}(t) = \int_{V'} \zeta_{S_c|_{V'}, x}(t)^{d\chi},$$

$$\zeta_{S'_c}(t)=\int_{V'}\zeta_{S'_c,x}(t)^{d\chi},\quad \zeta_{S'_c|_{V'}}(t)=\int_{V'}\zeta_{S'_c|_{V'},x}(t)^{d\chi},$$

где для сечения r и точки x, $\zeta_{r,x}(t)$ обозначает дзета-функцию ростка сечения r в точке x . Комбинируя эти формулы и используя мультипликативность интегралов и локальных дзета-функций, находим частные:

$$\zeta_{S_c}(t)/\zeta_{S_c|_{V'}}(t)=\int_{V'}\zeta_{S_c|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n},x}(t)^{d\chi}=\int_{V'}\zeta_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n},x}(t)^{d\chi},$$
$$\zeta_{S'_c}(t)/\zeta_{S'_c|_{V'}}(t)=\int_{V'}\zeta_{S'_c|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n},x}(t)^{d\chi}=\int_{V'}\zeta^{\infty}_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n},x}(t)^{d\chi}.$$

□

Пусть $\Lambda^-\subset\Lambda$ ($\Lambda^+\subset\Lambda$) – подмножество конусов $\lambda\in\Lambda$, порожденных набором примитивных ковекторов $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l$, не лежащих в $P_+=P_+^{\{1,2,\ldots,n\}}$ (не лежащих в $P_-=P_-^{\{1,2,\ldots,n\}}$ соответственно). Можно считать, что Λ достаточно мелко, так что $\Lambda^-\cup\Lambda^+=\Lambda$.

Пусть $x\in V'$ – произвольная точка тора T_λ, соответствующего l-мерному конусу $\lambda\in\Lambda$, порожденному примитивными целочисленными ковекторами $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l$. Пусть λ лежит на границе конуса $\lambda'\in\Lambda$, порожденного ковекторами $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l,\ldots\alpha_n$. Рассмотрим систему координат $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, соответствующую набору ковекторов $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$. Тогда $u_i(x)=0$, $i=1,2,\ldots,l$. Имеем:

$$z_n=\sigma(u_1,u_2,\ldots,u_n)=b\,u_1^{\alpha_1(\partial/\partial k_n)}u_2^{\alpha_2(\partial/\partial k_n)}\cdots u_l^{\alpha_l(\partial/\partial k_n)},$$

где $b=u_{l+1}^{\alpha_{l+1}(\partial/\partial k_n)}u_{l+2}^{\alpha_{l+2}(\partial/\partial k_n)}\cdots u_n^{\alpha_n(\partial/\partial k_n)}$, и значит, $b(x)\neq 0$. Вычислим значение $\zeta_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n},x}(t)$ ($\zeta^{\infty}_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n},x}(t)$) в 2-х случаях.

1. $\lambda\notin\Lambda^+$ ($\lambda\notin\Lambda^-$). Тогда σ имеет полюс в точке x ($\sigma(x)=0$ соответственно) и поэтому $\zeta_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n},x}(t)=1$ ($\zeta^{\infty}_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n},x}(t)=1$ соответственно).

2. $\lambda\in\Lambda^+$ ($\lambda\in\Lambda^-$). Поскольку система $F_1,F_2,\ldots,F_k$ является σ-невырожденной (на бесконечности) по отношению к многогранникам $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k$, и разбиение Λ достаточно мелко, выполняется соотношение $l+k\leq n$ и существует система координат
$$(u_1,\ldots,u_l,w_{l+1},\ldots,w_n)$$

в окрестности U точки x, такая что $w_i(x) = 0,\ i = l{+}1, \dots, n$ и

$$F_i = a_i\, u_1^{m_{i,1}} u_2^{m_{i,2}} \cdots u_l^{m_{i,l}} \cdot w_{n-i+1}^{m_{i,n-i+1}}, \tag{7}$$

где $a_i(x) \neq 0,\ i = 1, 2, \dots, k$. Обозначим: $V_x = V \cap (C^*)^n \cap U$ В соответствии с (7) имеем:

$$V_x = \{u_i \neq 0,\, i \leq l;\, w_i = 0,\, i > n-k\} \subset U.$$

Таким образом, $\zeta_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n},x}(t) = \zeta_{g|_{\{u_i\neq 0,\, i\leq l\}},0}(t)$ $(\zeta^{\infty}_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n},x}(t) = \zeta^{\infty}_{g|_{\{u_i\neq 0,\, i\leq l\}},0}(t))$, где

$$g(u_1, \dots, u_l, w_{l+1}, \dots, u_{n-k}) = b\, u_1^{\alpha_1(\partial/\partial k_n)} u_2^{\alpha_2(\partial/\partial k_n)} \cdots u_l^{\alpha_l(\partial/\partial k_n)}$$

– росток в нуле функции от $n-k$ переменных.

$l > 1$. Как и в [3, section 4], заключаем, что

$$\zeta_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n},x}(t) = 1 \quad (\zeta^{\infty}_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n},x}(t) = 1).$$

$l = 1$. Единственный нетривиальный случай. Обозначим: $\alpha = \alpha_1$. Имеем:

$$\zeta_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n},x}(t) = 1 - t^{\alpha(\partial/\partial k_n)} \quad (\zeta^{\infty}_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n},x}(t) = 1 - t^{-\alpha(\partial/\partial k_n)}). \tag{8}$$

Пусть $\lambda \in \Lambda^+$ $(\lambda \in \Lambda^-)$ и $l = 1$. Рассматривая систему координат $(u_2, \dots, u_{n+1})$ на торе $T_\lambda = \{u_1 = 0\}$ получаем: $T_\lambda \cap V' = \{Q_{1,\alpha} = Q_{2,\alpha} = \ldots = Q_{k,\alpha} = 0\}$, где для многочлена, заданного формулой $F_i = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n\cap\Delta_i} F_{i,\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$, мы обозначаем:

$$Q_{i,\alpha} = \sum_{\mathbf{k}\in\Delta_i^{\{1,2,\dots,n\},\alpha}} F_{i,\mathbf{k}}\, u_2^{\alpha_2(\mathbf{k})} u_3^{\alpha_3(\mathbf{k})} \cdots u_n^{\alpha_n(\mathbf{k})}.$$

Таким образом, пересечение $T_\lambda \cap V'$ является множеством нулей системы многочленов Лорана $Q_{i,\alpha}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Применяя основные результаты из [4], [5], получаем:

$$\chi(T_\lambda \cap V') = l!\, R_l(\Delta(Q_{1,\alpha}), \Delta(Q_{2,\alpha}), \dots, \Delta(Q_{k,\alpha})), \tag{9}$$

где $\Delta(\cdot)$ обозначает многогранник Ньютона рассматриваемого многочлена. Поскольку системы многогранников $\Delta(Q_{i,\alpha})$, $i = 1, 2, \dots, k$ и многогранников $\Delta_i^{\alpha} = \Delta_i^{\{1,2,\dots,n\},\alpha}$, $i = 1, 2, \dots, k$ изоморфны как системы подмножеств целочисленных решеток, соответствующие смешанные объемы совпадают, и поэтому

$$R_l(\Delta(Q_{1,\alpha}), \Delta(Q_{2,\alpha}), \dots, \Delta(Q_{k,\alpha})) = R_l(\Delta_1^\alpha, \Delta_2^\alpha, \dots, \Delta_k^\alpha). \tag{10}$$

Собирая формулы (8), (9), (10), получаем:

$$\begin{aligned}
\int_{T_\lambda \cap V'} \zeta_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n}, x}(t)^{d\chi} &= (1 - t^{\alpha(\frac{\partial}{\partial k_n})})^{l!\, R_l(\Delta_1^\alpha, \Delta_2^\alpha, \dots, \Delta_k^\alpha)}, \\
\int_{T_\lambda \cap V'} \zeta^\infty_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n}, x}(t)^{d\chi} &= (1 - t^{-\alpha(\frac{\partial}{\partial k_n})})^{l!\, R_l(\Delta_1^\alpha, \Delta_2^\alpha, \dots, \Delta_k^\alpha)}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Перемножая равенства (11) по всем стратам $T_\lambda \subset X'_\Lambda$ размерности $n-1$ и учитывая (6), получаем формулы (1) и (3). Уравнения (2) и (4) следуют из (1) и (3) соответственно вследствие мультипликативности дзета-функций. Множитель $P_{\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_k}(t)$ отвечает дзета-функции $\zeta_{z_n|_{V\cap\mathbb{C}^*_n}}(t)$, где $\mathbb{C}^*_n = \{\mathbf{z} \in (\mathbb{C}^*)^n \mid z_i = 0,\ i = 1, 2, \dots, n-1\}$.

3 Дзета-функция многочлена на полном пересечении

Рассмотрим набор многочленов $f_0, f_1, \dots, f_k$ от переменных $z_1, \dots, z_n$ и множество $V = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid f_1(\mathbf{z}) = f_2(\mathbf{z}) = \dots = f_k(\mathbf{z}) = 0\}$. Как и в предыдущем параграфе, $\Delta_i = \Delta(f_i)$ – многогранник Ньютона многочлена f_i, $i = 0, 1, \dots, k$. Обозначим через $P^I_{\Delta_0}$ множество ковекторов $\alpha \in P^I$, для которых $\min(\alpha|_{\Delta_0}) > 0$.

Пусть $I \subset \{1, \dots, n\}$, – произвольное подмножество. Обозначим:

$$\zeta^I_{\Delta_0;\Delta_1,\dots,\Delta_k}(t) = \prod_{\alpha \in P^I_{\Delta_0}} (1 - t^{m_{\Delta_0}(\alpha)})^{l!\, R^0_l(\Delta_0^{I,\alpha}, \Delta_1^{I,\alpha}, \dots, \Delta_k^{I,\alpha})}, \tag{12}$$

где $m_{\Delta_0}(\alpha) = \min(\alpha|_{\Delta_0})$ – минимальное значение ковектора α на множестве Δ_0 и $R^0_l(x_0, x_1, \dots, x_k) = \left[\prod_{i=1}^k \frac{x_i}{1+x_i}\right]_l - \left[\prod_{i=0}^k \frac{x_i}{1+x_i}\right]_l = R_l(x_1, x_2, \dots, x_k) - R_l(x_0, x_1, \dots, x_k)$ – однородный многочлен степени $l = |I| - 1$. Следующее утверждение является следствием Теоремы 1 и некоторых наблюдений, связанных с результатами, полученными Ю. Матсуи и К. Такеучи ([7]).

Теорема 3 *Пусть система многочленов* $f_0, f_1, \ldots, f_k$ *от* n *переменных невырождена относительно своих многогранников Ньютона* $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_k$. *Тогда*

$$\zeta_{f_0, V\cap(\mathbb{C}^*)^n}(t) = \zeta^{\{1,\ldots,n\}}_{\Delta_0;\Delta_1,\ldots,\Delta_k}(t), \tag{13}$$

$$\zeta_{f_0,V}(t) = \prod_{I\subset\{1,\ldots,n\}:\, I\neq\emptyset} \zeta^{I}_{\Delta_0;\Delta_1,\ldots,\Delta_k}(t), \tag{14}$$

где $V = \{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n \mid f_1(\mathbf{z}) = f_2(\mathbf{z}) = \ldots = f_k(\mathbf{z}) = 0\}$ *– множество нулей системы.*

Замечание. Рассмотрим случай $k = 0$. Из уравнения (12) получаем:

$$\zeta^I_{\Delta_0}(t) = \prod_{\alpha\in P^I_{\Delta_0}} (1 - t^{m_{\Delta_0}(\alpha)})^{(-1)^l l!\, Vol_l(\Delta_0^{I,\alpha})}.$$

Равенство (14) дает формулу для (глобальной) дзета-функции $\zeta_{f_0,\mathbb{C}^n}$ многочлена f_0 в нуле, которая является аналогом теоремы Либгобера-Спербера ([6]) и получена Ю. Матсуи и К. Такеучи ([7, section 4]).

Доказательство теоремы. Заметим, что из уравнения (13) следует уравнение (14) в силу мультипликативности дзета-функции. Докажем формулу (13).

Рассмотрим систему многочленов $F_0, F_1, \ldots, F_k$ от $n+1$ переменных $(\mathbf{z}, z_{n+1}) = (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$, заданных следующей формулой:

$$F_0(z_1, z_2 \ldots, z_{n+1}) = f_0(z_1, z_2 \ldots, z_n) - z_{n+1},$$
$$F_i(z_1, z_2 \ldots, z_{n+1}) = f_i(z_1, z_2 \ldots, z_n),\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Рассмотрим множество нулей системы $W = \{(\mathbf{z}, z_{n+1}) \in C^{n+1} \mid F_0(\mathbf{z}) = F_1(\mathbf{z}) = \ldots = F_k(\mathbf{z}) = 0\}$. Расслоения, заданные отображениями

$$V\cap(\mathbb{C}^*)^n \cap f_0^{-1}(\mathbb{D}^*_\delta) \xrightarrow{f_0} \mathbb{D}^*_\delta \ \text{ и } \ W\cap(\mathbb{C}^*)^{n+1}\cap\{|z_{n+1}|\leq\delta\} \xrightarrow{z_{n+1}} \mathbb{D}^*_\delta,$$

с очевидностью изоморфны, поэтому имеем:

$$\zeta_{f_0,V\cap(\mathbb{C}^*)^n}(t) = \zeta_{z_{n+1},W\cap(\mathbb{C}^*)^{n+1}}(t). \tag{15}$$

Рассмотрим вложение пространств $\mathbb{R}^n_{\mathbf{k}} = \{k_{n+1} = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. При $i > 0$ многогранники Ньютона многочленов f_i и F_i совпадают: $\Delta(F_i) = \Delta(f_i) = \Delta_i$. Многогранник Ньютона многочлена F_0 является конусом высоты 1 над многогранником Ньютона многочлена f_0, $\Delta(F_0) = C\Delta(F_0) = C\Delta_0$.

Предложение 1 *Для системы многочленов $f_0, f_1, \ldots, f_k$, невырожденной относительно своих многогранников Ньютона, система многочленов $F_0, F_1, \ldots, F_k$ является σ-невырожденной относительно своих многогранников Ньютона.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное подмножество $I \subset \{1, 2, \ldots, (n+1)\}$, содержащее число $n+1$. Рассмотрим произвольный ковектор $\alpha \in P_+^I$. Введем обозначения: $I' = I \setminus \{n+1\}$, $\alpha' = \alpha|_{\mathbb{R}^{I'}}$. Имеем: $F_i^{I,\alpha}(\mathbf{z}, z_{n+1}) = f_i^{I',\alpha'}(\mathbf{z})$, $i = 1, \ldots, k$. Возможны три случая.

1. $\alpha(\frac{\partial}{\partial k_{n+1}}) > \min(\alpha'|_{\Delta_0^{I'}})$. Тогда $(C\Delta_0)^{I,\alpha} = \Delta_0^{I',\alpha'}$, $F_0^{I,\alpha}(\mathbf{z}, z_{n+1}) = f_0^{I',\alpha'}(\mathbf{z})$.
2. $\alpha(\frac{\partial}{\partial k_{n+1}}) < \min(\alpha'|_{\Delta_0^{I'}})$. Тогда $(C\Delta_0)^{I,\alpha} = \{(0, \ldots, 0, 1)\}$, $F_0^{I,\alpha} = -z_{n+1}$.
3. $\alpha(\frac{\partial}{\partial k_{n+1}}) = \min(\alpha'|_{\Delta_0^{I'}})$. Тогда $(C\Delta_0)^{I,\alpha} = C(\Delta_0^{I',\alpha'})$ – конус целочисленной высоты 1 над $\Delta_0^{I',\alpha'}$; $F_0^{I,\alpha}(\mathbf{z}, z_{n+1}) = f_0^{I',\alpha'}(\mathbf{z}) - z_{n+1}$.

Нетрудно видеть, что во всех трех случаях 1-формы $dF_i^{I,\alpha}$ линейно независимы на множестве нулей $\{(\mathbf{z}, z_{n+1}) \in (\mathbb{C}^*)^{n+1} \mid F_0(\mathbf{z}, z_{n+1}) = F_1(\mathbf{z}, z_{n+1}) = \ldots = F_k(\mathbf{z}, z_{n+1}) = 0\}$. $\square$

В силу Предложения 1 к системе многочленов $F_0, F_1, \ldots, F_k$ применима Теорема 1:

$$\zeta_{z_{n+1}, W\cap(\mathbb{C}^*)^{n+1}}(t) = \prod_{\alpha \in P_+^{I_0}} \left(1 - t^{\alpha\left(\frac{\partial}{\partial k_{n+1}}\right)}\right)^{n!\, R_n((C\Delta_0)^{I_0,\alpha}, \Delta_1^{I_0,\alpha}, \ldots, \Delta_k^{I_0,\alpha})}, \tag{16}$$

где $I_0 = \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Легко видеть, что в случаях 1,2, рассмотренных выше, показатель $R_n((C\Delta_0)^{I,\alpha}, \Delta_1^{I,\alpha}, \ldots, \Delta_k^{I,\alpha})$ равен 1. Поэтому формула (16) эквивалентна равенству:

$$\zeta_{z_{n+1}, W\cap(\mathbb{C}^*)^{n+1}}(t) = \prod_{\alpha \in P_{\Delta_0}^{I'_0}} (1 - t^{m_{\Delta_0}(\alpha)})^{n!\, R_n((C(\Delta_0^{I'_0,\alpha'}), \Delta_1^{I'_0,\alpha'}, \ldots, \Delta_k^{I'_0,\alpha'})}. \tag{17}$$

Теперь Теорема 3 следует из формул (15), (17) и равенства

$$n! R_n((C(\Delta_0^{I',\alpha'}), \Delta_1^{I',\alpha'}, \ldots, \Delta_k^{I',\alpha'}) = (n-1)! R_{n-1}^0(\Delta_0^{I',\alpha'}, \Delta_1^{I',\alpha'}, \ldots, \Delta_k^{I',\alpha'}),$$

которое получено в следующем предложении. $\square$

Предложение 2 *Пусть $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $\beta \in P^I$, $b \neq 0$. Пусть $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_k \subset (\mathbb{R}_+)^n \subset \mathbb{R}^I \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – целочисленные многогранники, такие что ограничение ковектора β на множество Δ_i является постоянной функцией, $i = 0, 1, \ldots, k$. Пусть $C\Delta_0$ – конус над Δ_0 с вершиной $\frac{\partial}{\partial k_{n+1}} = (0, \ldots, 0, 1)$. Тогда выполняется следующее соотношение:*

$$n! R_n((C(\Delta_0), \Delta_1, \ldots, \Delta_k) = (n-1)! R^0_{n-1}(\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_k).$$

Доказательство. Рассмотрим систему многочленов $F_0, F_1, \ldots, F_k$, невырожденную относительно фиксированной системы своих многогранников Ньютона $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Соображения, аналогичные доказательству Предложения 1, показывают, что система многочленов $F_0(\mathbf{z}) - z_{n+1}, F_1(\mathbf{z}), \ldots, F_k(\mathbf{z})$ от $(n+1)$ переменной является σ-невырожденной на бесконечности относительно своих многогранников Ньютона $C(\Delta_0), \Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Обозначим: $W = \{(\mathbf{z}, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid F_0(\mathbf{z}) - z_{n+1} = F_1(\mathbf{z}) = \ldots = F_n(\mathbf{z}) = 0\}$. Применяя формулу (3) для дзета-функции на бесконечности, получаем:

$$\zeta^\infty_{z_{n+1}, W \cap (\mathbb{C}^*)^{n+1}}(t) = \prod_{\alpha \in P^{I_0}_-} (1 - t^{-\alpha(\frac{\partial}{\partial k_{n+1}})})^{n!\, R_n((C\Delta_0)^{I_0,\alpha}, \Delta_1^{I_0,\alpha}, \ldots, \Delta_k^{I_0,\alpha})}, \tag{18}$$

где $I_0 = I \cup \{n+1\}$.

Рассмотрим произвольный ковектор $\alpha \in P^{I_0}_-$. Обозначим через α' ограничение ковектора α на множество $\mathbb{R}^I \subset \mathbb{R}^{I_0}$. Возможны два случая.

1. $\alpha(\frac{\partial}{\partial k_{n+1}}) = \min(\alpha'|_{\Delta_0})$ и $\alpha' = s\beta$, $s = \pm 1$. Тогда соответствующий множитель в правой части (18) равен $(1 - t^{-s\beta(\Delta_0)})^{n!\, R_n((C\Delta_0), \Delta_1, \ldots, \Delta_k)}$.
2. $\alpha(\frac{\partial}{\partial k_{n+1}}) \neq \min(\alpha'|_{\Delta_0})$ или $\alpha' \neq \pm\beta$. Тогда $\dim((C\Delta_0)^{I_0,\alpha} + \Delta_1^{I_0,\alpha} + \ldots + \Delta_k^{I_0,\alpha}) < n$, и поэтому $R_n((C\Delta_0), \Delta_1, \ldots, \Delta_k) = 0$.

Из этого рассмотрения следует, что формула (18) эквивалентна равенству

$$\zeta^\infty_{z_{n+1}, W \cap (\mathbb{C}^*)^{n+1}}(t) = (1 - t^{s\beta(\Delta_0)})^{n!\, R_n((C\Delta_0), \Delta_1, \ldots, \Delta_k)}, \tag{19}$$

где $s = \pm 1$ определяется следующем условием: $s\beta(\Delta_0) \geq 0$.

Применим теперь формулу из [7] для дзета-функции на бесконечности функции F_0 на полном пересечении:

$$\zeta^\infty_{F_0, V \cap (\mathbb{C}^*)^n}(t) = \prod_{\alpha \in P^I_{\Delta_0,-}} (1 - t^{-\min(\alpha|_{\Delta_0})})^{(n-1)!\, R^0_{n-1}(\Delta_0^{I,\alpha}, \Delta_1^{I,\alpha}, \ldots, \Delta_k^{I,\alpha})}, \tag{20}$$

где $V = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid F_1(\mathbf{z}) = \ldots = F_k(\mathbf{z}) = 0\}$ и $P^I_{\Delta_0,-}$ – множество ковекторов $\alpha \in P^I$, таких что $\min(\alpha|_{\Delta_0}) < 0$. Аналогичные рассуждения упрощают формулу (20):

$$\zeta^{\infty}_{F_0, V\cap(\mathbb{C}^*)^n}(t) = (1 - t^{m\beta(\Delta_0)})^{(n-1)!\, R^0_{n-1}(\Delta_0,\Delta_1,\ldots,\Delta_k)}. \qquad (21)$$

Теперь Предложение 2 следует из формул (19), (21) и равенства $\zeta^{\infty}_{z_{n+1}, W\cap(\mathbb{C}^*)^{n+1}}(t) = \zeta^{\infty}_{F_0, V\cap(\mathbb{C}^*)^n}(t)$. $\square$

Литература

[1] Буземан Г., Выпуклые поверхности, М.: Наука, 1964.

[2] Gusein-Zade S. M., Siersma D., Deformations of polynomials and their zeta-functions, Journal of Mathematical Sciences, 144, no. 1, p. 3782–3788, 2007.

[3] Gusev G. G., Monodromy zeta-functions of deformations and Newton diagrams, Rev. Mat. Complut., 22, no. 2, p. 447-454, 2009.

[4] Хованский А. Г., Многогранники Ньютона и торические многообразия, Функ. анал. и прил., 11, 4, с. 56–64, 1977.

[5] Хованский А. Г., Многогранники Ньютона и род полных пересечений, Функ. анал. и прил., 12, 1, p. 51–61, 1978.

[6] Libgober, A., Sperber, S., On the zeta function of monodromy of a polynomial map, Compositio Mathematica, 95 no. 3, p. 287-307, 1995.

[7] Yutaka Matsui, Kiyoshi Takeuchi, Monodromy zeta-function at infinity, Newton polyhedra and constructible sheaves, arXiv: math.AG/0809.3149v3.

[8] Siersma D., Tibar M., Deformations of polynomials, boundary singularities and monodromy, Mosc. Math. J., 3, no. 2, p. 661-679, 2003.

[9] Варченко А. Н., Теоремы топологической эквисингулярности семейств алгебраических многообразий и семейств полиномиальных отображений, Изв. АН СССР. Сер. матем., 36, 5, с. 957-1019, 1972.

[10] Viro O. Y., Some integral calculus based on Euler characteristic, Lecture Notes in Math., vol. 1346, Springer-Verlag, p. 127–138, 1988.

Г. Г. Гусев, Московский Государственный Университет, Независимый Московский Университет.
E-mail: gusev@mccme.ru