Характеристические числа особых многообразий.

А. Ю. Буряк

1 Введение

Данная работа посвящена изучению характеристических чисел особых многообразий, конструкцию которых предложили С. М. Гусейн-Заде и В. Эбелинг в [4].

В разделе 3 мы получим различные формулы для вычисления характеристических чисел.

В разделе 4 мы докажем существование проективного многообразия с любым заданным набором характеристических чисел. Как известно, для гладких многообразий это неверно, так как характеристические числа удовлетворяют различным соотношениям делимости (см. [14]).

В разделе 5 мы покажем, что характеристические числа особых многообразий допускают практически такое же дифференциально-геометрическое определение, как и для гладких многообразий.

В разделе 6 мы покажем, что различные результаты Ботта из [3] могут быть перенесены на особые многообразия. Ботт доказал, что при наличии на гладком компактном комплексном многообразии голоморфного векторного поля, все характеристические числа определяются поведением поля в сколь угодно малой окрестности множества его особых точек. Мы покажем, что этот результат полностью переносится на особые многообразия. Исходя из тех же идей, Ботт получил также соотношения на поведение голоморфного векторного поля в окрестности множества особых точек. Мы получим частичное обобщение также и этих результатов.

В разделе 7 мы вернёмся к работе [4], в которой характеристические числа определялись с помощью локального препятствия Черна набора дифференциальных форм. Мы разберём случай одной формы и получим дифференциально-геометрическую формулу для этого препятствия.

Везде в данной работе под словом многообразие мы понимаем многообразие с особенностями.

Автор благодарит профессора С. М. Гусейн-Заде за постановки задач и плодотворные обсуждения.

2 Определение характеристических чисел особых многообразий

Для определения характеристических чисел особых многообразий нам понадобится следующая конструкция, называемая раздутием Нэша (см. напр. [9]). Пусть X – комплексное аналитическое многообразие размерности n. Преположим сначала, что X вложено в гладкое комплескное многообразие M размерности N. Обозначим через $Gr_n(TM)$ тотальное

пространство расслоения со слоем $Gr_{n,N}$ над многообразием M, ассоциированного с векторным расслоением TM. Тавтологическое расслоение над $Gr_n(TM)$ обозначим через τ_n. Рассмотрим отображение

$$\sigma\colon X_{reg} \to Gr_n(TM), X_{reg} \ni x \mapsto (x, T_x X_{reg}).$$

Раздутие Нэша $\widehat{X}$ есть замыкание $\overline{Im\sigma}$. Положим $\nu_X\colon \widehat{X} \to X$ – ограничение проекции $Gr_n(TM) \to M$ на $\widehat{X}$. Расслоение Нэша $\widehat{T}X$ есть по определению $\tau_n|_{\widehat{X}}$. В общем случае существуют только локальные вложения и раздутие Нэша склеивается из локальных раздутий Нэша.

Пусть X – компактное комплексное аналитическое многообразие размерности n. Для каждого разбиения $I = i_1, \ldots, i_r$ числа n определим I-ое число Черна $c_I[X]$ как целое число, равное

$$c_I[X] = \int\limits_{\widehat{X}} c_{i_1}(\widehat{T}X) \cdots c_{i_r}(\widehat{T}X). \tag{1}$$

Если многообразие X гладко, то $\widehat{X} = X$ и $\widehat{T}X = TX$, и наше определение совпадает с обычным. Совокупность всех характеристических чисел многообразия X образует вектор $\overline{c}[X] = (c_I[X]) \in \mathbb{Z}^{p(n)}$, где $p(n)$ – число разбиений числа n.

3 Вычисление старшего характеристического числа произвольного алгебраического многообразия и всех характеристических чисел гиперповерхности в проективном пространстве.

Пусть X – алгебраическое многообразие и $p \in X$ – некоторая точка. Р. Макфёрсон ([9]) определил локальное эйлерово препятствие $Eu_p(X) \in \mathbb{Z}$ многообразия X в точке p. Обозначим эту функцию через $Eu(X)$. Р. Макфёрсон доказал, что $Eu(X)$ является конструктивной функцией на многообразии X.

Предложение 1 *Пусть X – компактное алгебраическое многообразие размерности n; тогда $c_n[X]$ равно следующему интегралу по эйлеровой характеристике*

$$c_n[X] = \int\limits_X Eu(X) d\chi.$$

Доказательство Для любой конструктивной функции α на многообразии X Р. Макфёрсон ([9]) определил класс $c_*(\alpha) \in H_*(X)$. Непосредственно из его конструкции следует, что

$$c_n[X] = \int\limits_X c_*(Eu(X)),$$

где интеграл в правой части означает степень класса $c_*(Eu(X))$. Л. Эрнстрём ([7]) доказал, что для любой конструктивной функции α на многообразии X

$$\int\limits_X \alpha d\chi = \int\limits_X c_*(\alpha).$$

Предложение следует из этих двух формул. $\square$

Следствие 1 *Пусть C – компактная алгебраическая кривая, тогда*

$$c_1[X] = \chi(X) + \sum_{p \in C_{sing}} (m(p) - 1),$$

где $m(p)$ – кратность точки p.

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться предложением 1 и вспомнить, что $Eu_p(C) = m(p)$ ([9]). $\square$

Мы будем использовать следующее видоизменение раздутия Нэша для проективных многообразий. Обозначим через $\mathbb{F}_{i_1,\ldots,i_s}$ многообразие, состоящее из флагов векторных подпространств $(V^{i_1}, \ldots, V^{i_{s-1}})$, причём $V^{i_1} \subset \cdots \subset V^{i_{s-1}} \subset \mathbb{C}^{i_s}$ и $dimV^{i_k} = i_k$. Пусть D_{i_k} – тавтологическое расслоение над $\mathbb{F}_{i_1,\ldots,i_s}$. Пусть $p \in \mathbb{CP}^N$ – некоторая точка и пусть $V \subset T_p\mathbb{CP}^N$ некоторое n-мерное подпространство. Обозначим через $g(V)$ единственное n-мерное проективное подпространство $\mathbb{CP}^N$, такое, что $p \in g(V)$ и $T_p(g(V)) = V$. Пусть $G \subset \mathbb{CP}^N$ – некоторое n-мерное проективное подпространство. Обозначим через $k(G)$ ассоциированное $(n+1)$-мерное векторное подпространство в $\mathbb{C}^{N+1}$. Пусть $X \subset \mathbb{CP}^N$ – некоторое n-мерное подмногообразие. Рассмотрим отображение

$$\sigma\colon X_{reg} \to \mathbb{F}_{1,n+1,N+1}, X_{reg} \ni p \mapsto (k(p), k(g(T_pX_{reg}))) \in \mathbb{F}_{1,n+1,N+1}.$$

Легко видеть, что замыкание $\overline{\sigma(X_{reg})}$ есть раздутие Нэша многообразия X. Расслоение Нэша $\widehat{T}X$ в этом случае изоморфно $Hom(D_1, D_{n+1}/D_1)|_{\widehat{X}}$.

Пусть теперь $X \subset \mathbb{CP}^{n+1}$ – гиперповерхность.

Предложение 2 *Пусть $I = i_1, \dots, i_k$ – разбиение числа n. Тогда*

$$c_I[X] = \sum_{q=0}^{n} a_q r_q(X),$$

где

$$a_q = \sum_{\substack{0 \le j_l \le i_l \\ \sum\limits_{l=1}^{k} j_l = q}} \prod_{l=1}^{k} \binom{n+1-i_l+j_l}{j_l},$$

$$r_q(X) = c_{n-q}[X^{n-q}] - 2c_{n-q-1}[X^{n-q-1}] + c_{n-q-2}[X^{n-q-2}],$$

где через X^i мы обозначили сечение X плоскостью общего положения размерности $i+1$.

Доказательство. Пусть $\widehat{X} \subset \mathbb{F}_{1,n+1,n+2}$ – раздутие Нэша. Имеем равенство

$$D_1 \oplus (D_{n+1}/D_1) \oplus (D_{n+2}/D_{n+1}) = D_{n+2}.$$

Пусть $q = c_1(D_{n+2}/D_{n+1})$ и $h = c_1(D_1^*)$. Мы получаем

$$c(D_1^* \otimes (D_{n+1}/D_1)) = \frac{(1+h)^{n+2}}{1+q+h}.$$

Легко доказать, что из этой формулы следует равенство

$$c_p(D_1^* \otimes (D_{n+1}/D_1)) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^{p-j} \binom{n+1-p+j}{j} h^j q^{p-j}.$$

Отсюда следует, что

$$c_I[X] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} a_j \int\limits_{\widehat{X}} h^j q^{n-j}.$$

Число $\int\limits_{\widehat{X}} h^j q^{n-j}$ называется j-ым рангом многообразия X, и, как доказал Эрнстрём в [8], он равен

$$(-1)^{n-j} \left(\int\limits_{X^{n-i}} Eu(X^{n-i}) - 2 \int\limits_{X^{n-i-1}} Eu(X^{n-i-1}) + \int\limits_{X^{n-i-2}} Eu(X^{n-i-2}) \right),$$

что и завершает доказательство предложения. $\square$

В качестве следствия получим формулу, связывающую характеристические числа гиперповерхности с изолированными особыми точками, с характеристическими числами её сглаживания. Пусть $X \subset \mathbb{CP}^{n+1}$ – гиперповерхность степени d с изолированными особыми точками. Пусть $f_{I,d}$ – I-ое характеристическое число гладкой гиперповерхности степени d.

Следствие 2

$$c_I[X] = f_{I,d} + \sum_{p \in X_{sing}} (Eu_p(X) + (-1)^{n+1}\mu(p) - 1),$$

где $\mu(p)$ – число Милнора точки p (см. [12]).

Доказательство. Из предложения 2 следует, что $c_I[X] = c_n[X] + \sum_{j=0}^{n-1} b_j c_j[X^j]$, где целочисленные коэффициенты b_j зависят только от разбиения I. Из изолированности особых точек многообразия X следует, что для любой гладкой гиперповерхности Y степени d выполняется $c_j[Y^j] = c_j[X^j]$ для $0 \leq j \leq n-1$. Значит $c_I[X] - c_I[\widetilde{X}] = c_n[X] - c_n[\widetilde{X}]$, где $\widetilde{X}$ – сглаживание X, получаемое малым возмущением уравнения, задающего X. Для завершения доказательства остаётся применить предложение 1. $\square$

4 Существование проективного многообразия с любым заданным набором характеристических чисел

Теорема 1 *Для любого вектора $\overline{v} \in \mathbb{Z}^{p(n)}$ существует проективное многообразие X размерности n, такое, что $\overline{c}[X] = \overline{v}$.*

Доказательство. Определим некоторые линейные комбинации характеристических чисел (см. [11]). Назовём два монома от переменных $t_1, \ldots, t_k$ эквивалентными, если некоторой перестановкой переменных $t_1, \ldots, t_k$ один из них преобразуется в другой. Обозначим через $\sum t_1^{i_1} \ldots t_r^{i_r}$ сумму всех мономов от переменных $t_1, \cdots, t_k$, эквивалентных моному $t_1^{i_1} \cdots t_r^{i_r}$. Теперь для любого разбиения $I = i_1, \ldots, i_r$ числа n определим полином s_I от n переменных следующим образом. Выберем $k \geq n$, тогда элементарные симметрические функции $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ от переменных $t_1, \ldots, t_k$ алгебраически независимы, и положим s_I равным

однозначно определённому полиному от n переменных $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, для которого

$$s_I(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sum t_1^{i_1} \cdots t_r^{i_r}.$$

Как легко проверить, этот полином не зависит от k. Пусть ω – комплексное векторное расслоение над топологическим пространством Y. Для любого целого числа $n \geq 0$ и любого разбиения I числа n класс когомологий $s_I(c_1(\omega), \ldots, c_n(\omega)) \in H^{2n}(Y)$ будем кратко обозначать символом $s_I(\omega)$. Пусть X – компактное комплексное аналитическое многообразие размерности n. Для разбиения I числа n положим

$$s_I[X] = \int\limits_{\widehat{X}} s_I(\widehat{T}X).$$

Обозначим через $\overline{s}[X]$ вектор $(s_I[X]) \in \mathbb{Z}^{p(n)}$. Мы имеем следующую связь между векторами $\overline{c}[X]$ и $\overline{s}[X]$ (см. [11]). Существует целочисленная $p(n) \times p(n)$ матрица A с $det(A) = \pm 1$, такая, что для любого компактного комплексного аналитического многообразия X выполняется $\overline{c}[X] = A\overline{s}[X]$. Отсюда мы видим, что нам достаточно доказать, что для любого вектора $\overline{v} \in \mathbb{Z}^{p(n)}$ существует проективное многообразие X, такое, что $\overline{s}[X] = \overline{v}$.

Пусть ω и ω' – два комплексных векторных расслоения. Тогда верно равенство (см. [11])

$$s_I(\omega \oplus \omega') = \sum_{JK=I} s_J(\omega) s_K(\omega'), \tag{2}$$

где суммирование ведётся по всем разбиениям J и K, объединение JK которых равна I.

Пусть X_1 и X_2 – два компактных комплексных аналитических многообразия. Ясно, что $\widehat{X_1} \times \widehat{X_2}$ является раздутием Нэша многообразия $X_1 \times X_2$ и $\nu_{X_1 \times X_2} = \nu_{X_1} \times \nu_{X_2}$. Рассмотрим проекции $p_{1,2} \colon \widehat{X_1} \times \widehat{X_2} \to \widehat{X_{1,2}}$. Имеем равенство $\widehat{T}(X_1 \times X_2) = p_1^* \widehat{T} X_1 \oplus p_2^* \widehat{T} X_2$. Пусть n_1 и n_2 – размерности многообразий X_1 и X_2. Пусть I – разбиение числа $n_1 + n_2$. Из (2) следует, что

$$s_I[X_1 \times X_2] = \sum_{\substack{JK=I \\ |J|=n_1 \\ |K|=n_2}} s_J[X_1] s_K[X_2]. \tag{3}$$

Следующая лемма является основной для построения требуемого в теореме многообразия.

Лемма 1 *Для любого $i \geq 1$ существуют проективные многообразия K_+^i и K_-^i размерности i, такие, что $s_i[K_\pm^i] = \pm 1$.*

Докажем лемму 1 позже. Завершим доказательство теоремы, используя лемму 1. Пусть $J = j_1, \ldots, j_q$ – разбиение числа n. Положим

$$K_+^J = K_+^{j_1} \times \cdots \times K_+^{j_q},$$
$$K_-^J = K_-^{j_1} \times K_+^{j_2} \times \cdots \times K_+^{j_q}.$$

Из формулы (3) следует, что

$$s_I[K_\pm^J] = \sum_{\substack{I_1 \cdots I_q = I \\ |I_l| = j_l}} s_{I_1}[K_\pm^{j_1}] \cdots s_{I_q}[K_+^{j_q}]. \tag{4}$$

Измельчением разбиения J мы называем всякое разбиение, которое можно записать как объединение $J_1 J_2 \ldots J_q$, где каждое J_l является разбиением числа j_l. Рассмотрим на разбиениях лексикографический порядок. Из формулы (4) мы видим, что число $s_I[K_\pm^J]$ равно нулю, если разбиение I не является измельчением разбиения J, значит $s_I[K_\pm^J] = 0$, если $I > J$. Также мы имеем $s_I[K_\pm^I] = \pm 1$. Теперь уже ясно, что вектора $\overline{s}[K_\pm^J]$ порождают всю решётку $\mathbb{Z}^{p(n)}$ как полугруппу, что и завершает доказательство теоремы.

Доказательство леммы 1. Хорошо известно, что для любого гладкого компактного алгебраического многообразия W размерности n существует гладкое компактное алгебраическое многообразие V размерности n, такое что для любого разбиения I числа n выполняется равенство $c_I[V] = -c_I[W]$ (см. напр. [13]). Обозначим многообразие V через $-W$. Мы имеем следующее равенство (см. напр. [11])

$$s_n[\mathbb{CP}^n] = n + 1. \tag{5}$$

Отсюда следует, что существование многообразия K_-^n следует из существования многообразия K_+^n, так как $s_n[(-\mathbb{CP}^n) + nK_+^n] = -1$. Также мы видим, что для каждого $n \geq 1$ достаточно построить проективное многообразие $\widetilde{K}_+^n$ размерности n, такое, что $s_n[\widetilde{K}_+^n] \equiv 1 \mod n+1$.

Пусть $n = 1$. Пусть $\widetilde{K}_+^1$ – замыкание в $\mathbb{CP}^2$ полукубичекой параболы $\{x^2 - y^3 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$. Используя следствие 1, мы получаем, что $s_1[\widetilde{K}_+^1] = c_1[\widetilde{K}_+^1] = 3 \equiv 1 \mod 2$.

Пусть теперь $n \geq 2$. Пусть $X \subset \mathbb{CP}^{N-1}$ – гладкое подмногообразие размерности $n-1$. Пусть $CX \subset \mathbb{CP}^N$ – конус над X. Пусть $h \in H^2(\mathbb{CP}^{N-1})$ – класс гиперплоскости.

Лемма 2 *Предположим, что $h|_X \in H^2(X)$ делится на d, тогда*

$$s_n[CX] \equiv n s_{n-1}[X] \mod d.$$

Доказательство. Пусть $\widehat{X} \subset \mathbb{F}_{1,n,N}$ и $\widehat{CX} \subset \mathbb{F}_{1,n+1,N+1}$ – раздутия Нэша. Рассмотрим следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{F}_{1,2,n+1,N+1} & \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{F}_{1,n+1,N+1} \\ & \Big\downarrow \pi_1 & \\ \mathbb{F}_{1,n,N} \xrightarrow{i} & \mathbb{F}_{2,n+1,N+1} & \end{array} \tag{6}$$

где π_1, π_2 – естественные проекции и отображение i определено формулой

$$i\colon (V^1, V^n) \mapsto (V^1 \oplus k(O), V^n \oplus k(O)),$$

где $O \in \mathbb{CP}^N$ – вершина конуса CX. Ясно, что отображение i является вложением. Пусть $Y = \pi_1^{-1}(i(\widehat{X}))$.

Лемма 3 *Образом многообразия Y под действием отображения π_2 является многообразие $\widehat{CX}$. Отображение $\pi_2\colon Y \to \widehat{CX}$ является бирациональным.*

Доказательство. Обозначим через $\overline{pq}$ прямую, проходящую через две различные точки $p, q \in \mathbb{CP}^N$. Из определения многообразия Y следует, что

$$\begin{aligned} Y = \{ (L, k(q) \oplus k(O), k(g(T_qX)) \oplus k(O)) \in \mathbb{F}_{1,2,n+1,N+1} | \\ q \in X, L \subset k(q) \oplus k(O)\} = \\ = \{ (k(p), k(q) \oplus k(O), k(g(T_qX)) \oplus k(O)) \in \mathbb{F}_{1,2,n+1,N+1} | \\ q \in X, p \in CX, p \in \overline{qO}\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что если $p \neq O$, то точка q однозначно определяется точкой p. Обозначим это подмножество Y через Y'.

Ясно, что для любой точки $p \in CX \backslash O$ выполняется

$$k(g(T_pCX)) = k(g(T_{\overline{pO} \cap X}X)) \oplus k(O).$$

Отсюда мы видим, что для любой пары $(V^1, V^{n+1}) \in \widehat{CX} \subset \mathbb{F}_{1,n+1,N+1}$ существуют точки $p \in CX$ и $q \in X$, такие, что $p \in \overline{qO}$ и

$$V^1 = k(p), V^{n+1} = k(g(T_qX)) \oplus k(O). \tag{8}$$

Заметим, что точка q неоднозначно определяется парой (V^1, V^{n+1}).

Отображение π_2 забывает второй элемент тройки из (7) и очевидно, что получается пара (V^1, V^{n+1}) из (8). Таким образом мы доказали первую часть леммы.

Пусть $\widehat{CX}_0 = \nu_{CX}^{-1}(CX \backslash O)$. Заметим, что если $(V^1, V^{n+1}) \in \widehat{CX}_0$, то точка q из (8) однозначно определяется равенством $q = \overline{pO} \cap X$. Значит, отображение π_2 изоморфно отображает Y' на $\widehat{CX}_0$. Таким образом доказана вторая часть леммы. $\square$

На диаграмме (6) обозначим через $\widetilde{D}_i$ тавтологические расслоения над $\mathbb{F}_{2,n+1,N+1}$, $\mathbb{F}_{1,2,n+1,N+1}$, $\mathbb{F}_{1,n+1,N+1}$ и обозначим через D_i тавтологические расслоения над $\mathbb{F}_{1,n,N}$. Имеем равенства

$$s_n[CX] = \int\limits_{\widehat{CX}} s_n(\widehat{T}(CX)) = \int\limits_{\widehat{CX}} s_n(\widetilde{D}_1^* \otimes (\widetilde{D}_{n+1}/\widetilde{D}_1)) \overset{\text{лемма 3}}{=}$$

$$= \int\limits_{Y} s_n(\widetilde{D}_1^* \otimes (\widetilde{D}_{n+1}/\widetilde{D}_1)).$$

Отображение $\pi_1 \colon \mathbb{F}_{1,2,n+1,N+1} \to \mathbb{F}_{2,n+1,N+1}$ является проективизацией расслоения $\widetilde{D}_2$ над $\mathbb{F}_{2,n+1,N+1}$. Мы имеем изоморфизмы $i^*\widetilde{D}_2 \cong D_1 \oplus \mathbb{C}$ и $i^*\widetilde{D}_{n+1} \cong D_n \oplus \mathbb{C}$. Значит многообразие Y является тотальным пространством проективизации расслоения $D_1 \oplus \mathbb{C}$ над $\widehat{X}$. Пусть τ – тавтологическое расслоение над этой проективизацией. Ясно, что $\tau = \widetilde{D}_1\Big|_Y$.

$$\begin{tikzcd}
\tau \arrow[d] & \\
\mathbb{P}(D_1 \oplus \mathbb{C}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi_1"] & Y \\
\widehat{X} &
\end{tikzcd}$$

Следовательно

$$\int\limits_{Y} s_n(\widetilde{D}_1^* \otimes (\widetilde{D}_{n+1}/\widetilde{D}_1)) = \int\limits_{\mathbb{P}(D_1 \oplus \mathbb{C})} s_n(\tau^* \otimes ((D_n \oplus \mathbb{C})/\tau)).$$

Мы имеем цепочку равенств

$$s_n(\tau^* \otimes ((D_n \oplus \mathbb{C})/\tau)) = s_n(\tau^* \otimes ((D_n/D_1) \oplus D_1 \oplus \mathbb{C})) =$$
$$= s_n(\tau^* \otimes (D_n/D_1)) + s_n(\tau^* \otimes D_1) + s_n(\tau^*) =$$
$$= s_n(\tau^* \otimes D_1 \otimes (D_1^* \otimes (D_n/D_1))) + s_n(\tau^* \otimes D_1) + s_n(\tau^*) =$$
$$= s_n(\tau^* \otimes D_1 \otimes \widehat{T}X) + s_n(\tau^* \otimes D_1) + s_n(\tau^*).$$

Пусть $c_1(\tau^*) = u \in H^2(\mathbb{P}(D_1 \oplus \mathbb{C}))$. Мы имеем равенство $u^2 = uh$. Из предположения леммы следует, что для любого $k \geq 2$ элемент $u^k \in H^2(\mathbb{P}(D_1 \oplus \mathbb{C}))$ делится на d. Значит

$$\int\limits_{\mathbb{P}(D_1 \oplus \mathbb{C})} s_n(\tau^* \otimes D_1) = \int\limits_{\mathbb{P}(D_1 \oplus \mathbb{C})} (u-h)^n \equiv 0 \mod d,$$
$$\int\limits_{\mathbb{P}(D_1 \oplus \mathbb{C})} s_n(\tau^*) = \int\limits_{\mathbb{P}(D_1 \oplus \mathbb{C})} u^n \equiv 0 \mod d.$$

Пусть $x_1, \ldots, x_{n-1}$ – корни Черна расслоения $\widehat{T}X$. Тогда $x_1 + u - h, \ldots, x_{n-1} + u - h$ – корни Черна расслоения $\tau^* \otimes D_1 \otimes \widehat{T}X$. Мы получаем

$$\int\limits_{\mathbb{P}(D_1 \oplus \mathbb{C})} s_n(\tau^* \otimes D_1 \otimes \widehat{T}X) = \int\limits_{\mathbb{P}(D_1 \oplus \mathbb{C})} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + u - h)^n \equiv$$
$$\equiv \int\limits_{\mathbb{P}(D_1 \oplus \mathbb{C})} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + u)^n \equiv \int\limits_{\mathbb{P}(D_1 \oplus \mathbb{C})} \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^n + nu \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{n-1} \right) \mod d.$$

Класс $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^n \in H^{2n}(\widehat{X})$ равен нулю, потому что $dim_{\mathbb{R}} \widehat{X} = 2n-2$. Значит

$$\int\limits_{\mathbb{P}(D_1 \oplus \mathbb{C})} \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^n + nu \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{n-1} \right) = \int\limits_{\mathbb{P}(D_1 \oplus \mathbb{C})} nus_{n-1}(\widehat{T}X) =$$
$$= n \int\limits_{\widehat{X}} (\pi_{1*}u) s_{n-1}(\widehat{T}X) = n \int\limits_{\widehat{X}} s_{n-1}(\widehat{T}X) = ns_{n-1}[X].$$

Лемма доказана. □

Пусть $X = \mathbb{CP}^{n-1} \subset \mathbb{CP}^{\binom{2n}{n-1}-1}$ – вложение Веронезе стеепени $n+1$. Пусть $\widetilde{K}_+^n = CX$. Из (5) и леммы 2 следует, что $s_n[\widetilde{K}_+^n] \equiv n^2 \equiv 1 \mod n+1$. Лемма 1 доказана. □

□

5 Дифференциально-геометрическое определение характеристических чисел

Пусть M – гладкое комплексное многообразие и $X \subset M$ – компактное комплексное аналитическое подмногообразие размерности n. Наделим многообразие M гладкой эрмитовой метрикой. Эта метрика порождает эрмитову метрику в расслоении TX_{reg}. Пусть ∇ – каноническая связность, порождённая этой метрикой в расслоении TX_{reg}. Пусть K_∇ – кривизна связности ∇. Пусть Θ – матрица кривизны K_∇ в некотором локальном базисе. Зададим дифференциальные формы $\widetilde{c}_r \in \Omega^{2r}(X_{reg})$ равенством

$$\widetilde{c}_r = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^r \sigma_r(\Theta),$$

где $\sigma_r(\Theta)$ – элементарная симметрическая функция от собственных значений матрицы Θ. Для разбиения $I = i_1 \dots i_k$ числа n пусть

$$\widetilde{c}_I = \widetilde{c}_{i_1}\widetilde{c}_{i_2}\dots\widetilde{c}_{i_k} \in \Omega^{2n}(X_{reg}).$$

Предложение 3

$$c_I[X] = \int\limits_{X_{reg}} \widetilde{c}_I.$$

Доказательство. Пусть $\widehat{X} \subset Gr_n(TM)$ – раздутие Нэша многообразия X. Пусть $p\colon \widetilde{X} \to \widehat{X}$ – разрешение особенностей многообразия $\widehat{X}$. Имеем равенство

$$c_I[X] = \int\limits_{\widehat{X}} c_I(\tau_n) = \int\limits_{\widetilde{X}} c_I(p^*\tau_n).$$

Эрмитова метрика на многообразии M порождает эрмитову метрику в расслоении τ_n над многообразием $Gr_n(TM)$, значит мы получаем эрмитову метрику в расслоении $p^*\tau_n$. Точно также как и выше строим по этой метрике дифференциальные формы $\widetilde{c}'_r \in \Omega^{2r}(\widetilde{X})$. Многообразие $\widetilde{X}$ гладко, поэтому

$$\int\limits_{\widetilde{X}} c_I(p^*\tau_n) = \int\limits_{\widetilde{X}} \widetilde{c}'_I.$$

Имеем очевидное равенство эрмитовых векторных расслоений

$$p^*\tau_n|_{(\nu_X\circ p)^{-1}(X_{reg})} = (\nu_X\circ p)^*TX_{reg}.$$

Значит

$$\widetilde{c}'_r|_{(\nu_X\circ p)^{-1}(X_{reg})} = (\nu_X\circ p)^*\widetilde{c}_r.$$

Следовательно

$$\int\limits_{\widetilde{X}} \widetilde{c}'_I = \int\limits_{(\nu_X\circ p)^{-1}(X_{reg})} \widetilde{c}'_I = \int\limits_{X_{reg}} \widetilde{c}_I,$$

что и требовалось доказать. $\square$

6 Формула Ботта для вычисления характеристических чисел

Пусть M – гладкое комплексное многоообразие и $X \subset M$ – комплексное аналитическое подмногообразие размерности n. Пусть $Z \subset X$ – некоторое компактное аналитическое подмножество X, причём $X_{sing} \subset Z$. Пусть V – голоморфное векторное поле, определённое на множестве $X\backslash Z$, и нигде там не равное 0. Имеем разложение

$$T_{\mathbb{C}}M = T'_{\mathbb{C}}M \oplus T''_{\mathbb{C}}M.$$

Пусть $U = X\backslash Z$. Рассмотрим произвольную эрмитову метрику в расслоении $T'_{\mathbb{C}}M$. Её ограничение определяет эрмитову метрику в расслоении $T'_{\mathbb{C}}U$. Пусть ∇ – каноническая связность в раслоении $T'_{\mathbb{C}}U$. Определим сечение $L \in \Gamma(End(T'_{\mathbb{C}}U))$ следующей формулой

$$Ls = [V, s] - \nabla_V s,$$

где $s \in \Gamma(T'_{\mathbb{C}}U)$. Рассмотрим на U произвольную дифференциальную форму π типа $(1,0)$, такую, что $\pi(V) = 1$. Пусть K – кривизна связности ∇. Пусть $\phi(c_1, \ldots, c_n)$ – однородный полином веса n от переменных $c_1, \ldots, c_n$, если переменной c_i приписать вес i. Пусть A – $n \times n$ матрица. Обозначим выражение $\phi(\sigma_1(A), \ldots, \sigma_n(A))$ через $\phi(A)$. Рассмотрим следующий степенной ряд η от переменной t с коэффициентами, являющимися дифференциальными формами

$$\eta = \frac{\phi(L + tK)\pi}{1 - t\overline{\partial}\pi}.$$

Обозначим через $\eta^{(k)}$ коэффициент при t^k в ряде η. Пусть $Z_\varepsilon \subset X$ – ε-окрестность множества Z. Аналогично гладкой ситуации, разобранной в [2], определим вычет $Res_\phi(Z)$ следующей формулой

$$Res_\phi(Z) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial Z_\varepsilon} \eta^{(n-1)}.$$

В [2] доказывается, что

$$\phi(K) + d\eta^{(n-1)} = 0. \tag{9}$$

Значит, мы имеем равенство

$$\int\limits_{Z_\delta} \phi(K) + \int\limits_{\partial Z_\delta} \eta^{(n-1)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial Z_\varepsilon} \eta^{(n-1)},$$

которое доказывает, что предел в определении вычета существует. Также легко показать, что значение вычета не зависит от выбора метрики на M, формы π и вложения многообразия X в M. Предположим теперь, что многообразие X компактно. Пусть $\phi[X] = \int\limits_{\widehat{X}} \phi(c(\widehat{T}X))$. Из предложения 3 и равенства (9) следует, что

Предложение 4

$$\phi[X] = Res_\phi(Z).$$

Приведём пример вычисления вычетов. Пусть $X \subset \mathbb{CP}^N$ – гладкое комплексное подмногообразие. Пусть $CX \subset \mathbb{C}^{N+1}$ – конус над ним. Рассмотрим в $\mathbb{C}^{N+1}$ векторное поле $V = z^i \frac{\partial}{\partial z^i}$. Оно очевидно касается конуса CX. Пусть $\overline{CX}$ – замыкание конуса в $\mathbb{CP}^{N+1}$. Из доказательства леммы 2 мы знаем как вычислять характеристические числа $\overline{CX}$. С другой стороны поле V продолжается до голоморфного векторного поля на $\overline{CX}\backslash 0$, имеющего ноль первого порядка на дивизоре $\overline{CX}\backslash CX$. Вычеты поля вдоль этого дивизора можно посчитать с помощью формулы из [1]. Таким способом мы можем вычислить вычеты V в вершине конуса. Приведём ответы для небольших размерностей X. Пусть d – степень X. Через H

обозначим гиперплоскость общего положения относительно X в $\mathbb{CP}^N$.

$$\begin{aligned}
&dimX = 1,\\
&Res_{c_2}(O) = c_1[X] - d,\\
&Res_{c_1^2}(O) = 4c_1[X] - 4d,\\
&dimX = 2,\\
&Res_{c_3}(O) = c_2[X] - c_1[X \cap H],\\
&Res_{c_1c_2}(O) = 3c_2[X] + 2c_1^2[X] - 9c_1[X \cap H],\\
&Res_{c_1^3}(O) = 9c_1^2[X] - 27c_1[X \cap H].
\end{aligned}$$

Если X является гиперповерхностью, то результат следующий

$$\begin{aligned}
&dimX = 1,\\
&Res_{c_2}(O) = 2d - d^2,\\
&Res_{c_1^2}(O) = 8d - 4d^2,\\
&dimX = 2,\\
&Res_{c_3}(O) = d^3 - 3d^2 + 3d,\\
&Res_{c_1c_2}(O) = 5d^3 - 19d^2 + 23d,\\
&Res_{c_1^3}(O) = 9d^3 - 45d^2 + 63d.
\end{aligned}$$

Определим теперь другой вычет голоморфного векторного поля. Пусть M – гладкое комплексное многообразие и $X \subset M$ – комплексное аналитическое подмногообразие размерности n. Пусть V – голоморфное векторное поле на X_{reg}. Мы будем говорить, что поле V является голоморфным на всём X, если для любой точки $p \in X_{sing}$ существует такое открытое в M множество $U \ni p$ и голоморфное векторное поле W на U, что W касается $X_{reg} \cap U$ и $W|_{X_{reg} \cap U} = V$. Мы будем говорить, что поле V не равно нулю в точке $p \in X_{sing}$, если соответствующее поле W не обращается в ноль в этой точке.

Пусть теперь $Z \subset X$ – компактное комплексное аналитическое подмножество и V – голоморфное векторное поле на $X \backslash Z$ и всюду там не равное 0. Пусть $(\cdot, \cdot)$ – произвольная эрмитова форма в расслоении $T'_{\mathbb{C}}M$, такая, что для любой точки $p \in X \backslash Z$ выполняется $(V_p, V_p) \neq 0$. Определим на множестве $(X \backslash Z)_{reg}$ дифференциальную $(1,0)$-форму π следующим равенством

$$\pi(W) = \frac{(W, V)}{(V, V)}, \tag{10}$$

для любого $W \in \Gamma(T'_{\mathbb{C}}(X \backslash Z)_{reg})$. Для любой точки $p \in X \backslash Z$ существуют такая открытая в M окрестность U и гладкая $(1,0)$-форма π_U в U,

что $\pi|_{U\cap(X\setminus Z)_{reg}} = \pi_U|_{U\cap(X\setminus Z)_{reg}}$, поэтому форму $\pi(\overline{\partial}\pi)^{n-1}$ можно интегрировать по любому циклу в $X\setminus Z$. Легко понять, что $i_V\overline{\partial}\pi = 0$, поэтому $i_V(\overline{\partial}\pi)^n = 0$ и следовательно $(\overline{\partial}\pi)^n = 0$, то есть интегралы формы $\pi(\overline{\partial}\pi)^{n-1}$ по гомологичным циклам равны. Пусть $Z_\varepsilon \subset X$ – ε-окрестность множества Z. Дадим следующее определение.

$$Res_1(Z) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\partial Z_\varepsilon} \pi(\overline{\partial}\pi)^{n-1}, \tag{11}$$

Этот вычет также не зависит ни от выбора эрмитовой формы, ни от вложения многообразия X в M. Если X компактно, то мы с очевидностью получаем

Предложение 5

$$Res_1(Z) = 0.$$

Вычислим этот вычет в следующей ситуации. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^N$ векторное поле $V = \sum_{i=1}^N \lambda_i z^i \frac{\partial}{\partial z^i}$, где $\lambda_i \neq 0$. Рассмотрим росток особенности $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$, такой, что поле V его касается. Пусть $dimX = n$. Пусть $A \subset \{1, \ldots, N\}$ – некоторое подмножество мощности n. Через Π_A обозначим соответствующее координатное подпространство. Предположим, что проекция $p_A\colon (X, 0) \to (\Pi_A, 0)$ есть разветвленное накрытие степени d_A.

Предложение 6

$$Res_1(0) = \frac{d_A}{\prod\limits_{i\in A} \lambda_i}.$$

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^N$ эрмитову форму $\sum\limits_{i\in A} dz^i d\overline{z}^i$. Определим с помощью неё форму π и мы имеем по определению

$$Res_1(0) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int\limits_{S_\varepsilon^{2N-1}\cap X} \pi(\overline{\partial}\pi)^{n-1}.$$

На подпростанстве Π_A рассмотрим векторное поле $\sum_{i\in A} \lambda_i z^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ и эрмитову форму $\sum_{i\in A} dz^i d\overline{z}^i$ и определим соответствующую форму π_A на Π_A.

Очевидно, что $p_A^*\pi_A = \pi$, поэтому

$$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int\limits_{S_\varepsilon^{2N-1}\cap X} \pi(\overline{\partial}\pi)^{n-1} = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int\limits_{p_{A*}(S_\varepsilon^{2N-1}\cap X)} \pi_A(\overline{\partial}\pi_A)^{n-1} =$$
$$= d_A \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int\limits_{S_\varepsilon^{2n-1}} \pi_A(\overline{\partial}\pi_A)^{n-1}.$$

Последний интеграл вычислен в [3] и равен $\frac{1}{\prod\limits_{i\in A}\lambda_i}$, на чём и завершается доказательство предложения. $\square$

7 Дифференциально-геометрическая формула для локального препятствия Черна 1-формы на особом многообразии

Пусть $(X,0) \subset (U,0)$ – комплексное аналитическое подмногообразие размерности n в окрестности U в $\mathbb{C}^N$ и пусть $\omega \in \Omega^1(U)$ – гладкая 1-форма. Предположим, что форма ω имеет изолированную специальную точку на X в 0 (см. [4]), то есть для любой последовательности точек $x_n \in X_{reg}$, сходящейся к некоторой точке $x \in X\backslash 0$ и такой, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} T_{x_n}X_{reg} = T$, выполняется $\omega|_T \neq 0$. Пусть $\widehat{X} \subset U \times Gr_{n,N}$ – раздутие Нэша. Пусть D_n – тавтологическое расслоение над грассманианом $Gr_{n,N}$. Обратный образ D_n над $U \times Gr_{n,N}$ будем также обозначать через D_n. Форма ω определяет сечение $\widehat{\omega}$ расслоения D_n^*, причём всюду ненулевое над множеством $\nu_X^{-1}(X\backslash 0)$.

Определение (см.[4]): Локальное препятствие Черна $Ch_{X,0}\omega$ 1-формы ω на X в 0 есть первое препятствия к продолжению ненулевого сечения $\widehat{\omega}$ с $\nu_X^{-1}(S_\varepsilon^{2N-1}\cap X)$ на $\nu_X^{-1}(B_\varepsilon^{2N-1}\cap X)$.

Рассмотрим произвольную эрмитову метрику и связность в TU. Метрика определяет проектор $TU|_{X_{reg}} \to TX_{reg}$. С помощью этого проектора мы наделяем расслоение TX_{reg} связностью ∇^1. Мы имеем соответствующую связность ∇^{1*} в двойственном расслоении T^*X_{reg}. С помощью конструкции Чженя-Вейля, то есть беря симметрические функции от матрицы кривизны этой связности мы получаем формы $c_i(\nabla^{1*}) \in \Omega^{2i}(X_{reg})$. Пусть $V_\omega \in \Gamma(TX_{reg})$ – векторное поле, двойственное форме $\omega|_{X_{reg}}$ относительно метрики, то есть для любого векторного поля V на X_{reg} выполняется равенство $(V, V_\omega) = \omega(V)$. Определим $A \in \Gamma(\Omega^1((X\backslash 0)_{reg}) \otimes$

$End(T^*(X\backslash 0)_{reg}))$ следующей формулой

$$As = \frac{1}{\|V_\omega\|^2} s(V_\omega)\nabla^{1*}(\omega|_{(X\backslash 0)_{reg}}), \tag{12}$$

где $s \in \Gamma(T^*(X\backslash 0)_{reg})$. Рассмотрим связность ∇^{2*} в расслоении T^*X_{reg}, определённую равенством

$$\nabla^{2*} = \nabla^{1*} - A. \tag{13}$$

По двум связностям ∇^{1*}, ∇^{2*} в расслоении T^*X_{reg} построим так называемую "различающую форму Ботта"$c_n(\nabla^{1*}, \nabla^{2*}) \in \Omega^{2n-1}(X_{reg})$ (см. напр. [10]).

Предложение 7

$$Ch_{X,0}\omega = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_\varepsilon^{2N-1}\cap X} c_n(\nabla^{1*}, \nabla^{2*}).$$

Доказательство. Обратный образ расслоения TU над $U \times Gr_{n,N}$ мы также обозначаем через TU. Имеем вложение $D_n \subset TU$. Расслоение TU обладает метрикой, значит мы имеем проектор $TU \to D_n$. С помощью связности в TU наделим расслоение D_n связностью $\widehat{\nabla}^1$. Мы имеем изоморфизм расслоений $\widehat{T}\Big|_{\nu_X^{-1}(X_{reg})} = \nu_X^* TX_{reg}$. Ясно, что

$$\widehat{\nabla}^1\Big|_{\nu_X^{-1}(X_{reg})} = \nu_X^*\nabla^1. \tag{14}$$

Пусть $V_{\widehat{\omega}}$ – сечение расслоения D_n, двойственное форме $\widehat{\omega}$ относительно метрики в D_n. Ясно, что $V_{\widehat{\omega}}|_{\nu_X^{-1}(X_{reg})} = \nu_X^* V_\omega$. Вспомним, что $\widehat{\omega}$ есть сечение расслоения D_n, всюду ненулевое над множеством $\nu_X^{-1}(X\backslash 0)$. Значит существует открытое в $U \times Gr_{n,N}$ множество U_0, содержащее $\nu_X^{-1}(X\backslash 0)$ и такое, что в ограничении на него форма $\widehat{\omega}$ также всюду не равна нулю. Значит, $V_{\widehat{\omega}}$ всюду не равно нулю над множеством U_0. Значит аналогично (12) мы можем определить $\widehat{A} \in \Gamma(\Omega^1(U_0) \otimes End(D_n^*)|_{U_0})$, причём с очевидностью $\widehat{A}\Big|_{\nu_X^{-1}((X\backslash 0)_{reg})} = \nu_X^* A$. Аналогично (13) определим в расслоении $D_n^*|_{U_0}$ связность $\widehat{\nabla}^{2*}$, для которой верно в свою очередь

$$\widehat{\nabla}^{2*}\Big|_{\nu_X^{-1}((X\backslash 0)_{reg})} = \nu^*\nabla^{2*}. \tag{15}$$

Ясно, что

$$\widehat{\nabla}^{2*}\widehat{\omega} = 0. \tag{16}$$

Пусть $\pi\colon Y \to \widehat{X}$ – разрешение особенностей многообразия $\widehat{X}$. Мы имеем расслоение $\pi^*\widehat{T}^*$ и его гладкое сечение $\pi^*\widehat{\omega}$. Ясно, что $Ch_{X,0}\omega$ равно значению первого препятствия к продолжению ненулевого сечения $\pi^*\widehat{\omega}$ с $(\nu_X \circ \pi)^{-1}(S_\varepsilon^{2N-1} \cap X)$ на $(\nu_X \circ \pi)^{-1}(B_\varepsilon^{2N-1} \cap X)$. С другой стороны мы имеем связность $\pi^*\widehat{\nabla}^{1*}$ в расслоении $\pi^*\widehat{T}^*$ и связность $\pi^*\widehat{\nabla}^{2*}$ в расслоении $\pi^*\widehat{T}^*\Big|_{(\nu_X \circ \pi)^{-1}(X \setminus 0)}$, причём из (16) выполняется $\pi^*\widehat{\nabla}^{2*}\pi^*\widehat{\omega} = 0$, но тогда выражение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{(\nu_X \circ \pi)^{-1}(S_\varepsilon^{2N-1} \cap X)} c_n(\pi^*\widehat{\nabla}^{1*}, \pi^*\widehat{\nabla}^{2*}) \tag{17}$$

есть в терминологии ([10]) вычет сечения $\pi^*\widehat{\omega}$ расслоения $\pi^*\widehat{T}^*$ вдоль помножества $(\nu_X \circ \pi)^{-1}(0)$. В этой ситуации база расслоения $\pi^*\widehat{T}^*$ гладкая и известно (см. напр. [10]), что этот вычет равен первому препятствию к продолжению ненулевого сечения на всё Y, то есть, как мы уже выяснили, равен $Ch_{X,0}\omega$. В силу (14) и (15) мы имеем

$$c_n(\pi^*\widehat{\nabla}^{1*}, \pi^*\widehat{\nabla}^{2*})\Big|_{(\nu_X \circ \pi)^{-1}((X \setminus 0)_{reg})} = (\nu_X \circ \pi)^* c_n(\nabla^{1*}, \nabla^{2*}).$$

Отсюда уже ясно, что выражение (17) равно интегралу из теоремы, что и требовалось доказать. $\square$

Список литературы

[1] P. F. Baum, R. Bott. On the zeroes of meromorphic vector fields. 1970 Essays on Topology and Related Topics (Memoires dedies a Georges de Rham) pp. 29-47 Springer, New York.

[2] R. Bott. A residue formula for holomorphic vector fields. J. Differential Geometry 1 (1967), 311-330.

[3] R. Bott. Vector fields and characteristic numbers. Michigan Math. J. Volume 14, Issue 2 (1967), 231-244.

[4] W. Ebeling, S. M. Gusein-Zade. Chern obstructions for collections of 1-forms on singular varieties, In: Singularity Theory. Proceedings of the 2005 Marseille Singularity School and Conference (D. Cheniot et al., eds), World Scientific, Singapore 2007, pp. 557-564.

[5] W. Ebeling, S. M. Gusein-Zade. Indices of collections of 1-forms, In: Singularities in Geometry and Topology. Proceedings of the Trieste Singularity Summer School and Workshop 2005 (J.-P. Brasselet et al., eds.), World Scientific, Singapore 2007, pp. 629-639.

[6] W. Ebeling, Gusein-Zade. Indices of vector fields or 1-forms and characteristic numbers, Bull. London Math. Soc. 37, 747-754 (2005).

[7] L. Ernström. Topological Radon transforms and the local Euler obstruction. Duke Math. J. 76, 1994, 1-21.

[8] L. Ernström. A Plucker formula for singular projective varieties. Communication in algebra, 25(9), 2897-2901(1997).

[9] R. MacPherson. Chern classes of singular algebraic varieties. Ann. of Math. 100, 1974, 423-432.

[10] T. Suwa. Indices of Vector Fields and Residues of Holomorphic Singular Foliations, Hermann, Paris (1998).

[11] Дж. Милнор, Дж. Сташеф. Характеристические классы, "Мир", 1979.

[12] Дж. Милнор. Особые точки комплексных гиперповерхностей, "Мир", 1971.

[13] Р. Стонг. Заметки по теории кобордизмов, "Мир", 1973.

[14] Ф. Хирцебрух. Топологические методы в алгебраической геометрии, "Мир", 1973.