Когомологическая теория спуска для стеков и эквивариантных производных категорий *

А. Д. Елагин

Оглавление

*Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (проект НШ-1987.2008.1) и РФФИ (проект 09-01-00242-а). Автор благодарит Научный фонд ГУ-ВШЭ “Управление поддержки академических исследований” за поддержку проекта 09-09-0009.

Аннотация

Работа посвящена изучению производных категорий эквивариантных когерентных пучков на алгебраическом многообразии с действием алгебраической группы. Основной её результат – метод, позволяющий строить полуортогональные разложения производной категории эквивариантных пучков на многообразии X при условии, что производная категория пучков на X допускает полуортогональное разложение, компоненты которого сохраняются действием группы. При помощи этого метода получены полуортогональные разложения эквивариантных производных категорий для расслоений на проективные пространства и для раздутий с неособым центром, а также для многообразий, обладающих полным исключительным набором, который сохраняется действием группы. В качестве основного инструмента в работе применяется теория спуска для производных категорий. Получен ответ на вопрос о том, когда для накрытия многообразий (или, более общо, стеков), производная категория базы восстанавливается методами теории спуска по производной категории накрывающего многообразия.

1 Введение

Работа посвящена изучению производной категории эквивариантных когерентных пучков на многообразии с действием группы. Основное направление исследования – построение полуортогональных разложений такой категории.

В работе описаны новые способы получения полуортогональных разложений эквивариантной производной категории исходя из полуортогональных разложений производной категории самого многообразия. В таком виде задача естественно обобщается следующим образом: исследовать связь между производными категориями базы и накрывающего её многообразия. В ситуации производной категории эквивариантных пучков на многообразии X относительно действия группы G роль накрывающего пространства играет X, а роль базы – стек $X/\!\!/G$, факторстек X по действию группы G. Отсюда возникает необходимость работать в категории стеков, а не схем.

Для морфизма стеков $p\colon X \to S$ имеется стандартный способ восстанавливать категорию пучков на S в терминах категории пучков на X. А именно, при условиях строгой плоскости морфизма p задание пучка на S эквивалентно заданию пучка F на X с данными склейки, имеющими вид изоморфизма $p_1^*F \to p_2^*F$ на $X \times_S X$, удовлетворяющего условию коцикла. В работе исследован вопрос о том, когда аналогичным способом можно восстановить производную категорию базы по производной категории накрывающего стека.

Ответ получен в теореме 3.1.3, критерием является отщепимость пучка $\mathcal{O}_S$ прямым слагаемым при естественном морфизме $\mathcal{O}_S \to Rp_*\mathcal{O}_X$. Тем самым, при выполнении указанного условия производная категория базы S эквивалентна категории спуска, связанной с морфизмом $p\colon X \to S$. Это позволяет использовать методы теории спуска при изучении связи полуортогональных разложений базы и накрывающего пространства. Для сравнения эквивариантной и обычной производных категорий полученный критерий сводится к требованию линейной редуктивности группы, т.е., вполне приводимости её линейных представлений.

С морфизмом $p\colon X \to S$ связаны две категории спуска. Первая, классическая категория спуска $\mathcal{D}(X)/p$, образована парами, состоящими из объекта F категории $\mathcal{D}(X)$ – неограниченной производной категории пучков на схеме X – и изоморфизма $p_1^*F \to p_2^*F$, подчинённого условию коцикла. Вторая категория спуска – это категория $\mathcal{D}(X)_{\mathsf{T}_p}$ комодулей над комонадой $\mathsf{T}_p = (T_p, \varepsilon, \delta)$ на категории $\mathcal{D}(X)$, связанной с парой сопряжённых функторов p^* и p_*. В работе показано, что эти категории эквивалентны для плоского морфизма p (предложение 2.3.2). Это даёт возможность использовать более удобный язык теории комонад. С его помощью проводится доказательство теоремы 3.1.3, основанное на классической теореме Бека. Также в терминах комодулей над комонадой получено предложение 5.1.2, в котором построено полуортогональное разложение для категории спуска при условии существования полуортогонального разложения исходной категории, в соответствующем смысле совместимого с функтором T_p.

На предложении 5.1.2 основаны основные результаты о связи производных категорий базы и накрывающего пространства – теорема 5.2.2 для накрытия схем и теорема 5.4.2 об эквивариантной производной категории. Последняя теорема в условиях существования полуортогонального разложения категории $\mathcal{D}(X)$, сохраняемого действием линейно редуктивной группы G, позволяет строить полуортогональное разложение $\mathcal{D}^G(X)$ – производной категории G-эквивариантных пучков на X – на компоненты, описываемые в терминах категории спуска. В работе рассмотрены приложения теоремы 5.4.2 к ситуациям действия группы на проективизации эквивариантного векторного расслоения и действия группы на раздутии неособого подмногообразия. В этих случаях теорема 5.4.2 применяется к полуортогональным разложениям указанных многообразий, построенным Д. О. Орловым, при этом строится явное описание компонент разложения как подходящих эквивариантных производных категорий.

Ещё одно, не менее важное применение теоремы 5.4.2, – случай действия линейно редуктивной группы, сохраняющего полный исключительный набор на многообразии, т.е. случай простейшего инвариантного относительно действия группы полуортогонального разложения. В этом случае также удаётся явно описать (теорема 6.1.6) компоненты разложения, доставляемого теоремой 5.4.2. В работе использовано следующее понятие исключительного объекта, сохраняемого действием группы: объект E производной категории пучков на X инвариантен, если для подходящего линейного расслоения $\mathcal{L}$ на группе G имеется изоморфизм $p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*E \to a^*E$ на $G \times X$ (где $p_{1,2}$ обозначает проекции, а a – действие). Инвариантный исключительный пучок не обязательно обладает структурой эквивариантного пучка, препятствием является коцикл группы G, определённый изоморфизмом $p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*E \to a^*E$. В параграфе 4.4 введено и изучено соответствующее понятие коцикла: коциклом на группе G называется пара $(\mathcal{L}, \alpha)$, состоящая из линейного расслоения $\mathcal{L}$ на G и ассоциативного изоморфизма $p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L} \to \mu^*\mathcal{L}$, где $\mu\colon G \times G \to G$ – умножение. Там же определены представления группы и эквивариантные пучки, скрученные на заданный коцикл. С каждым инвариантным исключительным объектом E в $\mathcal{D}(X)$ связаны исключительный объект $\mathcal{E}$ производной категории пучков на X, скрученных на коцикл $(\mathcal{L}, \alpha)$, соответствующий E, и подкатегория в $\mathcal{D}^G(X)$, эквивалентная производной категории скрученных на коцикл $(\mathcal{L}, \alpha)^{-1}$ представлений G. Эти подкатегории, построенные по объектам инвариантного исключительного набора, и являются компонентами ортогонального разложения, полученного при помощи теоремы 5.4.2. Отметим, что категории скрученных представлений линейно редуктивной группы полупросты, и что фактически теорема 6.1.6 позволяет строить полные исключительные наборы в эквивариантной производной категории.

Полученные в работе теоретические результаты могут быть применены для построения ортогональных разложений и полных исключительных наборов на многих многообразиях, к числу которых относятся проективные пространства, квадрики, поверхности дель Пеццо и многообразия Грассмана.

2 Косимплициальные категории и комонады

2.1 Косимплициальные конструкции

Пусть Δ_0 обозначает категорию упорядоченных конечных множеств и монотонных отображений между ними, а $\Delta \subset \Delta_0$ – подкатегорию, состоящую из непустых множеств. Множество из $n+1$ элемента будем обозначать через $[0, \ldots, n]$.

Косимплициальный объект некоторой категории $\mathcal{C}$ (например, косимплициальное множество, косимплициальная схема) – это функтор из Δ в $\mathcal{C}$. Если в качестве $\mathcal{C}$ взять 2-категорию категорий Cats, получим определение косимплициальной категории.

Определение 2.1.1. Косимплициальная категория – это ковариантный 2-функтор $\Delta \to$ Cats в 2-категорию всех категорий, а аугментированная косимплициальная категория – это ковариантный 2-функтор $\Delta_0 \to$ Cats. Иными словами, косимплициальная категория $\mathcal{C}_\bullet$ (соотв. аугментированная косимплициальная категория $\mathcal{C}_\bullet$) состоит из следующих данных:

1. набора категорий $\mathcal{C}_k$, $k = 0, 1, 2 \ldots$ (соотв. $k = -1, 0, 1, 2 \ldots$), соответствующих элементам Δ (соотв. Δ_0);

2. набора функторов $P_f^* \colon \mathcal{C}_m \to \mathcal{C}_n$, соответствующих морфизмам в Δ (в Δ_0), т.е. монотонным отображениям $f \colon [0, \ldots, m] \to [0, \ldots, n]$;

3. набора изоморфизма функторов $\epsilon_{f,g} \colon P_f^* P_g^* \to P_{fg}^*$, соответствующих парам отображений f, g, для которых имеет смысл композиция $f \circ g$.

Изоморфизмы 3) должны подчиняться условию коцикла: диаграмма

$$\begin{tikzcd}
P_f^* P_g^* P_h^* \arrow[r, "\epsilon_{f,g}"] \arrow[d, "\epsilon_{g,h}"] & P_{fg}^* P_h^* \arrow[d, "\epsilon_{fg,h}"] \\
P_f^* P_{gh}^* \arrow[r, "\epsilon_{f,gh}"] & P_{fgh}^*
\end{tikzcd}$$

коммутативна для любой тройки отображений f, g, h, для которых имеет смысл композиция $f \circ g \circ h$.

Симплициальная и аугментированная симплициальная категории определяются как контравариантные 2-функторы $\Delta \to \mathrm{Cats}$ и $\Delta_0 \to \mathrm{Cats}$.

Для аугментированной косимплициальной категории $\mathcal{C}_\bullet = [\mathcal{C}_{-1}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, P_f^*]$ категория $\mathcal{C}_{-1}$ и определённые на ней функторы P_f^* называются *аугментацией.* Косимплициальная категория $[\mathcal{C}_{-1}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, P_f^*]$, полученная отбрасыванием аугментации от $\mathcal{C}_\bullet$, обозначается $\mathrm{Augm}(\mathcal{C}_\bullet)$.

Пользуясь терминологией [12, 19.1], можно сказать, что симплициальная категория – это предстек на категории Δ.

Пример 2.1.2. Пусть дан морфизм схем $X \to S$. Тогда схемы $S, X, X \times_S X, X \times_S X \times_S X, \ldots$ и морфизмы

$$p_f\colon \underbrace{X \times_S X \times \ldots \times X}_{n \text{ times}} \to \underbrace{X \times_S X \times \ldots \times X}_{m \text{ times}}$$

между ними, определённые правилом

$$p_f(x_0, \ldots, x_n) = (x_{f(0)}, \ldots, x_{f(m)})$$

для $f \in \mathrm{Hom}_{\Delta_0}([0, \ldots, m], [0, \ldots, n])$, образуют аугментированную симплициальную схему. Категории пучков на этих схемах и функторы обратного образа между ними являются важным примером аугментированной косимплициальной категории.

Категории $\mathcal{C}_{-1}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots$ полезно представлять себе как категории пучков, связанные с $S, X, X \times_S X, X \times_S X \times_S X, \ldots$. Мы будем использовать естественные обозначения для функторов P_f^*, напоминающие о функторах обратного образа между категориями пучков. Например, функтор $P_f^*\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ для отображения $f\colon [0,1] \to [0,1,2]$ такого, что $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, будет обозначаться P_{13}^*. Его удобно представлять себе как обратный образ при проекции $p_{13}\colon X \times X \times X \to X \times X$. Функтор $P_f^*\colon \mathcal{C}_{-1} \to \mathcal{C}_0$, соответствующие единственному отображению $\emptyset \to [0]$, мы будем обозначать через P^*, он играет роль функтора обратного образа при морфизме $p\colon X \to S$. Мы будем обозначать через D_1^* функтор $P_f^*\colon \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$, где отображение $f\colon [0,1,2] \to [0,1]$ такое, что $f(0) = f(1) = 0$, $f(2) = 1$. Этот функтор полезно представлять себе как обратный образ при диагональном вложении $d_1\colon X \times X \to X \times X \times X$, $d_1(x_1, x_2) = (x_1, x_1, x_2)$.

Определение 2.1.3. Функтором между косимплициальными категориями $\mathcal{C}_\bullet^{(1)}$ и $\mathcal{C}_\bullet^{(2)}$ называется набор функторов

$$\Psi_k\colon \mathcal{C}_k^{(1)} \to \mathcal{C}_k^{(2)}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

вместе с набором изоморфизмов функторов

$$\beta_f\colon \Psi_n \circ P_f^{(1)*} \xrightarrow{\sim} P_f^{(2)*} \circ \Psi_m$$

для каждого морфизма $f\colon [0, \ldots, m] \to [0, \ldots, n]$ в Δ, согласованных с композицией морфизмов в Δ. Функторы между аугментированными косимплициальными категориями определяются так же с заменой Δ на Δ_0.

Для любой косимплициальной категории $\mathcal{C}_\bullet = [\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, p_\bullet^*]$ определена категория, которая обозначается $\mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$, см. [12, 19.3].

Определение 2.1.4 (классическая категория спуска). Объекты $\mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ – это пары (F, θ), где $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_0$, а θ – изоморфизм $P_1^*F \to P_2^*F$, подчиняющийся условию коцикла, которое состоит в коммутативности диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
& P_{13}^*P_1^*F \arrow[r, "P_{13}^*\theta"] & P_{13}^*P_2^*F \arrow[dr, dash, "\sim"] & \\
P_{12}^*P_1^*F \arrow[ur, dash, "\sim"] \arrow[dr, "P_{12}^*\theta"'] & & & P_{23}^*P_2^*F. \\
& P_{12}^*P_2^*F \arrow[r, dash, "\sim"'] & P_{23}^*P_1^*F \arrow[ur, "P_{23}^*\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

В этой диаграмме отрезками обозначены изоморфизмы функторов, входящие в определение косимплициальной категории. Морфизмы в $\mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ из (F_1, θ_1) в (F_2, θ_2) – это морфизмы $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_0}(F_1, F_2)$ такие, что $P_2^*f \circ \theta_1 = \theta_2 \circ P_1^*f$.

Замечание 2.1.5. Отождествляя канонически изоморфные объекты, условие коцикла сокращённо записывают в виде
$$P_{23}^*\theta \circ P_{12}^*\theta = P_{13}^*\theta.$$

Категория $\mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ имеет другое, эквивалентное описание.

Определение 2.1.6. Объект категории $\mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ – это семейство объектов $F_i \in \mathcal{C}_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$ и семейство изоморфизмов $\phi_f \colon P_f^*F_m \xrightarrow{\sim} F_n$ для каждого морфизма $f \colon [0, \dots, m] \to [0, \dots, n]$ в Δ, удовлетворяющих равенствам $\phi_{fg} = \phi_g \circ P_g^*\phi_f$ для каждой пары (f, g), для которой композиция определена. Морфизмы в $\mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ из $(F_\bullet, \phi_\bullet)$ в $(F'_\bullet, \phi'_\bullet)$– это семейства морфизмов $\rho_i \colon F_i \to F'_i$, согласованные с $\phi_\bullet$ и $\phi'_\bullet$.

Предложение 2.1.7. *Для любой косимплициальной категории $\mathcal{C}_\bullet$ определения 2.1.4 и 2.1.6 категории $\mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ эквивалентны.*

Доказательство прямолинейно, мы его не приводим.

Категория $\mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$, построенная по косимплициальной категории $\mathcal{C}_\bullet$, обладает естественными функторами забывания $\mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet) \to \mathcal{C}_k$. Оказывается, что эти функторы дополняют $\mathcal{C}_\bullet$ до аугментированной косимплициальной категории. Положим $\mathcal{C}_{-1} = \mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$, для морфизма $f \colon \emptyset \to [0, \dots, n]$ определим функтор $P_f^* \colon \mathcal{C}_{-1} \to \mathcal{C}_n$ как забывание $(F_\bullet, \phi_\bullet) \mapsto F_n$ на объектах, $\rho_\bullet \mapsto \rho_n$ на морфизмах (здесь мы пользуемся определением 2.1.6).

Предложение 2.1.8. *Категории $\mathcal{C}_{-1} = \mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet), \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots$ и функторы P_f^* между ними образуют аугментированную косимплициальную категорию $\tilde{\mathcal{C}}_\bullet$.*

Доказательство. Для пары морфизмов $f \colon \emptyset \to [0, \dots, m]$, $g \colon [0, \dots, m] \to [0, \dots, n]$ определим изоморфизм функторов $\epsilon_{g,f} \colon P_g^*P_f^* \xrightarrow{\sim} P_{gf}^*$ на объекте $(F_\bullet, \phi_\bullet) \in \mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ как

$$P_g^*P_f^*((F_\bullet, \phi_\bullet)) = P_g^*F_m \xrightarrow{\phi_g} F_n = P_{gf}^*((F_\bullet, \phi_\bullet)).$$

Условие согласованности для ϕ влечёт условие коцикла для “новых” ϵ. $\square$

Нас будут интересовать аугментированные косимплициальные категории

$$[\mathcal{C}_{-1}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, P^*_\bullet],$$

удовлетворяющие двум дополнительным условиям.

Условие 1. Все функторы $P^*_f\colon \mathcal{C}_m \to \mathcal{C}_n$ имеют правые сопряжённые функторы $P_{f*}\colon \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}_m$.

Несложно проверить, что функторы $P_{\bullet *}$ будут образовывать аугментированную симплициальную категорию

$$[\mathcal{C}_{-1}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, P_{\bullet *}].$$

Эти функторы полезно представлять себе как функторы прямого образа между категориями пучков.

Рассмотрим коммутативный квадрат в категории Δ_0 и соответствующий квадрат категорий и функторов:

$$\begin{tikzcd}
{[0,\ldots,m+n-r]} & {[0,\ldots,n]} \arrow[l, "f'"'] \\
{[0,\ldots,m]} \arrow[u, "g'"] & {[0,\ldots,r],} \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{m+n-r} \arrow[r, shift right, "P_{f'*}"'] \arrow[d, shift right, "P_{g'*}"'] & \mathcal{C}_n \arrow[l, shift right, "P^*_{f'}"'] \arrow[d, shift left, "P_{g*}"'] \\
\mathcal{C}_m \arrow[r, shift right, "P_{f*}"'] \arrow[u, shift right, "P^*_{g'}"'] & \mathcal{C}_r. \arrow[l, shift right, "P^*_f"'] \arrow[u, shift left, "P^*_g"']
\end{tikzcd}$$

Если отображения f и f' (или g и g') инъективны и $[0,\ldots,m+n-r] = \mathrm{Im}\ f' \cup \mathrm{Im}\ g'$, мы будем называть такие квадраты *декартовыми*. С любым квадратом связаны два естественных морфизма замены базы:

$$P^*_g P_{f*} \to P_{f'*} P^*_{g'} \quad \text{и} \quad P^*_f P_{g*} \to P_{g'*} P^*_{f'}.$$

Например, морфизм $P^*_g P_{f*} \to P_{f'*} P^*_{g'}$ может быть определен как композиция

$$P^*_g P_{f*} \xrightarrow{\eta} P^*_g P_{f*} P_{g'*} P^*_{g'} \xrightarrow{\sim} P^*_g P_{g*} P_{f'*} P^*_{g'} \xrightarrow{\varepsilon} P_{f'*} P^*_{g'}$$

или как композиция

$$P^*_g P_{f*} \xrightarrow{\eta} P_{f'*} P^*_{f'} P^*_g P_{f*} \xrightarrow{\sim} P_{f'*} P^*_{g'} P^*_f P_{f*} \xrightarrow{\varepsilon} P_{f'*} P^*_{g'}.$$

Несложная проверка показывает, что эти два морфизма равны.

Второе условие является аксиоматизацией теоремы о плоской замене базы.

Условие 2. Морфизмы замены базы являются изоморфизмами для декартовых квадратов.

Предложение 2.1.9. *Пусть $\mathcal{C}_\bullet$ – косимплициальная категория, а $\tilde{\mathcal{C}}_\bullet$ – полученная из неё добавлением* $\mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ *аугментированная косимплициальная категория. Если $\mathcal{C}_\bullet$ удовлетворяла условиям 1 и 2, то $\tilde{\mathcal{C}}_\bullet$ также будет им удовлетворять.*

Доказательство приведено в приложении 8.1.

2.2 Комонады и комодули

Мы напоминаем некоторые факты из теории комонад. Подробности можно найти в работах Барра-Уэллса [1, chapter 3] и Маклейна [15, глава 6].

Пусть $\mathcal{C}$ обозначает произвольную категорию.

Определение 2.2.1. *Комонада* $\mathsf{T} = (T, \varepsilon, \delta)$ (также используются названия *ко-тройка* и *стандартная конструкция*) на категории $\mathcal{C}$ состоит из функтора $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ и естественных преобразований функторов $\varepsilon\colon T \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ и $\delta\colon T \to T^2 = TT$ таких, что следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, equal] & T^2 \arrow[d, "T\varepsilon"] \\ T^2 \arrow[r, "\varepsilon T"] & T, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"] & T^2 \arrow[d, "T\delta"] \\ T^2 \arrow[r, "\delta T"] & T^3. \end{tikzcd}$$

Пример 2.2.2. Рассмотрим пару сопряжённых функторов $P^*\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ (левый) и $P_*\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ (правый). Пусть $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{B}} \to P_*P^*$ и $\varepsilon\colon P^*P_* \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ – канонические морфизмы сопряжения. Определим тройку (T, ε, δ), положив $T = P^*P_*$ и взяв $\varepsilon\colon P^*P_* \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, $\delta = P^*\eta P_*\colon P^*P_* \to P^*P_*P^*P_*$. Тогда $\mathsf{T} = (T, \varepsilon, \delta)$ образует комонаду на категории $\mathcal{C}$.

На самом деле, любая комонада может быть получена из пары сопряжённых функторов описанным выше способом. Это следует из изложенной ниже конструкции, принадлежащей Эйленбергу и Муру.

Определение 2.2.3. Пусть $\mathsf{T} = (T, \varepsilon, \delta)$ – комонада на категории $\mathcal{C}$. *Комодулем* над T (или T-*коалгеброй*) называется пара (F, h), где $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, а $h\colon F \to TF$ – морфизм, удовлетворяющий двум условиям: композиция

$$F \xrightarrow{h} TF \xrightarrow{\varepsilon F} F$$

равна тождественному морфизму, диаграмма

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h"] & TF \arrow[d, "Th"] \\ TF \arrow[r, "\delta F"] & T^2F \end{tikzcd}$$

коммутативна. *Морфизмом* между комодулями (F_1, h_1) и (F_2, h_2) называется по определению морфизм $f\colon F_1 \to F_2$ в категории $\mathcal{C}$, для которого коммутирует диаграмма

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1"'] & F_2 \arrow[d, "h_2"] \\ TF_1 \arrow[r, "Tf"] & TF_2. \end{tikzcd}$$

Комодули над заданной комонадой T на $\mathcal{C}$ образуют категорию, которая обозначается через $\mathcal{C}_{\mathsf{T}}$. Определим функтор $Q_*\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathsf{T}}$, положив

$$Q_*F = (TF, \delta F), \qquad Q_*f = Tf,$$

определим $Q^*\colon \mathcal{C}_\mathsf{T} \to \mathcal{C}$ как функтор забывания. Тогда функторы (Q^*, Q_*) образуют сопряженную пару и она порождает комонаду T конструкцией из примера 2.2.2.

Категория $\mathcal{C}_\mathsf{T}$ наследует многие свойства $\mathcal{C}$. Несложно убедиться в справедливости следующего предложения.

Предложение 2.2.4. *Пусть $\mathsf{T} = (T, \varepsilon, \delta)$ – комонада на категории $\mathcal{C}$. Если $\mathcal{C}$ – аддитивная категория и функтор T аддитивен, то категория $\mathcal{C}_\mathsf{T}$ также аддитивна. Если $\mathcal{C}$ абелева, а T точен слева, то $\mathcal{C}_\mathsf{T}$ также абелева.*

Напротив, совершенно неясно, будет ли триангулированной категория $\mathcal{C}_\mathsf{T}$, построенная по комонаде $\mathsf{T} = (T, \varepsilon, \delta)$, если функтор T точен на триангулированной категории $\mathcal{C}$. Естественно попытаться определить триангулированную структуру на $\mathcal{C}_\mathsf{T}$ следующим образом.

Определение 2.2.5. Определим функтор сдвига на $\mathcal{C}_\mathsf{T}$ равенствами $(F, h)[1] = (F[1], h[1])$, $f[1] = f[1]$. Назовём выделенными в $\mathcal{C}_\mathsf{T}$ те треугольники $(F', h') \to (F, h) \to (F'', h'') \to (F', h')[1]$, для которых $F' \to F \to F'' \to F'[1]$ является выделенным треугольником в $\mathcal{C}$.

К сожалению, операция взятия конуса в $\mathcal{C}$ не функториальна, поэтому без дополнительных предположений нельзя проверить, что любой морфизм в $\mathcal{C}_\mathsf{T}$ дополняется до выделенного треугольника. Однако в некоторых случаях получается, что данное выше определение действительно вводит триангулированную структуру на $\mathcal{C}_\mathsf{T}$; если это так, то мы просто будем говорить, что категория $\mathcal{C}_\mathsf{T}$ триангулированна (имея при этом ввиду, что триангулированная структура такая, как была определена выше). Позже (предложение 2.2.13) мы увидим, что $\mathcal{C}_\mathsf{T}$ является триангулированной при некоторых условиях: фактически, мы покажем, что $\mathcal{C}_\mathsf{T}$ эквивалентна (как абстрактная категория) некоторой триангулированной категории.

Следующее утверждение показывает, что конструкция Эйленберга-Мура даёт конечный объект среди всех сопряжённых пар, определяющих одну и ту же комонаду.

Предложение 2.2.6 (Теорема сравнения). *Пусть комонада $\mathsf{T} = (T, \varepsilon, \delta)$ на категории $\mathcal{C}$ определена парой сопряжённых функторов $P^*\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, $P_*\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$. Тогда существует единственный (с точностью до изоморфизма) функтор (называемый* функтором сравнения*) $\Phi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}_\mathsf{T}$, для которого диаграмма категорий*

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B} \arrow[dl, shift left, "P^*"] \arrow[dd, "\Phi"] \\
\mathcal{C} \arrow[ur, shift left, "P_*"] \arrow[dr, shift left, "Q_*"] & \\
& \mathcal{C}_\mathsf{T} \arrow[ul, shift left, "Q^*"]
\end{tikzcd}$$

является коммутативной, т.е.

$$\Phi P_* \cong Q_*, \qquad Q^* \Phi \cong P^*.$$

Доказательство. Определим $\Phi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}_\mathsf{T}$ как функтор, сопоставляющий объекту $H \in \operatorname{Ob} \mathcal{B}$ пару (P^*H, h), в которой $h\colon P^*H \to P^*P_*P^*H$ есть P^* от канонического морфизма $\eta\colon H \to P_*P^*H$, и сопоставляющий морфизму f морфизм P^*f. Несложная проверка показывает, что Φ – требуемый функтор. □

Для нас будут важны критерии, описывающие, когда функтор сравнения является строго полным или является эквивалентностью. Перед формулировкой этих критериев мы напоминаем понятия уравнителя и расщеплённого уравнителя.

Определение 2.2.7. *Уравнителем* (equalizer) пары морфизмов $d_1, d_2\colon F_1 \to F_2$ в категории называется морфизм $d\colon F \to F_1$ такой, что

- $d_1 d = d_2 d$,
- для любого морфизма $d'\colon F' \to F_1$, для которого $d_1 d' = d_2 d'$, существует единственный морфизм $f\colon F' \to F$ такой, что $df = d'$.

Определение 2.2.8. *Расщеплённым уравнителем* (contractible equalizer) пары морфизмов $d_1, d_2\colon F_1 \to F_2$ называется морфизм $d\colon F \to F_1$, для которого существуют морфизмы s и t:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] & F_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_2"'] \arrow[l, bend left, "s"] & F_2 \arrow[l, bend left, "t"] \end{tikzcd},$$

так что выполнены равенства

$$d_1 f = d_2 f, \quad sf = \mathrm{Id}, \quad td_1 = \mathrm{Id}, \quad td_2 = fs.$$

Отметим, что любой расщеплённый уравнитель является уравнителем и любой уравнитель является мономорфизмом. Также отметим, что расщеплённые уравнители сохраняются любыми функторами.

Морфизм $f\colon H' \to H$ в категории $\mathcal{B}$ называется *расщепимым вложением* или, коротко, *отщепляется*, если для него найдётся обратный слева морфизм f': $f'f = \mathrm{Id}_H$. Если категория $\mathcal{B}$ аддитивна, говорят также, что f есть вложение прямого слагаемого.

Напомним, что функтор Φ называется *консервативным*, если для любого морфизма f такого, что $\Phi(f)$ – изоморфизм, f также является изоморфизмом.

Теорема 2.2.9 (Бек, [1, 3.14], [15, 6.7]). *В сделанных выше обозначениях*

- *Функтор Φ строго полон тогда и только тогда, когда для любого $H \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ естественный морфизм $\eta H\colon H \to P_*P^*H$ является уравнителем (некоторой пары).*
- *Функтор Φ является эквивалентностью тогда и только тогда, когда P^* консервативен и для любой пары $d_1, d_2\colon H_1 \to H_2$ морфизмов в $\mathcal{B}$, для которой у пары $P^*d_1, P^*d_2\colon P^*H_1 \to P^*H_2$ существует расщеплённый уравнитель $f\colon F \to P^*H_1$, найдётся уравнитель $d\colon H \to H_1$ у пары (d_1, d_2), для которого $P^*d \cong f$.*

Следствие 2.2.10.

1. *Если категории $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ абелевы, то функтор сравнения Φ строго полон тогда и только тогда, когда морфизм $\eta H\colon H \to P_*P^*H$ инъективен для всех объектов H в $\mathcal{B}$. Предположим вдобавок, что функтор P^* точен. Тогда указанное условие равносильно тому, что Φ – эквивалентность, и равносильно тому, что $P^*H \neq 0$ для всех $H \neq 0 \in \mathcal{B}$.*
2. *Если категории $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ триангулированны, то функтор сравнения Φ строго полон тогда и только тогда, когда морфизм $\eta H\colon H \to P_*P^*H$ – расщепимое вложение для всех объектов H в $\mathcal{B}$.*

Отметим, что сопряжённые функторы между аддитивными категориями автоматически являются аддитивными.

Доказательство. Заметим, что в аддитивной категории уравнитель пары морфизмов (f_1, f_2) – это тоже самое, что ядро их разности $f_1 - f_2$. Поэтому в аддитивной категории "являться уравнителем" всё равно, что "являться ядром".
1. В абелевой категории "быть ядром" значит "быть инъективным". Докажем вторую часть утверждения. Если морфизм $H \to P_*P^*H$ инъективен, то, очевидно, $H \neq 0$ влечёт $P^*H \neq 0$. Обратно, если $P^*H \neq 0$ для всех ненулевых H и $\ker(H \to P_*P^*H) \neq 0$, то $\ker(P^*H \to P^*P_*P^*H) \neq 0$. Но морфизм $P^*H \to P^*P_*P^*H$ является расщепимым вложением, мы приходим к противоречию. Для того, чтобы показать, что Φ – эквивалентность при указанных условиях, мы проверим условия из теоремы 2.2.9. Действительно, в абелевой категории уравнители всегда существуют, и они сохраняются точными функторами. Консервативность функтора P^* следует из его точности и того, что $P^*H \neq 0$ при $H \neq 0$.
2. В триангулированных категориях ядра – это в точности расщепимые вложения, отсюда и следует нужное утверждение. $\square$

Напомним, что категория $\mathcal{B}$ называется *карубиево замкнутой*, если любой проектор в $\mathcal{B}$ расщепляется. Т.е., для любых объекта H в $\mathcal{B}$ и морфизма $f\colon H \to H$ такого, что $f^2 = f$, существуют объект H', называемый *образом* f, и морфизмы $\sigma\colon H' \to H$ и $\rho\colon H \to H'$, для которых $\rho\sigma = \mathrm{Id}'_H$, $\sigma\rho = f$.

Следствие 2.2.11. *Пусть (P^*, P_*) – пара сопряжённых функторов между категориями $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. Предположим, что $\mathcal{B}$ карубиево замкнута. Если естественный морфизм функторов $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{B}} \to P_*P^*$ расщепляется, то функтор сравнения является эквивалентностью.*

Доказательство. Пусть морфизм функторов $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{B}} \to P_*P^*$ расщепляется, тогда для любого объекта H в $\mathcal{B}$ определен проектор $\pi\colon P_*P^*H \to P_*P^*H$, образ которого есть H, и этот проектор естественно зависит от H. Проверим два условия из теоремы Бека. Во-первых, P^* консервативен: если для некоторого морфизма f в $\mathcal{B}$ морфизм P^*f – изоморфизм, то P_*P^*f – также изоморфизм, а значит, и f – изоморфизм. Во-вторых, предположим, что P^* от некоторой пары морфизмов (f_1, f_2) в $\mathcal{B}$ имеет расщеплённый уравнитель. Тогда P_*P^* от этой пары также имеет расщеплённый уравнитель. Переходя к образам проекторов π при помощи следующей леммы, мы получим, что (f_1, f_2) также имеет расщеплённый уравнитель, и он сохраняется функтором P^* согласно замечанию, сделанному после определения 2.2.8. $\square$

Лемма 2.2.12. *Пусть $f_1, f_2\colon H_1 \to H_2$ – два морфизма в карубиево замкнутой категории $\mathcal{B}$, согласованные с проекторами $\pi_1\colon H_1 \to H_1, \pi_2\colon H_2 \to H_2$. Тогда существование расщеплённого уравнителя для пары (f_1, f_2) влечёт существование расщеплённого уравнителя для пары соответствующих морфизмов на образах проекторов π.*

Доказательство. По предположению, существуют объекты H'_1 и H'_2 в $\mathcal{B}$ (образы π_1 и π_2) и морфизмы $\sigma_i\colon H'_i \to H_i$, $\rho_i\colon H_i \to H'_i$ (вложения образов и проекции на них), для которых $\rho_i\sigma_i = \mathrm{Id}_{H'_i}$, $\sigma_i\rho_i = \pi_i$ $(i = 1, 2)$. Морфизмы f_1, f_2 индуцируют морфизмы $f'_1 = \rho_2 f_1 \sigma_1$ и $f'_2 = \rho_2 f_2 \sigma_1$ из H'_1 в H'_2. Пусть

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] & H_1 \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] \arrow[l, bend left, "s"] & H_2 \arrow[l, bend left, "t"] \end{tikzcd}$$

– диаграмма, связанная с расщеплённым уравнителем для (f_1, f_2). Рассмотрим морфизм $\pi_1 f\colon H \to H_1$. Мы видим, что $f_1(\pi_1 f) = \pi_2 f_1 f = \pi_2 f_2 f = f_2(\pi_1 f)$, значит по определению уравнителя найдётся морфизм $\pi\colon H \to H$ такой, что $f\pi = \pi_1 f$. Этот морфизм π является проектором. Действительно, $f\pi^2 = \pi_1 f\pi = \pi_1^2 f = \pi_1 f = f\pi$, и так как f – мономорфизм, то $\pi^2 = \pi$. По предположению, существуют объект H' (образ π) и морфизмы $\sigma\colon H' \to H$, $\rho\colon H \to H'$ такие, что $\rho\sigma = \mathrm{Id}_{H'}, \sigma\rho = \pi$. Определим $f'\colon H' \to H_1'$ как $\rho_1 f\sigma$.

Пусть $s\colon H_1 \to H$ и $t\colon H_2 \to H_1$ – морфизмы из определения расщеплённого уравнителя. Положим $s' = \rho s\sigma_1$ и $t' = \rho_1 t\sigma_2$. Несложные вычисления показывают, что f', s' и t' удовлетворяют определению расщеплённого уравнителя для пары (f_1', f_2'). □

Приведём пример достаточных условий, при которых комодули над комонадой на триангулированной категории образуют триангулированную категорию.

Предложение 2.2.13. *Пусть (P^*, P_*) – пара сопряжённых точных функторов между триангулированными категориями $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, пусть T – комонада на $\mathcal{C}$, связанная с этой парой. Предположим, что категория $\mathcal{B}$ карубиево замкнута и что естественный морфизм функторов $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{B}} \to P_*P^*$ расщепляется. Тогда категория $\mathcal{C}_{\mathsf{T}}$ триангулированна в смысле определения 2.2.5.*

Доказательство. Согласно следствию 2.2.11, функтор сравнения $\Phi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}_{\mathsf{T}}$ является эквивалентностью. Теорема сравнения говорит, что $P^* \cong Q^*\Phi$, где $Q^*\colon \mathcal{C}_{\mathsf{T}} \to \mathcal{C}$ – функтор забывания. Нам необходимо проверить, что треугольник $F' \to F \to F'' \to F'[1]$ выделенный в $\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда P^* от этого треугольника – выделенный треугольник в $\mathcal{C}$. Утверждение про “только тогда” выполнено в силу того, что функтор P^* точный. Чтобы проверить утверждение про “тогда”, предположим, что $P^*(F' \to F \to F'' \to F'[1])$ – выделенный треугольник. Тогда $P_*P^*(F' \to F \to F'' \to F'[1])$ – также выделенный треугольник, и $F' \to F \to F'' \to F'[1]$ – тоже, как прямое слагаемое выделенного треугольника. □

Пусть $\mathcal{C}_i, i = 1, 2$ – две категории, а $\mathsf{T}_i = (T_i, \varepsilon_i, \delta_i)$ – комонады на них. Введём естественное понятие функтора, согласованного с комонадами.

Определение 2.2.14. Скажем, что функтор $\Psi\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ *согласован* с T_1 и T_2, если существует изоморфизм функторов $\beta\colon \Psi T_1 \to T_2\Psi$ такой, что диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\Psi T_1 \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\Psi\varepsilon_1"'] & & T_2\Psi \arrow[dl, "\varepsilon_2\Psi"] \\
& \Psi, &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Psi T_1 \arrow[rr, "\beta"] \arrow[d, "\Psi\delta_1"'] & & T_2\Psi \arrow[d, "\delta_2\Psi"] \\
\Psi T_1^2 \arrow[r, "\beta T_1"] & T_2\Psi T_1 \arrow[r, "T_2\beta"] & T_2^2\Psi
\end{tikzcd}$$

коммутативны.

На самом деле более правильно включать изоморфизм β в данные и говорить о паре (Ψ, β) как о морфизме в 2-категории категорий с комонадой, но нам это различие будет несущественно.

2.3 Два способа задания данных спуска

Пусть $\mathcal{C}_\bullet$ – аугментированная косимплициальная категория, удовлетворяющая условию 1 параграфа 2.1. Для неё определены две категории данных спуска. Первая категория – это категория $\mathrm{Kern}(\mathrm{Augm}(\mathcal{C}_\bullet))$, введённая в параграфе 2.1. Её определение использует только аугментированную часть структуры и не требует наличия сопряжённых функторов к $P^*_\bullet$. Вторая категория, напротив, определяется только исходя из категорий $\mathcal{C}_{-1}$ и $\mathcal{C}_0$ и функторов между ними. Это категория комодулей над комонадой T на $\mathcal{C}_0$, связанной с сопряжённой парой (P^*, P_*). Мы напоминаем определение (см. определение 2.2.3).

Определение 2.3.1 (комонадная категория спуска). Объекты $\mathcal{C}_{\bullet\mathsf{T}}$ – это пары (F, h), где $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_0$, а $h\colon F \to P^*P_*F$ – морфизм, для которого композиция $F \xrightarrow{h} P^*P_*F \xrightarrow{\varepsilon F} F$ тождественна, а диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h"] & P^*P_*F \arrow[d, "P^*P_*h"] \\
P^*P_*F \arrow[r, "P^*\eta P_*F"] & P^*P_*P^*P_*F
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Морфизмы из (F_1, h_1) в (F_2, h_2) в категории $\mathcal{C}_{\bullet\mathsf{T}}$ – это морфизмы $f\colon F_1 \to F_2$ в $\mathcal{C}_0$ такие, что $h_2 \circ f = P^*P_*f \circ h_1$.

Предложение 2.3.2. *При выполнении условий 1 и 2 категории* $\mathrm{Kern}(\mathrm{Augm}(\mathcal{C}_\bullet))$ *и* $\mathcal{C}_{\bullet\mathsf{T}}$ *эквивалентны.*

Доказательство предложения элементарно, но при аккуратной проверке всех фактов достаточно громоздко, оно размещено в приложении 8.2.

Предложение 2.3.2 показывает, что категория $\mathcal{C}_{\bullet\mathsf{T}}$ не зависит от аугментации, а зависит только от косимплициальной части $[\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, P^*_f]$. В действительности, сама комонада T тоже не зависит от аугментации.

Следствие 2.3.3. *По любой косимплициальной категории $\mathcal{C}_\bullet = [\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, P^*_\bullet]$, для которой выполнены условия 1 и 2, корректно определена комонада T на категории $\mathcal{C}_0$. Она совпадает с комонадой из определения 2.3.1 для любого дополнения $\mathcal{C}_\bullet$ до аугментированной косимплициальной категории.*

Доказательство. Дополнив $\mathcal{C}_\bullet$ до аугментированной косимплициальной категории $\tilde{\mathcal{C}}_\bullet$ при помощи категории $\mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ (см. предложение 2.1.9), определим комонаду с помощью определения 2.3.1. Мы видим, что функтор $T = P^*P_* = P_{2*}P_1^*$ не зависит от аугментации. Несложно проверить, что естественные преобразования функторов $T = P^*P_* \to \mathrm{Id}$ и $T = P^*P_* \to P^*P_*P^*P_* = TT$ имеют вид

$$P_{2*}P_1^* \xrightarrow{\eta} P_{2*}D_*D^*P_1^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}\ \mathrm{Id} = \mathrm{Id}$$

и

$$P_{2*}P_1^* \xrightarrow{\eta} P_{2*}P_{13*}P_{13}^*P_1^* \xrightarrow{\sim} P_{2*}P_{23*}P_{12}^*P_1^* \xrightarrow{\sim} P_{2*}P_1^*P_{2*}P_1^*,$$

и также от неё не зависят. □

В параграфах 2.1 и 2.2 были определены функторы между косимплициальными категориями и функторы между категориями, согласованные с комонадами. Не представляет труда проверка следующего факта.

Лемма 2.3.4. *Пусть (Ψ_k) – функтор между косимплициальными категориями $\mathcal{C}_\bullet^{(1)}$ и $\mathcal{C}_\bullet^{(2)}$, для которых выполнены условия 1 и 2 параграфа 2.1. Пусть T_1 и T_2 – комонады на $\mathcal{C}_\bullet^{(1)}$ и $\mathcal{C}_\bullet^{(2)}$, определённые в следствии 2.3.3. Тогда компонента $\Psi_0\colon \mathcal{C}_0^{(1)} \to \mathcal{C}_0^{(2)}$ – согласованный с комонадами T_1 и T_2 функтор.*

2.4 Ограничение на подкатегории

В этом параграфе изложены факты, относящиеся к подкатегориям в категориях комодулей и к ограничению функтора сравнения.

Предположим, что имеется косимплициальная подкатегория

$$\mathcal{C}'_\bullet = [\mathcal{C}'_0, \mathcal{C}'_1, \ldots, P^*_\bullet] \qquad \text{в} \qquad [\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, P^*_\bullet].$$

Это означает, что задана подкатегория $\mathcal{C}'_i$ в каждой категории $\mathcal{C}_i$, и что они согласованы с функторами $P^*_\bullet$, т.е. $P^*_f \mathcal{C}'_m \subset \mathcal{C}'_n$ (и не обязательно согласованы с функторами $P_{\bullet *}$, если те определены). В этом случае можно рассмотреть классическую категорию спуска $\mathrm{Kern}(\mathcal{C}'_\bullet)$, это подкатегория в $\mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$. Отметим, что категория $\mathrm{Kern}(\mathcal{C}'_\bullet)$ в действительности не зависит от $\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2, \ldots$ Она однозначно определяется подкатегорией $\mathcal{C}'_0 \subset \mathcal{C}_0$: всегда можно взять $\mathcal{C}'_k = \mathcal{C}_k$ при $k > 0$.

Предположим, что T – комонада на категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ – подкатегория. Определим категорию $\mathcal{C}'_\mathsf{T}$ следующим образом.

Определение 2.4.1. Объекты $\mathcal{C}'_\mathsf{T}$ – это пары (F, h) из $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\mathsf{T}$ такие, что $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$. Морфизмы в $\mathcal{C}'_\mathsf{T}$ – это морфизмы в $\mathcal{C}_\mathsf{T}$, которые при этом лежат в $\mathcal{C}'$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'_\mathsf{T}}((F_1, h_1), (F_2, h_2)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\mathsf{T}}((F_1, h_1), (F_2, h_2)) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F_1, F_2).$$

Очевидно, $\mathcal{C}'_\mathsf{T}$ – подкатегория в $\mathcal{C}_\mathsf{T}$, эта подкатегория полна, если $\mathcal{C}'$ – полная подкатегория в $\mathcal{C}$.

Необходимость данного определения вызвана таким обстоятельством: во многих важных примерах функтор $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ достаточно "большой" и не сохраняет "маленькие" подкатегории в $\mathcal{C}$. Поэтому определение 2.2.3 не позволяет рассмотреть категорию "маленьких" объектов с данными спуска. Типичный пример здесь – следующая ситуация: $p\colon X \to S$ – не собственный морфизм схем, $\mathcal{C} = \mathrm{qcoh}(X), \mathcal{C}' = \mathrm{coh}(X)$ и $T = p^* p_*$.

Имеет место естественный аналог предложения 2.2.4:

Предложение 2.4.2. *Пусть* $\mathsf{T} = (T, \varepsilon, \delta)$ *– комонада на категории* $\mathcal{C}$.

Если категории $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ *аддитивны и* T *– аддитивный функтор, то категория* $\mathcal{C}'_\mathsf{T}$ *также аддитивна.*

Если категории $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ *абелевы и* T *точный слева аддитивный функтор, то категория* $\mathcal{C}'_\mathsf{T}$ *также абелева.*

Если категории $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ *триангулированные, функтор* T *точен и* $\mathcal{C}_\mathsf{T}$ *– триангулированная категория в смысле определения 2.2.5, то* $\mathcal{C}'_\mathsf{T} \subset \mathcal{C}_\mathsf{T}$ *– триангулированная подкатегория.*

Пусть $\mathcal{C}_\bullet$ – аугментированная косимплициальная категория, для которой выполнены условия 1 и 2 параграфа 2.1, а $\mathcal{C}'_\bullet \subset \mathcal{C}_\bullet$ – косимплициальная подкатегория (возможно, без аугментации). В этой ситуации определены две категории спуска, связанные с подкатегорией $\mathcal{C}'_\bullet$ – это категория $\mathrm{Kern}(\mathcal{C}'_\bullet)$ и категория $\mathcal{C}'_{\bullet\mathsf{T}} = \mathcal{C}'_{0\mathsf{T}}$, определённая выше. Выполнено несложное следствие предложения 2.3.2:

Следствие 2.4.3. *В сделанных предположениях категории* $\mathrm{Kern}(\mathcal{C}'_\bullet)$ *и* $\mathcal{C}'_{\bullet\mathsf{T}}$ *эквивалентны.*

Пусть (P^*, P_*) – пара сопряжённых функторов на категориях $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, а T – определённая ими комонада на $\mathcal{C}$. Если P^* переводит некоторую подкатегорию $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ в $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, можно рассмотреть ограничение функтора сравнения

$$\Phi|_{\mathcal{B}'} \colon \mathcal{B}' \to \mathcal{C}'_{\mathsf{T}}.$$

В частности, в качестве $\mathcal{B}'$ можно взять прообраз $(P^*)^{-1}(\mathcal{C}')$: это подкатегория в $\mathcal{B}$, объекты/морфизмы которой суть в точности те объекты/морфизмы в $\mathcal{B}$, которые переводятся функтором P^* в объекты/морфизмы, лежащие в $\mathcal{C}'$.

Лемма 2.4.4. *Если функтор сравнения $\Phi\colon \mathcal{B}\to\mathcal{C}_{\mathsf{T}}$ является эквивалентностью и $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ – подкатегория, то ограничение Φ на $\mathcal{B}' = (P^*)^{-1}(\mathcal{C}')$ является эквивалентностью $\mathcal{B}'\to\mathcal{C}'_{\mathsf{T}}$.*

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 2.4.5. *Пусть T_0 и T – комонады на категориях $\mathcal{C}_0$ и $\mathcal{C}$ соответственно, а $\mathcal{C}'_0 \subset \mathcal{C}_0$ и $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ – подкатегории. Пусть $\Psi\colon \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}$ – функтор, переводящий $\mathcal{C}'_0$ в $\mathcal{C}'$. Если Ψ согласован с T_0 и T, то Ψ определяет функтор $\Psi_{\mathsf{T}}\colon \mathcal{C}'_{0\mathsf{T}_0}\to\mathcal{C}'_{\mathsf{T}}$. Если при этом Ψ – строго полный функтор, устанавливающий эквивалентность $\mathcal{C}'_0$ с некоторой подкатегорией $\mathcal{A}'$ в $\mathcal{C}'$, то ограничение Ψ_{T} на $\mathcal{C}'_{0\mathsf{T}_0}$ – эквивалентность $\mathcal{C}'_{0\mathsf{T}_0} \to \mathcal{A}'_{\mathsf{T}} \subset \mathcal{C}'_{\mathsf{T}}$.*

Доказательство. Очевидно. □

3 Теория спуска

3.1 Производная теория спуска для стеков

В этом параграфе мы применим результаты теории комонад к изучению когомологического спуска для производных категорий пучков на схемах и стеках. Мы работаем в категории стеков для того, чтобы одновременно покрыть случаи спуска для схем и для эквивариантных производных категорий.

Все стеки в этой работе считаются алгебраическими стеками конечного типа над полем, имеющими аффинную диагональ. В частности, все схемы считаются нётеровыми квазиотделимыми. Пусть X – стек. Мы будем обозначать неограниченную производную категорию пучков $\mathcal{O}_X$-модулей с квазикогерентными когомологиями через $\mathcal{D}(X)$, ограниченную производную категорию когерентных пучков на X через $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))$, категорию совершенных комплексов на X – через $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$.

Пусть $p\colon X\to S$ – плоский квазиотделимый представимый морфизм стеков, имеющий конечный тип. Рассмотрим аугментированный симплициальный стек

$$(X \to S)_\bullet = [S, X, X \times_S X, X \times_S X \times_S X, \ldots, p_\bullet].$$

Абелевы категории квазикогерентных пучков на S, X, $X \times_S X \ldots$ и функторы обратного образа между ними образуют аугментированную косимплициальную категорию

$$[\mathrm{qcoh}(S), \mathrm{qcoh}(X), \mathrm{qcoh}(X \times_S X), \mathrm{qcoh}(X \times_S X \times_S X), \ldots, p^*_\bullet]. \tag{1}$$

Эта категория удовлетворяет условиям 1 и 2 параграфа 2.1: функторы $p^*_\bullet$ имеют сопряжённые справа функторы $p_{\bullet *}$ и выполнена плоская замена базы. Рассмотрим также аугментированную косимплициальную подкатегорию в (1), образованную категориями когерентных пучков и функторами обратного образа между ними:

$$[\mathrm{coh}(S), \mathrm{coh}(X), \mathrm{coh}(X \times_S X), \mathrm{coh}(X \times_S X \times_S X), \dots, p^*_\bullet]. \tag{2}$$

Отметим, что эта категория не удовлетворяет условию 1 параграфа 2.1, потому что функторы прямого образа не сохраняют когерентные пучки. Обозначим через

$$\mathrm{qcoh}(X)/p = \mathrm{Kern}([\mathrm{qcoh}(X), \mathrm{qcoh}(X \times_S X), \dots])$$

и

$$\mathrm{coh}(X)/p = \mathrm{Kern}([\mathrm{coh}(X), \mathrm{coh}(X \times_S X), \dots])$$

категории спуска, связанные с (1) и (2), см. определение 2.1.4.

Теорема 3.1.1. *Категории* $\mathrm{qcoh}(X)/p$ *и* $\mathrm{coh}(X)/p$ *эквивалентны категориям базы* $\mathrm{qcoh}(S)$ *и* $\mathrm{coh}(S)$ *соответственно тогда и только тогда, когда морфизм* p *строго плоский.*

Замечание 3.1.2. Этот результат хорошо известен, мы приводим доказательство лишь для того, чтобы показать, каким образом он следует из следствия 2.2.10.

Доказательство. Обозначим через $\mathrm{qcoh}(X)_{\mathsf{T}_p}$ категорию спуска, связанную с комонадой $\mathsf{T}_p = (p^*p_*, \varepsilon, \delta)$ на $\mathrm{qcoh}(X)$ (см. определение 2.3.1). Категория (1) удовлетворяет условиям 1 и 2 параграфа 2.1, следовательно в силу предложения 2.3.2 категории $\mathrm{qcoh}(X)/p$ и $\mathrm{qcoh}(X)_{\mathsf{T}_p}$ эквивалентны. Применим следствие 2.2.10,1. Функтор p^* точен, следовательно функтор сравнения $\Phi\colon \mathrm{qcoh}(S) \to \mathrm{qcoh}(X)_{\mathsf{T}_p}$ является эквивалентностью если и только если $H = 0$ для любого $H \in \mathrm{qcoh}(S)$ такого, что $p^*H = 0$. Последнее условие равносильно строгой плоскости p.

Теперь покажем, что функтор сравнения является эквивалентностью для категорий coh тогда и только тогда, когда он является эквивалентностью для категорий qcoh. Обозначим через $\mathrm{coh}(X)_{\mathsf{T}_p}$ подкатегорию в $\mathrm{qcoh}(X)_{\mathsf{T}_p}$, отвечающую подкатегории $\mathrm{coh}(X) \subset \mathrm{qcoh}(X)$ (см. определение 2.4.1). Согласно следствию 2.4.3, категории $\mathrm{coh}(X)/p$ и $\mathrm{coh}(X)_{\mathsf{T}_p}$ эквивалентны.

Предположим, что функтор $\Phi\colon \mathrm{qcoh}(S) \to \mathrm{qcoh}(X)_{\mathsf{T}_p}$ – эквивалентность. Проверим, что ограничение Φ будет эквивалентностью между строго полными подкатегориями $\mathrm{coh}(S) \subset \mathrm{qcoh}(S)$ и $\mathrm{coh}(X)_{\mathsf{T}_p} \subset \mathrm{qcoh}(X)_{\mathsf{T}_p}$. Лемма 2.4.4 утверждает, что ограничение Φ даёт эквивалентность между $(p^*)^{-1}(\mathrm{coh}(X))$ и $\mathrm{coh}(X)_{\mathsf{T}_p}$. Тем самым, нужно проверить, что для $H \in \mathrm{qcoh}(S)$ пучок p^*H когерентен тогда и только тогда, когда H когерентен. Это лемма 3.1.5.

Обратно, допустим, что функтор сравнения $\Phi|_{\mathrm{coh}(S)}\colon \mathrm{coh}(S) \to \mathrm{coh}(X)_{\mathsf{T}_p}$ – эквивалентность. Покажем, что функтор $\Phi\colon \mathrm{qcoh}(S) \to \mathrm{qcoh}(X)_{\mathsf{T}_p}$ – также эквивалентность. Заметим, что для любого пучка $H \in \mathrm{coh}(S)$ морфизм $H \xrightarrow{\eta H} p_*p^*H$ инъективен. Действительно, рассмотрим его ядро $K = \ker(H \to p_*p^*H)$. Морфизм $p^*\eta H\colon p^*H \to p^*p_*p^*H$ – расщепимое вложение, обратным является канонический морфизм $\varepsilon p^*H\colon p^*p_*p^*H \to p^*H$. Мы имеем $p^*K = 0$, а значит, $\Phi(K) = 0$. Но пучок K когерентен на S, следовательно $K = 0$. Согласно формуле проекции $p_*p^*H \cong H \otimes p_*\mathcal{O}_X$. Мы видим, что морфизм $\mathcal{O}_S \to p_*\mathcal{O}_X$ остаётся инъективным после тензорного домножения на любой когерентный пучок $H \in \mathrm{coh}(S)$. Это значит, что $\mathrm{Tor}_1(p_*\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_S, H) = 0$ для всех $H \in \mathrm{coh}(S)$. Отсюда следует, что $p_*\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_S$ – плоский $\mathcal{O}_S$-модуль, и поэтому морфизм $H \to p_*p^*H$ инъективен и для всех $H \in \mathrm{qcoh}(S)$. Теперь применим следствие 2.2.10,1 и получим, что Φ – эквивалентность $\mathrm{qcoh}(S) \to \mathrm{qcoh}(X)_{\mathsf{T}_p}$. □

Более интересен аналог теоремы 3.1.1 для производных категорий.

Рассмотри аугментированную косимплициальную категорию

$$[\mathcal{D}(S), \mathcal{D}(X), \mathcal{D}(X \times_S X), \mathcal{D}(X \times_S X \times_S X), \ldots, Lp_\bullet^*], \tag{3}$$

образованную неограниченными производными категориями квазикогерентных пучков на стеках S, X, $X \times_S X, \ldots$ Обозначим через

$$\mathcal{D}(X)/p = \mathrm{Kern}([\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(X \times_S X), \ldots, Lp_\bullet^*])$$

классическую категорию спуска (см. определение 2.1.4). Косимплициальная категория (3) удовлетворяет условиям 1 и 2 параграфа 2.1: функторы $Lp_\bullet^*$ имеют правые сопряжённые функторы $Rp_{\bullet *}$, выполнена формула замена базы. Рассмотрим также косимплициальные подкатегории косимплициальной категории (3)

$$[\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(S)), \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X)), \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X \times_S X)), \ldots, Lp_\bullet^*] \tag{4}$$

и

$$[\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S), \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X), \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X \times_S X), \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X \times_S X \times_S X), \ldots, Lp_\bullet^*], \tag{5}$$

образованные ограниченными производными категориями когерентных пучков и категориями совершенных комплексов соответственно. Обозначим через $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))/p$ и $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)/p$ классические категории спуска (см. определение 2.1.4), связанные с (4) и (5).

Теорема 3.1.3. *Функтор сравнения $\mathcal{D}(S) \to \mathcal{D}(X)/p$ является эквивалентностью тогда и только тогда, когда естественный морфизм $\mathcal{O}_S \to Rp_*\mathcal{O}_X$ в категории $\mathcal{D}(S)$ есть вложение прямого слагаемого. В этом случае категории спуска $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))/p$ и $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)/p$ эквивалентны $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(S))$ и $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S)$ соответственно.*

Замечание 3.1.4. Отметим, что расщепление морфизма $\mathcal{O}_S \to Rp_*\mathcal{O}_X$ не необходимо для эквивалентности категорий $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))/p$, см. пример 3.2.9 ниже.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}(X)_{\mathsf{T}_p}$ категорию комодулей над комонадой $\mathsf{T}_p = (p^*Rp_*, \varepsilon, \delta)$ на категории $\mathcal{D}(X)$ (см. определение 2.3.1). Согласно предложению 2.3.2, категории спуска $\mathcal{D}(X)/p$ и $\mathcal{D}(X)_{\mathsf{T}_p}$ эквивалентны. Воспользуемся результатами теории комонад.

Если функтор сравнения $\Phi\colon \mathcal{D}(S) \to \mathcal{D}(X)_{\mathsf{T}_p}$ – эквивалентность, то он строго полон и в силу следствия 2.2.10,2 отображение $\mathcal{O}_S \to Rp_*p^*\mathcal{O}_S = Rp_*\mathcal{O}_X$ является расщепимым вложением. Обратное следует из следствия 2.2.11. Действительно, категория $\mathcal{D}(S)$ карубиево замкнута. Согласно формуле проекции, для $H \in \mathcal{D}(S)$ естественный морфизм $H \to Rp_*p^*H = H \otimes^L Rp_*\mathcal{O}_X$ имеет вид $H \otimes^L (\mathcal{O}_S \to Rp_*\mathcal{O}_X)$. Тем самым, морфизм функторов $\mathrm{Id} \to Rp_*p^*$ расщепляется при условии, что морфизм $\mathcal{O}_S \to Rp_*\mathcal{O}_X$ расщепляется.

Предположим теперь, что

$$\Phi\colon \mathcal{D}(S) \to \mathcal{D}(X)_{\mathsf{T}_p}$$

является эквивалентностью. Обозначим через $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))_{\mathsf{T}_p}$ и $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)_{\mathsf{T}_p}$ комонадные категории спуска, связанные с подкатегориями $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \subset \mathcal{D}(X)$ и $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) \subset \mathcal{D}(X)$. Как и раньше, из следствия 2.4.3 получаем, что $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))/p \cong \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))_{\mathsf{T}_p}$ и $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)/p \cong \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)_{\mathsf{T}_p}$. Нам нужно показать, что ограничение Φ даёт эквивалентность между строго полными подкатегориями $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \subset \mathcal{D}(S)$ и $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))_{\mathsf{T}_p} \subset \mathcal{D}(X)_{\mathsf{T}_p}$. Согласно лемме 2.4.4, ограничение Φ даёт эквивалентность между $(p^*)^{-1}(\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X)))$ и $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))_{\mathsf{T}_p}$. Стало быть, нужно проверить, что для $H \in \mathcal{D}(S)$ комплекс p^*H лежит в $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ если и только если H лежит в $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(S))$. Это следует из леммы 3.1.5 и точности функтора p^*.

При аналогичных рассуждениях для категорий совершенных комплексов нам понадобится использовать, что $(p^*)^{-1}(\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)) = \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S)$. Очевидно, что обратный образ совершенного комплекса – совершенный комплекс. Проверим, что и обратное верно. При этом достаточно рассмотреть случай схем.

Выберем покрытие $f\colon U \to S$ стека S схемой. Морфизм p представим, следовательно отображение $f'\colon U' = U \times_S X \to X$ также является покрытием схемой. Ясно, что объект $H \in \mathcal{D}(S)$ – совершенный комплекс на S тогда и только тогда, когда f^*H – совершенный комплекс на U, аналогичное верно для $f'\colon U' \to X$. Совершенные комплексы на схеме U – это в точности компактные объекты в категории $\mathcal{D}(U)$ (см. [3, 3.1.1]), то же верно для U'. Итак, нам нужно проверить, что для морфизма схем $p'\colon U' \to U$ объект $H \in \mathcal{D}(U)$ компактен при условии, что объект p'^*H компактен в $\mathcal{D}(U')$.

Допустим, что $H \in \mathcal{D}(U)$ и p'^*H компактен в $\mathcal{D}(U')$. Пусть (F_α) – произвольное семейство объектов $\mathcal{D}(U)$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \bigoplus \mathrm{Hom}(H, F_\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus \mathrm{Hom}(H, Rp'_*p'^*F_\alpha) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}(H, \bigoplus F_\alpha) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(F, Rp'_*p'^* \bigoplus F_\alpha). \end{tikzcd} \tag{6}$$

Заметим, что пучок $\mathcal{O}_U$ – прямое слагаемое в $Rp'_*\mathcal{O}_{U'}$ (см., например, лемму 3.2.3), значит функтор $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}(U)}$ – прямое слагаемое в $Rp'_*p'^*$. Следовательно, левый столбец в (6) – прямое слагаемое правого столбца. Покажем, что морфизм в правом столбце – изоморфизм. Имеем:

$$\bigoplus \mathrm{Hom}(H, Rp'_*p'^*F_\alpha) = \bigoplus \mathrm{Hom}(p'^*H, p'^*F_\alpha) = \mathrm{Hom}(p'^*H, \bigoplus p'^*F_\alpha) = \\ = \mathrm{Hom}(p'^*H, p'^* \bigoplus F_\alpha) = \mathrm{Hom}(H, Rp'_*p'^* \bigoplus F_\alpha).$$

Тем самым, левый столбец (6) также является изоморфизмом, и H является компактным объектом в $\mathcal{D}(U)$. □

Лемма 3.1.5. *В предположениях этого параграфа допустим, что функтор* $\Phi\colon \mathrm{qcoh}(S) \to \mathrm{qcoh}(X)_{\mathsf{T}_p}$ *– эквивалентность. Если* H *– квазикогерентный пучок на* S *и пучок* p^*H *когерентен, то и* H *также когерентен.*

Доказательство. Согласно [14, prop. 15.4], пучок H представляется объединением своих когерентных подпучков. Допустим, что H не когерентен, тогда можно выбрать строго возрастающую последовательность $H_1 \to H_2 \to H_3 \to \ldots$ когерентных подпучков в H. Так как Φ – эквивалентность, последовательность p^*H_i подпучков в p^*H также строго монотонна. Но стек X нётеров, а пучок p^*H когерентен, получаем противоречие. □

3.2 Морфизмы, обладающие свойством SCDT

Как показывает теорема 3.1.3, сформулированное ниже свойство является критерием того, что производная категория базы восстанавливается по производной категории накрывающей схемы. В связи с этим указанное свойство представляет определённый интерес.

Определение 3.2.1. Скажем, что для плоского морфизма схем $p\colon X \to S$ выполнено *свойство SCDT*, если естественное отображение $\mathcal{O}_S \to Rp_*\mathcal{O}_X$ является вложением прямого слагаемого. SCDT обозначает "strictly cohomological descent type".

В этом параграфе собраны некоторые факты морфизмах, обладающих свойством SCDT, а также достаточные условия для его выполнения. Напомним, что функтор Ψ называется *строгим*, если для любой пары объектов A, B индуцированное функтором отображение

$$\mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(\Psi(A), \Psi(B))$$

инъективно.

Лемма 3.2.2. *Для морфизма $p\colon X \to S$ выполнено свойство SCDT тогда и только тогда, когда функтор $p^*\colon \mathcal{D}(S) \to \mathcal{D}(X)$ строгий.*

Доказательство. Допустим, что p обладает свойством SCDT. Согласно формуле проекции, функтор $\mathrm{Id}\colon \mathcal{D}(S) \to \mathcal{D}(S)$ является прямым слагаемым функтора Rp_*p^*. Следовательно, Rp_*p^* не обнуляет морфизмы, а значит и p^* тоже не обнуляет морфизмы.

Допустим, что p^* строг. Рассмотрим выделенный треугольник $\mathcal{O}_S \to Rp_*\mathcal{O}_X \to K \xrightarrow{f} \mathcal{O}_S[1]$. Проверим, что $f = 0$. Применяя p^* к этому треугольнику, получим $p^*\mathcal{O}_S \to p^*Rp_*p^*\mathcal{O}_S \to p^*K \xrightarrow{p^*f} p^*\mathcal{O}_S[1]$. Из свойств сопряжённости p^* и Rp_* следует, что последний треугольник расщепим, значит $p^*f = 0$. Так как p^* строг, то $f = 0$. □

В следующей лемме собраны основные факты, касающиеся морфизмов, обладающих свойством SCDT.

Лемма 3.2.3.
1. *Если морфизмы $q\colon Y \to X$ и $p\colon X \to S$ обладают свойством SCDT, то им обладает и $p \circ q$. Если $p \circ q$ обладает свойством SCDT, то и p им обладает.*
2. *Свойство SCDT сохраняется при замене базы.*
3. *Если $s\colon S' \to S$ – замена базы, удовлетворяющая свойству SCDT, то морфизмы $p\colon X \to S$ и $p'\colon X' = X \times_S S' \to S'$ одновременно удовлетворяют или не удовлетворяют свойству SCDT.*
4. *Пусть $\mathsf{k} \subset K$ – расширение полей. Тогда морфизм $p\colon X \to S$ схем над k обладает свойством SCDT, если и только если им обладает морфизм $p'\colon X \times_{\mathsf{k}} K \to S \times_{\mathsf{k}} K$.*

Доказательство. 1 и 2 элементарны, 3 следует из 1 и 2, 4 следует из 3. □

Лемма 3.2.4. *Конечный плоский морфизм $p\colon X \to S$ схем над полем характеристики* 0 *обладает свойством SCDT.*

Доказательство. Так как морфизм p аффинный, то $Rp_*\mathcal{O}_X = p_*\mathcal{O}_X$ (нет высших прямых образов). Обозначим через C фактор $p_*\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_S$. Нам нужно проверить тривиальность расширения $0 \to \mathcal{O}_S \to p_*\mathcal{O}_X \to C \to 0$. Домножая тензорно это расширение на $p_*\mathcal{O}_X$, мы получим тривиальное расширение, так как морфизм $p_*\mathcal{O}_X \to p_*\mathcal{O}_X \otimes p_*\mathcal{O}_X$ – расщепимое вложение, расщепление определяется умножением. Морфизм p – плоский конечный, значит пучок $E = p_*\mathcal{O}_X$ является векторным расслоением на S. Тензорное умножение на E индуцирует отображение

$$\sigma\colon \operatorname{Ext}^1(C, \mathcal{O}_S) \to \operatorname{Ext}^1(C \otimes E, \mathcal{O}_S \otimes E) = \operatorname{Ext}^1(C, \mathcal{E}\mathrm{nd}(E)).$$

Покажем, что σ – мономорфизм. Действительно, правое обратное к σ отображение задаётся взятием следа $\mathcal{E}\mathrm{nd}(E) \to \mathcal{O}_S$:

$$\operatorname{Ext}^1(C, \mathcal{E}\mathrm{nd}(E)) \xrightarrow{\frac{1}{r(E)}Tr} \operatorname{Ext}^1(C, \mathcal{O}_S).$$

□

Говорят, что морфизм $p\colon X \to S$ имеет *квазисечение*, если найдётся подсхема $Y \subset X$ такая, что ограничение $p|_Y$ является конечным морфизмом $Y \to S$. Если подсхему Y можно выбрать плоской над S, то говорят, что p имеет *плоское квазисечение.*

Лемма 3.2.5. *Допустим, что морфизм $p\colon X \to S$ имеет плоское квазисечение. Тогда для p выполнено свойство SCDT.*

Доказательство. Следует из леммы 3.2.4 и леммы 3.2.3,1. □

Теорема 3.2.6. *Пусть $p\colon X \to S$ – плоский морфизм квазикомпактных квазиотделимых схем над полем характеристики 0. Допустим, что у p есть плоское квазисечение. Тогда функторы сравнения*

$$\mathcal{D}(S) \to \mathcal{D}(X)/p, \quad \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S) \to \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)/p, \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))/p$$

являются эквивалентностями.

Доказательство. Следует из леммы 3.2.5 и теоремы 3.1.3. □

Теперь приведём пример плоского аффинного (и даже локально тривиального) морфизма гладких многообразий над полем, который не обладает свойством SCDT, и производная категория спуска не эквивалентна категории базы.

Пример 3.2.7. Пусть V – векторное пространство над полем k. Пусть X – группа $GL(V)$, $P \subset X$ – параболическая подгруппа. Рассмотрим $S = X/P$ – однородное пространство, это гладкое проективное многообразие, обозначим через d его размерность, а через p – отображение орбиты $X \to S$. Выберем линейные расслоения $\mathcal{L}_1 = \mathcal{O}_S$ и $\mathcal{L}_2 = \omega_S$ так, чтобы

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(S)}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2[d]) = \operatorname{Ext}^d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \neq 0.$$

Применяя функтор сравнения, получим

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(X)/p}(\Phi(\mathcal{L}_1), \Phi(\mathcal{L}_2[d])) \subset \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(X)}(p^*\mathcal{L}_1, p^*\mathcal{L}_2[d]) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(X)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X[d]) = 0,$$

так как X аффинно и $\operatorname{Pic} X = 0$. Мы видим, что функтор сравнения $\Phi\colon \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))/p$ не является строго полным.

Следующий пример показывает, что объекты производной категории нельзя определять локально в топологии Зарисского.

Пример 3.2.8. Пусть S – схема, а $S = \bigcup U_i$ – покрытие S аффинными схемами. Обозначим через $X = \bigsqcup U_i$, через $p\colon X \to S$ – естественное отображение, пусть

$$\Phi\colon \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))/p$$

– функтор сравнения. Тогда для любого когерентного пучка F на S и $k > 0$ получим

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(X)/p}(\Phi(\mathcal{O}_S), \Phi(F[k])) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(X)}(\mathcal{O}_X, p^*F[k]) = H^k(X, \oplus F|_{U_i}) = 0.$$

С другой стороны, если схема S не аффинна, то для некоторого когерентного пучка F и $k > 0$ выполнено

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(S)}(\mathcal{O}_S, F[k]) = H^k(S, F) \neq 0.$$

В этом случае функтор Φ не будет эквивалентностью и морфизм p не будет обладать свойством SCDT.

Сейчас мы покажем, что функтор сравнения может быть эквивалентностью для ограниченной производной категории для морфизма $p\colon X \to S$, не обладающего свойством SCDT.

Пример 3.2.9. Пусть $S = \mathbb{A}^1$ – аффинная прямая над алгебраически замкнутым полем k, а $P_1, P_2 \in \mathbb{A}^1$ – две различные точки. Пусть $X = (\mathbb{A}^1 \setminus P_1) \bigsqcup (\mathbb{A}^1 \setminus P_2)$ – несвязное объединение двух проколотых прямых, а $p\colon X \to S$ – естественное отображение. Мы утверждаем, что функтор сравнения

$$\Phi\colon \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))/p$$

является эквивалентностью, в то время как морфизм $\mathcal{O}_S \to Rp_*\mathcal{O}_X$ не расщепим, и функтор сравнения

$$\mathcal{D}(S) \to \mathcal{D}(X)/p$$

– не эквивалентность.

Доказательство. Когомологическая размерность категории $\mathrm{coh}(\mathbb{A}^1)$ равна 1, поэтому всякий объект $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(\mathbb{A}^1))$ квазиизоморфен прямой сумме своих пучков когомологий. Далее, всякий когерентный пучок на $\mathbb{A}^1$ есть прямая сумма неразложимых пучков вида

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \quad \text{или} \quad \mathcal{O}_{rP}, P \in \mathbb{A}^1,$$

где $\mathcal{O}_{rP}$ обозначает структурный пучок r-кратной точки P. Введём обозначения

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{A}^1 \setminus P_1, \\ U_2 &= \mathbb{A}^1 \setminus P_2, \\ U_{12} &= U_1 \cap U_2 = \mathbb{A}^1 \setminus \{P_1, P_2\}. \end{aligned}$$

Чтобы убедиться в строгой полноте Φ, проверим, что

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathbb{A}^1)}(H_1, H_2[k]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(X)/p}(\Phi(H_1), \Phi(H_2[k])) \tag{7}$$

для неразложимых пучков H_1 и H_2 и всех k. При $H_1 = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$ и $k = 0$ это выполнено в силу того, что функтор сравнения является строго полным для абелевых категорий, см.

теорему 3.1.1. Для $H_1 = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$ и $k \neq 0$ обе стороны (7) равны нулю. Пусть $H_1 = \mathcal{O}_{rP}$ и $P \neq P_1, P_2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathbb{A}^1)}(\mathcal{O}_{rP}, H_2[k]) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(U_{12})}(\mathcal{O}_{rP}, H_2[k]|_{U_{12}}) = \\ = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(X')/p'}(\Phi'(\mathcal{O}_{rP}), \Phi'(H_2[k]|_{U_{12}})) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(X)/p}(\Phi(\mathcal{O}_{rP}), \Phi(H_2[k])), \quad (8)\end{aligned}$$

где $X' = U_{12} \sqcup U_{12}$, морфизм $p'\colon X' \to U_{12}$ – естественное отображение и $\Phi'\colon \mathcal{D}^b(\operatorname{coh}(U_{12})) \to \mathcal{D}^b(\operatorname{coh}(X'))/p'$ – функтор сравнения. Среднее равенство в (8) выполнено в силу того, что p' обладает свойством SCDT. Наконец, если $H_1 = \mathcal{O}_{rP}$ и $P = P_1$ или P_2, то (7) справедливо по тривиальным причинам.

Докажем теперь, что Φ существенно сюръективен. В самом деле, объект категории

$$\mathcal{D}^b(\operatorname{coh}(X))/p = \mathcal{D}^b(\operatorname{coh}(U_1 \sqcup U_2)))/p$$

– это объект производной категории $\mathcal{D}^b(\operatorname{coh}(X))$ вместе с данными склейки. Любой объект F в $\mathcal{D}^b(\operatorname{coh}(X))$ имеет вид $F = F_1 \oplus F_2$, где слагаемые

$$F_1 = \left(\bigoplus_i \mathcal{O}_{U_1}[k_i]\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{i:Q_i \neq P_1} \mathcal{O}_{r_i Q_i}[l_i]\right),$$
$$F_2 = \left(\bigoplus_i \mathcal{O}_{U_2}[k_i']\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{i:Q_i' \neq P_2} \mathcal{O}_{r_i' Q_i'}[l_i']\right)$$

– пучки с носителями на $U_1 \subset X$ и $U_2 \subset X$ соответственно, а все суммы конечны. Данные склейки – это изоморфизм

$$\theta\colon F_1|_{U_{12}} \xrightarrow{\sim} F_2|_{U_{12}}.$$

Из существования такого изоморфизма следует, что суммы

$$\left(\bigoplus_i \mathcal{O}_{U_{12}}[k_i]\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{i:Q_i \neq P_1, P_2} \mathcal{O}_{r_i Q_i}[l_i]\right),$$
$$\left(\bigoplus_i \mathcal{O}_{U_{12}}[k_i']\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{i:Q_i' \neq P_1, P_2} \mathcal{O}_{r_i' Q_i'}[l_i']\right)$$

совпадают, т.е. F_1 и F_2 совпадают вне точек P_1 и P_2 и, следовательно, найдётся объект $H \in \mathcal{D}^b(\operatorname{coh}(\mathbb{A}^1))$, для которого $\Phi(H) = (F, \theta)$.

С другой стороны, легко видеть, что естественный морфизм $\mathcal{O}_S \to Rp_*\mathcal{O}_X$ не расщепим. Действительно,

$$\operatorname{Hom}(Rp_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_S) = \operatorname{Hom}(p_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_S) = \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1 \setminus P_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1 \setminus P_2}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}) = 0.$$

$\square$

4 Скрученные эквивариантные пучки

4.1 Эквивариантные пучки

Под алгебраической группой (или просто группой) в этой работе мы будем понимать групповую схему над некоторым полем k.

Пусть G – алгебраическая группа над k, действующая на схеме X. Обозначим через $a\colon G\times X\to X$ морфизм действия, а через $\mu\colon G\times G\to G$ – структурный морфизм группы. Также, через p_i и p_{jk} будем обозначать проекции $G\times X$ и $G\times X\times X$ на соответствующие сомножители.

Определение 4.1.1. Напомним, что *G-эквивариантным пучком* на X называется пучок F на X вместе с изоморфизмом $\theta\colon p_2^*F\to a^*F$ пучков на $X\times G$, для которого на $G\times G\times X$ выполнено следующее условие:

$$(1\times a)^*\theta\circ p_2^*\theta=(\mu\times 1)^*\theta.$$

Морфизмы эквивариантных пучков из (F_1,θ_1) в (F_2,θ_2) – это морфизмы $f\colon F_1\to F_2$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
p_2^*F_1 \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "p_2^*f"] & a^*F_1 \arrow[d, "a^*f"] \\
p_2^*F_2 \arrow[r, "\theta_2"] & a^*F_2
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

В важном частном случае конечных групп определение принимает следующий вид.

Определение 4.1.2. *G-эквивариантным пучком* на X называется пучок F на X вместе с фиксированными изоморфизмами $\theta_g\colon F\to g^*F$ для каждого $g\in G$, такими что $\theta_{gh}=h^*(\theta_g)\circ\theta_h$ для всякой пары $g,h\in G$. *Морфизмом* G-эквивариантных пучков из $(F_1,\theta_{1,g})\to(F_2,\theta_{2,g})$ называется морфизм пучков $f\colon F_1\to F_2$ такой, что для всякого $g\in G$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[r, "\theta_{1,g}"] \arrow[d, "f"'] & g^*F_1 \arrow[d, "g^*f"] \\
F_2 \arrow[r, "\theta_{2,g}"] & g^*F_2.
\end{tikzcd}$$

Абелеву категорию G-эквивариантных квазикогерентных (соотв. когерентных) пучков на X мы будем обозначать через $\mathrm{qcoh}^G(X)$ (соотв. через $\mathrm{coh}^G(X)$). Рассмотрим неограниченную производную категорию всех G-эквивариантных $\mathcal{O}_X$-модулей. Её полную подкатегорию, состоящую из комплексов с G-эквивариантными квазикогерентными пучками когомологий, мы обозначим через $\mathcal{D}^G(X)$. Далее, *G-эквивариантным совершенным комплексом на X* называется объект категории $\mathcal{D}^G(X)$, который становится совершенным комплексом на X при забывании эквивариантной структуры. Категорию совершенных G-эквивариантных комплексов на X мы будем обозначат через $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X)$.

Можно смотреть на определение эквивариантного пучка несколько иначе. Рассмотрим симплициальную схему

$$(X/G)_\bullet=[X_0,X_1,X_2,\ldots,p_\bullet]=[X,G\times X,G\times G\times X,\ldots,p_\bullet],\tag{9}$$

где морфизмы $p_\bullet$ определены следующим образом. Для монотонного отображения $f\colon [0,\ldots,m]\to[0,\ldots,n]$ морфизм схем

$$p_f\colon \underbrace{G\times\ldots\times G}_{n\ \text{раз}}\times X\to\underbrace{G\times\ldots\times G}_{m\ \text{раз}}\times X$$

задан по правилу

$$(g_n,\ldots,g_1,x_0)\mapsto(g_{f(m)}\cdot\ldots\cdot g_{f(m-1)+1},\ldots,g_{f(1)}\cdot\ldots\cdot g_{f(0)+1},g_{f(0)}\cdot\ldots\cdot g_1x_0).$$

Для маленьких значений $n=m+1$ и строго монотонных f морфизмы $p_\bullet$ имеют вид

$$\begin{tikzcd} G\times G\times X \arrow[r, shift left=4, "1\times a"] \arrow[r, shift right=4, "\mu\times 1"'] \arrow[r, shift right=8, "p_{23}"'] & G\times X \arrow[l, shift left=0, "e\times\mathrm{Id}"'] \arrow[l, shift right=4, "p_1\times e\times p_2"] \arrow[r, shift left=2, "a"] \arrow[r, shift right=2, "p_2"'] & X \arrow[l, "e\times 1"'] \end{tikzcd}.$$

По определению, пучок на симплициальной схеме $X_\bullet$ состоит из семейства пучков F_i на X_i и из морфизмов $\phi_f\colon p_f^*F_m\to F_n$ для всякого монотонного отображения $f\colon[0,\ldots,m]\to[0,\ldots,n]$, удовлетворяющих равенствам $\phi_{f_1f_2}=\phi_{f_2}\circ p^*_{f_2}\phi_{f_1}$ для каждой пары f_1,f_2. Пучки на симплициальной схеме образуют абелеву категорию, морфизмы в которой – это семейства морфизмов $F_i\to F_i'$, совместимые с ϕ. Тогда подкатегория категории пучков на симплициальной схеме $[X,G\times X,G\times G\times X,\ldots,p_\bullet]$, состоящая из пучков, для которых все структурные морфизмы ϕ – изоморфизмы, по определению совпадает с категорией спуска Kern, связанной с косимплициальной категорией,

$$\mathrm{Kern}([\mathrm{qcoh}(X),\mathrm{qcoh}(X\times G),\mathrm{qcoh}(X\times G\times G),\ldots,p_\bullet^*]),$$

образованной категориями пучков на схемах X_i и функторами обратного образа между ними. Последняя категория, согласно предложению 2.1.7, эквивалентна категории G-эквивариантных квазикогерентных пучков на X, см. также [5, 6.1.2b].

В параграфе 3.1 со всяким морфизмом схем (стеков, ...) $p\colon X\to S$ была связана аугментированная симплициальная схема (стек, ...), образованная расслоенными произведениями

$$(X\to S)_\bullet=[S,X,X\times_S X,X\times_S X\times_S X,\ldots,p_\bullet],$$

где морфизмы p_f определены правилом

$$p_f(x_0,\ldots,x_n)=(x_{f(0)},\ldots,x_{f(m)}).$$

Оказывается, что косимплициальная схема (9) имеет такой же вид, при этом аугментация образована не схемой, а стеком, обозначаемым $X/\!\!/G$.

Стек $X/\!\!/G$ определён в [14, 1.3.2], это алгебраический стек, см. [14, 4.14.1.1]. Имеется канонический морфизм $X\to X/\!\!/G$; если групповая схема G регулярна, то p является накрытием в гладкой топологии. Симплициальный стек, образованный расслоенными произведениями,

$$(X\to X/\!\!/G)_\bullet=[X,X\times_{X/\!\!/G}X,X\times_{X/\!\!/G}X\times_{X/\!\!/G}X,\ldots,p_\bullet]$$

представлен симплициальной схемой

$$(X/G)_\bullet = [X, G \times X, G \times G \times X, \ldots, p_\bullet].$$

Морфизм p строго плоский, и согласно теореме 3.1.1 квазикогерентные пучки на стеке $X/\!\!/G$ можно определять локально с помощью покрытия p, см. также [14, 6.23]. Получаем

$$\begin{aligned}&\mathrm{qcoh}(X/\!\!/G) = \\ &\qquad \mathrm{Kern}([\mathrm{qcoh}(X), \mathrm{qcoh}(X \times_{X/\!\!/G} X), \mathrm{qcoh}(X \times_{X/\!\!/G} X \times_{X/\!\!/G} X), \ldots, p_\bullet^*]) = \\ &\qquad\qquad = \mathrm{Kern}([\mathrm{qcoh}(X), \mathrm{qcoh}(X \times G), \mathrm{qcoh}(X \times G \times G), \ldots, p_\bullet^*]) = \mathrm{qcoh}^G(X).\end{aligned}$$

Иными словами, пучки на $X/\!\!/G$ – это G-эквивариантные пучки на X. Это позволяет использовать язык стеков для изучения эквивариантных пучков. Отметим, что определённые выше производные категории эквивариантных пучков $\mathcal{D}^G(X), \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ и $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X)$ совпадают с соответствующими производными категориями пучков на стеке $X/\!\!/G$.

Нас интересует вопрос о том, когда объекты производной категории эквивариантных пучков можно определять посредством действия группы на объекты обычной производной категории. Другими словами, когда производные категории $\mathcal{D}^G(X), \mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X), \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}^G(X))$ эквивалентны категориям спуска Kern, связанным с косимплициальными категориями

$$[\mathcal{D}^G(X), \mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G \times X), \mathcal{D}(G \times G \times X), \ldots, p_\bullet^*], \tag{10}$$

$$[\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X), \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X), \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(G \times X), \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(G \times G \times X), \ldots, p_\bullet^*], \tag{11}$$

$$[\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}^G(X)), \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X)), \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(G \times X)), \ldots, p_\bullet^*]. \tag{12}$$

Категории (10)–(12) в данном случае имеют вид

$$[\mathcal{D}(S), \mathcal{D}(X), \mathcal{D}(X \times_S X), \mathcal{D}(X \times_S X \times_S X), \ldots, p_\bullet^*],$$
$$[\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S), \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X), \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X \times_S X), \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X \times_S X \times_S X), \ldots, p_\bullet^*],$$
$$[\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(S)), \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X)), \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X \times_S X)), \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X \times_S X \times_S X)), \ldots, p_\bullet^*],$$

для морфизма стеков $X \to S = X/\!\!/G$, что позволяет использовать результаты параграфа 3.1. Ниже мы даём ответ на этот вопрос. Введём обозначения

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(X)^G &= \mathrm{Kern}([\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G \times X), \ldots, p_\bullet^*]) = \\ &= \mathrm{Kern}([\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(X \times_{X/\!\!/G} X), \ldots, p_\bullet^*]), \\ \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)^G &= \mathrm{Kern}([\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X), \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(G \times X), \ldots, p_\bullet^*]) = \\ &= \mathrm{Kern}([\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X), \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X \times_{X/\!\!/G} X), \ldots, p_\bullet^*]), \\ \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))^G &= \mathrm{Kern}([\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X)), \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(G \times X)), \ldots, p_\bullet^*]) = \\ &= \mathrm{Kern}([\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X)), \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X \times_{X/\!\!/G} X)), \ldots, p_\bullet^*]).\end{aligned}$$

Нам понадобится рассматривать бесконечномерные представления алгебраических групп, напомним соответствующее понятие.

Определение 4.1.3. Пусть G – алгебраическая группа над полем k. *Рациональное линейное представление* G может быть определено любым из следующих способов:

- как индуктивный предел конечномерных линейных представлений G над k;
- как объект категории спуска (см. определения 2.1.4 и 2.3.1) для морфизма стеков $p\colon \operatorname{Spec}\mathsf{k} \to (\operatorname{Spec}\mathsf{k})/\!\!/G$;
- как G-эквивариантный пучок на $\operatorname{Spec}\mathsf{k}$;
- как комодуль над коалгеброй $\mathsf{k}[G]$ (это имеет смысл только для аффинных групп).

Определение 4.1.4. Алгебраическая группа G над k называется *линейно редуктивной* (см. [16, def. 1.4]), если категория конечномерных представлений (или, что равносильно, всех рациональных представлений) G над k полупроста.

Обозначим категорию всех рациональных (соотв. конечномерных) линейных представлений G через $\operatorname{Rep}(G)$ (соотв. через $\operatorname{rep}(G)$).

Предложение 4.1.5. *Пусть G – аффинная алгебраическая группа над k. Тогда следующие условия равносильны:*

1. *группа G линейно редуктивна;*
2. *естественный гомоморфизм $\mathsf{k} \to \mathsf{k}[G]$ есть вложение прямого слагаемого в категории $\operatorname{Rep}(G)$;*
3. *функтор сравнения Φ для производных категорий $\mathcal{D}^b(\operatorname{rep}(G))$ и $\mathcal{D}^b(\mathsf{k}-vect)/p$ является эквивалентностью;*
4. *при $\operatorname{char}\mathsf{k} = l > 0$: связная компонента единицы $G_0 \subset G$ является тором $(\mathbb{G}_m)^r$ и порядок конечной группы G/G_0 взаимно прост с l; при $\operatorname{char}\mathsf{k} = 0$: G редуктивна.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$: по определению;

$2 \Rightarrow 3$: следует из теоремы 3.1.3. Действительно, гомоморфизм $\mathcal{O}_S \to p_*\mathcal{O}_X$ для морфизма стеков $p\colon \operatorname{Spec}\mathsf{k} \to (\operatorname{Spec}\mathsf{k})/\!\!/G$ – это естественный гомоморфизм представлений $\mathsf{k} \to \mathsf{k}[G]$.

$3 \Rightarrow 1$: по существу, нужно проверить, что $\operatorname{Ext}^1_{\operatorname{rep}(G)}(V, V') = 0$ для любых $V, V' \in \operatorname{rep}(G)$. По предположению о функторе сравнения, имеем

$$\operatorname{Ext}^1_{\operatorname{rep}(G)}(V,V') = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(\operatorname{rep}(G))}(V,V'[1]) = \\ = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathsf{k}-vect)/p}(\Phi(V),\Phi(V'[1])) \subset \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathsf{k}-vect)}(V,V'[1]) = 0.$$

$1 \Leftrightarrow 4$: эта характеризация – результат М. Нагаты [17]. □

Теорема 4.1.6. *Пусть G – аффинная алгебраическая группа над полем k, действующая на схеме X. Предположим, что G линейно редуктивна. Тогда категория $\mathcal{D}^G(X)$ эквивалентна категории $\mathcal{D}(X)^G$, категория $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X)$ эквивалентна $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)^G$, а $\mathcal{D}^b(\operatorname{coh}^G(X))$ эквивалентна $\mathcal{D}^b(\operatorname{coh}(X))^G$.*

Доказательство. Все утверждения следуют из теоремы 3.1.3, применённой к морфизму стеков $X \xrightarrow{p} X/\!\!/G$. Нам необходимо проверить, что морфизм $\mathcal{O}_{X/\!\!/G} \to Rp_*\mathcal{O}_X$ в категории G-эквивариантных пучков расщепим. Рассмотрим расслоенный квадрат стеков:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "t"] \arrow[d, "p"] & pt \arrow[d, "p"] \\
X/\!\!/G \arrow[r, "t"] & pt/\!\!/G.
\end{tikzcd}$$

По формуле замены базы, морфизм $\mathcal{O}_{X/\!\!/G} \to Rp_*\mathcal{O}_X$ получается применением t^* к морфизму $\mathcal{O}_{pt/\!\!/G} \to Rp_*p^*\mathcal{O}_{pt/\!\!/G}$, который есть канонический гомоморфизм представлений $\mathsf{k} \to \mathsf{k}[G]$ группы G. Он расщепим, так как G линейно редуктивна. $\square$

Следствие 4.1.7. *Утверждения предыдущей теоремы выполнены, если G – редуктивная группа над алгебраически замкнутым полем или если G – конечная группа, и характеристика k не делит порядок G.*

Доказательство. При указанных условиях группа G линейно редуктивна, см. предложение 4.1.5. $\square$

Замечание 4.1.8. Если группа G конечна, то по определению объекты категории спуска $\mathcal{D}(X)^G$ – это объекты $F \in \mathcal{D}(X)$, оснащённые изоморфизмами $\theta_g \colon F \xrightarrow{\sim} g^*F$ для каждого $g \in G$ такими, что $g^*\theta_h \circ \theta_g = \theta_{hg}$. Иначе говоря, объект $\mathcal{D}(X)^G$ – это объект $\mathcal{D}(X)$ вместе с действием группы G на нём.

Для группы G, не являющейся линейно редуктивной, утверждение теоремы 4.1.6 может не быть верным.

Пример 4.1.9. Пусть V – векторное пространство, $X = GL(V)$, а $G = P$ – параболическая подгруппа в $GL(V)$, действующая на X сдвигами. Так как действие G на X свободно, имеем эквивалентность $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}^G(X)) \cong \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(S))$ с производной категорией фактора – однородного пространства $S = GL(V)/P$. Тем самым, мы находимся в ситуации примера 3.2.7, и функтор сравнения не является эквивалентностью.

4.2 Функтор коиндукции для эквивариантных пучков

Пусть, как обычно, X — схема, G — алгебраическая группа над k, действующая на X, H — алгебраическая подгруппа G. Группу k-точек G мы будем обозначаем $G(\mathsf{k})$. Говоря, что G разбивается в объединение левых смежных классов по H, мы имеем в виду, что существует набор k-точек g_i группы G таких, что G есть несвязное объединение $\bigsqcup Hg_i$. В этом случае однородное пространство G/H есть дискретный набор точек над k.

У функтора забывания Res_H^G из $\mathrm{qcoh}^G(X)$ в $\mathrm{qcoh}^H(X)$ существует правый сопряженный функтор, называемый *функтором коиндукции* и обозначаемый Ind_H^G. Действительно, рассмотрим морфизм стеков $X/\!\!/H \xrightarrow{q} X/\!\!/G$. Функтор Res_H^G – это обратный образ относительно q, а сопряжённый к нему справа функтор – прямой образ. Если $\mathcal{F}$ – H-пучок на X, то $\mathrm{Ind}_H^G \mathcal{F}$ называется пучком, *коиндуцированным с* $\mathcal{F}$.

Нам понадобятся следующие факты (см. [6]):

Предложение 4.2.1. *Существует точная тройка функторов из* $\mathrm{qcoh}^H(X)$ *в* $\mathrm{qcoh}^H(X)$*:*

$$0 \to \Psi' \to \mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_H^G \to \mathrm{Id} \to 0,$$

где Ψ' *— некоторый функтор* $\mathrm{qcoh}^H(X) \to \mathrm{qcoh}^H(X)$*. Предположим вдобавок, что* $H \subset G$ *– подгруппа конечного индекса и что* G *разбивается в объединение смежных классов по* H*. Тогда функтор* Ind_H^G *точен и сохраняет когерентные пучки. Имеет место формула* $\Psi'(-) = \oplus_{g \in J} g^*(-)$*, где* J *— множество представителей в* $G(\mathsf{k})$ *нетривиальных правых смежных классов* G *по* H*.*

Производный от точного функтора Ind_H^G мы также будем обозначать Ind_H^G.

4.3 Скрученные эквивариантные пучки для конечных групп

Пусть G — конечная группа, k — поле. Фиксируем α — 2-коцикл группы G со значениями в k^*, т.е. отображение $G \times G \to \mathsf{k}^*$, удовлетворяющее условию коцикла:

$$\alpha(fg, h)\alpha(f, g) = \alpha(f, gh)\alpha(g, h)$$

для всех троек $f, g, h \in G$. Определения и начальные сведения, относящиеся к когомологиям групп, можно найти, например, в [4].

Определение 4.3.1. Назовём *α-представлением* группы G в векторном пространстве V над k отображение $R\colon G \to GL(V)$, такое что

$$R(g)R(h) = \alpha(g, h)R(gh)$$

для любых $g, h \in G$. Определим *скрученную групповую алгебру* следующим образом. Положим $\mathsf{k}_\alpha[G]$ равным $\oplus_{g \in G} \mathsf{k} \cdot g$ как векторное пространство и определим умножение на элементах базиса с помощью равенства $g \cdot h = \alpha(g, h)(gh)$.

Очевидно, категории конечномерных α-представлений группы G над k и представлений алгебры $\mathsf{k}_\alpha[G]$ над k эквивалентны, мы будем обозначать их $\mathrm{rep}(G, \alpha)$.

Предложение 4.3.2. *Определенная выше алгебра* $\mathsf{k}_\alpha[G]$ *является ассоциативной алгеброй с единицей. Она является полупростой в случае, если* $\mathrm{char}(\mathsf{k})$ *не делит порядок группы* G*. Алгебра* $\mathsf{k}_\alpha[G]$ *зависит (с точностью до изоморфизма) только от класса* $[\alpha] \in H^2(G, \mathsf{k}^*)$ *в 2-когомологиях группы.*

Доказательство. См. [6, предл. 1.1]. $\square$

Пусть X — схема над k, G — конечная группа, действующая на X, α — 2-коцикл G со значениями в k^*.

Определение 4.3.3. Мы называем *α-G-эквивариантным пучком* на X пучок F вместе с фиксированными изоморфизмами $\theta_g\colon F \to g^*F$ для каждого $g \in G$, такими что $\alpha(g, h)\theta_{gh} = h^*(\theta_g) \circ \theta_h$ для всякой пары $g, h \in G$.

В случае тривиального коцикла $\alpha(g, h) = 1$ это определение дает обычное понятие G-эквивариантного пучка. Для краткости α-G-эквивариантные пучки мы будем иногда называть *α-пучками.*

Изучение представлений группы, скрученных на коцикл, может быть сведено к изучению обычных представлений с помощью следующего предложения (см. [6, предл. 1.3]).

Предложение 4.3.4. *Пусть G — группа порядка n, поле k алгебраически замкнутое характеристики ноль. Пусть $\mu_d \subset \mathsf{k}^*$ обозначает подгруппу корней из единицы степени d.*

1. Пусть $\alpha \in Z^2(G, \mathsf{k}^*)$ — коцикл, и существует α-представление V группы G размерности d. Тогда $d \cdot [\alpha] = 0$ в $H^2(G, \mathsf{k}^*)$ и существует коцикл $\alpha' \in Z^2(G, \mu_d)$, такой что $[\alpha] = [\alpha']$.

2. Пространство $H^2(G, \mathsf{k}^*)$ аннулируется умножением на n и естественное отображение $H^2(G, \mu_n) \to H^2(G, \mathsf{k}^*)$ сюръективно.

3. Пусть $\alpha \in Z^2(G, \mu_d)$, $\bar{G}$ — центральное расширение G с помощью μ_d, задаваемое коциклом α. Обозначим через $\mathrm{rep}_{(i)}(\bar{G})$ полную подкатегорию в $\mathrm{rep}(\bar{G})$, образованную представлениями R, такими что $R(\xi) = \xi^i \cdot \mathrm{Id}$ при $\xi \in \mu_d$. Тогда

$$\mathrm{rep}(\bar{G}) \cong \bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathrm{rep}_{(i)}(\bar{G})$$

и

$$\mathrm{rep}_{(i)}(\bar{G}) \cong \mathrm{rep}(G, \alpha^i).$$

4.4 Скрученные эквивариантные пучки для алгебраических групп

В этом параграфе мы вводим и изучаем “скрученные представления G” и “скрученные G-эквивариантные пучки” для произвольной алгебраической группы G. Естественно ожидать, что 2-коциклом алгебраической группы следует считать регулярную функцию $\alpha(g,h)\colon G \times G \to \mathsf{k}^*$ (удовлетворяющую условию коцикла). Однако определение в духе “$\alpha(g,h)$ есть регулярная функция $G \times G \to \mathsf{k}^*$” оказывается недостаточным. Данные ниже более правильные определения мотивированы следующим фактом (см. предложения 6.1.4 и 6.1.5): если если E – исключительный пучок на проективной схеме X с действием группы G над алгебраически замкнутым полем k и для любой точки $g \in G$ пучки E и g^*E изоморфны, то для некоторого линейного расслоения $\mathcal{L}$ на X существует изоморфизм $p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*E \to a^*E$, который является структурным изоморфизмом скрученного эквивариантного пучка для некоторого коцикла $(\mathcal{L}, \alpha)$ на группе G.

Определение 4.4.1. Пусть G — алгебраическая группа со структурным морфизмом $\mu\colon G \times G \to G$. Пусть $a\colon G \times X \to X$ — действие G на схеме X. *Коциклом* на G назовем пару $(\mathcal{L}, \alpha)$, состоящую из линейного расслоения $\mathcal{L}$ на G и изоморфизма расслоений $\alpha\colon p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L} \to \mu^*\mathcal{L}$ на $G \times G$, удовлетворяющего условию ассоциативности: на произведении $G \times G \times G$ изоморфизмы

$$(\mathrm{Id} \times \mu)^*\alpha \circ (\mathrm{Id} \otimes p_{23}^*\alpha) \quad \text{и} \quad (\mu \times \mathrm{Id})^*\alpha \circ (p_{12}^*\alpha \otimes \mathrm{Id})$$

между расслоениями $p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L} \otimes p_3^*\mathcal{L}$ и $(\mu(\mathrm{Id} \times \mu))^*\mathcal{L}$ равны.

Замечание 4.4.2. В действительности, пара $(\mathcal{L}, \alpha)$ является обобщением не коцикла в случае конечных групп, а его класса когомологий, однако скрученные представления и пучки можно определить непосредственно по этому классу. Фактически, мы получили более инвариантное понятие, чем было использовано в случае конечных групп.

Пусть $(\mathcal{L}, \alpha)$ — коцикл на G.

Определение 4.4.3. Назовём $(\mathcal{L}, \alpha)$-*представлением* G в векторном пространстве V изоморфизм

$$\theta\colon \mathcal{L} \otimes V \to \mathcal{O}_G \otimes V$$

пучков на G, такой что диаграмма пучков на $G \times G$

$$\begin{tikzcd} p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L} \otimes V \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes p_2^*\theta"] \arrow[d, "\alpha\otimes\mathrm{Id}"'] & p_1^*\mathcal{L} \otimes V \arrow[d, "p_1^*\theta"] \\ \mu^*\mathcal{L} \otimes V \arrow[r, "\mu^*\theta"'] & \mathcal{O}_G \otimes V \end{tikzcd} \tag{13}$$

коммутативна. *Морфизмом* $(\mathcal{L}, \alpha)$-представлений назовем линейное отображение $V \to U$, согласованное со структурными изоморфизмами θ_V и θ_U.

Конечномерные $(\mathcal{L}, \alpha)$-представления группы G образуют абелеву категорию, которую мы будем обозначать $\mathrm{rep}(G, \mathcal{L}, \alpha)$. Категория всех $(\mathcal{L}, \alpha)$-представлений G будет обозначаться $\mathrm{Rep}(G, \mathcal{L}, \alpha)$.

Определение 4.4.4. Назовём $(\mathcal{L}, \alpha)$-*G-эквивариантным пучком* $\mathcal{F} = (F, \theta)$ (или $(\mathcal{L}, \alpha)$-*пучком*) на X пучок F на X вместе с изоморфизмом

$$\theta\colon p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*F \to a^*F$$

пучков на $G \times X$, удовлетворяющим условию согласованности: на $G \times G \times X$ диаграмма пучков

$$\begin{tikzcd} p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L} \otimes p_3^*F \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes p_{23}^*\theta"] \arrow[d, "p_{12}^*\alpha\otimes\mathrm{Id}"'] & p_1^*\mathcal{L} \otimes (ap_{23})^*F \arrow[r, "(\mathrm{Id}\times a)^*\theta"] & (a(\mathrm{Id} \times a))^*F \arrow[d, equal] \\ (\mu p_{12})^*\mathcal{L} \otimes p_3^*F \arrow[rr, "(\mu\times\mathrm{Id})^*\theta"] & & (a(\mu \times \mathrm{Id}))^*F \end{tikzcd}$$

коммутативна. Морфизм $(\mathcal{L}, \alpha)$-эквивариантных пучков определяется как гомоморфизм пучков $F_1 \to F_2$ на X, согласованный со структурными морфизмами θ_1 и θ_2.

Так же, как и обычные G-эквивариантные пучки, $(\mathcal{L}, \alpha)$-G-эквивариантные квазикогерентные пучки на X образуют абелеву категорию. Её мы обозначим $\mathrm{qcoh}^{G,\mathcal{L},\alpha}(X)$, а категорию когерентных $(\mathcal{L}, \alpha)$-G-эквивариантные пучков на X будем обозначать через $\mathrm{coh}^{G,\mathcal{L},\alpha}$. В частном случае, когда $\mathcal{L} = \mathcal{O}_G$, а $\alpha\colon \mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_G \to \mathcal{O}_G$ — обычное умножение, получаем категорию $G-$эквивариантных пучков. Если же в качестве X взять точку, то получим категорию $(\mathcal{L}, \alpha)$-представлений группы G.

Пример 4.4.5. Пусть $X = \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$, $G = PGL(W)$ (G тавтологически действует на X), $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1)$ — пучок на X. Обозначим через $\mathcal{L}$ линейное расслоение на G, ассоциированное с главным $\mathbb{C}^*$-расслоением $GL(W)$ над G. Умножение в $GL(W)$ определяет умножение на сечениях $\mathcal{L}$, тем самым мы получаем коцикл $(\mathcal{L}, \alpha)$ на G. Отображение действия $GL(W) \times W \to W$ позволяет определить изоморфизм

$$p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \otimes W) \to a^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \otimes W)$$

пучков на $G\times\mathbb{P}(W)$, т.е. $(\mathcal{L},\alpha)$-действие на расслоении $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}\otimes W$. При этом $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1)\subset\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}\otimes W$ будет инвариантным подрасслоением. Таким образом, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1)$ является $(\mathcal{L},\alpha)$-эквивариантным пучком.

Заметим, что расслоение $\mathcal{L}$ нетривиально:

$$G=PGL(W)=\mathbb{P}(\operatorname{End}W)\setminus\{\det=0\},$$

следовательно группа Пикара $\operatorname{Pic}G$ равна $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и порождена расслоением $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\operatorname{End}W)}(1)$. При этом $\mathcal{L}$ есть ограничение тавтологического расслоения с $\mathbb{P}(\operatorname{End}W)$, и $\mathcal{L}\ncong\mathcal{O}_G$.

На множестве коциклов группы G можно очевидным способом определить умножение: если $(\mathcal{L}_1,\alpha_1)$ и $(\mathcal{L}_2,\alpha_2)$ — коциклы на G, то их произведением будет коцикл $(\mathcal{L}_1,\alpha_1)\cdot(\mathcal{L}_2,\alpha_2)=(\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2,\alpha_1\otimes\alpha_2)$, где изоморфизм $\alpha_1\otimes\alpha_2$ определяется как композиция

$$p_1^*(\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2)\otimes p_2^*(\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2)=p_1^*\mathcal{L}_1\otimes p_2^*\mathcal{L}_1\otimes p_1^*\mathcal{L}_2\otimes p_2^*\mathcal{L}_2\xrightarrow{\alpha_1\otimes\alpha_2}$$
$$\to\mu^*\mathcal{L}_1\otimes\mu^*\mathcal{L}_2=\mu^*(\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2).$$

Операция умножения превращает множество коциклов на G в абелеву группу. Обратным элементом к коциклу $(\mathcal{L},\alpha)$ будет $(\mathcal{L},\alpha)^{-1}=(\mathcal{L}^*,(\alpha^*)^{-1})$, этот коцикл мы будем иногда (не вполне корректно) обозначать $(\mathcal{L}^{-1},\alpha^{-1})$.

В следующем предложении мы сформулируем элементарные свойства скрученных представлений и пучков.

Предложение 4.4.6. *Пусть $\mathcal{F}$ — $(\mathcal{L}_1,\alpha_1)$-G-эквивариантный пучок, а $\mathcal{G}$ — $(\mathcal{L}_2,\alpha_2)$-G-эквивариантный пучок на X, U и V — $(\mathcal{L}_1,\alpha_1)$- и $(\mathcal{L}_2,\alpha_2)$-представления G. Тогда*

- *$U\otimes V$ является $(\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2,\alpha_1\otimes\alpha_2)$-представлением группы G,*
- *U^* является $(\mathcal{L}_1^*,\alpha_1^*)$-представлением G,*
- *$\operatorname{Hom}(U,V)$ является $(\mathcal{L}_1^*\otimes\mathcal{L}_2,\alpha_1^*\otimes\alpha_2)$-представлением G,*
- *$\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}$ является $(\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2,\alpha_1\otimes\alpha_2)$-пучком на X,*
- *$\mathcal{F}^*$ является $(\mathcal{L}_1^*,\alpha_1^*)$-пучком,*
- *$\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})$ является $(\mathcal{L}_1^*\otimes\mathcal{L}_2,\alpha_1^*\otimes\alpha_2)$-пучком,*
- *$\mathcal{O}_X\otimes V$ является $(\mathcal{L}_2,\alpha_2)$-пучком,*
- *$\mathcal{F}\otimes V$ является $(\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2,\alpha_1\otimes\alpha_2)$-пучком,*
- *$\Gamma(X,\mathcal{F})$ является $(\mathcal{L}_1,\alpha_1)$-представлением G,*
- *$\operatorname{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ является $(\mathcal{L}_1^*\otimes\mathcal{L}_2,\alpha_1^*\otimes\alpha_2)$-представлением G.*

Доказательства очевидны.

Как и в ситуации с конечными группами, определенные выше коциклы классифицируют центральные расширения групп с помощью $\mathbb{G}_m$. Пусть $(\mathcal{L},\alpha)$ — коцикл на алгебраической группе G. Обозначим через $\tilde{G}$ тотальное пространство расслоения $\mathcal{L}$ минус нулевое сечение: по определению, $\tilde{G}$ является относительным спектром $\operatorname{Spec}_G \mathcal{A}$ пучка $\mathcal{O}_G$-алгебр

$$\mathcal{A} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}^{\otimes n}$$

на G. Тогда $\tilde{G}$ — главное $\mathbb{G}_m$-расслоение. Изоморфизм α позволяет определить на $\tilde{G}$ ассоциативное умножение, подробности см. в [6]. Проекция $\pi\colon \tilde{G} \to G$ является гомоморфизмом, его ядро $\operatorname{Spec} e^*\mathcal{A}$ изоморфно $\mathbb{G}_m$ и лежит в центре $\tilde{G}$, т.е. мы получили центральное расширение

$$1 \to \mathbb{G}_m \to \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \to 1. \tag{14}$$

Пусть $\tilde{\mathcal{L}} = \pi^*\mathcal{L}$ — расслоение на $\tilde{G}$, $\tilde{\alpha} = \pi^*\alpha$ — изоморфизм $p_1^*\tilde{\mathcal{L}} \otimes p_2^*\tilde{\mathcal{L}} \to \tilde{\mu}^*\tilde{\mathcal{L}}$. Тогда $\pi^*(\mathcal{L},\alpha) = (\tilde{\mathcal{L}},\tilde{\alpha})$ — коцикл на $\tilde{G}$. Мы утверждаем, что этот коцикл тривиален. Действительно, расслоению $\tilde{\mathcal{L}}$ соответствует пучок $\mathcal{A}$-модулей $\mathcal{L}\otimes\mathcal{A}$ на G. Имеется очевидный изоморфизм $\mathcal{L}\otimes\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, согласованный с умножением α.

Пусть X — многообразие с действием группы G, тогда на X возникает также действие группы $\tilde{G}$. Если $\mathcal{F}$ — $(\mathcal{L},\alpha)$-эквивариантный пучок на X относительно действия G, то на $\mathcal{F}$ естественно возникает структура $(\tilde{\mathcal{L}},\tilde{\alpha})$-эквивариантного пучка относительно действия $\tilde{G}$. Таким образом, пучок $\mathcal{F}$ при расширении группы до $\tilde{G}$ становится настоящим эквивариантным пучком.

Подгруппа $\mathbb{G}_m \subset \tilde{G}$ действует на X тривиально, выясним, как она действует на $\mathcal{F}$. Мы утверждаем, что это действие линейно. Верно и обратное: любой $\tilde{G}$-эквивариантный пучок с линейным действием $\mathbb{G}_m$ определяет некоторый $(\mathcal{L},\alpha)$-G-эквивариантный пучок. В действительности, имеет место несколько более общее утверждение (см. [6, предл. 1.9]):

Предложение 4.4.7. *Пусть X — алгебраическое многообразие с действием алгебраической группы G и $(\mathcal{L},\alpha)$ — коцикл на G. Рассмотрим расширение групп (14), отвечающее этому коциклу. Тогда для любого целого r имеется эквивалентность категорий*

$$\operatorname{coh}^{G,\mathcal{L}^r,\alpha^r}(X) \cong \operatorname{coh}^{\tilde{G}}_{(r)}(X),$$

где $\operatorname{coh}^{\tilde{G}}_{(r)}(X)$ — полная подкатегория в $\operatorname{coh}^{\tilde{G}}(X)$, образованная пучками, на которых подгруппа $\mathbb{G}_m \subset \tilde{G}$ действует с весом r. Аналогичное утверждение выполнено для квазикогерентных пучков.

Как частный случай предложения 4.4.7 при $X = pt$, получаем

Предложение 4.4.8. *Пусть $(\mathcal{L},\alpha)$ — коцикл на алгебраической группе G, отвечающий расширению групп (14). Тогда для любого целого r имеется эквивалентность категорий*

$$\operatorname{rep}(G,\mathcal{L}^r,\alpha^r) \cong \operatorname{rep}_{(r)}(\tilde{G}),$$

где $\operatorname{rep}_{(r)}(\tilde{G})$ — полная подкатегория в $\operatorname{rep}(\tilde{G})$, образованная представлениями, на которых подгруппа $\mathbb{G}_m \subset \tilde{G}$ действует с весом r. Аналогичное утверждение справедливо и для категорий Rep (не обязательно конечномерных) рациональных представлений.

Замечание 4.4.9. Так как подгруппа $\mathbb{G}_m \subset \tilde{G}$ является центральной и редуктивной, категории $\operatorname{rep}_{(r)}(\tilde{G})$ и $\operatorname{Rep}_{(r)}(\tilde{G})$, определенные выше, являются компонентами следующих разложений по характерам $\mathbb{G}_m$:

$$\operatorname{rep}(\tilde{G}) = \bigoplus\nolimits_{r\in\mathbb{Z}} \operatorname{rep}_{(r)}(\tilde{G}), \qquad \operatorname{Rep}(\tilde{G}) = \prod\nolimits_{r\in\mathbb{Z}} \operatorname{Rep}_{(r)}(\tilde{G}).$$

Аналогичные разложения имеются и для категорий $\tilde{G}$-эквивариантных пучков на схеме:

$$\mathrm{coh}^{\tilde{G}}(X) = \bigoplus\nolimits_{r\in\mathbb{Z}} \mathrm{coh}^{\tilde{G}}_{(r)}(X), \qquad \mathrm{qcoh}^{\tilde{G}}(X) = \prod\nolimits_{r\in\mathbb{Z}} \mathrm{qcoh}^{\tilde{G}}_{(r)}(X).$$

Таким образом, категорию $(\mathcal{L},\alpha)$-представлений группы G можно описать как полную подкатегорию (и даже прямое слагаемое) в категории представлений некоторого расширения группы с помощью $\mathbb{G}_m$. На самом деле, как и в случае конечных групп, при этом достаточно рассматривать конечные расширения.

Лемма 4.4.10. *Пусть $(\mathcal{L},\alpha)$ — коцикл на алгебраической группе G. Предположим, что существует $(\mathcal{L},\alpha)$-представление группы G в векторном пространстве V размерности n. Тогда коцикл $(\mathcal{L},\alpha)^n$ тривиален.*

Доказательство. Из предложения 4.4.6 следует, что в одномерном пространстве $\Lambda^n V$ имеется $(\mathcal{L},\alpha)^n$-представление G. То есть, по определению, существует изоморфизм $\theta\colon \mathcal{L}^n \to \mathcal{O}_G$ расслоений на G. При этом условие согласованности (13) из определения скрученного представления означает, что при θ структурный изоморфизм α^n переходит в обычное умножение $\mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_G \to \mathcal{O}_G$. □

Замечание 4.4.11. Отметим, что для любого коцикла $(\mathcal{L},\alpha)$ группы G существует скрученное конечномерное $(\mathcal{L},\alpha)$-представление G. Действительно, расслоение $\mathcal{L}$ на G естественным образом является $(\mathcal{L},\alpha)$-эквивариантным пучком относительно действия G на себе левыми сдвигами, роль структурного морфизма играет $\alpha\colon p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{L} \to \mu^*\mathcal{L} = a^*\mathcal{L}$. Согласно предложению 4.4.6, в пространстве $\Gamma(G,\mathcal{L})$ имеется (бесконечномерное) рациональное $(\mathcal{L},\alpha)$-представление G. Оно есть объединение конечномерных подпредставлений, откуда и следует утверждение.

Предположим, что у группы G есть скрученное $(\mathcal{L},\alpha)$-представление размерности n. Мы построим расширение группы G с помощью алгебраической группы μ_n, соответствующее коциклу $(\mathcal{L},\alpha)$. Для этого фиксируем изоморфизм $\theta\colon \mathcal{L}^n \to \mathcal{O}$ из доказательства леммы 4.4.10, тривиализующий коцикл $(\mathcal{L},\alpha)$. Определим пучок $\mathcal{O}_G$-алгебр на G: положим

$$\mathcal{B} = \oplus_{i=0}^{n-1}\mathcal{L}^{\otimes i}$$

и определим умножение на $\mathcal{B}$ с помощью изоморфизма θ. Определим теперь $\bar{G}$ как относительный спектр $\mathrm{Spec}_G\,\mathcal{B}$. Наглядно представить себе $\bar{G}$ можно как прообраз единичного сечения при однородном отображении возведения в степень: $\mathcal{L}\to\mathcal{L}^n\cong\mathcal{O}$. Имеет место следующее предложение:

Предложение 4.4.12. *Определенное выше $\bar{G}$ является замкнутой подгруппой в $\tilde{G}$, а также центральным расширением G с помощью μ_n. Имеются эквивалентности категорий*

$$\mathrm{coh}^{G,\mathcal{L}^r,\alpha^r}(X) \cong \mathrm{coh}^{\bar{G}}_{(r)}(X), \qquad \mathrm{qcoh}^{G,\mathcal{L}^r,\alpha^r}(X) \cong \mathrm{qcoh}^{\bar{G}}_{(r)}(X)$$

и

$$\mathrm{rep}(G,\mathcal{L}^r,\alpha^r) \cong \mathrm{rep}_{(r)}(\bar{G}), \qquad \mathrm{Rep}(G,\mathcal{L}^r,\alpha^r) \cong \mathrm{Rep}_{(r)}(\bar{G})$$

для всех целых r, а также разложения

$$\mathrm{coh}^{\bar{G}}(X) \cong \bigoplus_{r=0}^{n-1} \mathrm{coh}^{\bar{G}}_{(r)}(X), \qquad \mathrm{qcoh}^{\bar{G}}(X) \cong \bigoplus_{r=0}^{n-1} \mathrm{qcoh}^{\bar{G}}_{(r)}(X)$$

и

$$\mathrm{rep}(\bar G)=\bigoplus_{r=0}^{n-1}\mathrm{rep}_{(r)}(\bar G),\qquad \mathrm{Rep}(\bar G)=\bigoplus_{r=0}^{n-1}\mathrm{Rep}_{(r)}(\bar G),$$

где обозначения $\mathrm{coh}^{\bar G}_{(r)}(X),\mathrm{rep}_{(r)}(\bar G),\dots$ *аналогичны использованным выше.*

Как и в случае обычных эквивариантных пучков, на скрученные эквивариантные пучки можно смотреть как на объекты категории спуска, связанной с подходящей косимплициальной категорией.

Определение 4.4.13. Рассмотрим симплициальную схему

$$(X/G)_\bullet=[X_0,X_1,X_2,\dots,p_\bullet]=[X,G\times X,G\times G\times X,\dots,p_\bullet],$$

где для монотонного отображения $f\colon[0,\dots,m]\to[0,\dots,n]$ морфизм схем

$$p_f\colon\ \underbrace{G\times\ldots\times G}_{n\text{ раз}}\times X\to\underbrace{G\times\ldots\times G}_{m\text{ раз}}\times X$$

определён по правилу

$$(g_n,\dots,g_1,x_0)\mapsto(g_{f(m)}\cdot\ldots\cdot g_{f(m-1)+1},\dots,g_{f(1)}\cdot\ldots\cdot g_{f(0)+1},g_{f(0)}\cdot\ldots\cdot g_1x_0).$$

Рассмотрим косимплициальную категорию

$$[\mathrm{qcoh}(X),\mathrm{qcoh}(X\times G),\mathrm{qcoh}(X\times G\times G),\dots,p_\bullet^*],$$

состоящую из категорий квазикогерентных пучков на X_i и функторов обратного образа между ними. Подкрутим функторы p_f^* следующим образом: положим для пучка F на $\underbrace{G\times\ldots\times G}_{m\text{ раз}}\times X$

$$P_f'^*F=p_1^*\mathcal L\otimes\ldots\otimes p_{n-f(m)}^*\mathcal L\otimes p_f^*F.\tag{15}$$

Здесь $p_i,i=1,\dots,n-f(m)$ обозначает проекцию $G\times\ldots\times G\times X$ на i-й сомножитель G.

Зададим изоморфизмы $\epsilon'_{f,g}\colon P_f'^*P_g'^*\xrightarrow{\sim}P_{fg}'^*$ для всякой пары компонируемых отображений f,g. Пусть $f\colon[0,\dots,n]\to[0,\dots,k]$ и $g\colon[0,\dots,m]\to[0,\dots,n]$ – морфизмы в Δ. Имеем

$$\begin{aligned}P_f^*P_g^*(-)&=P_f^*\left(p_1^*\mathcal L\otimes\ldots p_{n-g(m)}^*\mathcal L\otimes p_g^*(-)\right)=\\&=p_1^*\mathcal L\otimes\ldots\otimes p_{k-f(n)}^*\mathcal L\otimes p_f^*p_1^*\mathcal L\otimes\ldots\otimes p_f^*p_{n-g(m)}^*\mathcal L\otimes p_f^*p_g^*(-)=\\&=p_1^*\mathcal L\otimes\ldots\otimes p_{k-f(n)}^*\mathcal L\otimes(\mu p_{k-f(n)+1,\dots,k-f(n-1)})^*\mathcal L\otimes\ldots\\&\quad\ldots\otimes(\mu p_{k-f(g(m)+1)+1,\dots,k-f(g(m))})^*\mathcal L\otimes p_f^*p_g^*(-),\\P_{fg}^*(-)&=p_1^*\mathcal L\otimes\ldots\otimes p_{k-f(g(m))}^*\mathcal L\otimes p_{fg}^*(-),\end{aligned}$$

где $p_{i,i+1,\dots,j-1,j}$ обозначает проекцию $G\times\ldots\times G\times X$ на произведение $i,\dots,j$ сомножителей, а μ используется для обозначения умножения $G\times\ldots\times G\to G$. Определим изоморфизм $\epsilon'_{f,g}$ при помощи изоморфизмов $\epsilon_{f,g}\colon p_f^*p_g^*\to p_{fg}^*$ и изоморфизмов

$$(\mu p_{i,i+1,\dots,j-1,j})^*\mathcal L\to p_i^*\mathcal L\otimes\ldots\otimes p_j^*\mathcal L,$$

полученных итерированием структурного изоморфизма $\alpha\colon p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{L}\to\mu^*\mathcal{L}$ на $G\times G$.

Полученную косимплициальную категорию

$$[\mathrm{qcoh}(X),\mathrm{qcoh}(X\times G),\mathrm{qcoh}(X\times G\times G),\ldots,P'^*_\bullet],\tag{16}$$

а также её производные аналоги, будем называть косимплициальной категорией, связанной с действием G на X, скрученным на коцикл $(\mathcal{L},\alpha)$.

Пример 4.4.14. Для маленьких значений n,m и отображений f, соответствующих граням и вырождениям, функторы P'^*_f из данного определения имеют вид

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathrm{qcoh}(G\times G\times X) \arrow[r, shift left=4, leftarrow, "p_1^*\mathcal{L}\otimes p_{23}^*"] \arrow[r, shift left=2, "(p_1\times e\times p_2)^*"] \arrow[r, leftarrow, "(\mu\times 1)^*"] \arrow[r, shift right=2, "(e\times\mathrm{Id})^*"] \arrow[r, shift right=4, leftarrow, "(1\times a)^*"] & \mathrm{qcoh}(G\times X) \arrow[r, shift left=2, leftarrow, "p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*"] \arrow[r, "(e\times 1)^*"] \arrow[r, shift right=2, leftarrow, "a^*"] & \mathrm{qcoh}(X)\,.
\end{tikzcd}$$

Для $g\colon[0]\to[0,1], g(0)=0$ и $f\colon[0,1]\to[0,1,2], f(0)=0, f(1)=2$ изоморфизм между функторами $P'^*_fP'^*_g$ и P'^*_{fg} устроен следующим образом:

$$P'^*_fP'^*_g(-)=(\mu\times\mathrm{Id})^*(p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*(-))\xrightarrow{\sim}p_{12}^*\mu^*\mathcal{L}\otimes p_3^*(-)\xrightarrow{p_{12}^*(\alpha)^{-1}}$$
$$p_{12}^*(p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{L})\otimes p_3^*(-)\xrightarrow{\sim}p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{L}\otimes p_3^*(-)\xrightarrow{\sim}p_1^*\mathcal{L}\otimes p_{23}^*(p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*(-))=P'^*_{fg}(-).$$

Лемма 4.4.15. *Косимплициальная категория (16) удовлетворяет условиям 1 и 2 параграфа 2.1.*

Проверку этой леммы мы предоставляем читателю.

Нетрудно видеть (см. предложение 2.1.7), что категория спуска Kern, связанная с (16), – это в точности категория скрученных $(\mathcal{L},\alpha)$-G-эквивариантных квазикогерентных пучков на X. Согласно предложению 2.1.9, категорию (16) можно дополнить до аугментированной косимплициальной категории

$$[\mathrm{qcoh}^{G,\mathcal{L},\alpha}(X),\mathrm{qcoh}(X),\mathrm{qcoh}(X\times G),\mathrm{qcoh}(X\times G\times G),\ldots,P'^*_\bullet],\tag{17}$$

для которой выполнены условия 1 и 2 параграфа 2.1, а функтор сравнения из предложения 2.1.8 будет (по определению) эквивалентностью.

Теперь перейдём к производной версии спуска для скрученных пучков. Определим $\mathcal{D}^{G,\mathcal{L},\alpha}(X)$ как полную подкатегорию в неограниченной производной категории всех $(\mathcal{L},\alpha)$-G-эквивариантных $\mathcal{O}_X$-модулей, состоящую из комплексов с $(\mathcal{L},\alpha)$-G-эквивариантными квазикогерентными пучками когомологий. Через $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}^{G,\mathcal{L},\alpha}(X))$ обозначим, как обычно, ограниченную производную категорию от $\mathrm{coh}^{G,\mathcal{L},\alpha}(X)$. Обозначим также через $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G,\mathcal{L},\alpha}(X)$ категорию $(\mathcal{L},\alpha)$-G-эквивариантных совершенных комплексов. Это полная подкатегория в $\mathcal{D}^{G,\mathcal{L},\alpha}(X)$, образованная объектами, которые при забывании эквивариантной структуры становятся совершенными комплексами на X.

Рассмотрим производные аналоги (17):

$$[\mathcal{D}^{G,\mathcal{L},\alpha}(X),\mathcal{D}(X),\mathcal{D}(G\times X),\mathcal{D}(G\times G\times X),\ldots,LP'^*_\bullet],\tag{18}$$
$$[\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}^{G,\mathcal{L},\alpha}(X)),\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X)),\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(G\times X)),\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(G\times G\times X)),\ldots,LP'^*_\bullet],$$
$$[\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G,\mathcal{L},\alpha}(X),\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X),\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(G\times X),\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(G\times G\times X),\ldots,LP'^*_\bullet],$$

здесь функторы P'^*_f и изоморфизмы между ними – такие же, как в определении 4.4.13.

Лемма 4.4.16. *Категория (18) удовлетворяет условиям 1 и 2 параграфа 2.1.*

Доказательство этой леммы также несложно, мы его опускаем. Косимплициальные категории (17) и (18) дают примеры косимплициальных категорий, которые не получаются стандартной конструкцией, связанных с морфизмом стеков, см. параграф 3.1, (1) и (3).

Как и в нескрученной ситуации, мы хотим показать, что при условии линейной редуктивности группы G производные категории скрученных эквивариантных пучков $\mathcal{D}^{G,\mathcal{L},\alpha}(X), \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}^{G,\mathcal{L},\alpha}(X)), \ldots$ эквивалентны категориям спуска

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(X)^{G,\mathcal{L},\alpha} &= \mathrm{Kern}([\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G\times X), \mathcal{D}(G\times G\times X), \ldots, LP_\bullet'^*]),\\ \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))^{G,\mathcal{L},\alpha} &= \mathrm{Kern}([\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X)), \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(G\times X)), \ldots, LP_\bullet'^*]),\\ \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)^{G,\mathcal{L},\alpha} &= \mathrm{Kern}([\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X), \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(G\times X), \ldots, LP_\bullet'^*]), \ldots,\end{aligned}$$

связанным с косимплициальными категориями из определения 4.4.13. Мы не будем пользоваться описанием категории спуска через комодули над комонадой. Вместо этого мы сведём утверждение к тому, что функтор сравнения является эквивалентностью для производной категории пучков, эквивариантных относительно расширения группы G, соответствующего коциклу. Пусть

$$1 \to \mathbb{G}_m \to \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \to 1 \tag{19}$$

– центральное расширение группы G с помощью $\mathbb{G}_m$, соответствующее коциклу $(\mathcal{L}, \alpha)$. Категория квазикогерентных G-эквивариантных пучков на X разлагается в прямое произведение категорий

$$\mathrm{qcoh}^{\tilde{G}}(X) \cong \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{qcoh}^{\tilde{G}}_{(i)}(X) \cong \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{qcoh}^{\tilde{G},\mathcal{L}^i,\alpha^i}(X), \tag{20}$$

где $\mathrm{qcoh}^{\tilde{G}}_{(i)}$ обозначает подкатегорию, состоящие из $\tilde{G}$-эквивариантных пучков, на которые подгруппа $\mathbb{G}_m \subset \tilde{G}$ действует с весом i, см. предложение 4.4.7 и замечание 4.4.9.

Теорема 4.4.17. *Функтор сравнения*

$$\mathcal{D}^{G,\mathcal{L},\alpha}(X) \to \mathcal{D}(X)^{G,\mathcal{L},\alpha}$$

является эквивалентностью для линейно редуктивной группы G. Аналогичное выполнено для $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G,\mathcal{L},\alpha}(X)$ и $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}^{G,\mathcal{L},\alpha}(X))$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}_{(i)} \subset \mathcal{D}(X)^{\tilde{G}}$ полную подкатегорию, образованную объектами, на которые подгруппа $\mathbb{G}_m \subset \tilde{G}$ действует с весом i. Несложно видеть, что для разных i эти подкатегории ортогональны, т.е. между объектами разных подкатегорий все морфизмы нулевые. Расширение групп (19) задаёт строго полный функтор на категориях спуска $\mathcal{D}(X)^{G,\mathcal{L}^i,\alpha^i} \to \mathcal{D}(X)^{\tilde{G}}$, причём его образ попадает в подкатегорию $\mathcal{D}_{(i)}$, см. доказательство предложения 4.4.7. Обозначим полученный функтор $\mathcal{D}(X)^{G,\mathcal{L}^i,\alpha^i} \to \mathcal{D}_{(i)}$ через Ξ_i. Разложение (20) даёт разложение

$$\mathcal{D}^{\tilde{G}}(X) \cong \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^{\tilde{G},\mathcal{L}^i,\alpha^i}(X).$$

для производных категорий. Оно включается в коммутативную диаграмму категорий и функторов

$$\begin{tikzcd}
\prod_i \mathcal{D}^{G,\mathcal{L}^i,\alpha^i}(X) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[d, "\prod \Phi_i"] & & \mathcal{D}^{\tilde{G}}(X) \arrow[d, "\Phi_{\tilde{G}}", "\sim"'] \\
\prod_i \mathcal{D}(X)^{G,\mathcal{L}^i,\alpha^i} \arrow[r, "\prod \Xi_i"] & \prod_i \mathcal{D}_{(i)} \arrow[r] & \mathcal{D}(X)^{\tilde{G}}.
\end{tikzcd}$$

Расширение $\tilde{G}$ – линейно редуктивная группа, см. предложение 4.1.5, следовательно, функтор сравнения $\Phi_{\tilde{G}}$ – эквивалентность. Из того, что подкатегории $\mathcal{D}_{(i)} \subset \mathcal{D}(X)^{\tilde{G}}$ ортогональны, следует, что естественный функтор $\prod_i \mathcal{D}_{(i)} \to \mathcal{D}(X)^{\tilde{G}}$ строго полный. Отсюда получаем, что каждая из композиций функторов

$$\mathcal{D}^{G,\mathcal{L}^i,\alpha^i}(X) \xrightarrow{\Phi_i} \mathcal{D}(X)^{G,\mathcal{L}^i,\alpha^i} \xrightarrow{\Xi_i} \mathcal{D}_{(i)}$$

– тоже эквивалентность. В силу строгой полноты Ξ_i заключаем, что Φ_i – эквивалентность.

Утверждения, касающиеся $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G,\mathcal{L},\alpha}(X)$ и $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}^{G,\mathcal{L},\alpha}(X))$, следуют теперь из леммы 2.4.4. □

5 Полуортогональные разложения

5.1 Полуортогональные разложения для категории комонад

В этом параграфе мы покажем, что полуортогональное разложение триангулированной категории $\mathcal{C}$ позволяет построить полуортогональное разложение категории комодулей $\mathcal{C}_{\mathsf{T}}$ при условиях, что категория $\mathcal{C}_{\mathsf{T}}$ триангулированна и что исходное полуортогональное разложение совместимо с T.

Определение 5.1.1. Скажем, что функтор $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ совместим с полуортогональным разложением $\mathcal{C} = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$, если

$$T\mathcal{A}_k \subset \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k \rangle \quad \text{для всех} \quad k, 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{21}$$

Также в этом случае будем говорить, что разложение совместимо с функтором.

Пусть $\mathsf{T} = (T, \varepsilon, \delta)$ – комонада на триангулированной категории $\mathcal{C}$, а $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ – триангулированная подкатегория. Предположим, что функтор T точен и что категория $\mathcal{C}_{\mathsf{T}}$ триангулированная в смысле определения 2.2.5.

Предложение 5.1.2. *Предположим, что полуортогональное разложение $\mathcal{C} = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$ совместимо с функтором T в смысле (21). Пусть это разложение порождает полуортогональное разложение $\mathcal{C}' = \langle \mathcal{A}'_1, \ldots, \mathcal{A}'_n \rangle$, где $\mathcal{A}'_k = \mathcal{A}_k \cap \mathcal{C}'$. Тогда категория $\mathcal{C}'_{\mathsf{T}}$ триангулированна и допускает полуортогональное разложение $\mathcal{C}'_{\mathsf{T}} = \langle \mathcal{A}'_{1\mathsf{T}}, \ldots, \mathcal{A}'_{n\mathsf{T}} \rangle$.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что категории $\mathcal{C}'_{\mathsf{T}}$ и $\mathcal{A}'_{i\mathsf{T}}$ триангулированны согласно предложению 2.4.2. Доказательство предложения проведём индукцией по n, рассмотрим случай $n = 2$.

Ясно, что подкатегории $\mathcal{A}'_{1\mathsf{T}}$ и $\mathcal{A}'_{2\mathsf{T}}$ полуортогональны. Необходимо проверить, что любой объект (F,h) в $\mathcal{C}'_{\mathsf{T}}$ может быть дополнен до выделенного треугольника

$$(F_2,h_2)\to(F,h)\to(F_1,h_1)\to(F_2,h_2)[1], \tag{22}$$

в котором $F_i\in\mathcal{A}'_i$, а морфизмы лежат в $\mathcal{C}'_{\mathsf{T}}$. Поскольку $\mathcal{C}'=\langle\mathcal{A}'_1,\mathcal{A}'_2\rangle$, существует выделенный треугольник в категории $\mathcal{C}'$

$$F_2\to F\to F_1\to F_2[1], \tag{23}$$

где $F_i\in\mathcal{A}'_i$. Применяя к нему точный функтор T, получим выделенный треугольник

$$TF_2\to TF\to TF_1\to TF_2[1].$$

Морфизм $h\colon F\to TF$ можно продолжить до морфизма треугольников

$$\begin{tikzcd} F_2 \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & F \arrow[r] \arrow[d, "h"] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & F_2[1] \arrow[d, "h_2[1]"] \\ TF_2 \arrow[r] & TF \arrow[r] & TF_1 \arrow[r] & TF_2[1] \end{tikzcd} \tag{24}$$

в силу того, что $\mathrm{Hom}(F_2,TF_1)=0$ по предположению о совместимости. Проверим, что пары (F_i,h_i) являются комодулями над T. Действительно, компонируя (24) с

$$\begin{tikzcd} TF_2 \arrow[r] \arrow[d, "Th_2"] & TF \arrow[r] \arrow[d, "Th"] & TF_1 \arrow[r] \arrow[d, "Th_1"] & TF_2[1] \arrow[d, "Th_2[1]"] \\ TTF_2 \arrow[r] & TTF \arrow[r] & TTF_1 \arrow[r] & TTF_2[1] \end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd} TF_2 \arrow[r] \arrow[d, "\delta F_2"] & TF \arrow[r] \arrow[d, "\delta F"] & TF_1 \arrow[r] \arrow[d, "\delta F_1"] & TF_2[1] \arrow[d, "\delta F_2[1]"] \\ TTF_2 \arrow[r] & TTF \arrow[r] & TTF_1 \arrow[r] & TTF_2[1], \end{tikzcd}$$

мы получим два морфизма

$$\begin{tikzcd} F_2 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "Th_2\circ h_2"'] \arrow[d, shift left, "\delta F_2\circ h_2"] & F \arrow[r] \arrow[d, shift right, "Th\circ h"'] \arrow[d, shift left, "\delta F\circ h"] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "Th_1\circ h_1"'] \arrow[d, shift left, "\delta F_1\circ h_1"] & F_2[1] \arrow[d, shift right, "Th_2\circ h_2[1]"'] \arrow[d, shift left, "\delta F_2\circ h_2[1]"] \\ TTF_2 \arrow[r] & TTF \arrow[r] & TTF_1 \arrow[r] & TTF_2[1] \end{tikzcd}$$

треугольников, эти морфизмы совпадают в среднем члене. Так как $\mathrm{Hom}(F_2,TTF_1)=0$, такой морфизм единственен, следовательно $\delta F_i\circ h_i=Th_i\circ h_i$. Аналогично проверим, что $\varepsilon F_i\circ h_i=\mathrm{Id}_{F_i}$. Из диаграммы (24) видно, что требуемый треугольник (22) построен.

Теперь предположим, что предложение доказано для n, проверим его справедливость для $n+1$. В самом деле, разложения $\mathcal{A}_0=\langle\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n\rangle$ и $\mathcal{C}=\langle\mathcal{A}_0,\mathcal{A}_{n+1}\rangle$ удовлетворяют условиям предложения, и мы получаем

$$\mathcal{C}'_{\mathsf{T}}=\langle\mathcal{A}'_{0\mathsf{T}},\mathcal{A}'_{n+1\mathsf{T}}\rangle=\langle\langle\mathcal{A}'_{1\mathsf{T}},\ldots,\mathcal{A}'_{n\mathsf{T}}\rangle,\mathcal{A}'_{n+1\mathsf{T}}\rangle=\langle\mathcal{A}'_{1\mathsf{T}},\ldots,\mathcal{A}'_{n\mathsf{T}},\mathcal{A}'_{n+1\mathsf{T}}\rangle.$$

□

5.2 Спуск для полуортогональных разложений: накрытие схем

Пусть $p\colon X \to S$ – плоский морфизм квазипроективных схем такой, что $\mathcal{O}_S$ выделяется прямым слагаемым в $Rp_*\mathcal{O}_X$. В таком случае производная категория пучков на S эквивалентна категории спуска, связанной с производной категорией пучков на X. Это позволяет с помощью предложения 5.1.2 строить полуортогональные разложения производной категории пучков на S. При этом роль категории $\mathcal{C}$ из предложения 5.1.2, на которой определена комонада, играет неограниченная производная категория $\mathcal{D}(X)$. И если нас интересует "маленькая" категория, например, $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$, то для применения предложения тем не менее необходимо иметь полуортогональное разложение не только "маленькой", но и "большой" категории. Из-за этого полуортогональные разложения

$$\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X)) = \langle \mathcal{A}'_1, \dots, \mathcal{A}'_n \rangle$$

ограниченных производных категорий будут считаться удовлетворяющими техническому условию:

подкатегории $\mathcal{A}'_i$ допустимы;
функторы проекции на компоненты разложения

$$\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X)) = \langle \mathcal{A}'_1, \dots, \mathcal{A}'_n \rangle \tag{25}$$

имеют конечную когомологическую амплитуду,

которое нужно для построения продолжения данного разложения на $\mathcal{D}(X)$.

Теорема 5.2.1. *Пусть дано полуортогональное разложение $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$, совместимое в смысле (21) с функтором $T_p = p^*p_*$. Тогда категория $\mathcal{D}(S)$ допускает полуортогональное разложение $\langle \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n \rangle$, где $\mathcal{B}_k \subset \mathcal{D}(S)$ обозначает полную подкатегорию, состоящую из таких H, что $p^*H \in \mathcal{A}_k$.*

Доказательство. Согласно теореме 3.1.3, категория $\mathcal{D}(S)$ эквивалентна $\mathcal{D}(X)_{\mathsf{T}_p}$. Утверждение следует из предложения 5.1.2, применённого к $\mathcal{C} = \mathcal{C}' = \mathcal{D}(X)$, и из определения 2.4.1. $\square$

Теорема 5.2.2. *Предположим, что категория совершенных комплексов $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ обладает полуортогональным разложением $\langle \mathcal{A}_1^{\mathrm{perf}}, \dots, \mathcal{A}_n^{\mathrm{perf}} \rangle$. Пусть $\mathrm{Hom}(p_1^*F_j, p_2^*F_i) = 0$ для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$ и объектов $F_i \in \mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}}, F_j \in \mathcal{A}_j^{\mathrm{perf}}$. Тогда $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S)$ допускает полуортогональное разложение $\langle \mathcal{B}_1^{\mathrm{perf}}, \dots, \mathcal{B}_n^{\mathrm{perf}} \rangle$, где $\mathcal{B}_k^{\mathrm{perf}} \subset \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S)$ обозначает полную подкатегорию, образованную объектами H такими, что $p^*H \in \mathcal{A}_k^{\mathrm{perf}}$.*

Доказательство. Согласно предложению 2.3.2, категория $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S)$ эквивалентна $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)_{\mathsf{T}_p}$. Значит, можно воспользоваться предложением 5.1.2 о полуортогональных разложениях для категорий спуска. Мы продолжим полуортогональное разложение $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) = \langle \mathcal{A}_1^{\mathrm{perf}}, \dots, \mathcal{A}_n^{\mathrm{perf}} \rangle$ до согласованного разложения $\langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ категории $\mathcal{D}(X)$, проверим, что разложение $\langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ совместимо с функтором $T_p = p^*p_*$ в смысле (21), и затем применим предложение 5.1.2.

Следуя А. Г. Кузнецову [13, 4.2], мы определим $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{D}(X)$ как подкатегорию, полученную последовательным добавлением конусов к замыканию $\mathcal{A}_k^{\mathrm{perf}}$ относительно взятия произвольных прямых сумм. Триангулированная подкатегория в $\mathcal{D}(X)$, порождённая

$\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, замкнута относительно прямых сумм и содержит все совершенные комплексы, поэтому она совпадает с $\mathcal{D}(X)$. По предположению, при $i < j$, $F_i \in \mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}}$, $F_j \in \mathcal{A}_j^{\mathrm{perf}}$ имеем $\operatorname{Hom}(F_j, TF_i) = \operatorname{Hom}(p_1^*F_j, p_2^*F_i) = 0$. Проверим, что подкатегории $\mathcal{A}_i$ полуортогональны друг другу и образуют разложение категории $\mathcal{D}(X)$, совместимое с функтором T в смысле (21). Для $F_i^\alpha \in \mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}}$, $F_j^\beta \in \mathcal{A}_j^{\mathrm{perf}}$ имеем

$$\operatorname{Hom}\left(\bigoplus_\beta F_j^\beta, T\bigoplus_\alpha F_i^\alpha\right) = \prod_\beta \operatorname{Hom}\left(F_j^\beta, \bigoplus_\alpha TF_i^\alpha\right) =$$
$$= \prod_\beta \bigoplus_\alpha \operatorname{Hom}\left(F_j^\beta, TF_i^\alpha\right) = 0,$$

так как объекты F_j компактны и T перестановочен с прямыми суммами. Взятие конусов не испортит ортогональности, следовательно, категории $T\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ полуортогональны. Заменяя в этом рассуждении T на тождественный функтор, мы получим, что категории $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ образуют полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle. \tag{26}$$

Также имеем $T\mathcal{A}_i \subset \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_i \rangle$, т.е. указанное разложение совместимо с T. Разложение (26) согласовано с исходным разложением $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) = \langle \mathcal{A}_1^{\mathrm{perf}}, \ldots, \mathcal{A}_n^{\mathrm{perf}} \rangle$ в том смысле, что $\mathcal{A}_k^{\mathrm{perf}} = \mathcal{A}_k \cap \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. Для доказательства теоремы применим предложение 5.1.2 к категориям $\mathcal{C} = \mathcal{D}(X)$, $\mathcal{C}' = \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ и $\mathcal{A}_i$, построенным выше. $\square$

Теорема 5.2.3. *Предположим, что ограниченная производная категория* $\mathcal{D}^b(\operatorname{coh}(X))$ *обладает полуортогональным разложением* $\langle \mathcal{A}_1', \ldots, \mathcal{A}_n' \rangle$, *удовлетворяющим условию (25). Пусть* $\operatorname{Hom}(p_1^*F_j, p_2^*F_i) = 0$ *для всех* $1 \leqslant i < j \leqslant n$ *и объектов* $F_i \in \mathcal{A}_i', F_j \in \mathcal{A}_j'$. *Тогда категория* $\mathcal{D}^b(\operatorname{coh}(S))$ *допускает полуортогональное разложение* $\langle \mathcal{B}_1', \ldots, \mathcal{B}_n' \rangle$, *где* $\mathcal{B}_k' \subset \mathcal{D}^b(\operatorname{coh}(S))$ *обозначает полную подкатегорию, состоящую из таких* H, *что* $p^*H \in \mathcal{A}_k'$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы, оно основано на эквивалентности $\mathcal{D}^b(\operatorname{coh}(S)) \cong \mathcal{D}^b(\operatorname{coh}(X))_{\mathsf{T}_p}$. Во-первых, как показано в [19], 1.10 и 1.11, существует полуортогональное разложение категории совершенных комплексов на X: $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) = \langle \mathcal{A}_1^{\mathrm{perf}}, \ldots, \mathcal{A}_n^{\mathrm{perf}} \rangle$, где $\mathcal{A}_k^{\mathrm{perf}} = \mathcal{A}_k' \cap \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. Во-вторых, это разложение можно расширить до разложения $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$, совместимого с функтором $T = p^*p_*$ в смысле (21). Согласно [13, prop. 4.2], в силу условий (25) разложение $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$ согласовано с разложением $\mathcal{D}^b(\operatorname{coh}(X)) = \langle \mathcal{A}_1', \ldots, \mathcal{A}_n' \rangle$, т.е. $\mathcal{A}_i' = \mathcal{A}_i \cap \mathcal{D}^b(\operatorname{coh}(X))$. Для доказательства утверждения мы применяем предложение 5.1.2 к категориям $\mathcal{C} = \mathcal{D}(X)$, $\mathcal{C}' = \mathcal{D}^b(\operatorname{coh}(X))$ и построенным выше $\mathcal{A}_i$. $\square$

5.3 Инвариантность разложения относительно действия группы

Предположим, что аффинная группа G конечного типа над k действует на схеме X.

Вначале мы дадим несколько эквивалентных формулировок того, что действие G на X сохраняет полуортогональное разложение $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$. А именно, мы покажем, что такое разложение совместимо с функтором p^*p_* для морфизма $p\colon X \to X/\!\!/G$ в смысле (21) тогда и только тогда, когда $p_2^*\mathcal{A}_i = a^*\mathcal{A}_i$ при всех i в описанном ниже смысле.

Лемма 5.3.1. *Пусть X – квазипроективная, а Y – аффинная схемы над k. Пусть категория совершенных комплексов $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ обладает полуортогональным разложением $\langle \mathcal{A}_1^{\mathrm{perf}}, \dots, \mathcal{A}_n^{\mathrm{perf}} \rangle$. Тогда имеют место следующие полуортогональные разложения:*

$$\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle,$$
$$\mathcal{D}(Y \times X) = \langle p_2^* \mathcal{A}_1, \dots, p_2^* \mathcal{A}_n \rangle,$$
$$\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Y \times X) = \langle p_2^* \mathcal{A}_1^{\mathrm{perf}}, \dots, p_2^* \mathcal{A}_n^{\mathrm{perf}} \rangle,$$

причём $p_2^* \mathcal{A}_k$ порождена как триангулированная подкатегория в $\mathcal{D}(Y \times X)$ объектами вида $p_2^* F_k$, $F_k \in \mathcal{A}_k$, и $p_2^* \mathcal{A}_k^{\mathrm{perf}} = p_2^* \mathcal{A}_k \cap \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Y \times X)$.

Доказательство. Большая часть утверждений леммы содержится в статье Кузнецова [13, sect. 4 и 5], посвящённой замене базы для полуортогональных разложений (с той разницей, что в этой статье рассматриваются счётно-когерентные пучки, а не квазикогерентные). Мы воспроизведём здесь конструкции, для того, чтобы доказать следующий факт, специфичный для случая аффинной схемы Y: категория $p_2^* \mathcal{A}_k$ порождена объектами вида $p_2^* F_k$, $F_k \in \mathcal{A}_k$.

Определим $\mathcal{A}_i$ как наименьшую полную подкатегорию в $\mathcal{D}(X)$, содержащую $\mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}}$ и замкнутую относительно взятия произвольных прямых сумм. Согласно [13, 4.2], эти категории образуют полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle,$$

согласованное с исходным разложением $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X)) = \langle \mathcal{A}'_1, \dots, \mathcal{A}'_n \rangle$, см. также доказательство теоремы 5.2.2. Далее, определим $p_2^* \mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}}$ как подкатегорию в $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Y \times X)$, порождённую объектами вида $p_1^* H \otimes p_2^* F_i$, где $H \in \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Y)$ и $F_i \in \mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}}$. Согласно [13, 5.1], получим полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Y \times X) = \langle p_2^* \mathcal{A}_1^{\mathrm{perf}}, \dots, p_2^* \mathcal{A}_n^{\mathrm{perf}} \rangle.$$

Как и ранее, определим $p_2^* \mathcal{A}_i$ как наименьшую полную подкатегорию в $\mathcal{D}(Y \times X)$, содержащую $p_2^* \mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}}$ и замкнутую относительно взятия прямых сумм. Эти категории образуют полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}(Y \times X) = \langle p_2^* \mathcal{A}_1, \dots, p_2^* \mathcal{A}_n \rangle.$$

Ясно, что p_2^* переводит $\mathcal{A}_i$ в $p_2^* \mathcal{A}_i$.

Проверим теперь, что категория $p_2^* \mathcal{A}_i$ порождена как триангулированная категория объектами вида $p_2^* F_i$, $F_i \in \mathcal{A}_i$. Во-первых, такие объекты лежат в $p_2^* \mathcal{A}_i$. Далее, рассмотрим триангулированную подкатегорию $\mathcal{D}'$ в $\mathcal{D}(Y \times X)$, порождённую объектами $p_2^* F_i$, $F_i \in \mathcal{A}_i$, для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Эта категория замкнута относительно взятия прямых сумм потому, что таковы все $\mathcal{A}_i$. Категория $\mathcal{D}'$ содержит все объекты вида $p_2^* F_i$ для $F_i \in \mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}}$, и, значит, все объекты вида $p_2^* F = p_1^* \mathcal{O}_Y \otimes p_2^* F$ для $F \in \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) = \langle \mathcal{A}_1^{\mathrm{perf}}, \dots, \mathcal{A}_n^{\mathrm{perf}} \rangle$. Правый ортогонал к $\mathcal{O}_Y$ в $\mathcal{D}(Y)$ равен нулю, и, согласно результату Равенеля и Нимана (см. [3, 2.1.2]), объект $\mathcal{O}_Y$ порождает категорию $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Y)$ относительно сдвигов, взятия конусов и прямых слагаемых. Категория $\mathcal{D}'$ замкнута относительно прямых слагаемых, а функтор $p_1^*(-) \otimes p_2^* F$ сохраняет сдвиги, конуса и прямые слагаемые, следовательно все объекты вида $p_1^* H \otimes p_2^* F$ с $H \in \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Y)$, $F \in \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ лежат в $\mathcal{D}'$. Поэтому из [13, lemma

5.2] следует, что $\mathcal{D}'$ содержит $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Y \times X)$. Наконец, так как категория $\mathcal{D}'$ замкнута относительно прямых сумм, она совпадает с $\mathcal{D}(Y \times X)$. Следовательно, категория $p_2^*\mathcal{A}_i$ порождена объектами вида $p_2^*F_i$, $F_i \in \mathcal{A}_i$. $\square$

Заметим, что две пары $(p_2, a), (a, p_2)$ морфизмов $G \times X \to X$ изоморфны в том смысле, что имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X & \\ G \times X \arrow[ur, "p_2"] \arrow[dr, "a"'] \arrow[rr, "(g,x)\mapsto(g^{-1},gx)", "\sim"'] & & G \times X \arrow[ul, "a"'] \arrow[dl, "p_2"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

Поэтому предыдущую лемму можно применять к любому из отображений p_2 и $a\colon G \times X \to X$. По тем же причинам эта лемма справедлива для морфизмов $\mu\colon G \times G \to G$, $p_{23}, \mu \times 1, 1 \times a\colon G \times G \times X \to G \times X$ and $p_3, ap_{23}, a(1 \times a) = a(\mu \times 1)\colon G \times G \times X \to X$.

Доказанная лемма позволяет дать следующее естественное определение.

Определение 5.3.2. Подкатегория $\mathcal{A}^{\mathrm{perf}} \subset \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ $(\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(X))$ *инвариантна* относительно действия группы G на X, если подкатегории $p_2^*\mathcal{A}^{\mathrm{perf}}$ и $a^*\mathcal{A}^{\mathrm{perf}}$ в $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(G \times X)$ (соотв. $p_2^*\mathcal{A}$ и $a^*\mathcal{A}$ в $\mathcal{D}(G \times X)$) совпадают. Говорят также, что действие группы *сохраняет* подкатегорию.

Предложение 5.3.3. *Пусть категория совершенных комплексов на X допускает полуортогональное разложение $\langle \mathcal{A}_1^{\mathrm{perf}}, \ldots, \mathcal{A}_n^{\mathrm{perf}} \rangle$. Тогда корректно определены полуортогональные разложения*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(X) &= \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle, \\ \mathcal{D}(G \times X) &= \langle p_2^*\mathcal{A}_1, \ldots, p_2^*\mathcal{A}_n \rangle = \langle a^*\mathcal{A}_1, \ldots, a^*\mathcal{A}_n \rangle, \\ \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(G \times X) &= \langle p_2^*\mathcal{A}_1^{\mathrm{perf}}, \ldots, p_2^*\mathcal{A}_n^{\mathrm{perf}} \rangle = \langle a^*\mathcal{A}_1^{\mathrm{perf}}, \ldots, a^*\mathcal{A}_n^{\mathrm{perf}} \rangle. \end{aligned}$$

Следующие условия равносильны:

1. *для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$ и $F_i \in \mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}}, F_j \in \mathcal{A}_j^{\mathrm{perf}}$ имеем $\mathrm{Hom}(p_2^*F_j, a^*F_i) = 0$,*

2. *разложение $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$ совместимо с функтором $T = p_{2*}a^* = a_*p_2^*$ в смысле (21),*

3. *$p_2^*\mathcal{A}_i = a^*\mathcal{A}_i$ при всех i,*

4. *$p_2^*\mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}} = a^*\mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}}$ при всех i.*

Если эти условия выполнены, мы говорим, что действие группы *сохраняет* полуортогональное разложение.

Доказательство. Первая часть предложения следует из леммы 5.3.1.

$1 \Rightarrow 2$ содержится в доказательстве теоремы 5.2.2.

$2 \Rightarrow 3$. Возьмём объект $F_k \in \mathcal{A}_k$. Для любых $i < k$ и $F_i \in \mathcal{A}_i$ имеем

$$\mathrm{Hom}(p_2^*F_k, a^*F_i) = \mathrm{Hom}(F_k, p_{2*}a^*F_i) = \mathrm{Hom}(F_k, TF_i) = 0,$$

так как $TF_i \subset \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_i \rangle = \langle \mathcal{A}_{i+1}, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle^\perp$. Согласно лемме 5.3.1, объекты a^*F_i порождают $a^*\mathcal{A}_i$ как триангулированную категорию, значит $p_2^*F_k \in {}^\perp a^*\mathcal{A}_i$. Аналогично, для $i > k$ и любого $F_i \in \mathcal{A}_i$ мы имеем

$$\mathrm{Hom}(a^*F_i, p_2^*F_k) = \mathrm{Hom}(F_i, a_*p_2^*F_k) = \mathrm{Hom}(F_i, TF_k) = 0.$$

Как выше, получаем, что $p_2^*F_k \in a^*\mathcal{A}_i^\perp$. Наконец,

$$p_2^*F_k \in^\perp \langle a^*\mathcal{A}_1, \ldots, a^*\mathcal{A}_{k-1} \rangle \cap \langle a^*\mathcal{A}_{k+1}, \ldots, a^*\mathcal{A}_n \rangle^\perp = a^*\mathcal{A}_k.$$

Тем же способом доказывается, что $a^*\mathcal{A}_k \subset p_2^*\mathcal{A}_k$.

$3 \Rightarrow 4$ очевидно: в силу леммы 5.3.1

$$p_2^*\mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}} = p_2^*\mathcal{A}_i \cap \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(U \times X)) = a^*\mathcal{A}_i \cap \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(U \times X)) = a^*\mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}}.$$

$4 \Rightarrow 1$. Согласно лемме 5.3.1, $p_2^*F_j \in p_2^*\mathcal{A}_j^{\mathrm{perf}} = a^*\mathcal{A}_j^{\mathrm{perf}}$ и $a^*F_i \in a^*\mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}}$. Так как $a^*\mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}}$ и $a^*\mathcal{A}_j^{\mathrm{perf}}$ полуортогональны друг другу, $\mathrm{Hom}(p_2^*F_j, a^*F_i) = 0$. $\square$

Замечание 5.3.4. Отметим, что условия 3 и 4 выражают инвариантность разложения через инвариантность его компонент, в то время, как условия 1 и 2 говорят о свойстве всего полуортогонального разложения в целом.

Замечание 5.3.5. Отметим, что условия 2 и 3 эквивалентны для любого полуортогонального разложения $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$.

Замечание 5.3.6. Аналоги леммы 5.3.1 и предложения 5.3.3 выполнены для ограниченных производных категорий вместо категорий совершенных комплексов. При этом полуортогональные разложения ограниченных производных категорий должны удовлетворять условиям (25).

Доказательство предложения 5.3.3 для $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}())$ полностью повторяет данное выше доказательство.

Для доказательства леммы 5.3.1 для $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}())$ нужно положить $\mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}} = \mathcal{A}'_i \cap \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$, получим полуортогональное разложение $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) = \langle \mathcal{A}_1^{\mathrm{perf}}, \ldots, \mathcal{A}_n^{\mathrm{perf}} \rangle$. Далее применить лемму 5.3.1, и положить $p_2^*\mathcal{A}'_i = p_2^*\mathcal{A}_i \cap \mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(Y \times X))$, получится полуортогональное разложение $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(Y \times X)) = \langle p_2^*\mathcal{A}'_1, \ldots, p_2^*\mathcal{A}'_n \rangle$, см. [13, th. 5.6].

Замечание 5.3.7. Действие конечной группы G сохраняет разложение $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) = \langle \mathcal{A}_1^p, \ldots, \mathcal{A}_n^p \rangle$ если и только если $g^*\mathcal{A}_i^p = \mathcal{A}_i^p$ для любого элемента $g \in G$ и всех i. Действительно, в этом случае произведение $G \times X$ есть несвязное объединение $\bigsqcup_{g \in G} X$ нескольких экземпляров X, проекции $p_2, a \colon G \times X \to X$ имеют вид $(\mathrm{Id}_X)_{g \in G}$ и $(g)_{g \in G}$ соответственно. Подкатегории $p_2^*\mathcal{A}_i^p$ и $a^*\mathcal{A}_i^p$ в $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(G \times X)$ – это категории $\bigoplus_{g \in G} \mathcal{A}_i^p$ и $\bigoplus_{g \in G} g^*\mathcal{A}_i^p$. Их совпадение означает, что $g^*\mathcal{A}_i^p = \mathcal{A}_i^p$ при всех g и i.

5.4 Спуск для полуортогональных разложений: эквивариантные категории

В этом параграфе мы доказываем основные теоремы, позволяющие строить полуортогональное разложение производной категории эквивариантных пучков на схеме по полуортогональному разложению производной категории, которое сохраняется действием группы.

Пусть аффинная линейно редуктивная группа G действует на квазипроективной схеме X, морфизм действия обозначим через a.

Теорема 5.4.1. *Пусть категория $\mathcal{D}(X)$ допускает полуортогональное разложение $\langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$ такое, что $p_2^* \mathcal{A}_i = a^* \mathcal{A}_i$ при всех i. Обозначим через $\mathcal{B}_i$ полную подкатегорию в $\mathcal{D}^G(X)$, состоящую из объектов, которые при забывании эквивариантной структуры лежат в $\mathcal{A}_i$. Тогда $\mathcal{D}^G(X)$ обладает полуортогональным разложением $\langle \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n \rangle$.*

Доказательство. Пусть $p\colon X \to X /\!\!/ G$ – естественный морфизм стеков. Согласно теореме 4.1.6, $\mathcal{D}^G(X)$ эквивалентна комонадной категории спуска $\mathcal{D}(X)_{\mathsf{T}_p}$, связанной с комонадой $\mathsf{T}_p = (p^* p_*, \varepsilon, \delta)$ на $\mathcal{D}(X)$. Предложение 5.3.3 показывает, что функтор $T_p = p^* p_* = a_* p_2^*$ совместим с исходным полуортогональным разложением. Применение предложения 5.1.2 к категориям $\mathcal{C} = \mathcal{C}' = \mathcal{D}(X)$, разложению $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$ и функтору T_p доказывает теорему. □

Теорема 5.4.2. *Пусть категория $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ допускает полуортогональное разложение $\langle \mathcal{A}_1^{\mathrm{perf}}, \ldots, \mathcal{A}_n^{\mathrm{perf}} \rangle$ такое, что $p_2^* \mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}} = a^* \mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}}$ при всех i. Обозначим через $\mathcal{B}_i^{\mathrm{perf}}$ полную подкатегорию в $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X)$, состоящую из объектов, которые при забывании эквивариантной структуры лежат в $\mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}}$. Тогда $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X)$ обладает полуортогональным разложением $\langle \mathcal{B}_1^{\mathrm{perf}}, \ldots, \mathcal{B}_n^{\mathrm{perf}} \rangle$.*

Доказательство. Продолжим данное полуортогональное разложение до полуортогонального разложения $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$ такого, что $\mathcal{A}_i^{\mathrm{perf}} = \mathcal{A}_i \cap \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. Согласно предложению 5.3.3, полученное разложение сохраняется функтором $p^* p_*$. Для доказательства теоремы применим предложение к категориям $\mathcal{C} = \mathcal{D}(X)$, $\mathcal{C}' = \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$, разложению $\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$ и функтору T_p. □

Теорема 5.4.3. *Пусть категория $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ допускает полуортогональное разложение $\langle \mathcal{A}'_1, \ldots, \mathcal{A}'_n \rangle$, удовлетворяющее условиям (25) и такое, что $p_2^* \mathcal{A}'_i = a^* \mathcal{A}'_i$ при всех i. Обозначим через $\mathcal{B}'_i$ полную подкатегорию в $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}^G(X))$, состоящую из объектов, которые при забывании эквивариантной структуры лежат в $\mathcal{A}'_i$. Тогда $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}^G(X))$ обладает полуортогональным разложением $\langle \mathcal{B}'_1, \ldots, \mathcal{B}'_n \rangle$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.4.2.

6 Явное описание компонент полуортогонального разложения

Теоремы 5.4.1-5.4.3 позволяют строить полуортогональных разложения эквивариантных производных категорий. В этой главе будут явно описаны компоненты получающихся разложений в трёх важных примерах применения указанных теорем.

6.1 Случай многообразий, обладающих инвариантным исключительным набором

В этом параграфе будет разобран случай, когда инвариантное полуортогональное разложение производной категории пучков на X порождено полным исключительным набором.

Лемма 6.1.1. *Пусть $f\colon X \to Y$ – эквивариантный морфизм схем с действием группы G над k, а $(\mathcal{L}, \alpha)$ – коцикл на G. Определены функторы обратного образа между категориями спуска*

$$\mathrm{qcoh}^{G,\mathcal{L},\alpha}(Y) \xrightarrow{f^*} \mathrm{qcoh}^{G,\mathcal{L},\alpha}(X),$$
$$\mathcal{D}(Y)^{G,\mathcal{L},\alpha} \xrightarrow{f^*} \mathcal{D}(X)^{G,\mathcal{L},\alpha},$$
$$\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Y)^{G,\mathcal{L},\alpha} \xrightarrow{f^*} \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)^{G,\mathcal{L},\alpha}.$$

Доказательство. Легко видеть, что формулы

$$\Psi_k = (\underbrace{1 \times 1 \times \ldots \times 1}_{k \text{ раз}} \times f)^*$$

корректно определяют функтор обратного образа на косимплициальных категориях

$$[\mathcal{D}(Y), \mathcal{D}(G \times Y), \ldots, P'^*_\bullet] \to [\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G \times X), \ldots, P'^*_\bullet], \tag{27}$$

связанных со скрученным действием G на X и Y (см. определение 4.4.13). По лемме 2.3.4, функтор $\Psi_0 = f^*\colon \mathcal{D}(Y) \to \mathcal{D}(X)$ согласован с комонадами на $\mathcal{D}(Y)$ и $\mathcal{D}(X)$, связанными с категориями (27). Переходя к категориям спуска согласно лемме 2.4.5, получаем требуемое. Для категорий qcoh и $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}$ рассуждения аналогичны. $\square$

Лемма 6.1.2. *Пусть $\mathcal{E}$ – объект категории $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},\mathcal{L}_0,\alpha_0}(X)$. Тензорное умножение на $\mathcal{E}$ определяет функторы $\mathcal{D}(X)^{G,\mathcal{L},\alpha} \to \mathcal{D}(X)^{G,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}_0,\alpha\otimes\alpha_0}$ и $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)^{G,\mathcal{L},\alpha} \to \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)^{G,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}_0,\alpha\otimes\alpha_0}$.*

Доказательство. Рассмотрим косимплициальные категории

$$[\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G \times X), \mathcal{D}(G \times X \times X), \ldots, P'^*_\bullet]$$

и

$$[\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G \times X), \mathcal{D}(G \times X \times X), \ldots, P''^*_\bullet],$$

связанные с действиями G на X, скрученными на коциклы $(\mathcal{L}, \alpha)$ и $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0, \alpha \otimes \alpha_0)$ соответственно, см. определение 4.4.13. Определим функторы

$$\Psi_k\colon \mathcal{D}(\underbrace{G \times \ldots \times G}_{k \text{ раз}} \times X) \to \mathcal{D}(\underbrace{G \times \ldots \times G}_{k \text{ раз}} \times X),$$

формулой

$$\Psi_k(-) = p_1^*\mathcal{L}_0 \otimes \ldots \otimes p_k^*\mathcal{L}_0 \otimes - \otimes p_{k+1}^*\mathcal{E}.$$

Зададим изоморфизмы функторов

$$\beta_f\colon \Psi_n \circ P'^*_f \to P''^*_f \circ \Psi_m,$$

для всякого отображения $f\colon [0,\ldots,m]\to[0,\ldots,n]$ в Δ. Имеем

$$\Psi_n\circ P_f'^*(-)=p_1^*\mathcal{L}_0\otimes\ldots\otimes p_n^*\mathcal{L}_0\otimes P_f'^*(-)\otimes p_n^*\mathcal{E}=$$
$$=p_1^*\mathcal{L}_0\otimes\ldots\otimes p_n^*\mathcal{L}_0\otimes p_1^*\mathcal{L}\otimes\ldots\otimes p_{n-f(m)}^*\mathcal{L}\otimes p_f^*(-)\otimes p_n^*\mathcal{E},$$

$$P_f''^*\circ\Psi_m(-)=$$
$$=p_1^*(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}_0)\otimes\ldots\otimes p_{n-f(m)}^*(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}_0)\otimes p_f^*(p_1^*\mathcal{L}_0\otimes\ldots\otimes p_m^*\mathcal{L}_0\otimes-\otimes p_{m+1}^*\mathcal{E})=$$
$$=p_1^*\mathcal{L}_0\otimes\ldots\otimes p_{n-f(m)}^*\mathcal{L}_0\otimes(\mu p_{n-f(m)+1,\ldots,n-f(m-1)})^*\mathcal{L}_0\otimes\ldots\otimes(\mu p_{n-f(1)+1,\ldots,n-f(0)})^*\mathcal{L}_0\otimes$$
$$\otimes p_1^*\mathcal{L}\otimes\ldots\otimes p_{n-f(m)}^*\mathcal{L}\otimes p_f^*(-)\otimes(ap_{n-f(0)+1,\ldots,n+1})^*\mathcal{E},$$

где $p_{i,i+1,\ldots,j-1,j}$ обозначает проекцию $G\times\ldots\times G\times X$ на произведение $i,\ldots,j$ сомножителей, μ используется для обозначения умножения $G\times\ldots\times G\to G$, а a обозначает итерированное действие $G\times\ldots\times G\times X\to X$. Для определения β_f используем изоморфизмы

$$(\mu p_{i,i+1,\ldots,j-1,j})^*\mathcal{L}_0\to p_i^*\mathcal{L}_0\otimes\ldots\otimes p_j^*\mathcal{L}_0,$$

полученные итерированием структурного изоморфизма $\alpha_0\colon p_1^*\mathcal{L}_0\otimes p_2^*\mathcal{L}_0\to\mu^*\mathcal{L}_0$ на $G\times G$, и изоморфизм

$$(ap_{n-f(0)+1,\ldots,n+1})^*\mathcal{E}\to p_{n-f(0)+1}^*\mathcal{L}_0\otimes\ldots\otimes p_n^*\mathcal{L}_0\otimes p_{n+1}^*\mathcal{E},$$

который получен кратным применением структурного изоморфизма $\theta\colon p_1^*\mathcal{L}_0\otimes p_2^*\mathcal{E}\to a^*\mathcal{E}$ на $G\times X$. Из условий коцикла для α_0 и согласованности α_0 и θ следует, что функторы Ψ_k с изоморфизмами β_f задают функтор между косимплициальными категориями. Согласно лемме 2.3.4, функтор $\Psi_0=-\otimes\mathcal{E}\colon\mathcal{D}(X)\to\mathcal{D}(X)$ согласован с комонадами на $\mathcal{D}(X)$, связанными со скрученными действиями G на X. Согласно лемме 2.4.5, получаем функтор $\mathcal{D}(X)^{G,\mathcal{L},\alpha}\to\mathcal{D}(X)^{G,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}_0,\alpha\otimes\alpha_0}$ на категориях спуска. Для категории $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ рассуждение аналогичное. □

Пусть X – схема над полем k. Для действия конечной группы G естественно считать, что пучок F на X сохраняется действием, если $g^*F\cong F$ при всех $g\in G$. Для алгебраических групп это определение не работает, так как у группы может быть слишком мало рациональных точек. Говоря об инвариантных пучках, мы будем иметь в виду следующее:

Определение 6.1.3. Действие алгебраической группы G на схеме X *сохраняет* объект производной категории $F\in\mathcal{D}(X)$, если существует линейное расслоение $\mathcal{L}$ на G, такое что объекты $p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*F$ и a^*F на $G\times X$ квазиизоморфны.

Предположим, что E – исключительный объект в категории $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. Он порождает подкатегорию $\langle E\rangle\subset\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$, эквивалентную категории $\mathcal{D}^b(\mathsf{k}-\mathrm{mod})$. Мы покажем, как инвариантность этой подкатегории относительно действия группы G на X (см. определение 5.3.2) связана с инвариантностью объекта E в смысле данного выше определения.

Предложение 6.1.4. *Следующие условия на исключительный объект $E\in\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ на собственной схеме X с действием группы G над полем k эквивалентны:*

1. *Для подходящего линейного расслоения $\mathcal{L}$ на G существует изоморфизм $p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*E \cong a^*E$ в категории $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(G\times X)$;*

2. *Для любой замкнутой точки g схемы G выполнено $g^*E' \cong E'$, где E' – объект, полученный из E расширением скаляров $\mathsf{k}\to\mathsf{k}(g)$;*

3. *Подкатегории $p_2^*\langle E\rangle$ и $a^*\langle E\rangle$ в $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(G\times X)$ совпадают.*

Доказательство. $2\Rightarrow 1$ доказано в [6, предл. 2.17].

$1\Rightarrow 3$. По определению, подкатегория $p_2^*\langle E\rangle$ в $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(G\times X)$ порождена объектами вида $p_1^*F\otimes p_2^*F'$, где $F\in\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(G)$, $F'\in\langle E\rangle$. В частности, $p_2^*\langle E\rangle$ содержит объект $a^*E\cong p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*E$. Следовательно, $p_2^*\langle E\rangle\supset a^*\langle E\rangle$, обратное включение доказывается аналогично.

$3\Rightarrow 2$. Пусть g – замкнутая точка схемы G. Ограничим равные подкатегории $p_2^*\langle E\rangle$ и $a^*\langle E\rangle$ в $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(G\times X)$ на $g\times X$. Получим подкатегории в $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X')$, порождённые исключительными объектами p_2^*F' и a^*F' соответственно. Отсюда следует, что p_2^*F' и a^*F' изоморфны. $\square$

Для нас играет важную роль следующее обстоятельство: исключительный объект E на X, сохраняемый действием группы, обладает эквивариантной структурой относительно некоторого коцикла на G.

Предложение 6.1.5. *Пусть E — исключительный объект в $\mathcal{D}(X)$, сохраняемый действием группы G. Тогда для некоторого коцикла $(\mathcal{L},\alpha)$ на G существует $(\mathcal{L},\alpha)$-эквивариантная структура на E, т.е. существует изоморфизм $\theta\colon p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{F}\to a^*\mathcal{F}$, согласованный с α в смысле определения 4.4.4.*

Доказательство. Фиксируем изоморфизм $\theta\colon p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*E\to a^*E$. На тройном произведении $G\times G\times X$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{L}\otimes p_3^*E \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes p_{23}^*\theta"] \arrow[d, "\alpha'"'] & p_1^*\mathcal{L}\otimes (ap_{23})^*E \arrow[r, "(\mathrm{Id}\times a)^*\theta"] & (a(\mathrm{Id}\times a))^*E \arrow[d, equal] \\
(\mu p_{12})^*\mathcal{L}\otimes p_3^*E \arrow[rr, "(\mu\times\mathrm{Id})^*\theta"] & & (a(\mu\times\mathrm{Id}))^*E,
\end{tikzcd}$$

где

$$\alpha'\colon p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{L}\otimes p_3^*E\to(\mu p_{12})^*\mathcal{L}\otimes p_3^*E$$

— некоторый изоморфизм. Проверим, что α' имеет вид $p_{12}^*\alpha\otimes\mathrm{Id}$, где α — изоморфизм $p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{L}\to\mu^*\mathcal{L}$ на $G\times G$. Действительно, так как пучок E исключительный,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}(p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{L}\otimes p_3^*E,(\mu p_{12})^*\mathcal{L}\otimes p_3^*E)=\\
&\quad=\mathrm{Hom}(p_3^*E,(p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{L})^{-1}\otimes(\mu p_{12})^*\mathcal{L}\otimes p_3^*E)=\\
&\quad=\mathrm{Hom}(E,p_{3*}((p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{L})^{-1}\otimes(\mu p_{12})^*\mathcal{L}\otimes p_3^*E))=\\
&\quad=\mathrm{Hom}(E,p_{3*}((p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{L})^{-1}\otimes(\mu p_{12})^*\mathcal{L})\otimes E)=\\
&\quad=\mathrm{Hom}(E,H^0(G\times G,(p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{L})^{-1}\otimes\mu^*\mathcal{L})\otimes E)=\mathrm{Hom}(p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{L},\mu^*\mathcal{L}).
\end{aligned}$$

Предпоследнее равенство здесь выполнено по теореме о плоской замене базы. Рассматривая пучки и их морфизмы на $G\times G\times G\times X$, мы получаем условие ассоциативности: на $G\times G\times G$ изоморфизмы

$$(\mathrm{Id}\times\mu)^*\alpha\circ(\mathrm{Id}\otimes p_{23}^*\alpha)\quad\text{и}\quad(\mu\times\mathrm{Id})^*\alpha\circ(p_{12}^*\alpha\otimes\mathrm{Id})$$

между пучками $p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{L}\otimes p_3^*\mathcal{L}$ и $(\mu(\mathrm{Id}\times\mu))^*\mathcal{L}$ равны. Таким образом, пара $(\mathcal{L},\alpha)$ является коциклом на группе G в смысле определения 4.4.1, а $\mathcal{E}$ – эквивариантным объектом. $\square$

Пусть в $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ есть полный исключительный набор $(E_1,\ldots,E_n)$. Такой набор определяет полуортогональное разложение категории совершенных комплексов

$$\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)=\langle\langle E_1\rangle,\ldots\langle E_n\rangle\rangle$$

на подкатегории, эквивалентные $\mathcal{D}^b(\mathsf{k}-\mathrm{mod})$. Предположим, что компоненты этого разложения сохраняются группой. Из предложений 6.1.4 и 6.1.5 вытекает, что на объекте E_i можно ввести скрученную эквивариантную структуру для некоторого коцикла $(\mathcal{L}_i,\alpha_i)$ на G. Обозначим полученный скрученный объект категории $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)^{G,\mathcal{L}_i,\alpha_i}$ через $\mathcal{E}_i$. Предположим, что группа G линейно редуктивна. Тогда согласно теореме 4.4.17, $\mathcal{E}_i$ соответствует объекту производной категории $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G,\mathcal{L}_i,\alpha_i}(X)$, который также будем обозначать через $\mathcal{E}_i$.

Теорема 6.1.6. *Категория $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X)$ допускает полуортогональное разложение*

$$\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X)=\langle\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{D}^b(\mathrm{rep}(G,\mathcal{L}_1^{-1},\alpha_1^{-1})),\ldots,\mathcal{E}_n\otimes\mathcal{D}^b(\mathrm{rep}(G,\mathcal{L}_n^{-1},\alpha_n^{-1}))\rangle.$$

Замечание 6.1.7. Этот факт был доказан в [6, теор. 2.11], в несколько иных предположениях: объекты исходного исключительного набора считались пучками (что позволяло обойтись без утверждений о спуске для производных категорий) и не предполагалась линейная редуктивность группы.

Доказательство. Согласно теореме 4.1.6, категория $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X)$ эквивалентна категории спуска $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)_{\mathsf{T}_G}$, где T_G обозначает комонаду на категории $\mathcal{D}(X)$, связанную с морфизмом стеков $X\to X/\!\!/G$. Из теоремы 5.4.2 вытекает, что $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)_{\mathsf{T}_G}$ допускает полуортогональное разложение $\langle\langle E_1\rangle_{\mathsf{T}_G},\ldots,\langle E_n\rangle_{\mathsf{T}_G}\rangle$. Здесь $\langle E_i\rangle_{\mathsf{T}_G}$ – категория спуска, связанная с подкатегорией $\langle E_i\rangle\subset\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$, см. определение 2.4.1. Опишем более явно категории $\langle E_i\rangle_{\mathsf{T}_G}$, пользуясь леммой 2.4.5.

В дальнейшем рассмотрении мы опускаем индекс i в обозначениях E_i, $(\mathcal{L}_i,\alpha_i)$ и т.п. Рассмотрим функтор $\Psi=-\otimes\mathcal{E}\colon\mathcal{D}^b(\mathsf{k}-\mathrm{mod})\to\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. Его образ – подкатегория $\langle E\rangle\subset\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. Он продолжается до строго полного функтора $\mathcal{D}(\mathsf{k}-\mathrm{Mod})\to\mathcal{D}(X)$, который также обозначим Ψ. Рассмотрим косимплициальные категории

$$[\mathcal{D}(pt),\mathcal{D}(G),\mathcal{D}(G\times G),\ldots,P_\bullet^*]$$

и

$$[\mathcal{D}(X),\mathcal{D}(G\times X),\mathcal{D}(G\times X\times X),\ldots,p_\bullet^*],$$

связанные со скрученным на $(\mathcal{L},\alpha)^{-1}$ и обычным действиями группы G на pt и X соответственно, см. определение 4.4.13. Из лемм 6.1.1 и 6.1.2 следует, что существует функтор между этими косимплициальными категориями, продолжающий Ψ, значит, Ψ согласован с комонадами $\mathsf{T}_{G,\mathcal{L}^{-1},\alpha^{-1}}$ на $\mathcal{D}(pt)$ и T_G на $\mathcal{D}(X)$ соответственно (где комонада $\mathsf{T}_{G,\mathcal{L}^{-1},\alpha^{-1}}$ связана с действием G на точку, скрученным на коцикл $(\mathcal{L},\alpha)^{-1}$). Применим лемму 2.4.5 к категориям $\mathcal{C}_0=\mathcal{D}(pt)$ и $\mathcal{C}=\mathcal{D}(X)$ с комонадами $\mathsf{T}_0=\mathsf{T}_{G,\mathcal{L}^{-1},\alpha^{-1}}$ и $\mathsf{T}=\mathsf{T}_G$, их подкатегориям $\mathcal{C}_0'=\mathcal{D}^b(\mathsf{k}-\mathrm{mod})\subset\mathcal{D}(\mathsf{k}-\mathrm{Mod})=\mathcal{C}_0$ и $\mathcal{C}'=\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)\subset\mathcal{C}$, и функтору Ψ. Тогда образ $\Psi(\mathcal{C}_0')$ – это $\mathcal{A}'=\langle E\rangle$. Получим, что функтор

$$\mathcal{D}^b(\mathrm{rep}(G,\mathcal{L}^{-1},\alpha^{-1}))=\mathcal{D}^b(\mathsf{k}-\mathrm{mod})_{\mathsf{T}_{G,\mathcal{L}^{-1},\alpha^{-1}}}\longrightarrow\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)_{\mathsf{T}_G}=\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X),$$

индуцированный Ψ_i, строго полный, а его образ – категория $\langle E\rangle_{\mathsf{T}_G}$. $\square$

6.2 Случаи расслоений на проективные пространства и раздутий

Следующий пример – эквивариантная производная категория проективного расслоения, изученная в [7] для случая конечной группы. Полуортогональное разложение производной категории проективных расслоений, на котором основана наша конструкция, было получено Д. О. Орловым в [18]. Мы рассмотрим простейший случай, когда действие на проективном расслоении индуцировано эквивариантной структурой на векторном расслоении на базе.

Пусть E – векторное расслоение ранга r на схеме S, а $X = \mathbb{P}_S(E)$ – его проективизация. Обозначим через $\pi\colon X \to S$ естественную проекцию. Тогда полуортогональное разложение, построенное Орловым, имеет следующий вид:

$$\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) = \langle p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S), \mathcal{O}_{X/S}(1) \otimes p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S), \ldots, \mathcal{O}_{X/S}(r-1) \otimes p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S)\rangle.$$

Допустим, что на S действует группа G и при этом на E есть скрученная G-эквивариантная структура относительно коцикла $(\mathcal{L}, \alpha)$. Соответствующее $(\mathcal{L}, \alpha)$-G-эквивариантное расслоение обозначим $\mathcal{E}$. Тогда определено действие группы G на X, причём проекция π становится эквивариантным отображением.

Теорема 6.2.1. *Пусть группа G линейно редуктивна. Тогда имеет место полуортогональное разложение*

$$\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X) = \langle p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(S), \mathcal{O}_{X/S}(1) \otimes p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G,\mathcal{L},\alpha}(S), \ldots$$
$$\ldots, \mathcal{O}_{X/S}(r-1) \otimes p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G,\mathcal{L}^{r-1},\alpha^{r-1}}(S)\rangle.$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что $p^*\mathcal{E}$ – это $(\mathcal{L}, \alpha)$-эквивариантное расслоение на X, а $\mathcal{O}_{X/S}(-1)$ – его линейное $(\mathcal{L}, \alpha)$-эквивариантное подрасслоение. Значит, расслоения $\mathcal{O}_{X/S}(k)$ являются скрученными $(\mathcal{L}, \alpha)^{-k}$-$G$-эквивариантными расслоениями. Для всякого целого $k, 0 \leqslant k \leqslant r-1$, рассмотрим строго полный функтор

$$\Psi = \mathcal{O}_{X/S}(k) \otimes p^*(-)\colon \mathcal{D}(S) \to \mathcal{D}(X).$$

Из лемм 6.1.1 и 6.1.2 следует, что Ψ может быть дополнен до функтора между косимплициальными категориями

$$[\mathcal{D}(S), \mathcal{D}(G \times S), \mathcal{D}(G \times G \times S), \ldots, P_\bullet^*]$$

и

$$[\mathcal{D}(X), \mathcal{D}(G \times X), \mathcal{D}(G \times G \times X), \ldots, p_\bullet^*],$$

связанными со скрученным на $(\mathcal{L}, \alpha)^k$ действием G на S и с обычным действием G на X (см. определение 4.4.13). Пусть $\mathsf{T}_{G,\mathcal{L}^k,\alpha^k}$ и T_G – соответствующие комонады на категориях $\mathcal{D}(S)$ и $\mathcal{D}(X)$. Тогда из леммы 2.3.4 следует, что функтор Ψ согласован с комонадами $\mathsf{T}_{G,\mathcal{L}^k,\alpha^k}$ и T_G. Применим лемму 2.4.5 к категориям $\mathcal{C}_0 = \mathcal{D}(S)$, $\mathcal{C} = \mathcal{D}(X)$, комонадам $\mathsf{T}_{G,\mathcal{L}^k,\alpha^k}$ и T_G на них, подкатегориям $\mathcal{C}_0' = \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S) \subset \mathcal{C}_0$ $\mathcal{C}' = \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) \subset \mathcal{C}$ и функтору Ψ. Образ ограничения Ψ на $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S)$ – это подкатегория $\mathcal{A}' = \mathcal{O}_{X/S}(k) \otimes p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S) \subset \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. Получим, что индуцированный с помощью Ψ функтор даёт строго полное вложение

$$\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S)_{\mathsf{T}_{G,\mathcal{L}^k,\alpha^k}} \to \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)_{\mathsf{T}_G},$$

образ которого – категория $(\mathcal{O}_{X/S}(k)\otimes p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S))_{\mathsf{T}_G}$. С учётом теоремы 4.1.6, имеем строго полный функтор

$$\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G,\mathcal{L}^k,\alpha^k}(S)\to\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X),$$

образ которого состоит из объектов, лежащих в $\mathcal{O}_{X/S}(k)\otimes p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S)$ при забывании эквивариантной структуры. Определённые таким образом подкатегории в $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X)$ и будут компонентами полуортогонального разложения, которое строится в теореме 5.4.2.

Остаётся показать, что исходное полуортогональное разложение сохраняется группой и теорему 5.4.2 применять можно. Проверим условие 4 предложения 5.3.3: подкатегории $p_2^*(\mathcal{O}_{X/S}(k)\otimes p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S))$ и $a^*(\mathcal{O}_{X/S}(k)\otimes p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S))$ в $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ совпадают при всех k. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} G\times X \arrow[r, "(1\times p)"] \arrow[d, shift right, "p_2"'] \arrow[d, shift left, "a"] & G\times S \arrow[d, shift right, "p_2"'] \arrow[d, shift left, "a"] \\ X \arrow[r, "p"] & S. \end{tikzcd}$$

По определению, категория $p_2^*(\mathcal{O}_{X/S}(k)\otimes p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S))$ порождена объектами вида $p_1^*F'\otimes p_2^*(\mathcal{O}_{X/S}(k)\otimes p^*F)$, где $F'\in\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(G)$, $F\in\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S)$. Имеем

$$\begin{aligned} p_1^*F'\otimes p_2^*(\mathcal{O}_{X/S}(k)\otimes p^*F) &= p_1^*F'\otimes p_2^*\mathcal{O}_{X/S}(k)\otimes(1\times p)^*p_2^*F\in\\ &\in p_1^*(F'\otimes\mathcal{L}^k)\otimes a^*\mathcal{O}_{X/S}(k)\otimes(1\times p)^*a^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S)=\\ &=p_1^*(F'\otimes\mathcal{L}^k)\otimes a^*(\mathcal{O}_{X/S}(k)\otimes p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S))=a^*(\mathcal{O}_{X/S}(k)\otimes p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S)).\end{aligned}$$

Здесь мы использовали, что $p_2^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S)=a^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S)=\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$, см. лемму 5.3.1. Итак,

$$p_2^*(\mathcal{O}_{X/S}(k)\otimes p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S))\subset a^*(\mathcal{O}_{X/S}(k)\otimes p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S)),$$

обратное включение проверяется таким же образом.

Применение теоремы 5.4.2 завершает доказательство. □

Ещё один пример – раздутие неособого инвариантного подмногообразия в неособом многообразии.

Пусть $Z\subset X$ – неособая подсхема неособой схемы коразмерности r, а $\sigma\colon\bar{X}\to X$ – раздутие X вдоль Z. Обозначим через $\bar{Z}$ прообраз Z относительно σ, тогда $\bar{Z}$ – проективизация нормального расслоения $\mathcal{N}_{Z/X}$ на Z. Как и в предыдущем параграфе, исходное полуортогональное разложение для раздутия построено Орловым в работе [18]:

$$\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(\bar{X})=\langle\mathcal{O}_{\bar{Z}/Z}(-r+1)\otimes\sigma^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Z),\dots,\mathcal{O}_{\bar{Z}/Z}(-1)\otimes\sigma^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Z),\sigma^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)\rangle.$$

Пусть линейно редуктивная алгебраическая группа G действует на схеме X так, что подсхема Z инвариантна.

Теорема 6.2.2. *Тогда имеет место полуортогональное разложение*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(\bar{X})=\langle\mathcal{O}_{\bar{Z}/Z}(-r+1)\otimes\sigma^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(Z),\dots\\ \dots,\mathcal{O}_{\bar{Z}/Z}(-1)\otimes\sigma^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(Z),\sigma^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X)\rangle,\end{aligned}$$

в котором компоненты $\mathcal{O}_{\bar{Z}/Z}(-i)\otimes\sigma^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(Z)$ эквивалентны категории $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(Z)$, а компонента $\sigma^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X)$ – категории $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X)$.

Доказательство. Приведём набросок доказательства, подробности могут легко восстановлены по аналогии с предыдущим случаем.

Компонента $\sigma^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ исходного разложения есть образ функтора

$$\sigma^*\colon \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) \to \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(\bar{X}).$$

Этот функтор согласован с действием G на X и $\bar{X}$, следовательно подкатегория $\sigma^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) \subset \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(\bar{X})$ сохраняется группой и соответствующая компонента полуортогонального разложения $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(\bar{X})$ эквивалентна $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X)$.

Аналогично, компоненты $\mathcal{O}_{\bar{Z}/Z}(-i) \otimes \sigma^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Z)$ исходного разложения суть образы функтора

$$\Psi_i = j_*(\mathcal{O}_{\bar{Z}/Z}(-i) \otimes \sigma^*(-))\colon \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Z) \to \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(\bar{X}),$$

где j обозначает вложение $\bar{Z}$ в $\bar{X}$. Нормальное расслоение $\mathcal{N}_{Z/X}$ эквивариантно на Z, следовательно, и расслоения $\mathcal{O}_{\bar{Z}/Z}(k)$ на $\bar{Z}$ также эквивариантны. Функторы Ψ_i согласованы с действием G на Z и $\bar{X}$, значит компоненты $\mathcal{O}_{\bar{Z}/Z}(-i) \otimes \sigma^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Z)$ исходного разложения сохраняются группой, а компоненты $\mathcal{O}_{\bar{Z}/Z}(-i) \otimes \sigma^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(Z)$ эквивалентны категории $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(Z)$. □

7 Примеры

В этой главе мы применяем теоретические результаты и строим полуортогональные разложения (а фактически, полные исключительные наборы) в эквивариантной производной категории на различных многообразиях. При этом мы пользуемся уже известным полным исключительным набором на многообразии, этот набор во всех примерах состоит из пучков и сохраняется действием алгебраической группы. Отметим, что все рассматриваемые многообразия X – гладкие проективные над полем, для них категории $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ и $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ эквивалентны. При проверке инвариантности исключительных пучков под действием группы мы пользуемся предложением 5.3.3 и показываем, что пучок переводится в себя автоморфизмами g^* многообразия X для всех точек $g \in G$. Группа G в этой главе считается линейно редуктивной.

7.1 Проективные пространства

Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем k, $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^{n-1}_{\mathsf{k}}$ — его проективизация. Предположим, что группа G действует на $\mathbb{P}(V)$. Известно, что в категории $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(\mathbb{P}^{n-1})$ имеется полный исключительный набор

$$(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \ldots, \mathcal{O}(n-1)).$$

Этот набор сохраняется автоморфизмами $\mathbb{P}^{n-1}$ и мы можем применить теорему 6.1.6.

Построим коцикл, отвечающий за действие G на пучке $\mathcal{O}(-1)$. Рассмотрим группу $\tilde{G} = G \times_{PGL(V)} GL(V)$, обозначим через π проекцию $\tilde{G}$ на G. Отображение π превращает $\tilde{G}$ в главное $\mathbb{G}_m$-расслоение над G. Обозначим соответствующее линейное расслоение на G через $\mathcal{L}$. Умножение в $\tilde{G}$ вводит на $\mathcal{L}$ структуру коцикла, обозначим его $(\mathcal{L}, \alpha)$. Другими словами, $\tilde{G}$ является центральным расширением G с помощью $\mathbb{G}_m$, отвечающим коциклу $(\mathcal{L}, \alpha)$.

На $\mathbb{P}(V)$ возникает действие $\tilde{G}$, индуцированное действием G. С другой стороны, проекция $\tilde{G}$ на $GL(V)$ позволяет определить тавтологическое представление $\tilde{G}$ в пространстве V. Рассмотрим соответствующее $\tilde{G}$-расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes V$ на $\mathbb{P}(V)$ и его инвариантное подрасслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)$. Мы видим, что $\mathcal{O}(-1)$ является $\tilde{G}$-эквивариантным расслоением на $\mathbb{P}(V)$. При этом подгруппа $\mathbb{G}_m = \pi^{-1}(e) \subset \tilde{G}$ действует на $\mathcal{O}(-1)$ линейно. Следовательно, на пространстве V имеется $(\mathcal{L}, \alpha)$-действие группы G, а $\mathcal{O}(-1)$ является $(\mathcal{L}, \alpha)$-пучком на $\mathbb{P}(V)$. Согласно предложению 4.4.6, расслоения $\mathcal{O}(k)$ будут $(\mathcal{L}, \alpha)^{-k}$-эквивариантными на $\mathbb{P}(V)$.

Мы можем также рассмотреть группу $\bar{G} = G \times_{PGL(V)} SL(V)$. Она является замкнутой подгруппой в $\tilde{G}$ и является расширением G с помощью алгебраической группы μ_n. Нетрудно видеть, что $\bar{G}$ совпадает с конечным расширением G из предложения 4.4.12.

Таким образом, теорема 6.1.6 в нашем случае с учетом предложений 4.4.7 и 4.4.12 приобретает следующий вид:

Теорема 7.1.1. *Пусть алгебраическая группа G действует на проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$, пусть $(\mathcal{L}, \alpha)$ — коцикл, отвечающий за действие G на пучке $\mathcal{O}(-1)$. Тогда категория G-эквивариантных совершенных комплексов на $\mathbb{P}(V)$ допускает полуортогональное разложение:*

$$\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(\mathbb{P}(V)) = \langle \mathcal{O} \otimes \mathcal{D}^b(\mathrm{rep}(G)), \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathrm{rep}(G, \mathcal{L}, \alpha)), \ldots \\ \ldots, \mathcal{O}(n-1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathrm{rep}(G, \mathcal{L}^{n-1}, \alpha^{n-1})) \rangle. \quad (28)$$

Положим $\tilde{G} = G \times_{PGL(V)} GL(V)$ и $\bar{G} = G \times_{PGL(V)} SL(V)$. Тогда группа $\tilde{G}$ есть расширение G, соответствующее коциклу $(\mathcal{L}, \alpha)$ в смысле предложения 4.4.7, и компоненты $\mathcal{D}^b(\mathrm{rep}(G, \mathcal{L}^i, \alpha^i))$ в разложении (28) эквивалентны категориям $\mathcal{D}^b(\mathrm{rep}_{(i)}(\tilde{G}))$ и $\mathcal{D}^b(\mathrm{rep}_{(i)}(\bar{G}))$.

Замечание 7.1.2. Интересно, что компоненты $\mathcal{D}^b(\mathrm{rep}_{(0)}(\bar{G})), \ldots, \mathcal{D}^b(\mathrm{rep}_{(n-1)}(\bar{G}))$ разложения (28) — это в точности компоненты разложения категории $\mathcal{D}^b(\mathrm{rep}(\bar{G}))$ на прямые слагаемые из предложения 4.4.12.

Построенное разложение можно рассматривать как “некоммутативный вариант” полуортогонального разложения, построенного М. Бернардарой в [2] для относительных схем Севери-Брауэра. Если $X \xrightarrow{p} S$ — относительная схема Севери-Брауэра размерности n над S, то это разложение выглядит следующим образом:

$$\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) = \langle \mathcal{O} \otimes p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S), \mathcal{O}(1) \otimes p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S, \alpha^{-1}), \ldots, \mathcal{O}(n) \otimes p^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S, \alpha^{-n}) \rangle.$$

Здесь $\mathcal{O}(1)$ обозначает относительный пучок $\mathcal{O}_{X/S}(1)$ на X, он является пучком, скрученным на коцикл $p^*\alpha$, где $\alpha \in H^2_{et}(S, \mathbb{G}_m)$ — некоторый элемент группы Брауэра, а $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(S, \alpha^k)$ обозначает ограниченную производную категорию пучков на S, скрученных на коцикл α^k.

Разложение, полученное нами, имеет такой же вид, если считать $\mathbb{P}(V)/\!\!/G$ некоммутативным относительным многообразием Севери-Брауэра над $pt/\!\!/G$.

7.2 Квадрики

Пусть k — алгебраически замкнутое поле, $\mathrm{char}(\mathsf{k}) \neq 2$. Пусть V — векторное пространство над k размерности $n, n \geqslant 3$, Q — невырожденная квадрика в $\mathbb{P}(V)$. Полные исключительные наборы в $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Q)$ были построены М. М. Капрановым. Один из таких наборов имеет вид

$$(E_{\pm}, \mathcal{O}(-n+3), \ldots, \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}), \tag{29}$$

где $\mathcal{O}(k) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)|_Q$ — линейные расслоения, ограниченные с $\mathbb{P}(V)$, а $E_{\pm}$ обозначает подкрученное спинорное расслоение $E = \Sigma(-n+2)$ при нечетном n и блок из двух ортогональных друг другу подкрученных спинорных расслоений $E_+ = \Sigma_+(-n+2)$ и $E_- = \Sigma_-(-n+2)$ при четном n. Подробности смотри в [8] или в [10, §4].

Мы утверждаем, что набор (29) сохраняется при автоморфизмах Q. Точнее говоря, каждое расслоение $\mathcal{O}(k)$ переводится в себя автоморфизмами Q, расслоение E переводится в себя (при нечетном n) и расслоения E_+ и E_- переводятся в себя или друг в друга (при четном n).

Действительно, пусть g — автоморфизм Q. Тогда g продолжается до автоморфизма всего $\mathbb{P}(V)$, а пучки $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)$ сохраняются автоморфизмами проективного пространства. Следовательно, для каждого из пучков $\mathcal{O}(-n+3), \ldots, \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}$ на Q мы имеем $g^*\mathcal{O}(k) \cong \mathcal{O}(k)$. Подкатегория в $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(Q)$, порожденная пучками $\mathcal{O}(-n+3), \ldots, \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}$, инвариантна относительно g, следовательно правый ортогонал к ней также инвариантен. В силу полноты набора (29) имеем $\langle \mathcal{O}(-n+3), \ldots, \mathcal{O}) \rangle^{\perp} = \langle E_{\pm} \rangle$. При нечетном n категория $\langle E_{\pm} \rangle = \langle E \rangle$ порождена одним исключительным объектом, все исключительные объекты в ней — это сдвиги E в производной категории, значит $g^*E \cong E$. При четном n категория $\langle E_{\pm} \rangle = \langle E_+, E_- \rangle$ порождена двумя ортогональными друг другу исключительными объектами, все исключительные объекты в ней суть сдвиги E_+ или E_-. Следовательно, $g^*E_+ \cong E_+$ или E_-, $g^*E_+ \cong E_-$ или E_+.

Пусть группа G действует на Q. Мы видим, что подкатегории, порождённые блоками исключительного набора (29), инвариантны, и при помощи теоремы 5.4.2 мы можем получить полуортогональное разложение категории $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(Q)$.

7.3 Поверхности дель Пеццо

Пусть X — неособая поверхность дель Пеццо степени d $(1 \leqslant d \leqslant 9)$, G — группа, действующая на X. Мы будем предполагать, что основное поле k алгебраически замкнуто и $\mathrm{char}(\mathsf{k}) = 0$. Доказанные теоремы позволяют получать полуортогональные разложения категории G-эквивариантных совершенных комплексов на поверхности X в случае $d \geqslant 5$.

Хорошо известно, что неособая поверхность дель Пеццо является раздутием проективной плоскости в $r = 9 - d$ общих точках или неособой квадрикой (и тогда $d = 8$). Случаи проективной плоскости и квадрики были рассмотрены в предыдущих параграфах. Ниже для X — раздутия $\mathbb{P}^2$ в r точках никакие три из которых не лежат на одной прямой, при $r = 1$ мы укажем пример полного исключительного набора пучков на X, удовлетворяющего условиям теоремы 6.1.6. А при $r = 2, 3, 4$ мы приведём примеры полных исключительных наборов пучков блочного вида на X таких, что действие группы переставляет пучки в пределах каждого блока. Тем самым, подкатегории, порождённые пучками каждого блока, инвариантны, что позволяет получить полуортогональное разложение эквивариантной производной категории с помощью теоремы 5.4.2.

Нам понадобится следующий результат, вытекающий из общей теоремы Д. О. Орлова о раздутиях (см. [18]):

Теорема 7.3.1. *Пусть $\sigma\colon X \to \mathbb{P}^2$ — раздутие проективной плоскости в r различных точках $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{P}^2$, $E_i = \sigma^{-1}(x_i)$ — исключительные дивизоры раздутия. Тогда в категории совершенных комплексов на X имеется полный исключительный набор*

$$\left(\begin{matrix}\mathcal{O}_{E_1}(-1)\\ \vdots \\ \mathcal{O}_{E_r}(-1)\end{matrix}, \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1), \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)\right), \tag{30}$$

в котором пучки $\mathcal{O}_{E_1}(-1), \ldots, \mathcal{O}_{E_r}(-1)$ образуют блок, т.е. попарно ортогональны.

Мы будем пользоваться обозначениями теоремы 7.3.1. Пусть также L_{ij} обозначает собственный прообраз прямой $x_i x_j$ при отображении σ, а L — прообраз относительно σ какой-либо прямой, не проходящей через точки x_i. Тогда $\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \cong \mathcal{O}_X(L)$ и $L \sim L_{ij} + E_i + E_j$. Разберем последовательно случаи.

Случай $r = 1$. X — раздутие $\mathbb{P}^2$ в точке x_1. На X имеется ровно одна исключительная кривая, следовательно действие группы G на X спускается до действия G на проективной плоскости, сохраняющего точку x_1. Все пучки исключительного набора $(\mathcal{O}_{E_1}(-1), \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1), \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ сохраняются действием группы, и мы можем применить теорему 6.1.6. Отметим, что $\mathcal{O}_{E_1}(-1)$ является G-эквивариантным пучком на X, соответствующее действие возникает из линейного действия G на касательном пространстве $T_{x_1}\mathbb{P}^2$.

В действительности мы получаем полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X) = \langle \mathcal{O}_{E_1}(-1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathrm{rep}(G)), \sigma^*\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(\mathbb{P}^2)\rangle,$$

см. теорему 6.2.2.

Случай $r = 2$. X — плоскость с двумя раздутыми точками x_1 и x_2. На X есть ровно три -1-кривые: E_1, E_2 и L_{12}. Конфигурация из этих кривых должна переводиться автоморфизмами поверхности в себя, поэтому все автоморфизмы X получаются из автоморфизмов $\mathbb{P}^2$, сохраняющих множество $\{x_1, x_2\}$. Таким образом, в наборе (30) пучки $\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1), \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$ сохраняются действием группы, а пучки $\mathcal{O}_{E_1}(-1)$ и $\mathcal{O}_{E_2}(-1)$, образующие блок, переходят в себя или друг в друга. Применяя теорему 5.4.2, получаем полуортогональное разложение категории $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(X)$.

Случай $r = 3$. X — раздутие плоскости в трех точках x_1, x_2, x_3, не лежащих на одной прямой.

Здесь ситуация отлична от той, что была выше: не все автоморфизмы X поднимаются с автоморфизмов плоскости, и набор (30) не будет сохраняться произвольной группой, действующей на X. Однако существует и инвариантный набор. Рассмотрим набор расслоений на X

$$\left(\mathcal{O}, \begin{matrix}\mathcal{O}(L)\\ \mathcal{O}(2L - E_1 - E_2 - E_3)\end{matrix}, \begin{matrix}\mathcal{O}(2L - E_1 - E_2)\\ \mathcal{O}(2L - E_1 - E_3)\\ \mathcal{O}(2L - E_2 - E_3)\end{matrix}\right). \tag{31}$$

Он является полным исключительным набором, состоящим из трех блоков, и может быть получен перестройками из набора (30), подробнее о блочных исключительных наборах на поверхностях дель Пеццо смотри в работе Б. В. Карпова и Д. Ю. Ногина [11, раздел 4].

Лемма 7.3.2. *Блоки расслоений*

$$(\mathcal{O}(L), \mathcal{O}(2L - E_1 - E_2 - E_3))$$

и

$$(\mathcal{O}(2L - E_1 - E_2), \mathcal{O}(2L - E_1 - E_3), \mathcal{O}(2L - E_2 - E_3))$$

сохраняются любыми автоморфизмами поверхности X.

Доказательство. На X имеется ровно шесть -1-кривых, они образуют кольцо. Перечислим эти кривые в порядке обхода по кольцу: $E_1, L_{12}, E_2, L_{23}, E_3, L_{13}$. Это кольцо должно переводиться автоморфизмами поверхности X в себя. При этом автоморфизмы X, сохраняющие множество кривых $\{E_1, E_2, E_3\}$, приходят из автоморфизмов $\mathbb{P}^2$ и поэтому переводят L в L. Такие автоморфизмы сохраняют каждое расслоение в блоке $(\mathcal{O}(L), \mathcal{O}(2L - E_1 - E_2 - E_3))$ и переставляют расслоения в пределах блока $(\mathcal{O}(2L - E_1 - E_2), \mathcal{O}(2L - E_1 - E_3), \mathcal{O}(2L - E_2 - E_3))$. Для завершения доказательства осталось рассмотреть какой-нибудь автоморфизм поверхности X, меняющий множества кривых $\{E_1, E_2, E_3\}$ и $\{L_{12}, L_{13}, L_{23}\}$. Например, автоморфизм f, реализующий на кольце -1-кривых "центральную симметрию" (т.е. такой что $f(E_1) = L_{23}$, $f(E_2) = L_{13}$ и т.д.) Примером такого f является автоморфизм X порядка 2, индуцированный квадратичным преобразованием $\mathbb{P}^2$ с центрами в точках x_1, x_2, x_3. Заметим, что $f(L) \sim 2L - E_1 - E_2 - E_3$ и $f(2L - E_1 - E_2 - E_3) \sim L$, т.е. пучки из набора $(\mathcal{O}(L), \mathcal{O}(2L - E_1 - E_2 - E_3))$ переводятся автоморфизмом f друг в друга. А для расслоения $\mathcal{O}(2L - E_1 - E_2)$ мы вычисляем, что

$$f(2L - E_1 - E_2) \sim 2(2L - E_1 - E_2 - E_3) - (L - E_2 - E_3) - (L - E_1 - E_3) = 2L - E_1 - E_2.$$

Следовательно (в силу симметрии), расслоения из блока $(\mathcal{O}(2L - E_1 - E_2), \mathcal{O}(2L - E_1 - E_3), \mathcal{O}(2L - E_2 - E_3))$ сохраняются при автоморфизме f. □

Итак, исключительный набор (31) удовлетворяет условию теоремы 5.4.2 и мы можем получить полуортогональное разложение производной эквивариантной категории.

Случай $r = 4$**.** X — раздутие плоскости в четырех точках, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Пусть K_X обозначает канонический дивизор на X, $K_X \sim -3L + E_1 + E_2 + E_3 + E_4$. Мы снова будем использовать полный исключительный набор пучков на X из работы Карпова и Ногина [11, раздел 4]:

$$\left(\begin{array}{ccc} & & \mathcal{O}(L) \\ & & \mathcal{O}(E_1 - K_X - L) \\ \mathcal{O} & F & \mathcal{O}(E_2 - K_X - L) \\ & & \mathcal{O}(E_3 - K_X - L) \\ & & \mathcal{O}(E_4 - K_X - L) \end{array} \right), \tag{32}$$

где F — расслоение ранга 2, которое может быть получено с помощью расширения

$$0 \to \mathcal{O}(-K_X - L) \to F \to \mathcal{O}(L) \to 0.$$

Мы покажем ниже, что автоморфизмы X переводят пучки правого блока в (32) друг в друга. Отсюда автоматически будет следовать, что расслоение F сохраняется автоморфизмами X в силу того, что набор (32) полный.

Лемма 7.3.3. *Любой автоморфизм поверхности X переводит расслоения*

$$\mathcal{O}(L), \mathcal{O}(E_1 - K_X - L), \mathcal{O}(E_2 - K_X - L), \mathcal{O}(E_3 - K_X - L), \mathcal{O}(E_4 - K_X - L)$$

друг в друга.

Доказательство. На X имеется ровно десять -1-кривых, а именно, это четыре E_i и шесть L_{ij}. Эти десять кривых порождают группу Пикара X, так что достаточно проверить, что любой автоморфизм конфигурации -1-кривых переводит расслоения правой пятерки из набора (32) друг в друга. Сперва заметим, что сказанное верно для автоморфизмов, сохраняющих множество $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$. Пусть f — автоморфизм порядка два, сохраняющий E_4 и действующий центральной симметрией на кольце из шести -1-кривых, не пересекающихся с E_4. Нетрудно видеть, что автоморфизмы, сохраняющие множество $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, вместе с f порождают группу автоморфизмов конфигурации из 10 кривых. Итак, нам осталось проверить инвариантность блока для автоморфизма f. При этом нужные вычисления были проведены при рассмотрении предыдущего случая. Мы имеем:

$$f(L) \sim 2L - E_1 - E_2 - E_3 \sim E_4 - K_X - L,$$
$$f(E_4 - K_X - L) \sim L$$

так как f имеет порядок 2,

$$f(E_1 - K_X - L) \sim f(2L - E_2 - E_3) - E_4 = 2L - E_2 - E_3 - E_4 \sim E_1 - K_X - L,$$

и аналогично

$$f(E_2 - K_X - L) \sim E_2 - K_X - L,$$
$$f(E_3 - K_X - L) \sim E_3 - K_X - L.$$

$\square$

Таким образом, набор (32) удовлетворяет условиям теоремы 5.4.2.

7.4 Многообразия Грассмана

Пусть V — векторное пространство над полем k характеристики 0, $\dim(V) = n$, $\mathrm{Gr} = \mathrm{Gr}(k, V)$ — грассманиан k-мерных подпространств в V.

Для применения теоремы 6.1.6 мы используем исключительный набор на Gr, построенный М. М. Капрановым в [9], смотри также [10, §3]. Введем сперва некоторые обозначения. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ — диаграмма Юнга, образованная r строками длин $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, где $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r$ — натуральные числа. Общее число клеток мы обозначим через $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$. С каждой диаграммой Юнга λ связана тензорная операция, сопоставляющая векторному пространству V пространство, которое мы будем обозначать $\Sigma^\lambda V$. А именно, если λ содержит $r \leqslant \dim(V)$ строк, то $\Sigma^\lambda V$ можно определить как пространство неприводимого представления группы $GL(V)$ со старшим весом λ (дополняя, если нужно, λ нулевыми строками). В противном случае $\Sigma^\lambda V = 0$. Это пространство можно построить явно, занумеровав клетки таблицы λ, как факторпредставление естественного представления $V^{\otimes|\lambda|}$ (смотри [20, глава 8]). Как следствие, соответствие Σ^λ является ковариантным функтором от аргумента V. Кроме того, Σ^λ определяет операцию на векторных расслоениях.

Пусть S — тавтологическое векторное расслоение на $\mathrm{Gr} = \mathrm{Gr}(k, V)$. Тогда, как показал Капранов, категория $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(\mathrm{Gr})$ допускает полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(\mathrm{Gr}) = \langle \mathcal{D}_{k(n-k)}, \mathcal{D}_{k(n-k)-1}, \ldots, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_0 \rangle, \tag{33}$$

в котором $\mathcal{D}_i$ — подкатегория, порожденная попарно ортогональными исключительными расслоениями $\Sigma^\lambda S$, где λ пробегает диаграммы Юнга с не более, чем k строками и не более, чем $n-k$ столбцами, такие что $|\lambda| = i$.

Нас интересуют действия группы на грассманиане. При $1 \leqslant k \leqslant n-1, k \neq n/2$, а также при $k = n/2 = 1$ естественное отображение $PGL(V) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Gr}(k,V))$ является изоморфизмом, а при четном n и $k = n/2$ подгруппа $PGL(V)$ имеет индекс 2 в $\mathrm{Aut}(\mathrm{Gr}(k,V))$. Примером автоморфизма $\mathrm{Gr}(n/2, V)$, не лежащего в образе $PGL(V)$, может служить отображение $U \mapsto U^\perp$, где $\perp$ обозначает ортогональное дополнение относительно невырожденной квадратичной формы на V.

Мы будем рассматривать только те действия G, которые индуцированы гомоморфизмом $G \to PGL(V)$. В этом случае расслоение S и все полученные из него расслоения $\Sigma^\lambda S$ сохраняются действием группы, и исключительный набор (33) удовлетворяет условиям теоремы 6.1.6.

Пусть $(\mathcal{L}, \alpha)$ — такой коцикл на группе G, что действие G на $\mathbb{P}(V)$ поднимается до $(\mathcal{L}, \alpha)$-представления G в пространстве V (а $\mathcal{O}(-1)$ является $(\mathcal{L}, \alpha)$-эквивариантным подпучком в $\mathcal{O} \otimes V$). Как мы видели в параграфе 7.1, этому коциклу отвечает расширение $\tilde{G} = G \times_{PGL(V)} GL(V)$ группы G. Заметим, что S является G-подрасслоением в $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}} \otimes V$, следовательно S является $(\mathcal{L}, \alpha)$-эквивариантным расслоением, а $\Sigma^\lambda S$ — $(\mathcal{L}, \alpha)^{|\lambda|}$-эквивариантным расслоением. С помощью применения теоремы 6.1.6 и предложения 4.4.7 доказывается следующая

Теорема 7.4.1. *В сделанных предположениях категория эквивариантных совершенных комплексов $\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(\mathrm{Gr})$ допускает полуортогональное разложение*

$$\mathcal{D}^{\mathrm{perf},G}(\mathrm{Gr}) = \langle \mathcal{D}'_{k(n-k)}, \mathcal{D}'_{k(n-k)-1}, \ldots, \mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_0 \rangle,$$

в котором $\mathcal{D}'_i = \mathcal{D}_i \otimes \mathcal{D}^b(\mathrm{rep}_{(-i)}(\tilde{G}))$ обозначает набор попарно ортогональных подкатегорий вида $\Sigma^\lambda S \otimes \mathcal{D}^b(\mathrm{rep}_{(-i)}(\tilde{G}))$, где λ пробегает диаграммы Юнга из i клеток, содержащие не более k строк и не более $n-k$ столбцов.

8 Приложение

8.1 Доказательство предложения 2.1.9

Мы вынесли доказательства предложений 2.1.9 и 2.3.2 в приложение потому, что они не содержат глубоких идей, элементарны и в то же время громоздки.

Канонические морфизмы сопряжения вида $\mathrm{Id} \to f_* f^*$ будут обозначаться в диаграммах этого и следующего приложений через η, а вида $f^* f_* \to \mathrm{Id}$ – через ε. Канонические изоморфизмы, входящие в определение косимплициальной категории, будут обозначаться отрезками. Изоморфизмы функторов, полученные из изоморфизмов вида $D^*P_1^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_0}$ или $D_1^*P_{13}^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_1}$, мы будем обозначать направленными стрелками.

Нам понадобится следующая несложная лемма:

Лемма 8.1.1. *Канонические морфизмы сопряжения η согласованы с заменой базы. А именно, рассмотрим декартов квадрат*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, shift right, "P_{g'*}"'] \arrow[r, shift right, "P_{f'*}"'] & \bullet \arrow[l, shift right, "P^*_{f'}"'] \arrow[d, shift right, "P_{g*}"'] \\
\bullet \arrow[u, shift right, "P^*_{g'}"'] \arrow[r, shift right, "P_{f*}"'] & \bullet . \arrow[l, shift right, "P^*_f"'] \arrow[u, shift right, "P^*_g"']
\end{tikzcd}$$

Два морфизма функторов $\eta_{f'}P_g^*\colon (\mathrm{Id} \to P_{f'*}P_{f'}^*)P_g^*$ и $P_g^*\eta_f\colon P_g^*(\mathrm{Id} \to P_{f*}P_f^*)$ равны с учётом изоморфизма $P_g^*P_{f*}P_f^* \xrightarrow{\sim} P_{f'*}P_{g'}^*P_f^* \xrightarrow{\sim} P_{f'*}P_{f'}^*P_g^*$. Аналогично, равны морфизмы $P_{f*}\eta_{g'}\colon P_{f*}(\mathrm{Id} \to P_{g'*}P_{g'}^*)$ и $\eta_g P_{f*}\colon (\mathrm{Id} \to P_{g*}P_g^*)P_{f*}$.

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе проверяется аналогично. Напомним, что морфизм замены базы $P_g^*P_{f*} \to P_{f'*}P_{g'}^*$ определён как композиция

$$P_g^*P_{f*} \xrightarrow{\eta} P_g^*P_{f*}P_{g'*}P_{g'}^* \xrightarrow{\sim} P_g^*P_{g*}P_{f'*}P_{g'}^* \xrightarrow{\varepsilon} P_{f'*}P_{g'}^*.$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
P_g^*P_{f*}P_{g'*}P_{g'}^*P_f^* \arrow[r, dash] & P_g^*P_{g*}P_{f'*}P_{g'}^*P_f^* \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dash] & P_{f'*}P_{g'}^*P_f^* \arrow[d, dash] \\
P_g^*P_{f*}P_f^* \arrow[u, "\eta"] & P_g^*P_{g*}P_{f'*}P_{f'}^*P_g^* \arrow[r, "\varepsilon"] & P_{f'*}P_{f'}^*P_g^* \\
P_g^* \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "\eta"] \arrow[rr, equal, bend right] & P_g^*P_{g*}P_g^* \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "\varepsilon"] & P_g^* . \arrow[u, "\eta"]
\end{tikzcd}$$

Граница диаграммы даёт два равных морфизма $P_g^* \to P_{f'*}P_{f'}^*P_g^*$: канонический ηP_g^* и композицию $P_g^* \to P_g^*P_{f*}P_f^* \xrightarrow{\sim} P_{f'*}P_{g'}^*P_f^* \xrightarrow{\sim} P_{f'*}P_{f'}^*P_g^*$. □

Напомним формулировку предложения 2.1.9:

Пусть $\mathcal{C}_\bullet$ – косимплициальная категория, а $\tilde{\mathcal{C}}_\bullet$ – полученная из неё добавлением $\mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ *аугментированная косимплициальная категория. Если $\mathcal{C}_\bullet$ удовлетворяла условиям 1 и 2 параграфа 2.1, то $\tilde{\mathcal{C}}_\bullet$ также будет им удовлетворять.*

Условие 1 состоит в существовании правых сопряжённых у функторов P_f^* в категории $\tilde{\mathcal{C}}_\bullet$ для всех морфизмов f в Δ_0. Для морфизмов f, лежащих в Δ, сопряжённый функтор существует по предположению, необходимо рассмотреть морфизмы вида $f\colon \emptyset \to [0, \ldots, n]$. Раскладывая f в композицию, видим, что достаточно проверить существование сопряженного функтора к функтору забывания $P^*\colon \mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet) \to \mathcal{C}_0$.

Определим функтор $P_*\colon \mathcal{C}_0 \to \mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$следующим образом. Пусть $F \in \mathcal{C}_0$, положим

$$P_*F = (P_{2*}P_1^*F, \theta_F),$$

где $\theta_F\colon P_1^*P_2^*P_{1*}F \to P_2^*P_{2*}P_1^*F$ определяется как композиция изоморфизмов

$$P_1^*P_{2*}P_1^*F \xrightarrow{\sim} P_{23*}P_{12}^*P_1^*F \xrightarrow{\sim} P_{23*}P_{13}^*P_1^*F \xrightarrow{\sim} P_2^*P_{2*}P_1^*F.$$

На морфизмах полагаем $P_*f = P_{2*}P_1^*f$. Проверку того, что θ_F удовлетворяет условию коцикла, мы предоставляем читателю.

Чтобы показать, что функторы P^* и P_* сопряжены, построим морфизмы функторов

$$\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)} \to P_*P^*$$

и

$$\varepsilon\colon P^*P_* \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_0}.$$

Определим η на объекте $(F,\theta) \in \mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$ как композицию

$$\eta_{(F,\theta)}\colon F \to P_{2*}P_2^*F \xrightarrow{P_2^*\theta^{-1}} P_{2*}P_1^*F.$$

Определим ε на объекте $F \in \mathcal{C}_0$:

$$\varepsilon_F\colon P_{2*}P_1^*F \to P_{2*}D_*D^*P_1^*F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_*\mathrm{Id}^*F = F.$$

Лемма 8.1.2. *Морфизм $\eta_{(F,\theta)}$ согласован с θ и θ_F.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму.

$$\begin{tikzcd}
P_1^*F \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\eta"] \arrow[dd, "\eta"] & & P_2^*F \arrow[dr, "\eta"] \arrow[dd, "\eta"] & \\
& P_{23*}P_{23}^*P_1^*F \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd, dash] & & P_{23*}P_{23}^*P_2^*F \arrow[dd, dash] \\
P_1^*P_{2*}P_2^*F \arrow[dr, dash] \arrow[dd, "\theta^{-1}"] & & P_2^*P_{2*}P_2^*F \arrow[dr, dash] \arrow[dd, "\theta^{-1}"] & \\
& P_{23*}P_{12}^*P_2^*F \arrow[dd, "\theta^{-1}"] & & P_{23*}P_{13}^*P_2^*F \arrow[dd, "\theta^{-1}"] \\
P_1^*P_{2*}P_1^*F \arrow[rr, dash, "\theta_F"] \arrow[dr, dash] & & P_2^*P_{2*}P_1^*F \arrow[dr, dash] & \\
& P_{23*}P_{12}^*P_1^*F \arrow[rr, dash] & & P_{23*}P_{13}^*P_1^*F.
\end{tikzcd}$$

Передняя грань коммутативна в силу условия коцикла, нижняя – по определению θ_F, остальные из-за функториальности канонических изоморфизмов. Коммутативность задней грани показывает согласованность $\eta_{(F,\theta)}$ с θ и θ_f. $\square$

Лемма 8.1.3. *Композиция функторов*

$$P_* \xrightarrow{\eta P_*} P_*P^*P_* \xrightarrow{P_*\varepsilon} P_*$$

тождественна.

Доказательство. В приведённой ниже диаграмме морфизм $P_{2*}P_1^* \to P_{2*}P_1^*$, полученный при обходе края диаграммы против часовой стрелки, есть P^* от интересующей нас композиции. А морфизм, полученный при обходе края по часовой стрелке, есть P^* от тождественного. Так как функтор P^* строг, коммутативность диаграммы доказывает лемму.

$$\begin{tikzcd}
 & P_{2*}P_2^*P_{2*}P_1^* \arrow[d, dash] & P_{2*}P_1^* \arrow[l, "\eta"'] \arrow[d, "\eta"] & \\
 & P_{2*}P_{23*}P_{13}^*P_1^* \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & P_{2*}P_{13*}P_{13}^*P_1^* \arrow[d, dash] \arrow[dr, "\eta"] & \\
P_{2*}P_1^*P_{2*}P_1^* \arrow[r, dash] \arrow[d, "\eta"] & P_{2*}P_{23*}P_{12}^*P_1^* \arrow[r, dash] \arrow[d, "\eta"] & P_{2*}P_{13*}P_{12}^*P_1^* \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, "\eta"] & P_{2*}P_{13*}D_{1*}D_1^*P_{13}^*P_1^* \arrow[d, dash] \arrow[ddd, bend left] \\
P_{2*}P_1^*P_{2*}D_*D^*P_1^* \arrow[r, dash] \arrow[d] & P_{2*}P_{23*}P_{12}^*D_*D^*P_1^* \arrow[r, dash] \arrow[d] \arrow[dr, dash] & P_{2*}P_{13*}P_{12}^*D_*D^*P_1^* \arrow[dr, dash] & P_{2*}P_{13*}D_{1*}D_1^*P_{12}^*P_1^* \arrow[d, dash] \\
P_{2*}P_1^*P_{2*}D_* \arrow[r, dash] \arrow[dr] & P_{2*}P_{23*}P_{12}^*D_* \arrow[dr, dash] & P_{2*}P_{23*}D_{1*}P_1^*D^*P_1^* \arrow[r, dash] \arrow[d] & P_{2*}P_{13*}D_{1*}P_1^*D^*P_1^* \arrow[d] \\
 & P_{2*}P_1^* & P_{2*}P_{23*}D_{1*}P_1^* \arrow[l] & P_{2*}P_{13*}D_{1*}P_1^* \arrow[l, dash] \arrow[ll, bend left]
\end{tikzcd}$$

□

Лемма 8.1.4. *Композиция функторов*

$$P^* \xrightarrow{P^*\eta} P^*P_*P^* \xrightarrow{\varepsilon P^*} P^*$$

тождественна.

Доказательство. Вычислим данную композицию функторов на объекте $(F, \theta) \in \mathrm{Kern}(\mathcal{C}_\bullet)$. В коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & P_{2*}P_1^*F \arrow[r, "\eta"] & P_{2*}D_*D^*P_1^*F \arrow[r] & D^*P_1^*F \arrow[dr] & \\
F \arrow[r, "\eta"] \arrow[ur] & P_{2*}P_2^*F \arrow[r, "\eta"] \arrow[u, "P_{2*}\theta"'] & P_{2*}D_*D^*P_2^*F \arrow[r] \arrow[u, "P_{2*}D_*D^*\theta"'] & D^*P_2^*F \arrow[r] \arrow[u, "D^*\theta"] & F
\end{tikzcd}$$

она читается вдоль верхнего края. Нижняя строка представляет тождественный морфизм, что и доказывает утверждение. □

Из этих двух лемм следует, что функторы P^* и P_* сопряжены.

Условие 2 состоит в том, что для "декартовых" квадратов в Δ_0 должна быть выполнена формула замены базы. Для квадратов, лежащих в Δ, она выполнена по предположению, поэтому достаточно рассмотреть квадраты вида

$$\begin{tikzcd}
{[0,\dots,m+n+1]} & {[0,\dots,n]} \arrow[l, "f'"'] \\
{[0,\dots,m]} \arrow[u, "g'"] & \emptyset. \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Раскладывая f и g в композицию, сводим проверку к случаю квадрата

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} & {[0]} \arrow[l, "i_2"'] \\
{[0]} \arrow[u, "i_1"] & \emptyset, \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

т.е. к доказательству того, что естественные морфизмы $P^*P_* \to P_{2*}P_1^*$ и $P^*P_* \to P_{1*}P_2^*$ в $\mathcal{C}_0$ суть изоморфизмы. В силу соображений симметрии достаточно рассмотреть первый из этих морфизмов. Действительно, рассмотрим функтор P'_*, определённый так же, как и P_*, но с заменой порядка в Δ на противоположный. Тогда морфизм $P'^*P'_* \to P_{1*}P_2^*$ будет изоморфизмом. Но функтор P'_* так же, как и P_*, является сопряжённым справа к P^*, поэтому он изоморфен P_*.

Лемма 8.1.5. *Морфизм замены базы $P^*P_* \to P_{2*}P_1^*$ является изоморфизмом.*

Доказательство. По определению, функтор есть $P_{2*}P_1^*$. Проверим, что морфизм замены базы $P_{2*}P_1^* \to P_{2*}P_1^*$ будет тождественным. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
P^*P_* \arrow[r, equal] \arrow[d, "\eta"] & P_{2*}P_1^* \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\eta"] & P_{2*}P_{13*}P_{13}^*P_1^* \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, dash] & P_{2*}P_{13*}D_{1*}D_1^*P_{13}^*P_1^* \arrow[d, dash] \arrow[ddddd, bend left=60] \\
P_{2*}P_2^*P^*P_* \arrow[r, equal] \arrow[dd, "\sim"] & P_{2*}P_2^*P_{2*}P_1^* \arrow[r, dash] & P_{2*}P_{23*}P_{13}^*P_1^* \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, dash] & P_{2*}P_{23*}D_{1*}D_1^*P_{13}^*P_1^* \arrow[d, dash] \arrow[ddd, bend left=60] \\
 & & P_{2*}P_{23*}P_{12}^*P_1^* \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\eta"] \arrow[dl, dash] & P_{2*}P_{23*}D_{1*}D_1^*P_{12}^*P_1^* \arrow[d, dash] \\
P_{2*}P_1^*P^*P_* \arrow[r, equal] \arrow[ddd, "\varepsilon"] & P_{2*}P_1^*P_{2*}P_1^* \arrow[d, "\eta"] & P_{2*}P_{23*}P_{12}^*D_*D^*P_1^* \arrow[r, dash] \arrow[d] \arrow[dl, dash] & P_{2*}P_{23*}D_{1*}P_1^*D^*P_1^* \arrow[d] \\
 & P_{2*}P_1^*P_{2*}D_*D^*P_1^* \arrow[d] & P_{2*}P_{23*}P_{12}^*D_* \arrow[r, dash] \arrow[dl, dash] & P_{2*}P_{23*}D_{1*}P_1^* \arrow[d, dash] \arrow[ddll] \\
 & P_{2*}P_1^*P_{2*}D_* \arrow[d] & & P_{2*}P_{13*}D_{1*}P_1^* \arrow[dll] \\
P_{2*}P_1^* \arrow[r, equal] & P_{2*}P_1^*. & &
\end{tikzcd}$$

Обходя вдоль её края из $P_{2*}P_1^*$ в $P_{2*}P_1^*$ против часовой стрелки, получим морфизм замены базы, обходя по часовой стрелке, получим тождественный морфизм. Коммутативность диаграммы доказывает лемму. $\square$

Предложение 2.1.9 доказано.

8.2 Доказательство предложения 2.3.2

В диаграммах этого параграфа мы будем использовать обозначения, определённые следующей кубической диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
& 123 \arrow[rr, dash, "p_{23}"] \arrow[dl, dash, "p_{12}"'] \arrow[dd, dash, "p_{13}"' near end] & & 23 \arrow[dl, dash, "r_1"'] \arrow[dd, dash, "r_2"] \\
12 \arrow[rr, dash, "p_2" near end] \arrow[dd, dash, "p_1"'] & & 2 \arrow[dd, dash, "p'"'] & \\
& 13 \arrow[rr, dash, "q_2"] \arrow[dl, dash, "q_1"'] & & 3 \arrow[dl, dash, "p''"] \\
1 \arrow[rr, dash, "p"] & & \bullet &
\end{tikzcd} \tag{34}$$

Лемма 8.2.1. *Следуя из любой вершины куба (34) в противоположную по рёбрам, мы можем считать шесть функторов. При этом грани куба соответствуют каноническим изоморфизмам между этими функторами. Мы утверждаем, что композиция этих шести изоморфизмов вдоль всей поверхности куба есть тождественный морфизм.*

Доказательство. Проводится диаграммным поиском с использованием определений. $\square$

Дана косимплициальная аугментированная категория $\mathcal{C}$, удовлетворяющая условиям 1 и 2 параграфа 2.1. Наша цель – доказать, что категории спуска $\mathrm{Kern}(\mathcal{C})$ и $\mathcal{C}_\mathsf{T}$, определённые в параграфе 2.1, эквивалентны. Объекты $\mathrm{Kern}(\mathcal{C})$ – это пары (F, θ), где $F \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}_0$, а $\theta\colon p_1^* F \to p_2^* F$ – морфизм (удовлетворяющий некоторым условиями). Объекты $\mathcal{C}_\mathsf{T}$ – это также пары (F, h), где $F \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}_0$ и $h\colon F \to p^* p_* F$ – морфизм (удовлетворяющий некоторым другим условиям). По сопряжённости, для $F \in \mathcal{C}_0$ мы имеем

$$\mathrm{Hom}(p_1^* F, p_2^* F) = \mathrm{Hom}(F, p_{1*} p_2^* F) = \mathrm{Hom}(F, p^* p_* F).$$

Очевидно, отображение $F_1 \to F_2$ согласовано с $\theta\colon p_1^* F_i \to p_2^* F_i$ тогда и только тогда, когда оно согласовано с $h\colon F_i \to p^* p_* F_i$. Всё, что нужно сделать – проверить, что условия на h из определения комодуля над комонадой

(C1) композиция $F \xrightarrow{h} p^* p_* F \xrightarrow{\varepsilon F} F$ тождественна,

(C2) диаграмма
$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h"] & p^* p_* F \arrow[d, "p^* p_* h"] \\
p^* p_* F \arrow[r, "p^* \eta p_* F"] & p^* p_* p^* p_* F
\end{tikzcd}$$
коммутативна,

равносильны следующим условиям:

(C1') θ является изоморфизмом,

(C2') (условие коцикла на θ) морфизмы $p_{13}^* \theta$ и $p_{23}^* \theta \circ p_{12}^* \theta$ из $p_{13}^* p_1^* F$ в $p_{23}^* p_2^* F$ равны.

Покажем сначала, что (C2) эквивалентно (C2'). Заметим, что

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(p_{13}^*p_1^*F, p_{23}^*p_2^*F) = \operatorname{Hom}(F, p_{1*}p_{13*}p_{23}^*p_2^*F) = \operatorname{Hom}(F, p_{1*}p_{12*}p_{23}^*p_2^*F) = \\ = \operatorname{Hom}(F, p_{1*}p_2^*p_{1*}p_2^*F) = \operatorname{Hom}(F, p^*p_*p^*p_*F).\end{aligned} \tag{35}$$

Мы покажем, что при этом отождествлении

морфизм $p_{13}^*\theta \in \operatorname{Hom}(p_{12}^*p_1^*F, p_{23}^*p_2^*F)$ соответствует морфизму $p^*\eta p_*F \circ h \in \operatorname{Hom}(F, p^*p_*p^*p_*F)$ (36)

и

морфизм $p_{23}^*\theta \circ p_{12}^*\theta \in \operatorname{Hom}(p_{12}^*p_1^*F, p_{23}^*p_2^*F)$ соответствует морфизму $p^*p_*h \circ h \in \operatorname{Hom}(F, p^*p_*p^*p_*F)$. (37)

Для доказательства (36) рассмотрим коммутативную диаграмму.

$$\begin{tikzcd}
 & q_{1*}p_{13*}p_{13}^*q_1^*F \arrow[dr, "\theta"] & & \\
q_{1*}q_1^*F \arrow[ur, "\eta"] \arrow[dr, "\theta"] & & q_{1*}p_{13*}p_{13}^*q_2^*F \arrow[dr, dash] & \\
 & q_{1*}q_2^*F \arrow[ur, "\eta"] \arrow[dr, "\eta"] \arrow[ddd, dash] & & q_{1*}p_{13*}p_{23}^*r_2^*F \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\
 & & q_{1*}q_2^*r_{2*}r_2^*F \arrow[d, dash] & p_{1*}p_{12*}p_{23}^*r_2^*F \arrow[d, dash] \\
F \arrow[uuu, "\eta"] \arrow[dr, "h"'] & & p^*p''_*r_{2*}r_2^*F \arrow[dr, dash] & p_{1*}p_2^*r_{1*}r_2^*F \arrow[d, dash] \\
 & p^*p''_*F \arrow[ur, "\eta"] \arrow[dr, "p^*\eta p''_*F"'] & & p^*p'_*r_{1*}r_2^*F \arrow[dl, dash] \\
 & & p^*p'_*p'^*p''_*F. &
\end{tikzcd}$$

Она даст нам два равных морфизма $F \to p^*p_*p^*p_*F$: следуя вдоль границы диаграммы по часовой стрелке, мы получим морфизм, соответствующий $p_{13}^*\theta$, следуя против часовой стрелки. получим $p^*\eta p_*F \circ h$.

Чтобы доказать(37), рассмотрим коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
 & F \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\eta"] \arrow[ddd, bend right=60, "h"'] & q_{1*}q_1^*F \arrow[d, "\eta"] \arrow[rrdd, "\eta"] & & \\
 & p_{1*}p_1^*F \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\theta"] & q_{1*}q_1^*p_{1*}p_1^*F \arrow[d, "\theta"] \arrow[rrdd, dash] & & \\
 & p_{1*}p_2^*F \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, dash] & q_{1*}q_1^*p_{1*}p_2^*F \arrow[d, dash] \arrow[rrdd, dash] & & q_{1*}p_{13*}p_{13}^*q_1^*F \arrow[d, dash] \\
 & p^*p'_*F \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, "\eta"] \arrow[dddd, bend right=60, "p^*p'_*h"'] & q_{1*}q_1^*p^*p'_*F \arrow[dr, dash] & & q_{1*}p_{13*}p_{12}^*p_1^*F \arrow[d, "\theta"] \\
 & p^*p'_*r_{1*}r_1^*F \arrow[d, "\theta"] \arrow[dr, dash] & p^*p''_*p''^*p'_*F \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & q_{1*}q_2^*p''^*p'_*F \arrow[d, dash] & q_{1*}p_{13*}p_{12}^*p_2^*F \arrow[dd, dash] \\
p_{1*}p_2^*r_{1*}r_2^*F \arrow[r, dash] \arrow[rrdd, dash] & p^*p'_*r_{1*}r_2^* \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash] & p^*p''_*r_{2*}r_1^*F \arrow[r, dash] \arrow[d, "\theta"] & q_{1*}q_2^*r_{2*}r_1^*F \arrow[d, "\theta"] \arrow[dr, dash] & \\
 & & p^*p''_*r_{2*}r_2^*F \arrow[r, dash] & q_{1*}q_2^*r_{2*}r_2^*F \arrow[dr, dash] & q_{1*}p_{13*}p_{23}^*r_1^*F \arrow[d, "\theta"] \\
 & p^*p'_*p'^*p''_*F & p_{1*}p_{12*}p_{23}^*r_2^*F \arrow[rr, dash] & & q_{1*}p_{13*}p_{23}^*r_2^*F.
\end{tikzcd}
$$

Она доказывает равенство двух морфизмов $F \to p^*p_*p^*p_*F$: часть границы диаграммы, пройденная по часовой стрелке, даст морфизм, соответствующий $p_{23}^*\theta \circ p_{12}^*\theta$, часть, пройденная против часовой стрелки, даст $p^*p_*h \circ h$.

Теперь проверим, что из (C1')+(C2') следует (C1). Во-первых, заметим, что композиция $f\colon F \xrightarrow{h} p^*p_*F \xrightarrow{\varepsilon F} F$ равна обратному образу $d^*\theta\colon F = d^*p_1^*F \to d^*p_2^*F = F$. Это следует из коммутативности диаграммы (её верхняя грань коммутативна по определению морфизма θ, соответствующего данному h)

$$
\begin{tikzcd}
d^*p_1^*F \arrow[rrr, "d^*\theta"] \arrow[dr, "d^*p_1^*h"] \arrow[dd, dash] & & & d^*p_2^*F \arrow[dd, dash] \\
 & d^*p_1^*p^*p_*F \arrow[r, dash] \arrow[dd, dash] & d^*p_2^*p^*p_*F \arrow[ur, "d^*p_2^*\varepsilon"'] \arrow[dd, dash] & \\
F \arrow[rrr, crossing over, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & & F \\
 & p^*p_*F \arrow[r, equal] & p^*p_*F. \arrow[ur, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
$$

Так как θ – изоморфизм, f также является изоморфизмом. Далее, из условия коцикла для

θ следует, что $f^2 = f$. Действительно, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& & d^*p_2^*F \arrow[rrr, dash] \arrow[drr, dash] & & & d^*d_1^*p_{23}^*p^*F & \\
& & & & d^*d_1^*p_{13}^*p_2^*F \arrow[ur, dash] & & \\
F \arrow[uurr, dash] & & & d^*p_1^*F \arrow[uul, "\theta"'] \arrow[rrr, dash] \arrow[dd, dash] & & & d^*d_1^*p_{23}^*p_1^*F \arrow[uul, "\theta"'] \arrow[dd, dash] \\
& F \arrow[ul, "f"'] \arrow[urr, dash] \arrow[drr, dash] & & & & & \\
F \arrow[uu, "f"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[ddrr, dash] & & & d^*p_2^*F \arrow[rrr, dash] & & & d^*d_1^*p_{12}^*p_2^*F \\
& & & & d^*d_1^*p_{13}^*p_1^*F \arrow[uuuu, "\theta"] \arrow[dr, dash] & & \\
& & d^*p_1^*F \arrow[uuuuuu, "\theta"] \arrow[uur, "\theta"'] \arrow[urr, dash] \arrow[rrr, dash] & & & d^*d_1^*p_{12}^*p_1^*F. \arrow[uur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

Шестиугольник справа коммутирует в силу условия коцикла, треугольник слева показывает, что $f^2 = f$, прочие грани коммутативны из-за свойств функторов обратного образа. Получаем, что $f = \mathrm{Id}_F$.

Остаётся показать, что из (C1)+(C2) следует (C1'). Напомним, что морфизм θ, отвечающий данному h, строится по сопряжённости как композиция:

$$\theta\colon p_1^*F \xrightarrow{p_1^*h} p_1^*p^*p_*F \xrightarrow{\sim} p_2^*p^*p_*F \xrightarrow{p_2^*\varepsilon} p_2^*F$$

Ниже мы покажем, что отображение

$$\theta'\colon p_2^*F \xrightarrow{p_2^*h} p_2^*p^*p_*F \xrightarrow{\sim} p_1^*p^*p_*F \xrightarrow{p_1^*\varepsilon} p_1^*F$$

обратно к θ. Учитывая симметрию, достаточно показать, что $\theta' \circ \theta = \mathrm{Id}_{p_1^*F}$. В диаграмме

$$\begin{tikzcd}
p_1^*F \arrow[r, "p_1^*h"] \arrow[d, "\theta"] & p_1^*p^*p_*F \arrow[r, "p_1^*\varepsilon"] \arrow[d, dash] & p_1^*F \\
p_2^*F \arrow[r, "p_2^*h"] & p_2^*p^*p_*F &
\end{tikzcd}$$

верхняя строка есть тождественный морфизм, так что нам достаточно проверить коммутативность квадрата. Обозначим изоморфизм $p_1^*p^* \xrightarrow{\sim} p_2^*p^*$ через c. В следующей диаграмме три квадрата коммутативны: два с h и один с η:

$$\begin{tikzcd}
p_1^*F \arrow[d, "p_1^*h"] \arrow[rr, bend left, "\theta"] & & \\
p_1^*p^*p_*F \arrow[r, "c(p_*F)", "\sim"'] \arrow[d, shift right, "p_1^*p^*\eta p_*F"'] \arrow[d, shift left, "p_1^*p^*p_*h"] & p_2^*p^*p_*F \arrow[r, "p_2^*\varepsilon F"] \arrow[d, shift right, "p_2^*p^*\eta p_*F"'] \arrow[d, shift left, "p_2^*p^*p_*h"] & p_2^*F \arrow[d, "p_2^*h"] \\
p_1^*p^*p_*p^*p_*F \arrow[r, "c(p_*p^*p_*F)", "\sim"'] & p_2^*p^*p_*p^*p_*F \arrow[r, "p_2^*\varepsilon p^*p_*F"] & p_2^*p^*p_*F.
\end{tikzcd}$$

Используя упрощённые обозначения, получаем

$$h \circ \theta = h \circ \varepsilon \circ c \circ h = \varepsilon \circ h \circ c \circ h = \varepsilon \circ c \circ h \circ h = \varepsilon \circ c \circ \eta \circ h = \varepsilon \circ \eta \circ c \circ h = c \circ h,$$

что доказывает коммутативность нужного квадрата.

Список литературы

[1] M. Barr, C. Wells, *Toposes, triples and theories*, Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 12, 2005.

[2] M. Bernardara, “A semiorthogonal decomposition for Brauer Severi schemes”, `arXiv: math.AG/0511497.`

[3] A. Bondal, M. Van den Bergh, “Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry”, *Mosc. Math. J.*, **3**:1 (2003), 1-36.

[4] К. С. Браун, *Когомологии групп*, Наука, М., 1987.

[5] P. Deligne, *Theorie de Hodge III*, Publ. Math. IHES., **44** (1974), 5-78.

[6] А. Д. Елагин, “Полуортогональные разложения для производных категорий эквивариантных когерентных пучков”, *Известия РАН, серия математическая*, **73**:5 (2009), 37–66.

[7] А. Д. Елагин, “Об эквивариантной производной категории расслоений на проективные пространства”, *Многомерная алгебраическая геометрия, Сборник статей. Посвящается памяти члена-корреспондента РАН Василия Алексеевича Исковских, Тр. МИАН*, **264** (2009), 63–68.

[8] М. М. Капранов, “О производной категории когерентных пучков на квадрике”, *Функциональный анализ и его приложения,* **20**:2 (1986), 67.

[9] М. М. Капранов, “О производной категории когерентных пучков на многообразиях Грассмана”, *Изв. АН СССР, Сер. матем,* **48**:1 (1984), 192-202.

[10] M. M. Kapranov, “On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces”, *Invent. math.,* **92** (1988), 479-508.

[11] Б. В. Карпов, Д. Ю. Ногин, “Трехблочные исключительные наборы на поверхностях дель Пеццо”, *Изв. РАН, Сер. матем.,* **62**:3 (1998), 3-38.

[12] M. Kashiwara, P. Shapira, *Categories and sheaves*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[13] A. Kuznetsov, “Base change for semiorthogonal decomposition”, preprint `arXiv: math.AG/07111734`.

[14] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Shamps algebriques*, volume 39 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[15] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2004.

[16] D. Mumford, J. Fogarty, *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.

[17] M. Nagata, “Complete reducibility of rational representations of a matrix group”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **87**:1 (1961).

[18] Д. О. Орлов, “Проективные расслоения, моноидальные преобразования и производные категории когерентных пучков”, *Изв. РАН, Сер. матем.,* **56**:4 (1992), 852-862.

[19] D. Orlov, “Triangulated categories of singularities and equivalences between Landau-Ginzburg models”, *Mat. Sb.*, **197**:12 (2006), 117-132 (in Russian), preprint `arXiv:math.AG/0503630`.

[20] У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*, МЦНМО, М., 2006.