Ю.В. Элияшев

О гомологиях и когомологиях дополнений к наборам координатных плоскостей

Введение

Топология наборов координатных плоскостей представляет интерес в различных областях: в торической и комбинаторной топологии [2, 3], в теории торических многообразий, где дополнения к наборам координатных плоскостей выступают в роли пространств однородных координат для торических многообразии [10, 11], в теории интегральных представлений голоморфных функций и вычетов в многомерном комплексном анализе, где наборы координатных плоскостей выступают в роли сингулярных множеств ядер интергральных представлений [1, 6, 8, 13].

В книге Горески и Макферсона [12](см. также [4]) был разработан универсальный комбинаторный метод вычисления (ко)гомологий для дополнений к *произвольным* наборам плоскостей, однако этот метод трудно применим для реализации явных конструкций базисных элементов (ко)гомологий, и часто ведет к довольно громоздким вычислениям. Исследования в области торической топологии, в частности работы Бухштабера и Панова [3, 2], позволили найти методы вычисления групп (ко)гомологий дополнений к *координатным* наборам плоскостей, которые проще универсальных методов и позволяют получать некоторую дополнительную информацию.

Важным семейством наборов комплексных координатных плоскостей являются наборы заданные простыми многогранниками, опишем способ их задания: пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерный простой многогранник, n-мерный многогранник называется простым если у него к каждой вершине сходится ровно n гиперграней. Через $F_1, \ldots, F_d$ обозначим гиперграни многогранника P. Сопоставим простому многограннику P набор координатных плоскостей в $\mathbb{C}^d$:

$$Z_P = \bigcup_{J \subseteq \{1,\ldots,d\}: F^J = \emptyset} L_J,$$

где $F^J = \bigcap_{j \in J} F_j$ и $L_J = \{z \in \mathbb{C}^d : z_j = 0, j \in J\}$.

Наборы Z_P возникают в разных областях: топология дополнений к наборам Z_P тесно связана с комбинаторикой многогранников [3], Z_P выступает в качестве сингулярного множества для ядер интегральных представлений голоморфных функций [6], [13], $\mathbb{C}^d \setminus Z_P$, можно рассматривать как пространство однородных координат [10], для компактных гладких проективных торических многообразии, т.е. любое компактное гладкое проективное торическое многообразие может быть представлено в виде $\mathbb{C}^d \setminus Z_P/G$, при подходящем выборе многогранника P и подгруппы G группы $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^d$.

В работе изучаются группы (ко)гомологий для дополнений к произвольным наборам координатных плоскостей, вещественным и комплексным, и дополнения к наборам плоскостей заданных простыми многогранниками. Данная работа фактически является продолжение работы автора представленной на конкурс Августа Мёбиуса 2008 года [9], в ней изучались (ко)гомологи для дополнения к набору плоскостей заданных d-угольником, т.е. набора вида

$$Z_{P^2} = \bigcup_{1<|i-j|<d-1} \{z_i = z_j = 0\},$$

в работе строилась в явном виде база групп гомологий и когомологий де Рама для $\mathbb{C}^d \setminus Z_{P^2}$. Гомологии $\mathbb{C}^d \setminus Z_{P^2}$ так же рассматривались в совместной работе автора с А.В. Казановой [5].

Первая половина работы посвящена изучению топологии дополнения к комплексным наборам координатных плоскостей, а вторая половина работы посвящена изучению топологии дополнения к вещественным наборам координатных плоскостей.

В первом разделе вначале идут основные факты о топологии дополнений к наборам комплексных координатных плоскостей, в изложении и отчасти обозначениях мы следуем работам [3], [2]. Известно, что кольцо когомологий $H^*(\mathbb{C}^d \setminus Z)$ дополнения к набору комплексных координатных плоскостей изоморфно кольцу когомологий некоторой дифференциальной градуированной алгебры [3]. Мы описываем двойственность Александера-Понтрягина между $\widetilde{H}^s(\mathbb{C}^d \setminus Z)$ и $\widetilde{H}_{2d-s-1}(\overline{Z})$ в терминах этой алгебры, где $\overline{Z} = Z \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация набора плоскостей Z. Так же в первом разделе мы строим способ явного геометрического задания циклов на $\overline{Z}$.

Во втором разделе доказывается теорема выражающая (ко)гомологии дополнения к набору комплексных координатных плоскостей, заданных простым многогранником P, через относительные (ко)гомологии этого простого многогранника по модулю наборов его граней коразмерности один (гиперграней), а именно доказывается следующая теорема

Теорема. *Имеют место следующие изоморфизмы:*

$$H^s(\mathbb{C}^d \setminus Z_P) \simeq \bigoplus_{M\subseteq[d]} H^{s-|M|}(P, F_M),$$

$$H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z_P) \simeq \bigoplus_{M\subseteq[d]} H_{s-|M|}(P, F_M),$$

где $[d] = \{1, \ldots, d\}$, $|M|$ *— мощность множества* M, $F_M = \bigcup_{i\in M} F_i$, F_i *— гипергрань многогранника* P.

В конце второго раздела строится геометрическая трактовка этой теоремы, т.е. способ при помощи которого можно по циклу из $H_{s-|M|}(P, F_M)$ построить геометрически соответствующий цикл из $H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z_P)$.

В третьем разделе доказываются аналоги теорем первого раздела для случая дополнения к вещественному набору плоскостей, а именно строится такая дифференциальная градуированная алгебра, что кольцо когомологий $H^*(\mathbb{R}^d \setminus Y)$ дополнения к набору вещественных координатных плоскостей изоморфно кольцу когомологий этой алгебры. Затем описывается двойственность Александера-Понтрягина между $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^d \setminus Y)$ и $\widetilde{H}_{d-s-1}(\overline{Y})$ в терминах этой алгебры, где $\overline{Y} = Y \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация набора плоскостей Y. Так же как и в первом разделе, мы строим способ явного геометрического задания циклов на $\overline{Y}$.

В четвертом разделе доказываются аналоги теорем раздела два, для случая когомологий дополнений к наборам вещественных координатных плоскостей заданных простым многогранником:

Теорема. *Имеет место следующий изоморфизм:*

$$H^p(\mathbb{R}^d \setminus Y_P, \mathbb{Q}) \simeq \bigoplus_{M\subseteq[d]} H^p(P, F_M, \mathbb{Q}),$$

где $Y_P = \mathrm{Re}\, Z_P$, $[d] = \{1, \ldots, d\}$, $|M|$ *— мощность множества* M, $F_M = \bigcup_{i\in M} F_i$, F_i *— гипергрань многогранника* P.

1 Когомологии дополнения к набору комплексных координатных плоскостей и двойственность Александера-Понтрягина

В этом разделе мы вначале напомним основные факты о когомологиях дополнений к наборам комплексных координатных плоскостей, следуя работам [3], [2]. Кольцо когомологий $H^*(\mathbb{C}^d \setminus Z_{\mathcal{K}})$ изоморфно кольцу когомологий некоторой дифференциальной градуированной алгебры $R(\mathcal{K})$ (см. ниже). Затем мы опишем двойственность Александера-Понтрягина в терминах этой алгебры.

Любой набор комплексных координатных плоскостей коразмерности больше 1 может быть задан с помощью подходящего симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве $[d] = \{1, \dots, d\}$. А именно, рассмотрим конфигурацию плоскостей

$$Z_{\mathcal{K}} := \bigcup_{\sigma \notin \mathcal{K}} L_\sigma,$$

где $\sigma = \{i_1, \dots, i_m\} \subseteq [d]$ — подмножество в $[d]$ (не порождающее симплекс в $\mathcal{K}$), а

$$L_\sigma = \{z \in \mathbb{C}^d : z_{i_1} = \dots = z_{i_m} = 0\}.$$

Положим

$$B_\tau := \{z \in \mathbb{C}^d : |z_j| = 1, j \notin \tau, |z_i| \leq 1, i \in \tau\},$$

где $\tau \subseteq [d]$. Обозначим

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := \bigcup_{\tau \in \mathcal{K}} B_\tau.$$

Теорема 1 ([3], Глава 9). *Существует $(S^1)^d$-эквивариантная деформационная ретракция $\mathbb{C}^d \setminus Z_{\mathcal{K}} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.*

Определение 1. *Кольцом Стенли-Райснера (или кольцом граней) симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве $[d]$ называется факторкольцо*

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_d]/\mathcal{I}_{\mathcal{K}},$$

где $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ — однородный идеал, порожденный мономами $v_\tau = \prod_{i \in \tau} v_i$, для которых $\tau \notin \mathcal{K}$:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{K}} = (v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_m} : \{i_1, \dots, i_m\} \notin \mathcal{K}).$$

Рассмотрим дифференциальную биградуированную факторалгебру $(R(\mathcal{K}), \delta)$, полагая

$$R(\mathcal{K}) := \Lambda[u_1, \ldots, u_d] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]/\mathcal{J},$$

где $\Lambda[u_1, \ldots, u_d]$ — внешняя алгебра, $\mathcal{J}$ — идеал вида

$$\mathcal{J} := (v_i^2, u_i v_i, i = 1, \ldots, d).$$

При этом образующим v_i, u_i приписываются бистепени

$$\text{bideg } v_i = (0, 2), \text{bideg } u_i = (-1, 2),$$

выполняются следующие соотношения:

$$\begin{gathered} v_i v_j = v_j v_i, u_i v_j = v_j u_i, u_i u_j = -u_j u_i, \\ \delta u_i = v_i, \delta v_i = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Теорема 2 ([3], Глава 8). *Кольцо когомологий $H^*(\mathbb{C}^d \setminus Z_{\mathcal{K}})$ изоморфно кольцу $H^*[R(\mathcal{K})]$.*

Замечание 1. *О связи Теоремы 2 и теоремы Горески-Макферсона [12] о когомологиях дополнений конфигураций плоскостей, см. [3], Глава 9.*

Далее мы опишем двойственность Александера-Понтрягина в терминах алгебры $R(\mathcal{K})$. Для начала напомним одну из формулировок теоремы двойственности Александера—Понтрягина. *Коэффициент зацепления* двух циклов $\sigma = \partial\beta$ и γ размерностей $r-1$ и q на сфере S^{r+q}, определяется как индекс пересечения β и γ:

$$\mathfrak{D}(\sigma, \gamma) = \chi(\beta, \gamma).$$

В следующей теореме рассматривается группа приведенных гомологий.

Теорема 3 (Двойственность Александера—Понтрягина)**.** *Пусть S^n – многообразие, гомеоморфное n-мерной сфере и T — полиэдр в нем. Тогда для $r + q = n$, $r = 1, \ldots, n$, группы слабых гомологий $\widetilde{H}_{r-1}(T)$ и $\widetilde{H}_q(S^n \setminus T)$ изоморфны, причем для всякой базы $(r-1)$–мерных гомологий $\{\sigma_i\}_{i=1}^p$ полиэдра T существует двойственная ей база q–мерных гомологий $\{\gamma_i\}_{i=1}^p$ дополнения $S^n \setminus T$ такая, что $\mathfrak{D}(\sigma_i, \gamma_j) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера) $i, j = 1, \ldots, p$.*

Рассмотрим алгебры

$$R' = \Lambda[u_1, \dots, u_d] \otimes \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_d]/\mathcal{J},$$

$$\mathcal{I}'_{\mathcal{K}} = \Lambda[u_1, \dots, u_d] \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{K}}/\mathcal{J},$$

для образующих которых выполняются соотношения (1). Имеет место изоморфизм $R(\mathcal{K}) \simeq R'/\mathcal{I}'_{\mathcal{K}}$.

Разобьем $\mathbb{C}^d$ на клетки вида

$$E_{IJ} := \{z \in \mathbb{C}^d : z_i \in \mathbb{R}_{>0}, i \in I, z_j = 0, j \in J, z_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}, k \notin I \cup J\},$$

сопоставленных парам подмножеств $I, J \subseteq [d], I \cap J = \emptyset$. В обозначении $z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j$ локальными координатами в E_{IJ}, служат $x_i, i \in I, x_k, y_k, k \notin I \cup J$. Ориентацию клетки E_{IJ} определяем порядком следования указанных координат в перечне всех координат $x_1, y_1, \dots, x_d, y_d$. Добавляя к данному клеточному разбиению одну 0-мерную клетку $\{\infty\}$ получаем клеточное разбиение сферы $S^{2d} = \mathbb{C}^d \cup \{\infty\}$.

Рассмотрим относительный клеточный комплекс $C_*(S^{2d}, \{\infty\}) = (C_*(S^{2d}, \{\infty\}), \partial)$ и зададим линейное отображение $\varphi : R' \to C_*(S^{2d}, \{\infty\})$, определенное на образующих R' следующим образом:

$$\varphi(u_I v_J) := -E_{IJ},$$

где $u_I v_J := u_{i_1} \dots u_{i_q} v_{j_1} \dots v_{j_p}$, $I = \{i_1, \dots, i_q\}$, $i_1 < \dots < i_q$, $J = \{j_1, \dots, j_p\}$ и $I \cap J = \emptyset, I, J \subseteq [d]$, (полагаем $u_\emptyset v_\emptyset = 1$). Заметим, что φ обращает градуировку: $\dim \varphi(\gamma) = 2d - \deg \gamma$.

Лемма 1. *Отображение φ является изоморфизмов цепных комплексов (R', δ) и $(C_*(S^{2d}, \{\infty\}), \partial)$.*

Доказательство. По определению идеала $\mathcal{J}$, мономы $u_I v_J$ порождают алгебру R', поэтому $R'^s \overset{\varphi}{\simeq} C_{2d-s}(S^{2d}, \{\infty\})$. Из

$$\delta u_I v_J = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} u_{I \setminus i_k} v_{J \cup i_k},$$

где $I = \{i_1, \dots, i_q\}$, $i_1 < \dots < i_q$, и того, что

$$\partial E_{IJ} = \sum_{k=1}^{q} (-1)^k E_{I \setminus i_k J \cup i_k},$$

получаем $\varphi(\delta u_I v_J) = \partial E_{IJ} = \partial\varphi(u_I v_J)$. Лемма доказана.

Заметим, что $Z_{\mathcal{K}} = \bigcup_{\gamma\in\mathcal{I}'_{\mathcal{K}}} |\varphi(\gamma)|$, где $|\varphi(\gamma)|$ — носитель цепи $\varphi(\gamma)$. Замыкание $\overline{Z}_{\mathcal{K}} = Z_{\mathcal{K}} \cup \{\infty\}$ набора $Z_{\mathcal{K}}$ является клеточным подкомплексом комплекса S^{2d} относительно введенного выше разбиения на клетки. Сужение φ на $\mathcal{I}'_{\mathcal{K}}$ дает изоморфизм цепных комплексов $(\mathcal{I}'_{\mathcal{K}}, \delta)$ и $(C_*(\overline{Z}_{\mathcal{K}}, \{\infty\}), \partial)$.

Из того что,

$$C_*(S^{2d}, \overline{Z}_{\mathcal{K}}) \simeq C_*(S^{2d}, \{\infty\})/C_*(\overline{Z}_{\mathcal{K}}, \{\infty\}),$$

и установленных выше изоморфизмов цепных комплексов получаем:

$$H^s(\mathbb{C}^d \setminus Z_{\mathcal{K}}) \simeq H^s[R(\mathcal{K})] \overset{\varphi}{\simeq} H_{2d-s}(C_*(S^{2d}, \{\infty\})/C_*(\overline{Z}_{\mathcal{K}}, \{\infty\})) \simeq H_{2d-s}(S^{2d}, \overline{Z}_{\mathcal{K}}).$$

Точная последовательность пары $(S^{2d}, \overline{Z}_{\mathcal{K}})$ дает $\widetilde{H}^s(\mathbb{C}^d \setminus Z_{\mathcal{K}}) \simeq \widetilde{H}_{2d-1-s}(\overline{Z}_{\mathcal{K}})$, здесь изоморфизм устроен следующим образом $\gamma \to \overline{\partial\varphi(\gamma)}$, где γ — цикл из $R(\mathcal{K})$, а $\overline{\partial\varphi(\gamma)}$ — замыкание границы $\varphi(\gamma)$ в сферической компактификации $S^{2d} = \mathbb{C}^d \cup \{\infty\}$.

Алгебру $R(\mathcal{K})$ — можно рассматривать, как алгебру коцепей клеточного разбиения пространства $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, в которой умножение получено из клеточной аппроксимации диагонального отображения $\Delta : \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, [3], глава 8.

Разобьем $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ на клетки

$$D_{IJ} = \{z \in \mathbb{C}^d : |z_i| = 1, z_i \neq -1, i \in I, |z_j| < 1, j \in J, z_k = -1, k \notin I \cup J\},$$

здесь $I \cap J = \emptyset, I, J \subseteq [d]$ и ориентация клеток определена порядком следования координат $x_1, y_1, \ldots, x_d, y_d, (z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j)$, клетка D_{IJ} является двойственной к коклетке $u_I v_J$, т.е. $\langle u_I v_J, D_{I'J'}\rangle = \delta^{J'J}_{I'I}$, где $\delta^{J'J}_{I'I} = 1$ при $J' = J$ и $I' = I$, в остальных случаях $\delta^{J'J}_{I'I} = 0$.

Пусть $\{\gamma^s_i\}_{i=1}^{N_s}$ база группы $H^s[R(\mathcal{K})] \simeq H^s(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ без учета элементов кручения и $\{\sigma^s_i\}_{i=1}^{N_s}$ двойственная ей база группы $H_s(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ также без учета элементов кручения, т.е. $\langle\gamma^s_i, \sigma^s_j\rangle = \delta_{ij}$. Пусть циклы σ_i и γ_i представленный в виде

$$\gamma^s_i = \sum_{\substack{q+2p=s\\ |I|=q, |J|=p}} C^i_{IJ} u_I v_J,$$

$$\sigma^s_i = \sum_{\substack{q+2p=s\\ |I|=q, |J|=p}} \widetilde{C}^i_{IJ} D_{IJ},$$

тогда $\langle \gamma_i^s, \sigma_j^s\rangle = \sum_{\substack{q+2p=s\\ |I|=q,|J|=p}} C^i_{IJ}\widetilde{C}^j_{IJ} = \delta_{ij}$.

Вычислим индекс пересечения E_{IJ} и D_{IJ}:

$$\chi(E_{IJ}, D_{IJ}) = (-1)^{\frac{|I|(|I|-1)}{2}}\delta^{J'J}_{I'I}.$$

Определим линейное отображение $\varphi' : R' \to C_*(S^{2d}, \{\infty\})$, определенное на образующих R' следующим образом:

$$\varphi'(u_I v_J) := (-1)^{\frac{|I|(|I|-1)}{2}} E_{IJ},$$

легко видеть, что если $\varphi(\gamma)$ — цикл в $H_*(S^{2d}, \overline{Z}_{\mathcal{K}})$, то и $\varphi'(\gamma)$ есть цикл в $H_*(S^{2d}, \overline{Z}_{\mathcal{K}})$.

Следовательно, мы получаем, что

$$\chi(\varphi'(\gamma_i^s), \sigma_j^s) = \delta_{ij},$$

а следовательно

$$\mathfrak{D}(\overline{\partial\varphi'}(\gamma_i^s), \sigma_j^s) = \chi(\varphi'(\gamma_i^s), \sigma_j^s) = \delta_{ij},$$

для $s > 0$. Таким образом, нами доказано.

Теорема 4. *Отображение* $\overline{\partial\varphi'} : \widetilde{H}^s[R(\mathcal{K})] \to \widetilde{H}_{2d-s-1}(\overline{Z}_{\mathcal{K}})$, *является изоморфизмом двойственности Александера-Понтрягина.*

2 Гомологии дополнения к набору комплексных координатных плоскостей, заданных простым многогранником

В этом разделе разделе доказывается теорема выражающая (ко)гомологии дополнения к набору комплексных координатных плоскостей, заданных простым многогранником, через относительные (ко)гомологии этого простого многогранника по модулю наборов его граней коразмерности один (гиперграней), а также строится геометрическая трактовка этой теоремы.

Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерный простой многогранник, n-мерный многогранник называется простым если у него к каждой вершине сходится ровно n гиперграней. Через $F_1, \ldots, F_d$ обозначим гиперграни многогранника P, так же введем следующие обозначения

$$F_J = \bigcup_{j \in J} F_j,\ F^J = \bigcap_{j \in J} F_j,$$

где $J \subseteq [d]$, будем полагать $F^{\emptyset} = P$. Далее будем считать, что на P введена структура клеточного комплекса с естественным разбиением на клетки, т.е. множества F^J являются замыканием клеток этого комплекса.

Сопоставим простому многограннику P набор координатных плоскостей в $\mathbb{C}^d$:

$$Z_P = \bigcup_{J \subseteq [d] : F^J = \emptyset} L_J,$$

где

$$L_J = \{z \in \mathbb{C}^d : z_j = 0, j \in J\}.$$

Многогранник P может быть задан следующей системой неравенств:

$$\langle x, \beta_i \rangle \geq \lambda_i,\ i = 1, \ldots, d,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и β_i — внутренняя нормаль к гипергране F_i. Будем считать, что ориентация многогранника определена при помощи ориентирующего репера $e_1, \ldots, e_n$, e_i — вектор обычного ортонормированного базиса $\mathbb{R}^n$. Зададим ориентацию клетки F^J, с помощью ориентирующего репера $\xi_1, \ldots, \xi_{n-|J|}$, такого что, репер $-\beta_{j_1}, \ldots, -\beta_{j_p}, \xi_1, \ldots, \xi_{n-|J|}$ имеет туже ориентацию что и $e_1, \ldots, e_n$, где $J = \{j_1, \ldots, j_p\}, j_1 < \cdots < j_p$. В случае $J = \{j\}$, ориентация $F^{\{j\}}$ есть ориентация края согласованная с ориентацией P. При выбранной таким образом ориентации F^J, имеем

$$\partial F^J = \sum_{i \notin J} \mathrm{sgn} \tau_{J,i} F^{J \cup i},$$

где $\tau_{J,i}$ подстановка вида

$$\tau_{Ji} = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_p & i \\ j'_1 & \dots & \dots & j'_{p+1} \end{pmatrix},$$

где $J = \{j_1, \dots, j_p\}, j_1 < \dots < j_p, J \cup i = \{j'_1, \dots, j'_{p+1}\}, j'_1 < \dots < j'_{p+1}$.

Зададим отображение $A_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d :$

$$A_P : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \langle x, \beta_1 \rangle - \lambda_1 \\ \vdots \\ \langle x, \beta_d \rangle - \lambda_d \end{pmatrix}.$$

Это отображение задает вложение $A_P : P \hookrightarrow \mathbb{R}^d_{\geq 0}$, далее мы будем считать, что P вложен в $\mathbb{R}^d_{\geq 0}$ при помощи A_P, обозначим

$$\mu_P := m^{-1}(A_P(P)),$$

где $m : (z_1, \dots, z_d) \to (|z_1|^2, \dots, |z_d|^2)$.

Теорема 5 ([7], [11]). *μ_P является гладким $(d+n)$-мерным ориентируемым многообразием, и существует деформационная ретракция $\mathbb{C}^d \setminus Z_P \to \mu_P$.*

Любому простому многограннику P можно однозначно сопоставить некоторый симплициальный комплекс $\mathcal{K}(P)$ на множестве $[d]$, следующим образом: $J \subseteq [d]$ тогда и только тогда образует симплекс в $\mathcal{K}(P)$, когда $F^J \neq \emptyset$. Из способа задания $\mathcal{K}(P)$ видно, что

$$Z_P = Z_{\mathcal{K}(P)},$$

далее вместо: $Z_{\mathcal{K}(P)}, R(\mathcal{K}(P)), H^*[R(\mathcal{K}(P))], \dots$ будем писать: $Z_P, R(P), H^*[R(P)], \dots$

Вернемся к рассмотрению алгебры $R(\mathcal{K})$, разобьем алгебру $R(\mathcal{K})$ на прямые слагаемые

$$R(\mathcal{K}) = \bigoplus_{M \subseteq [d]} R_M^{-q, 2p+2q}(\mathcal{K}),$$

где

$$R_M^{-q,2p+2q}(\mathcal{K}) = \langle u_I v_J \in R(\mathcal{K}) : I \cup J = M, I \cap J = \emptyset, |I| = q, |J| = p \rangle.$$

Сужение δ на $R_M^{-q,2p+2q}(\mathcal{K})$ задает следующий цепной комплекс:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} R_M^{-q,2p+2q}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\delta} R_M^{-q+1,2p+2q}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

через $H_M^{-q,2p+2q}[R(\mathcal{K})]$ обозначим когомологии этих комплексов. Очевидно, что

$$H^s[R(\mathcal{K})] \simeq \bigoplus_{\substack{2p+q=s \\ |M|=p+q}} H_M^{-q,2p+2q}[R(\mathcal{K})]. \tag{2}$$

Так как φ есть изоморфизм комплексов $(R(\mathcal{K}),\delta)$ и $(C_*(S^{2d},\overline{Z}_{\mathcal{K}}),\partial)$, то образы $\varphi(R_M^{-q,2p+2q}(\mathcal{K})) =: C^M_{q,2d-2p-2q}(S^{2d},\overline{Z}_{\mathcal{K}})$ образуют следующий цепной комплекс:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C^M_{q,2d-2p-2q}(S^{2d},\overline{Z}_{\mathcal{K}}) \xrightarrow{\partial} C^M_{q-1,2d-2p-2q}(S^{2d},\overline{Z}_{\mathcal{K}}) \xrightarrow{\partial} \dots,$$

через $H^M_{q,2d-2p-2q}(S^{2d},\overline{Z}_{\mathcal{K}})$ обозначим когомологии этого комплекса. Очевидно, что $H_M^{-q,2p+2q}[R(\mathcal{K})] \simeq H^M_{q,2d-2p-2q}(S^{2d},\overline{Z}_{\mathcal{K}})$ и

$$H_s(S^{2d},\overline{Z}_{\mathcal{K}}) \simeq \bigoplus_{\substack{2d-2p-q=s \\ |M|=p+q}} H^M_{q,2d-2p-2q}(S^{2d},\overline{Z}_{\mathcal{K}}). \tag{3}$$

Теорема 6. *Имеют место следующие изоморфизмы:*

$$H^s(\mathbb{C}^d \setminus Z_P) \simeq \bigoplus_{M\subseteq[d]} H^{s-|M|}(P,F_M),$$

$$H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z_P) \simeq \bigoplus_{M\subseteq[d]} H_{s-|M|}(P,F_M).$$

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $\psi : R(P) \to C_*(P)$, заданное на образующих $R(P)$ следующим образом:

$$\psi(u_I v_J) = \mathrm{sgn}\tau_{JI} F^J,$$

$$\tau_{JI} = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_p & i_1 & \dots & i_q \\ k_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & k_{p+q} \end{pmatrix},$$

где $J = \{j_1,\dots,j_p\}$, $j_1 < \dots < j_p$, $I = \{i_1,\dots,i_q\}$, $i_1 < \dots < i_q$, $J \cup I = \{k_1,\dots,k_{p+q}\}$, $k_1 < \dots < k_{p+q}$.

Покажем, что сужение ψ на $R_M^{-q,2p+2q}(P)$ задает изоморфизм комплексов $(R_M^{-q,2p+2q}(P),\delta)$ и $(C_{n-p}(P,F_{[d]\setminus M}),\partial)$. Любому моному $u_I v_J \in R_M^{-q,2p+2q}(P)$ мы можем однозначно сопоставить клетку в $C_{n-p}(P,F_{[d]\setminus M})$ при помощи ψ, а по любой клетке

$F^J, J \subseteq M$ и множеству M, мы можем однозначно найти $\gamma \in R_M^{-q,2p+2q}(P)$, такой что $\psi(\gamma) = F^J$, а именно $\psi(\pm u_{M\setminus J} v_J) = F^J$, прямая проверка показывает, что $\psi(\delta\gamma) = \partial\psi(\gamma)$. Таким образом мы получили

$$H_M^{-q,2p+2q}[R(\mathcal{K})] \simeq H_{n-p}(P, F_{[d]\setminus M}).$$

Обозначим F_M° внутренность множества F_M, из точных последовательностей пар $(P, F_{[d]\setminus M})$ и (P, F_M°) имеем $\widetilde{H}^{s-1}(F_M^\circ) \simeq H^s(P, F_M^\circ)$ и $\widetilde{H}_{s-1}(F_{[d]\setminus M}) \simeq H_s(P, F_{[d]\setminus M})$, так как ∂P есть $(n-1)$-мерная сфера и $\partial P \setminus F_{[d]\setminus M} = F_M^\circ$, то по двойственности Александера-Понтрягина получаем

$$H_{n-p}(P, F_{[d]\setminus M}) \simeq \widetilde{H}_{n-p-1}(F_{[d]\setminus M}) \simeq \widetilde{H}^{p-1}(F_M^\circ) \simeq H^p(P, F_M^\circ),$$

так как F_M гомотопически эквивалентно F_M°, имеем

$$H_{n-p}(P, F_{[d]\setminus M}) \simeq H^p(P, F_M),$$

данный изоморфизм, фактически можно рассматривать, как двойственность Пуанкаре. Из разложения (2) и указанных выше изоморфизмов получаем:

$$H^s(\mathbb{C}^d \setminus Z_P) \simeq \bigoplus_{M\subseteq[d]} H^{s-|M|}(P, F_M).$$

По теореме 5, существует деформационная ретракция $\mathbb{C}^d \setminus Z_P$ на $(d+n)$-мерное многообразие из этого следует, по двойственности Пуанкаре, что

$$H^s(\mathbb{C}^d \setminus Z_P) \simeq H_{d+n-s}(\mathbb{C}^d \setminus Z_P),$$

аналогично из разложения (2) и указанных выше изоморфизмов получаем:

$$H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z_P) \simeq \bigoplus_{M\subseteq[d]} H_{s-|M|}(P, F_M).$$

Теорема доказан.

Дадим геометрическую трактовку изоморфизма $H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z_P) \simeq \bigoplus_{M\subseteq[d]} H_{s-|M|}(P, F_M)$. Зададим линейное отображение $\phi_M : C_*(P) \to C_*(\mathbb{C}^d)$, напомним, что мы полагаем, что P вложен в $\mathbb{R}^d_{\geq 0}$ при помощи отображения A_P, пусть $\delta_p = (\Delta_p, \rho)$ есть сингулярный симплекс в P, где $\Delta_p \subset \mathbb{R}^p$ — стандартный p-мерный симплекс в $\mathbb{R}^p$, $\rho : \Delta_p \to P$ — гладкое отображение симплекса Δ_p в P, ориентацию симплекса полагаем заданной порядком следования координат $t_1, \ldots, t_p$, объемлющего пространства $\mathbb{R}^p \supset \Delta_p$, тогда $\phi_M(\delta_p)$ есть цепь вида

$$\phi_M(\delta_p) = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}\{z \in \mathbb{C}^d : |z_i| = \sqrt{\rho(t)_i}, i \in M; z_j = -\sqrt{\rho(t)_j}, j \notin M, t \in \Delta_p\},$$

здесь t пробегает весь Δ_p и $\rho(t)_i$ i-ая координата отображения ρ. Ориентацию цепи определяем порядком следования параметров $t_1, \ldots, t_p, \theta_{i_1}, \ldots, \theta_{i_N}$, где t_i параметризуют сингулярный симплекс δ_p, и $M = \{i_1, \ldots, i_N\}$, $i_1 < \cdots < i_N$ $(z_i = r_i e^{\sqrt{-1}\theta_i})$.

Дадим еще некоторые пояснения по поводу устройства отображения ϕ_M, пусть γ — цепь в P, тогда носитель цепи $\phi_M(\gamma)$ равен

$$|\phi_M(\gamma)| = m^{-1}(\gamma) \cap S_M,$$

где $m(z_1, \ldots, z_d) = (|z_1|^2, \ldots, |z_d|^2)$

$$S_M = \{z \in \mathbb{C}^d : z_i \in \mathbb{C}, i \in M; z_k \in \mathbb{R}_{\leq 0}, k \notin M\}.$$

Пусть θ_M относительный цикл из $H_p(P, F_M^\circ)$, тогда его граница $\partial\theta_M$ лежит в F_M°, и имеет размерность $p-1$, покажем, что $\phi_M(\theta_M)$ — цикл, $\dim \phi_M(\theta_M) = p + |M|$, а $\dim \phi_M(\partial\theta_M) < p + |M| - 1$, т.е. граница является "тонким множеством" и таким образом $\phi_M(\theta_M)$ — цикл.

Пусть $\{\gamma_M^{q,p,i}\}_{i=1}^{N_M^{q,p}}$ есть база группы $H_M^{-q,2p+2q}[R(P)]$ и $\tau_M^{q,p,i} = \varphi'(\gamma_M^{q,p,i})$, $\{\tau_M^{q,p,i}\}$ есть база группы $H^M_{q,2d-2p-2q}(S^{2d}, \overline{Z}_P)$, а $\eta_M^{q,p,i} = \psi(\gamma_M^{q,p,i})$ образуют базу группы $H_{n-p}(P, F_{[d]\setminus M})$, пусть $\{\theta_M^{q,p,i}\}$ двойственная ей база группы $H_p(P, F_M^\circ)$, т.е. $\theta_M^{q,p,i}$ такие циклы, что $\chi(\theta_M^{q,p,i}, \eta_M^{q,p,j}) = \delta_{ij}$. Обозначим $a_M^{ijk} \in P \subset \mathbb{R}^d_{\geq 0}$, точки пересечения циклов $\theta_M^{q,p,i}$ и $\eta_M^{q,p,j}$, можно считать, что их конечное число и циклы пересекаются трансверсально в этих точках, тогда $\chi(\theta_M^{q,p,i}, \eta_M^{q,p,j}) = \sum_k \chi_{a_M^{ijk}}(\theta_M^{q,p,i}, \eta_M^{q,p,j})$, где $\chi_{a_M^{ijk}}(\theta_M^{q,p,i}, \eta_M^{q,p,j})$ — индекс пересечения циклов в точке a_M^{ijk}. Обозначим $\sigma_M^{q,p,i} = \phi_M(\theta_M^{q,p,i})$ цикл в $\mathbb{C}^d \setminus Z_P$, из его конструкции видно, что он пересекается с относительным циклом $\tau_M^{q,p,i}$ по точкам $b_M^{ijk} \in \mathbb{C}^d \setminus Z_P$ с координатами: $(b_M^{ijk})_l = \sqrt{(a_M^{ijk})_l}$, если $l \in M$ и $(b_M^{ijk})_l = -\sqrt{(a_M^{ijk})_l}$, если $l \notin M$, где $(a_M^{ijk})_l$ и $(b_M^{ijk})_l$ l-ая координата точек a_M^{ijk} и b_M^{ijk} соответственно. Возьмем малые шевеления циклов $\tau_M^{q,p,i}$, и обозначим эти циклы $\widetilde{\tau}_M^{q,p,i}$. Циклы $\widetilde{\tau}_M^{q,p,i}$ можно выбрать так, чтобы $\widetilde{\tau}_M^{q,p,i}$ и $\phi_M(\theta_M^{q,p,j})$ пересекались трансверсально в точках $\widetilde{b}_M^{ijk}$, где $\widetilde{b}_M^{ijk}$ есть точка близкая к точке b_M^{ijk}, и чтобы параметры $t_1, \ldots, t_p, \theta_{i_1}, \ldots, \theta_{i_N}, M = \{i_1, \ldots, i_N\}$, задавали невырожденную параметризацию цикла $\phi_M(\theta_M^{q,p,j})$ в окрестности точки точки $\widetilde{b}_M^{ijk}$, где $t_1, \ldots, t_p$ локальные координаты задающие невырожденную параметризацию цикла $\theta_M^{q,p,j}$ в окрестности a_M^{ijk}. Так как $\widetilde{\tau}_M^{q,p,i}$ есть соответствующим образом выбранное малое шевеление $\tau_M^{q,p,i}$ мы имеем

$$\chi_{b_M^{ijk}}(\tau_M^{q,p,i}, \phi_M(\theta_M^{q,p,j})) = \chi_{\widetilde{b}_M^{ijk}}(\widetilde{\tau}_M^{q,p,i}, \phi_M(\theta_M^{q,p,j})),$$

с другой стороны учитывая условия на выбор $\widetilde{\tau}_M^{q,p,i}$ и все соглашения относительно ориентации циклов мы получаем, что $\chi_{\widetilde{b}_M^{ijk}}(\widetilde{\tau}_M^{q,p,i}, \phi_M(\theta_M^{q,p,j})) = \chi_{a_M^{ijk}}(\theta_M^{q,p,i}, \eta_M^{q,p,j})$, таким образом, имеем $\chi(\tau_M^{q,p,i}, \phi_M(\theta_M^{q,p,j})) = \delta_{ij}$.

Покажем, что $\chi(\tau_M^{q,p,i}, \sigma_{M'}^{q',p',j}) = 0$, если $M \neq M'$. Поскольку индекс пересечения определен для цепей дополнительных размерностей, то выполняется $p + |M| = p' + |M'|$, для всех случаев кроме тривиального ($M = \emptyset$) носитель цикла $\eta_M^{q,p,i}$ лежит на ∂P, мы можем считать, что пересечение цикла $\theta_{M'} \in H_{p'}(P, F^\circ_{M'})$, с ∂P лежит в $F^\circ_{M'}$, т.е. $\alpha = |\theta_{M'}| \cap |\eta_M^{q,p,i}| \subseteq F^\circ_{M'}$, из устройства отображения $\phi_{M'}$ и циклов $\tau_M^{q,p,i}$ видно, что они могут пересекаться только в точках множества $|\phi_{M'}(\alpha)|$. Рассмотрим случай $p \leq p'$, тогда $|M| \geq |M'|$ и следовательно существует $k \in M$, такое что $k \notin M'$, имеем, для любой точки $z \in |\tau_M^{q,p,i}|$, $z_k \geq 0$ (это следует из определения φ'), и для любой точки $z' \in |\phi_{M'}(\alpha)|$, $z'_k < 0$, таким образом в случае $p \leq p'$, при выполнение указанных выше условий пересечение циклов $\tau_M^{q,p,i}, \sigma_{M'}^{q',p',j}$ пусто и следовательно $\chi(\tau_M^{q,p,i}, \sigma_{M'}^{q',p',j}) = 0$. В случае $p > p'$, мы имеем, $\dim \eta_M^{q,p,i} + \dim \theta_{M'} < n = dimP$, и таким образом малым шевелением цикла $\theta_{M'}$ можно добиться того чтобы, $\alpha = \emptyset$ (т.е. привести циклы в общее положение), из этого следует, что $\phi_{M'}(\alpha) = \emptyset$ и $\chi(\tau_M^{q,p,i}, \sigma_{M'}^{q',p',j}) = 0$.

Зададим линейное отображение $\phi : \bigoplus_{M \subseteq [d], p} H_p(P, F_M) \to H_*(\mathbb{C}^d \setminus Z_P)$, совпадающее с ϕ_M на соответствующих слагаемых, т.е. $\phi|_{H_p(P, F_M)} = \phi_M$. Выше мы доказали следующую теорему.

Теорема 7. *Отображение ϕ задает геометрическую реализацию изоморфизма*

$$H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z_P) \simeq \bigoplus_{M \subseteq [d]} H_{s-|M|}(P, F_M).$$

3 Когомологии дополнения к набору вещественных координатных плоскостей и двойственность Александера-Понтрягина

В этом разделе мы доказываем аналоги теорем раздела 1, для случая дополнения к набору вещественных координатных плоскостей. Используемые методы во многом аналогичны методам раздела 1.

Также как и в комплексной ситуации, любой набор вещественных координатных плоскостей коразмерности больше 1 может быть задан с помощью подходящего симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве $[d] = 1, \ldots, d$. А именно, рассмотрим конфигурацию плоскостей

$$Y_{\mathcal{K}} := \bigcup_{\sigma \notin \mathcal{K}} L_{\sigma},$$

где $\sigma = \{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq [d]$ — подмножество в $[d]$ (не порождающее симплекс в $\mathcal{K}$), а

$$L_{\sigma} = \{x \in \mathbb{R}^d : x_{i_1} = \cdots = x_{i_m} = 0\}.$$

Положим

$$B_{\tau}^{\pm} := \{x \in \mathbb{R}^d : x_j \in \{-1, 1\}, j \notin \tau, -1 \leq x_i \leq 1, i \in \tau\},$$

где $\tau \subseteq [d]$. Обозначим

$$\mathcal{W}_{\mathcal{K}} := \bigcup_{\tau \in \mathcal{K}} I_{\tau}^{\pm}.$$

Теорема 8. *Существует деформационная ретракция* $\mathbb{R}^d \setminus Y_{\mathcal{K}} \to \mathcal{W}_{\mathcal{K}}$.

Введем отображения $m : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}^d$ и $m' : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}^d$:

$$m(z_1, \ldots, z_d) = (|z_1|, \ldots, |z_d|),$$

$$m'(x_1, \ldots, x_d) = (|x_1|, \ldots, |x_d|).$$

Пространства $m(\mathbb{C}^d \setminus Z_{\mathcal{K}})$ и $m(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ являются пространствами орбит для действия группы $(S^1)^d$ — вещественного d-мерного тора на $\mathbb{C}^d \setminus Z_{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ соответственно. По теореме 1 существует $(S^1)^d$-эквивариантная деформационная ретракция $r : \mathbb{C}^d \setminus Z_{\mathcal{K}} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, следовательно существует деформационная ретракция пространств орбит $\widetilde{r} : m(\mathbb{C}^d \setminus Z_{\mathcal{K}}) \to m(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$, определенная следующим образом $\widetilde{r}(x) = m \circ r \circ m^{-}1(x)$. Заметим, что $m(\mathbb{C}^d \setminus Z_{\mathcal{K}}) =$

$m'(\mathbb{R}^d \setminus Y_{\mathcal{K}})$ и $m(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = m'(\mathcal{W}_{\mathcal{K}})$, фактически $m'(\mathbb{R}^d \setminus Y_{\mathcal{K}})$ и $m'(\mathcal{W}_{\mathcal{K}})$ можно рассматривать как пространства орбит действия группы $(\mathbb{Z}_2)^d$ на $\mathbb{R}^d \setminus Y_{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{W}_{\mathcal{K}}$ соответственно. Следовательно мы можем задать ретракцию $r' : \mathbb{R}^d \setminus Y_{\mathcal{K}} \to \mathcal{W}_{\mathcal{K}}$, следующим образом: $r'(x)_i = \operatorname{sign} x_i \, \widetilde{r}(m'(x))_i$, где $r'(x)_i$ и $\widetilde{r}(x)_i$ i-ые координаты соответствующих отображений и $\operatorname{sign} x$ равен: 1 при $x > 0$, -1 при $x < 0$ и 0 при $x = 0$.

Разобьем $\mathcal{W}_{\mathcal{K}}$ на клетки $B_{I^+I^-J}$:

$$B_{I^+I^-J} = \{x \in \mathbb{R}^d : x_i = 1, i \in I^+, x_k = -1, k \in I^-, -1 < x_j < 1, j \in J\},$$

на множества индексов $I^+, I^-, J \subseteq [d]$ выполняются условия $I^+ \cap I^- = I^+ \cap J = I^- \cap J = \emptyset$, $I^+ \cup I^- \cup J = [d]$, J — образует симплекс в $\mathcal{K}$. Ориентация клетки определена порядком следования параметров $x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}$, $J = \{j_1, \ldots, j_p\}$, $j_1 < \cdots < j_p$.

Рассмотрим дифференциальную градуированную алгебру $(\widetilde{R}', \delta)$, порожденную мономами

$$u^+_{I^+} u^-_{I^-} v_J := u^+_{i^+_1} \ldots u^+_{i^+_q} u^-_{i^-_1} \ldots u^-_{i^-_s} v_{j_1} \ldots v_{j_p},$$

на множества индексов $I^+, I^-, J \subseteq [d]$ выполняются следующие условия $j_1 < \cdots < j_p$, $J = \{j_1, \ldots, j_p\}$, $I^- = \{i^-_1, \ldots, i^-_s\}$, $I^+ = \{i^+_1, \ldots, i^+_q\}$, $I^+ \cap I^- = I^+ \cap J = I^- \cap J = \emptyset$, $I^+ \cup I^- \cup J = [d]$.

При этом элементам мономов $v_i, u^{\pm}_i$ приписываются степени

$$\deg \ v_i = 1, \deg \ u^+_i = 0, \deg \ u^-_i = 0,$$

выполняются следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
v_i v_j = -v_j v_i, u^{\pm}_i v_j = v_j u^{\pm}_i, u^{\pm}_i u^{\pm}_j = u^{\pm}_j u^{\pm}_i, i \neq j \\
u^+_i u^+_i = u^+_i, u^-_i u^-_i = u^-_i, u^-_i u^+_i = u^+_i u^-_i = 0 \\
v_i u^-_i = v_i, v_i u^+_i = 0 \\
u^-_i v_i = 0, u^+_i v_i = v_i \\
\delta u^+_i = v_i, \delta u^-_i = -v_i, \delta v_i = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

дифференциал δ определен на мономах $u^+_{I^+} u^-_{I^-} v_J$ по правилу Лейбница:

$$\delta u^+_{I^+} u^-_{I^-} v_J = \Sigma_{i \in I^+} (-1)^{\varepsilon_{i,J}} u^+_{I^+ \setminus i} u^-_{I^-} v_{J \cup i} - \Sigma_{i \in I^-} (-1)^{\varepsilon_{i,J}} u^+_{I^+} u^-_{I^- \setminus i} v_{J \cup i},$$

где $\varepsilon_{i,J}$ определена следующим образом: $j_1 < \cdots < j_{\varepsilon_{i,J}} < i < j_{\varepsilon_{i,J}+1} < \cdots < j_p$, $J = \{j_1, \ldots, j_p\}$,

$$u^+_{I^+_1} u^-_{I^-_1} v_{J_1} \cdot u^+_{I^+_2} u^-_{I^-_2} v_{J_2} = \operatorname{sgn} \tau_{J_1 J_2} u^+_{I^+_2} u^-_{I^-_1} v_{J_1 \cup J_2},$$

если $I^+_1 \subseteq J_2 \cup I^+_2$, $I^-_2 \subseteq J_1 \cup I^-_1$ и $J_1 \cap J_2 = \emptyset$, иначе

$$u^+_{I^+_1} u^-_{I^-_1} v_{J_1} \cdot u^+_{I^+_2} u^-_{I^-_2} v_{J_2} = 0,$$

здесь $\tau_{J_1 J_2}$ перестановка следующего вида

$$\tau_{J_1 J_2} = \begin{pmatrix} j^1_1 & \dots & j^1_{p_1} & j^2_1 & \dots & j^2_{p_2} \\ j^3_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & j^3_{p_3} \end{pmatrix},$$

где $j^k_1 < \dots < j^k_{p_k}$, $J_k = \{j^k_1, \dots, j^k_{p_k}\}, p_3 = p_1 + p_2$.

Рассмотрим дифференциальную градуированную подалгебру $\widetilde{\mathcal{I}}'_{\mathcal{K}}$ алгебры $\widetilde{R}'$, эта подалгебра порождена мономами $u^+_{I^+} u^-_{I^-} v_J$, такими, что множество J не образует симплекса в комплексе $\mathcal{K}$. Введем обозначение

$$\widetilde{R}(\mathcal{K}) = \widetilde{R}' / \widetilde{\mathcal{I}}'_{\mathcal{K}}.$$

Теорема 9. *Кольцо когомологий $H^*(\mathbb{R}^d \setminus Y_{\mathcal{K}})$ изоморфно кольцу $H^*[\widetilde{R}(\mathcal{K})]$.*

Алгебра $\widetilde{R}(\mathcal{K})$ изоморфна алгебре клеточных коцепей комплекса $\mathcal{W}_{\mathcal{K}}$, т.е. $\widetilde{R}(\mathcal{K}) \simeq C^*(\mathcal{W}_{\mathcal{K}})$, умножение в алгебре $\widetilde{R}(\mathcal{K})$ получено при помощи клеточной аппроксимации диагонального отображения $\Delta : \mathcal{W}_{\mathcal{K}} \to \mathcal{W}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{W}_{\mathcal{K}}$, докажем это. Зададим линейное отображение $g : \widetilde{R}(\mathcal{K}) \to C^*(\mathcal{W}_{\mathcal{K}})$

$$g(u^+_{I^+} u^-_{I^-} v_J) = B^*_{I^+ I^- J},$$

где $B^*_{I^+ I^- J}$, коклетка двойственная клетке $B_{I^+ I^- J}$, т.е. $B^*_{I^+ I^- J}$ есть такой линейный функционал, что $\langle B^*_{I^+ I^- J}, B_{I'^+ I'^- J'} \rangle = \delta^{I'^+ I'^- J'}_{I^+ I^- J}$ (символ Кронекера). Из конструкции $\widetilde{R}(\mathcal{K})$ и клеточного разбиения $\mathcal{W}_{\mathcal{K}}$, видно, что $\widetilde{R}(\mathcal{K})^s \overset{g}{\simeq} C^s(\mathcal{W}_{\mathcal{K}})$ Из того, что

$$\partial B_{I^+ I^- J} = \sum_{k=1}^{p} [(-1)^k \partial B_{I^+ I^- \cup j_k J \setminus j_k} - (-1)^k \partial B_{I^+ \cup j_k I^- J \setminus j_k}],$$

где $J = \{j_1, \dots, j_p\}$, $j_1 < \dots < j_p$, получим что

$$g(\delta u^+_{I^+} u^-_{I^-} v_J) = \delta B^*_{I^+ I^- J} = \delta g(u^+_{I^+} u^-_{I^-} v_J).$$

Покажем что g сохраняет умножения. Вначале построим клеточную аппроксимацию $\widetilde{\Delta}$ диагонального отображения $\Delta : \mathcal{W}_{\mathcal{K}} \to \mathcal{W}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{W}_{\mathcal{K}}$, рассмотрим случай $\mathcal{K} = \Delta^0$, Δ^0 —

0-мерный симплекс, тогда $\mathcal{W}_{\Delta^0} = [-1,1]$: определим $\widetilde{\Delta} : [-1,1] \to [-1,1] \times [-1,1]$. По формуле

$$\widetilde{\Delta}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} (2x+1,-1) & \text{при } x \in [-1,0), \\ (1,2x-1) & \text{при } x \in [0,1]. \end{array} \right\} \tag{5}$$

Легко видеть, что $\widetilde{\Delta}$ и Δ гомотопны. Клеточный комплекс $C^*(\mathcal{W}_{\Delta^0})$, порожден коцепями $\{-1\}^*, \{1\}^*, (-1,1)^*$, непосредственная проверка показывает, что g есть мультипликативный изоморфизм между $C^*(\mathcal{W}_{\Delta^0})$ и $\widetilde{R}(\Delta^0)$, отсюда получаем, что для $\mathcal{K} = \Delta^{d-1}$, где Δ^{d-1} $(d-1)$-мерный симплекс, имеем клеточную аппроксимацию диагонального отображения $\widetilde{\Delta} : [-1,1]^d \to [-1,1]^d \times [-1,1]^d$, определенную по каждой координате при помощи (5), и получаем мультипликативный изоморфизм

$$g' : \widetilde{R}(\Delta^{d-1}) \to C^*([-1,1]^d),$$

заметим, что $\widetilde{R}' \simeq \widetilde{R}(\Delta^{d-1})$.

Из определения комплекса $\mathcal{W}_{\mathcal{K}}$, вытекает что клеточная аппроксимация $\widetilde{\Delta} : [-1,1]^d \to [-1,1]^d \times [-1,1]^d$ определяет для любого $\mathcal{K}$ клеточную аппроксимацию $\widetilde{\Delta} : \mathcal{W}_{\mathcal{K}} \to \mathcal{W}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{W}_{\mathcal{K}}$, замыкающую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}_{\mathcal{K}} & \longrightarrow & [-1,1]^d \\ \downarrow \widetilde{\Delta} & & \downarrow \widetilde{\Delta} \\ \mathcal{W}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{W}_{\mathcal{K}} & \longrightarrow & [-1,1]^d \times [-1,1]^d \end{array}$$

Отсюда же следует, что вложение $\mathcal{W}_{\mathcal{K}} \hookrightarrow [-1,1]^d$ индуцирует мультипликативное отображение $q : C^*([-1,1]^d) \to C^*(\mathcal{W}_{\mathcal{K}})$. Теперь рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{R}' & \xrightarrow{g'} & C^*([-1,1]^d) \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ \widetilde{R}(\mathcal{K}) & \xrightarrow{g} & C^*(\mathcal{W}_{\mathcal{K}}) \end{array}$$

Здесь отображения g', p, q мультипликативны, а g является аддитивным изоморфизмом. Докажем, что g также мультипликативно. Пусть $\alpha, \beta \in \widetilde{R}(\mathcal{K})$. Так как p — эпиморфизм, мы имеем $\alpha = p(\alpha'), \beta = p(\beta')$. Тогда

$$g(\alpha\beta) = gp(\alpha'\beta') = qg'(\alpha'\beta') = gp(\alpha')gp(\beta') = g(\alpha)g(\beta),$$

что и требовалось. Следовательно $H^*(\widetilde{R}(\mathcal{K})) \simeq H^*(\mathcal{W}_{\mathcal{K}})$, а по теореме 8 имеем $H^*(\mathbb{R}^d \setminus Y_{\mathcal{K}}) \simeq H^*(\mathcal{W}_{\mathcal{K}})$. Теорема доказана.

Заметим, что доказательство теоремы 9 практически идентично доказательству теоремы 2.

Вернемся к рассмотрению алгебры $\widetilde{R}(\mathcal{K})$, из теоремы 9, мы получаем, что $H^s(\mathbb{R}^d \setminus Y_{\mathcal{K}}, \mathbb{Q})$ изоморфна когомологиям алгебры $\widetilde{R}(\mathcal{K}) \otimes \mathbb{Q}$. Алгебра $\widetilde{R}(\mathcal{K})$ выглядит довольно громоздко, однако в случае когда нас интересуют когомологии над полем $\mathbb{Q}$, вычисления можно насколько упростить.

Рассмотрим дифференциальную градуированную алгебру $(Q(\mathcal{K}), \delta)$, полагая

$$Q(\mathcal{K}) := \mathbb{Q}[a_1, \dots, a_d] \otimes \Lambda'[\mathcal{K}],$$

где $\Lambda'[\mathcal{K}]$ — аналог кольца Стенли-Райснера симплициального комплекса $\mathcal{K}$, а именно

$$\Lambda'[\mathcal{K}] = \Lambda[b_1, \dots, b_d]/\mathcal{I}_{\mathcal{K}},$$

где $\Lambda[b_1, \dots, b_d]$ — внешняя алгебра от образующих $b_1, \dots, b_d$, а $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ — однородный идеал, порожденный мономами $b_\tau = \prod_{i \in \tau} b_i$, для которых $\tau \notin \mathcal{K}$:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{K}} = (b_{i_1} \cdot \ldots \cdot b_{i_m} : \{i_1, \dots, i_m\} \notin \mathcal{K}).$$

При этом образующим b_i, a_i приписываются степени

$$\deg\ b_i = 1, \deg\ a_i = 0,$$

выполняются следующие соотношения:

$$\begin{gathered} b_i b_j = -b_j b_i, a_i b_j = b_j a_i, a_i a_j = a_j a_i, i \neq j \\ a_i a_i = 1, a_i b_i = b_i, b_i a_i = -b_i \\ \delta a_i = b_i, \delta b_i = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Алгебра $Q(\mathcal{K})$ порождена мономами

$$a_I b_J := a_{i_1} \dots a_{i_q} b_{j_1} \dots b_{j_p},$$

для которых выполняются следующие условия $j_1 < \dots < j_p$, $J = \{j_1, \dots, j_p\}$, $I = \{i_1, \dots, i_q\}$, $I, J \subseteq [d]$, $I \cap J = \emptyset$, J образует симплекс в $\mathcal{K}$, (полагаем $a_\emptyset b_\emptyset = 1$). Дифференциал δ определен на этих мономах по правилу Лейбница.

Лемма 2. *Кольцо когомологий $H^*(\mathbb{R}^d \setminus Y_{\mathcal{K}}, \mathbb{Q})$ изоморфно кольцу $H^*[Q(\mathcal{K})]$.*

Доказательство. По теореме 9 имеем $H^*(\mathbb{R}^d \backslash Y_{\mathcal{K}}, \mathbb{Q}) \simeq H^*[\widetilde{R}(\mathcal{K}) \otimes \mathbb{Q}]$, остается только заметить, что алгебра $Q(\mathcal{K})$ получена из алгебры $\widetilde{R}(\mathcal{K}) \otimes \mathbb{Q}$, при помощи замены базиса:

$$u_i^+ = \frac{1+a_i}{2}, u_i^- = \frac{1-a_i}{2}, v_i = \frac{b_i}{2}.$$

Лемма доказана.

Далее мы опишем двойственность Александера-Понтрягина в терминах алгебры $\widetilde{R}(\mathcal{K})$.

Разобьем $\mathbb{R}^d$ на клетки вида

$$E_{I^+I^-J} := \{x \in \mathbb{R}^d : x_i \in \mathbb{R}_{>0}, i \in I^+, x_k \in \mathbb{R}_{<0}, k \in I^-, z_j = 0, j \in J\},$$

здесь $I^+, I^-, J \subseteq [d]$ $I^+ \cap I^- = I^+ \cap J = I^- \cap J = \emptyset$, $I^+ \cup I^- \cup J = [d]$. Локальными координатами в $E_{I^+I^-J}$, служат $x_i, i \notin J$. Ориентацию клетки $E_{I^+I^-J}$ определяем порядком следования указанных координат в перечне всех координат $x_1, \ldots, x_d$. Добавляя к данному клеточному разбиению одну 0-мерную клетку $\{\infty\}$ получаем клеточное разбиение сферы $S^d = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$.

Рассмотрим относительный клеточный комплекс $C_*(S^d, \{\infty\}) = (C_*(S^d, \{\infty\}), \partial)$ и зададим линейное отображение $\varphi : \widetilde{R}' \to C_*(S^d, \{\infty\})$, определенное на образующих $\widetilde{R}'$ следующим образом:

$$\varphi(u_{I^+}^+ u_{I^-}^- v_J) := (-1)^{\frac{|J|(|J|+1)}{2}} \mathrm{sgn} \tau_{JI} E_{I^+I^-J},$$

где

$$\tau_{JI} = \begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j_p & i_1 & \ldots & i_q \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & d \end{pmatrix},$$

где $J = \{j_1, \ldots, j_p\}$, $j_1 < \cdots < j_p$, $I^+ \cup I^- = \{i_1, \ldots, i_q\}$, $i_1 < \cdots < i_q$. Заметим, что φ обращает градуировку: $\dim \varphi(u_{I^+}^+ u_{I^-}^- v_J) = d - \deg u_{I^+}^+ u_{I^-}^- v_J$.

Лемма 3. *Отображение φ является изоморфизмов цепных комплексов $(\widetilde{R}', \delta)$ и $(C_*(S^d, \{\infty\}), \partial)$.*

Доказательство. Мономы $u_{I^+}^+ u_{I^-}^- v_J$, порождают алгебру $\widetilde{R}'$, цепи $E_{I^+I^-J}$ порождаю $C_*(S^d, \{\infty\})$, из этого получаем $\widetilde{R}'^s \overset{\varphi}{\simeq} C_{d-s}(S^d, \{\infty\})$. Значение кограничного оператора на мономах $u_{I^+}^+ u_{I^-}^- v_J$, было вычислено выше, вычислим значение граничного оператора на клетках $E_{I^+I^-J}$,

$$\partial E_{I^+I^-J} = -\sum_{i \in I^+} \mathrm{sgn} \tau_{i,I} E_{I^+ \backslash i, I^-, J \cup i} + \sum_{i \in I^-} \mathrm{sgn} \tau_{i,I} E_{I^+, I^- \backslash i, J \cup i},$$

где

$$\tau_{iI} = \begin{pmatrix} i & i_1 & \dots & [i] & \dots & i_p \\ i_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & i_p \end{pmatrix},$$

где $I^+ \cup I^- = \{i_1, \dots, i_p\}$ и $i_1 < \dots < i_p$. Непосредственная проверка показывает, что выполняется

$$\varphi(\delta\gamma) = \partial\varphi(\gamma).$$

Лемма доказана.

Заметим, что $Y_\mathcal{K} = \bigcup_{\gamma \in \widetilde{\mathcal{I}}'_\mathcal{K}} |\varphi(\gamma)|$, где $|\varphi(\gamma)|$ — носитель цепи $\varphi(\gamma)$. Замыкание $\overline{Y}_\mathcal{K} = Y_\mathcal{K} \cup \{\infty\}$ набора $Y_\mathcal{K}$ является клеточным подкомплексом комплекса S^d относительно введенного выше разбиения на клетки. Сужение φ на $\widetilde{\mathcal{I}}'_\mathcal{K}$ дает изоморфизм цепных комплексов $(\widetilde{\mathcal{I}}'_\mathcal{K}, \delta)$ и $(C_*(\overline{Y}_\mathcal{K}, \{\infty\}), \partial)$.

Из того что,

$$C_*(S^d, \overline{Y}_\mathcal{K}) \simeq C_*(S^d, \{\infty\})/C_*(\overline{Y}_\mathcal{K}, \{\infty\}),$$

и установленных выше изоморфизмов цепных комплексов получаем.

$$H^s(\mathbb{R}^d \setminus Y_\mathcal{K}) \simeq H^s[\widetilde{R}(\mathcal{K})] \overset{\varphi}{\simeq} H_{d-s}(C_*(S^d, \{\infty\})/C_*(\overline{Y}_\mathcal{K}, \{\infty\})) \simeq H_{d-s}(S^d, \overline{Y}_\mathcal{K})$$

Точная последовательность пары $(S^d, \overline{Y}_\mathcal{K})$ дает $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^d \setminus Y_\mathcal{K}) \simeq \widetilde{H}_{d-1-s}(\overline{Z}_\mathcal{K})$, здесь изоморфизм устроен следующим образом $\gamma \to \overline{\partial\varphi(\gamma)}$, где γ — цикл из $R(\mathcal{K})$, а $\overline{\partial\varphi(\gamma)}$ — замыкание границы $\varphi(\gamma)$ в сферической компактификации $S^d = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$.

Пусть $\{\gamma_i^s\}_{i=1}^{N_s}$ база группы $H^s[\widetilde{R}(\mathcal{K})] \simeq H^s(\mathcal{W}_\mathcal{K})$ без учета элементов кручения и $\{\sigma_i^s\}_{i=1}^{N_s}$ двойственная ей база группы $H_s(\mathcal{W}_\mathcal{K})$ также без учета элементов кручения, т.е. $\langle \gamma_i^s, \sigma_j^s \rangle = \delta_{ij}$. Пусть циклы σ_i и γ_i представленный в виде

$$\gamma_i^s = \sum_{|J|=s} C^i_{I^+I^-J} u^+_{I^+} u^-_{I^-} v_J,$$

$$\sigma_i^s = \sum_{|J|=s} \widetilde{C}^i_{I^+I^-J} B_{I^+I^-J},$$

тогда $\langle \gamma_i^s, \sigma_j^s \rangle = \sum_{|J|=s} C^i_{I^+I^-J} \widetilde{C}^j_{I^+I^-J} = \delta_{ij}$.

Вычислим индекс пересечения $E_{I^+I^-J}$ и $B_{I'^+I'^-J'}$:

$$\chi(E_{I^+I^-J}, B_{I'^+I'^-J'}) = \mathrm{sgn}\tau_{IJ}\, \delta^{I'^+I'^-J'}_{I^+I^-J},$$

где $\delta_{I^+I^-J}^{I'^+I'^-J'}$ — символ Кронекера,

$$\tau_{IJ} = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_q & j_1 & \dots & j_p \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & d \end{pmatrix},$$

где $I^+ \cup I^- = \{i_1, \dots, i_q\}$ и $i_1 < \dots < i_q$, $J = \{j_1, \dots, j_p\}$ и $j_1 < \dots < j_p$.

Определим линейное отображение $\varphi' : \widetilde{R}' \to C_*(S^d, \{\infty\})$, определенное на образующих $\widetilde{R}'$ следующим образом:

$$\varphi'(u_{I^+}^+ u_{I^-}^- v_J) := \operatorname{sgn} \tau_{IJ} E_{I^+I^-J},$$

легко видеть, что если $\varphi(\gamma)$ — цикл в $H_*(S^d, \overline{Y}_{\mathcal{K}})$, то и $\varphi'(\gamma)$ цикл в $H_*(S^d, \overline{Y}_{\mathcal{K}})$.

Мы получаем, что

$$\chi(\varphi'(\gamma_i^s), \sigma_j^s) = \delta_j^i,$$

а следовательно

$$\mathfrak{D}(\overline{\partial\varphi'}(\gamma_i^s), \sigma_j^s) = \chi(\varphi'(\gamma_i^s), \sigma_j^s) = \delta_j^i,$$

для $s > 0$. Таким образом, нами доказано.

Теорема 10. *Отображение* $\overline{\partial\varphi'} : \widetilde{H}^s[\widetilde{R}(\mathcal{K})] \to \widetilde{H}_{d-s-1}(\overline{Y}_{\mathcal{K}})$ *является изоморфизмом двойственности Александера-Понтрягина.*

4 Гомологии дополнения к набору вещественных координатных плоскостей, заданных простым многогранником

В этом разделе мы доказываем аналоги теорем из пункта 2 для гомологий дополнения к набору вещественных координатных плоскостей, заданных простым многогранником, т.е. множества $\mathbb{R}^d \setminus Y_P = \operatorname{Re}\mathbb{C}^d \setminus Z_P$. В этом разделе мы будем придерживаться обозначений раздела 2.

Сопоставим простому многограннику P набор вещественных координатных плоскостей координатных плоскостей в $Y_P = \operatorname{Re} Z_P$.

Вернемся к рассмотрению алгебры $Q(\mathcal{K})$, разобьем алгебру $Q(\mathcal{K})$ на прямые слагаемые

$$Q(\mathcal{K}) = \bigoplus_{\substack{M\subseteq[d]\\ p+q=|M|}} Q_M^{p,q}(\mathcal{K}),$$

где

$$Q_M^{p,q}(\mathcal{K}) = \langle a_I b_J \in Q(\mathcal{K}) : I \cup J = M, I \cap J = \emptyset, |I| = q, |J| = p\rangle.$$

Сужение δ на $Q_M^{p,q}(\mathcal{K})$ задает следующий цепной комплекс:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} Q_M^{p,q}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\delta} Q_M^{p+1,q-1}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

через $H_M^{p,q}[Q(\mathcal{K})]$ обозначим когомологии этих комплексов. Очевидно, что

$$H^p[Q(\mathcal{K})] \simeq \bigoplus_{|M|=p+q} H_M^{p,q}[Q(\mathcal{K})]. \tag{7}$$

Так как φ есть изоморфизм комплексов $(Q(\mathcal{K}), \delta)$ и $(C_*(S^d, \overline{Y}_{\mathcal{K}}, \mathbb{Q}), \partial)$, то образы $\varphi(Q_M^{p,q}(\mathcal{K})) =: C_{d-p,q}^M(S^d, \overline{Y}_{\mathcal{K}}, \mathbb{Q})$ образуют следующий цепной комплекс:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_{d-p,q}^M(S^d, \overline{Y}_{\mathcal{K}}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\partial} C_{d-p-1,q-1}^M(S^d, \overline{Y}_{\mathcal{K}}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\partial} \ldots,$$

через $H_{d-p,q}^M(S^d, \overline{Y}_{\mathcal{K}}, \mathbb{Q})$ обозначим когомологии этого комплекса. Очевидно, что $H_M^{p,q}[Q(\mathcal{K})] \simeq H_{d-p,q}^M(S^d, \overline{Y}_{\mathcal{K}}, \mathbb{Q})$ и

$$H_p(S^d, \overline{Y}_{\mathcal{K}}, \mathbb{Q}) \simeq \bigoplus_{|M|=p+q} H_{p,q}^M(S^d, \overline{Y}_{\mathcal{K}}, \mathbb{Q}). \tag{8}$$

Как и ранее в пункте 2, вместо: $Y_{\mathcal{K}(P)}, Q(\mathcal{K}(P)), H^*[Q(\mathcal{K}(P))], \ldots$ будем писать: $Y_P, Q(P), H^*[Q(P)], \ldots$

Теорема 11. *Имеет место следующий изоморфизм:*

$$H^p(\mathbb{R}^d \setminus Y_P, \mathbb{Q}) \simeq \bigoplus_{M \subseteq [d]} H^p(P, F_M, \mathbb{Q}).$$

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $\psi : Q(P) \to C_*(P, \mathbb{Q})$, заданное на образующих $Q(P)$ следующим образом:

$$\psi(a_I b_J) = (-1)^{\frac{(|J|-1)|J|}{2}} F^J.$$

Покажем, что сужение ψ на $Q_M^{p,q}(P)$ задает изоморфизм комплексов $(Q_M^{p,q}, \delta)$ и $(C_{n-p}(P, F_{[d]\setminus M}, \mathbb{Q}), \partial)$. Любому моному $a_I b_J \in Q_M^{p,q}$ мы однозначно сопоставляем клетку в $C_{n-p}(P, F_{[d]\setminus M}, \mathbb{Q})$, а по любой клетке F^J, $J \subseteq M$ и множеству M, мы можем однозначно найти $\gamma \in Q_M^{p,q}(P)$, такой что $\psi(\gamma) = F^J$, а именно $\psi(\pm a_{M\setminus J} b_J) = F^J$, прямая проверка показывает, что $\psi(\delta\gamma) = \partial\psi(\gamma)$. Таким образом мы получили

$$H_M^{p,q}[Q(P)] \simeq H_{n-p}(P, F_{[d]\setminus M}, \mathbb{Q}).$$

Таким же образом, как и доказательстве теоремы 6 получаем:

$$H_{n-p}(P, F_{[d]\setminus M}, \mathbb{Q}) \simeq H^p(P, F_M, \mathbb{Q}).$$

Из разложения (7) и указанных выше изоморфизмов получаем

$$H^p(\mathbb{R}^d \setminus Y_P, \mathbb{Q}) \simeq \bigoplus_{M \subseteq [d], |M| \geq p} H^p(P, F_M, \mathbb{Q}),$$

при $p > |M|$, $H_{n-p}(P, F_{[d]\setminus M}, \mathbb{Q}) = 0$, это следует из того, что все $(n-p)$-мерный клетки F^J при $|J| > |M|$, лежат в $F_{[d]\setminus M}$, таким образом получаем

$$H^p(\mathbb{R}^d \setminus Y_P, \mathbb{Q}) \simeq \bigoplus_{M \subseteq [d]} H^p(P, F_M, \mathbb{Q}).$$

Теорема доказан.

Список литературы

[1] Айзенберг Л.А., Южаков А.П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексеом анализе. - Новосибирск: Наука, 1979.

[2] Бухштабер В.М., Панов Т.Е. Действия тора и комбинаторика многогранников // Труды МИ РАН им. В.А. Стеклова.- 1999. - Т.225. - С.96-131. №2. С.358-371.

[3] Бухштабер В.М., Панов Т.Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. - М.: МЦНМО, 2004.

[4] Васильев В.А. Топология наборов плоскостей и их дополнений // УМН - 2001. - Т.56. - №2(338). - С.167-203.

[5] Казанова А.В., Элияшев Ю.В. О гомологиях наборов комплексных плоскостей коразмерности два // Изв. вузов. Матем. - 2009. - № 10 - С.33-39.

[6] Кытманов А.А. Об аналоге формы Фубини-Штуди для двумерных торических многообразий // Сиб. матем. журн. - 2003. - Т. 44. - №2. - С.358-371.

[7] Панов Т.Е. Торические множества типа Кемпфа–Несс // Тр. МИАН - 2008 - Т.263 - С.159–172.

[8] Цих А.К. Многомерные вычеты и их применения. - Новосибирск: Наука, 1988.

[9] Элияшев Ю.В. Гомологии и когомологии дополнения к некоторым наборам комплексных плоскостей коразмерности два // отправлена в печать (Сиб. матем. журн.), препринт статьи находится на сайте конкурса "Августа Мёбиуса" www.moebiuscontest.ru/files/2008/eliyashev.pdf

[10] Cox D.A. The homogeneous coordinate ring of toric variety // J. Algebralc Geometry 4. 1995. P.17-50.

[11] Cox D.A. Recent developments in toric geometry. Algebraic geometry, Santa Cruz 1995, 389-436, Proc. Sympos. Pure Math., 62, Part 2, Am. Math. Soc., 1997.

[12] Goresky M., MacPherson R. Stratified Morse Theory, Ergeb. Math. Grenzgeb. 3. Folge, Bd. 14, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[13] Shchuplev A., Tsikh A.K., YgerA. Residual kernels with singularities on coordinate planes // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2006, Vol. 253, pp. 256-274.