О разбиениях, связанных с дискретными группами отражений

П. В. Бибиков

В недавней статье Вальдшпургера [1] был получен удивительный результат: конус, сопряженный фундаментальной камере C конечной линейной группы W, порожденной отражениями, есть дизъюнктное объединение конусов вида $(1-w)C^\circ$, $w \in W$, где C° — открытое ядро фундаментальной камеры C группы W. В данной работе дается более простое и ясное доказательство этого результата, а также его обобщение на случай произвольных кокомпактных дискретных групп отражений, действующих в пространстве постоянной кривизны; исследуются свойства разбиения Вальдшпургера и с помощью этого разбиения доказываются формула Де Кончини об относительной угловой мере сопряженного конуса и ее обобщение.

1. Введение

Пусть X — односвязное пространство постоянной кривизны и W — кокомпактная дискретная группа отражений, действующая в этом пространстве. В случае сферического пространства $X \simeq \mathbb{S}^n \subset V$ — n-мерная сфера, вложенная в $n+1$-мерное евклидово пространство V со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. В случае евклидова пространства X — n-мерное аффинное евклидово пространство, ассоциированное с ним евклидово пространство мы обозначим через V. В случае гиперболического пространства $X \simeq \mathbb{H}^n \subset V$ — пола n-мерного двуполостного гиперболоида, вложенного в $n+1$-мерное пространство Минковского со скалярным произведением $[x,y] = -x_0y_0 + x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ и заданного уравнением $[x,x] = -1$. В зависимости от X будем называть группу W сферической, евклидовой или гиперболической дискретной группой отражений.

Расстояние между точками $x, y \in X$ обозначим через $\rho(x,y)$. Через D обозначим компактную фундаментальную область для действия W на X, а через D° — ее внутренность. В сферическом и гиперболическом случаях пусть C — фундаментальная камера в пространстве V для группы W и C° — ее открытое ядро. (Можно считать, что $D = C \cap X$ и $D^\circ = C^\circ \cap X$). Обозначим через X^W пространство неподвижных точек группы W (отметим, что X^W может быть непусто только в сферическом случае), а через W_x — стабилизатор точки x в группе W. Через W_{reg} обозначим множество элементов из W, пространство неподвижных точек которых совпадает с X^W. Для произвольной гиперплоскости H обозначим отражение относительно нее через s_H.

Структура данной работы такова. В разделе 2 доказывается фундаментальная лемма о неподвижной точке для кокомпактных дискретных групп отражений. Далее в разделе 3 с помощью этой леммы доказываются теоремы Вальдшпургера [1] и Мейнренкена [2] о разбиениях, образованных множествами вида $(1-w)C^\circ$, где $w \in W$, а также соответствующая теорема для гиперболических групп отражений. В разделе 4 исследуются свойства полученных разбиений и устанавливается их связь с одной теоремой Костанта [3]. Наконец, в разделе 5 с помощью теоремы Вальдшпургера [1] доказываются формула Де Кончини [4] об относительной угловой мере сопряженного конуса C^* и ее обобщение.

Благодарности. Автор благодарит В. С. Жгуна, в соавторстве с которым были получены многие результаты данной работы, Э. Б. Винберга за полезные обсуждения и постоянное внимание к работе, а также В. Л. Попова, обратившего внимание автора на статью [2].

2. Лемма о неподвижной точке

В этом разделе мы докажем фундаментальную лемму 2 о неподвижной точке, утверждающую, что любая изометрия пространства X совпадает с преобразованием из группы W хотя бы на одной точке из внутренности фундаментальной камеры. В дальнейшем с помощью этой леммы мы единообразно получим серию теорем о разбиениях, порожденных множествами вида $(1-w)C^\circ$.

Докажем сначала вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $x_0 \in D^\circ$ и $x \in D$ — произвольные точки. Тогда $\rho(x_0, wx) \geqslant \rho(x_0, x)$, причем для любого $w \notin W_x$ неравенство строгое.*

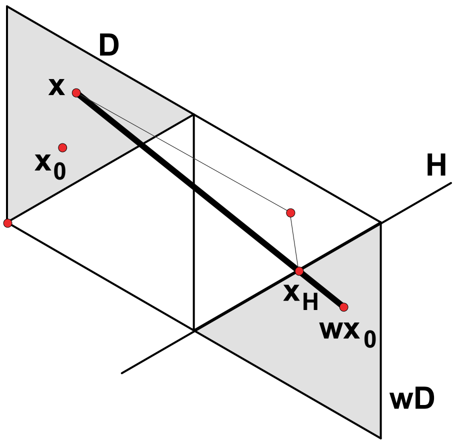

Рис. 1.

Доказательство. Достаточно доказать неравенство $\rho(wx_0, x) \geqslant \rho(x_0, x)$. Проведем индукцию по длине $\ell(w)$ элемента w. Найдется стенка H камеры wD, такая, что $\ell(s_H w) < \ell(w)$. Это означает (см. [5, теорема 1, гл. 5, пар. 3]), что D и wD лежат по разные стороны от гиперплоскости H. Обозначим через x_H точку пересечения плоскости H и отрезка, соединяющего x и wx_0 (рис. 1). Тогда $\rho(x_H, wx_0) = \rho(x_H, s_H wx_0)$. В силу предположения индукции и неравенства треугольника последнее влечет

$$\rho(x, x_0) \leqslant \rho(x, s_H wx_0) \leqslant \rho(x, x_H) + \rho(x_H, s_H wx_0) = \rho(x, wx_0).$$

Неравенство треугольника нестрогое тогда и только тогда, когда x_H лежит на отрезке $[x, s_H wx_0]$. Это возможно, только если $x = x_H$, что влечет $s_H x = x$. Поэтому $\rho(x, x_0) = \rho(x, wx_0)$ лишь в случае, когда выполнены равенства $\rho(x, s_H wx_0) = \rho(x, x_0)$ и $s_H x = x$. Из первого равенства по предположению индукции получаем, что $s_H wx = x$, а учитывая второе равенство, получаем $w \in W_x$. □

Теперь мы готовы доказать основную лемму этого раздела.

Лемма 2 (о неподвижной точке, В. С. Жгун, [6, лемма 2])**.** *Пусть $g \in \mathrm{Isom}(X)$. Тогда существует единственный элемент $w \in W$, такой, что преобразование $w^{-1}g$ имеет неподвижную точку в D°.*

Доказательство. 1. Будем вести доказательство индукцией по $\dim X$. Покажем, что существует такой элемент $w \in W$, что преобразование $w^{-1}g$ имеет неподвижную точку в замкнутой камере D. Т.к. группа W кокомпактна, камера D топологически является замкнутым шаром. Пусть $x \in D$ — произвольная точка. Тогда точка gx лежит в одной из камер вида wD, где

$w \in W$. Положим $f(x) = w^{-1}gx \in D$. Тем самым мы построили отображение f шара D в себя. Легко видеть, что оно корректно определено (т.к. камера D компактна, камера gD может пересекать лишь конечное количество камер вида wD) и непрерывно (т.к. если $x_1, x_2 \in D$ и $w_1x_1 = w_2x_2$, то $x_1 = x_2$). По теореме Брауэра у этого отображения существует неподвижная точка. Таким образом, существуют элемент $w \in W$ и точка $x \in D$, такие, что $w^{-1}gx = x$.

Если $x \in D^\circ$, то все доказано. Пусть $x \in D \setminus D^\circ$. Рассмотрим сферу $S(x)$ с центром в точке x, не пересекающую гиперплоскости граней камеры D, которые не содержат x, и подгруппу $W_x \subset W$, действующую на сфере $S(x)$. Группа W_x порождена отражениями, сохраняющими точку x. Камера $S(x) \cap D$ будет фундаментальной для группы W_x, т.к. она высекается гиперплоскостями камеры D, содержащими точку x. По предположению индукции, примененному к сфере $S(x)$, элементу $w^{-1}g$, группе W_x и камере $S(x) \cap D$, существуют элемент $w' \in W_x$ и точка $x' \in (S(x) \cap D)^\circ$, такие, что $w'^{-1}w^{-1}gx' = x'$. Т.к. сфера $S(x)$ не пересекает гиперплоскости граней камеры D, не содержащие x, то на самом деле $x' \in D^\circ$.

2. Докажем единственность элемента w. Пусть существуют два элемента w_1, $w_2 \in W$, такие что $w_1^{-1}gx_1 = x_1$ и $w_2^{-1}gx_2 = x_2$, где x_1, $x_2 \in D^\circ$. Положим $w = w_1^{-1}w_2$, тогда $\rho(gx_1, gx_2) = \rho(w_1x_1, w_1wx_2)$. Учитывая, что $W_{x_i} = 1$, при $w \neq 1$ из леммы 1 получаем

$$\rho(gx_1, gx_2) = \rho(x_1, x_2) < \rho(x_1, wx_2) = \rho(w_1x_1, w_1wx_2).$$

Отсюда $w = 1$ и $w_1 = w_2$. □

Замечание. В случае более общих групп с фундаментальной областью конечного объема (т.е. когда у камеры D могут быть бесконечно удаленные точки) лемма 2 неверна. А именно, X — гиперболическое пространство и g — сдвиг вдоль прямой, проходящей через бесконечно удаленную точку o камеры D. Тогда не существует таких $w \in W$ и $x \in D^\circ$, что $gx = wx$. В самом деле, в противном случае точка $gx = wx$ должна лежать на орисфере $\mathcal{O}$ с центром в точке o, проходящей через x, что неверно, т.к. $g\mathcal{O} \cap \mathcal{O} = \varnothing$. Более того, можно показать, что равенство $gx = wx$ невозможно даже для $x \in D$.

Следствие 1. *Пусть $g\colon X \to X$ — непрерывное отображение. Тогда существует такой элемент $w \in W$, что преобразование $w^{-1}g$ имеет неподвижную точку в D. Если при этом $\rho(gx_1, gx_2) \leqslant \rho(x_1, x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$ и неподвижная точка лежит в D°, то элемент w единствен.*

Доказательство. Первое утверждение следует из доказательства п.1 леммы 2 о неподвижной точке. Второе утверждение следует из леммы 1. □

3. Разбиения, связанные с дискретными группами отражений

В этом разделе мы получим доказательство теоремы Вальдшпургера, а также обобщим эти результаты на случай евклидовых и гиперболических кокомпактных групп.

В сферическом и гиперболическом случаях определим Π как множество единичных нормалей к граням камеры C, лежащих в одном полупространстве с C относительно этих граней. Для каждого $e \in \Pi$ обозначим грань, ортогональную e, через H_e, а отражение относительно этой грани — через s_e. Через C^* будем обозначать конус, сопряженный к C относительно соответствующего скалярного произведения, т.е. C^* — это множество векторов, образующих острый или прямой угол со всеми векторами ил C.

Пусть также в гиперболическом случае $\mathcal{K} = \{x \in V : [x, x] \leqslant 0\} = \mathcal{K}_+ \cup \mathcal{K}_-$ — конус, где $\mathcal{K}_+ = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{K} : x_0 \geqslant 0\}$. Напомним, что в этом случае $[e, e] > 0$ для всех $e \in \Pi$, а также $C \subseteq \mathcal{K}_+$ и $\mathcal{K}_- \subset C^*$ (см. [5, упр. 12–13 к пар. 4 гл. 5]).

Лемма 3. *В случае сферической и гиперболической группы отражений W имеет место включение* $C^* \supseteq \bigsqcup\limits_{w\in W}(1-\ w)C^\circ$.

Доказательство. По лемме 1 $\rho(wx_0,x)\geqslant\rho(x_0,x)$, где $x_0\in C^\circ$ и $x\in C$. В случае сферической группы отражений W имеем:

$$\frac{(wx_0,x)}{\sqrt{(wx_0,wx_0)(x,x)}}=\cos\rho(wx_0,x)\leqslant\cos\rho(x_0,x)=\frac{(x_0,x)}{\sqrt{(x_0,x_0)(x,x)}},$$

откуда следует, что $(x,(1-w)x_0)\geqslant 0$. В случае гиперболической группы отражений W рассуждения аналогичны (напомним, что формула расстояния в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^n$ имеет вид $\operatorname{ch}\rho(x_0,x)=-\frac{[x_0,x]}{\sqrt{[x_0,x_0][x,x]}}$). $\square$

3.1. Сферический случай

Теорема 1 (Вальдшпургер [1]). *Пусть W — сферическая группа отражений. Имеет место равенство* $C^*=\bigsqcup\limits_{w\in W}(1-w)C^\circ$.

Доказательство. По лемме 2 о неподвижной точке, примененной к преобразованию $g=s_u$, где $u\in C^*$, существуют точка $x\in C^\circ$ и единственный элемент $w\in W$, такие, что $w^{-1}s_ux=x$. Отсюда $(1-w)x=\frac{2(u,x)}{(u,u)}u$. Полагая $v=\frac{(u,u)}{2(u,x)}x$, получаем равенство $(1-w)v=u$, причем $v\in C^\circ$, т.к. $x\in C^\circ$ и $(u,x)>0$. С учетом леммы 3 это означает, что $\bigsqcup\limits_{w\in W}(1-w)C^\circ=C^*$. $\square$

Таким образом, теорема Вальдшпургера фактически является частным случаем леммы 2 о неподвижной точке. Этот результат соответствовал случаю сферической группы W. Естественно ожидать, что аналогичные результаты существуют и в случаях евклидовой и гиперболической групп.

3.2. Евклидов случай

Теорема 2. *Пусть W — евклидова группа отражений. Для каждого $h\in\operatorname{Isom}(X)$ имеет место равенство* $V=\bigsqcup\limits_{w\in W}(h-w)D^\circ$.

Доказательство. По следствию 1, примененному к преобразованию $g=t_{-u}h$ (где t_{-u} — параллельный перенос на вектор $-u$), существуют точка $v\in D$ и единственный элемент $w\in W$, такие, что $w^{-1}t_{-u}hv=v$. Это равносильно тому, что $(h-w)v=u$. $\square$

Следствие 2 (Мейнренкен, [2, теорема 2]). *Имеет место равенство* $V=\bigsqcup\limits_{w\in W}(1-w)D^\circ$.

Следствие 3. *Для каждого $h\in GA(X)$ имеет место равенство $V=\bigcup\limits_{w\in W}(h-w)D$, причем при $\rho(hx_1,hx_2)\leqslant\rho(x_1,x_2)$ для любых $x_1,x_2\in X$ камеры вида $(h-w)D$ имеют попарные пересечения коразмерности не меньше 1.*

Доказательство. По следствию 1, примененному к преобразованию $g=t_{-u}h$, существуют точка $v\in D$ и элемент $w\in W$, такие, что $w^{-1}t_{-u}hv=v$. Отсюда $(h-w)v=u$. Более того, элемент w единствен, если $v\in D^\circ$, откуда следует второе утверждение. $\square$

Замечание. Рассмотрим сферическую подгруппу отражений $W_0 \subset W$, сохраняющую 0. Из теоремы 2 следует, что множество $M = \bigsqcup_{w \in W_0} (1-w)D^\circ$ является фундаментальной областью для подгруппы W, порожденной параллельными переносами на простые кокорни. Но $N = \bigcup_{w \in W_0} wD$ — замыкание другой фундаментальной области для рассматриваемой группы параллельных переносов. Поэтому $\sum_{w \in W_0} \det(1-w) \cdot \mathrm{vol}(D) = \mathrm{vol}(M) = \mathrm{vol}(N) = |W_0| \cdot \mathrm{vol}(D)$, откуда получаем формулу $\sum_{w \in W_0} \det(1-w) = |W_0|$ (см. [5, упр. 3 к пар. 2 гл. 5]). Аналогичным образом получается формула $\sum_{w \in W_0} \det(1-hw^{-1}) = |W_0|$, где $\rho(hx_1, hx_2) \leqslant \rho(x_1, x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$.

3.3. Гиперболический случай

Теорема 3 ([6, теорема 3]). *Пусть W — гиперболическая группа отражений. Имеют место следующие равенства:*

(i) $C^* \setminus \mathcal{K}_- = \bigsqcup_{w \in W} (1-w)C^\circ$;

(ii) $\mathcal{K}_-^\circ = \bigsqcup_{w \in W} (-1-w)C^\circ$.

Доказательство. (i) Сначала докажем включение $\supseteq$. В лемме 3 доказано, что $C^* \supseteq \bigsqcup_{w \in W} (1-w)C^\circ$. Докажем, что $\bigsqcup_{w \in W} (1-w)C^\circ \not\subset \mathcal{K}_-$. Проведем доказательство индукцией по длине ℓ приведенного разложения w. При $\ell(w) = 0$ утверждение очевидно. При $\ell(w) > 0$ имеем равенство $w = s_e w'$, где $\ell(w') = \ell(w) - 1$. Последнее означает, что конусы C и $w'C$ лежат в одном полупространстве относительно H_e, и в частности $[w'x, e] > 0$. Откуда

$$[(1-w)x, (1-w)x] = [(1-w')x, (1-w')x] + 4\frac{[w'x, e][x, e]}{[e, e]} > 0$$

для любого $x \in C^\circ$. Это означает, что $C^* \setminus \mathcal{K}_- \supseteq \bigsqcup_{w \in W} (1-w)C^\circ$.

Докажем обратное включение. Пусть $u \in C^* \setminus \mathcal{K}_-$. Применим лемму 2 о неподвижной точке к преобразованию $g = s_u$. Имеем: $wx = s_u x = x - 2\frac{[u,x]}{[u,u]}u$, откуда $(1-w)x = 2\frac{[u,x]}{[u,u]}u$. Полагая $v = \frac{[u,u]}{2[u,x]}x$, получаем $(1-w)v = u$. Очевидно, что $[u,x] > 0$, и т.к. $u \notin \mathcal{K}_-$, то $[u,u] > 0$, поэтому $v \in C^\circ$ и мы получаем первое равенство.

(ii) Сначала докажем включение $\supseteq$. Проведем доказательство индукцией по длине ℓ приведенного разложения w. При $\ell(w) = 0$ утверждение очевидно. При $\ell(w) > 0$ имеем $w = s_e w'$, где $\ell(w') = \ell(w) - 1$ и

$$[(-1-w)x, (-1-w)x] = [(-1-w')x, (-1-w')x] - 4\frac{[w'x, e][x, e]}{[e, e]} < 0$$

для любого $x \in C^\circ$. Кроме того, очевидно, что если $x \in C^\circ$, то $(-1-w)x \notin \mathcal{K}_+$. Это означает, что $\mathcal{K}_-^\circ \supseteq \bigsqcup_{w \in W} (-1-w)C^\circ$.

Докажем обратное включение. Пусть $u \in \mathcal{K}_-^\circ$. Применим лемму 2 о неподвижной точке к преобразованию $g = -s_u$. Имеем: $wx = -s_u x = -x + \frac{2[u,x]}{[u,u]}u$, откуда $(-1-w)x = -\frac{2[u,x]}{[u,u]}u$. Полагая $v = -\frac{[u,u]}{2[u,x]}x$, получаем $(-1-w)v = u$. Очевидно, что $[u,x] > 0$, и т.к. $u \in \mathcal{K}_-^\circ$, то $[u,u] < 0$, поэтому $v \in C^\circ$ и мы получаем второе равенство. $\square$

Замечание. В случае более общих гиперболических групп отражений с фундаментальной областью конечного объема теорема 3 неверна. Мы построим такую точку $u \in C^* \setminus \mathcal{K}_-$, что равенство $u = (1-w)v$ невозможно для любого $v \in C^\circ$ (и даже для $v \in C$). А именно, пусть $u \in (C^* \setminus \mathcal{K}_-) \cap \langle s_e o, o\rangle$, где $e \in w''\Pi$, $w'' \in W$ и $o \in C$ — бесконечно удаленная точка, причем $H_u \cap C = \varnothing$. Докажем, что равенство $u = (1-w)v$ невозможно для любого $v \in C^\circ$.

Действительно, найдется $\lambda > 0$, такое, что $\lambda s_e s_u o = o$. Заметим, что $\lambda < 1$, т.к. $H_u \cap C = \varnothing$, поэтому если $\mathcal{O}$ — орисфера с центром в o, то $s_e s_u \mathcal{O}$ лежит внутри орисферы $\mathcal{O}$. Отсюда получаем, что $u = (\lambda - w')p$, где $w' = s_e$ и $p = \frac{[u,u]}{2[u,o]} o \in C$. Предположим, что существуют такие $w \in W$ и $v \in C^\circ$, что $u = (1-w)v$. Тогда $(\lambda - w')p = (1-w)v$, откуда получаем $\lambda p - v = w'p - wv$. Скалярно возводя это равенство в квадрат, получаем $[v, (\lambda - \tilde{w})p] = 0$, где $\tilde{w} = w^{-1}w'$. Но $(\lambda - \tilde{w})p = (1-\tilde{w})p - (1-\lambda)p \in C^*$, поэтому равенство $[v, (\lambda - \tilde{w})p] = 0$ возможно, только если $[\lambda - \tilde{w}]p = 0$. Но это невозможно из соображений непрерывности. В самом деле, рассмотрим последовательность $\{p_n\} \subset C^\circ$, такую, что $p_n \to p$. Тогда если $x \in C^\circ$, то $0 > [p_n, x] \geqslant [\tilde{w}p_n, x]$ и $\lambda|[p_n, x]| < |[p_n, x]| \leqslant |[\tilde{w}p_n, x]|$, откуда $|[\lambda p_n, x]| < |[p_n, x]| \leqslant |[\tilde{w}p_n, x]|$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $|[\lambda p, x]| < |[p, x]| \leqslant |[\tilde{w}p, x]|$ — противоречие.

Таким образом, существует подмножество в $C^* \setminus \mathcal{K}_-$, которое не покрывается конусами вида $(1-w)C^\circ$. Аналогичные рассуждения можно привести и для разбиения $\mathcal{K}_-$.

4. Свойства разбиений

В дальнейшем мы будем считать, что W — конечная группа отражений, действующая в евклидовом пространстве V. В предыдущих параграфах нами получены теоремы о различных разбиениях, образованных множествами вида $(1-w)C^\circ$, где $w \in W$. Одним из главных вопросов, связанных с этими разбиениями, является вопрос о том, какие конусы вида $C_w = (1-w)C$ являются *смежными*.

4.1. Регулярный случай

Для случая, когда w, $w' \in W_{\mathrm{reg}}$, ответ был дан в [7] (на рис. 2 и 3 изображены сечения соответствующих конусов в случаях $W = A_3$ и $W = B_3$). В случае линейных групп Вейля этот вопрос тесно связан с доказательством теоремы 1, данным в [1]. Основная идея этого доказательства заключается в построении по данному элементу $w \in W_{\mathrm{reg}}$ и вектору $e \in \Pi$ элемента $w' \in W_{\mathrm{reg}}$, такого, что конусы C_w и $C_{w'}$ являются смежными и пересекаются по части стенки $(1-w)H_e$, имеющей коразмерность 1.

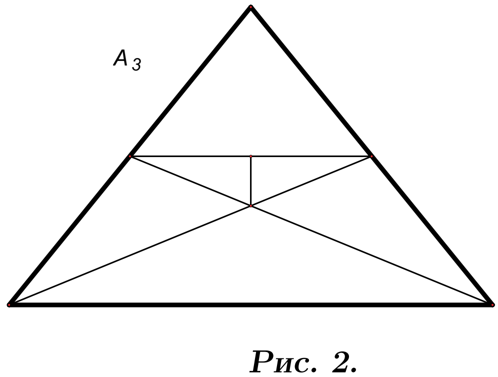

Рис. 2.

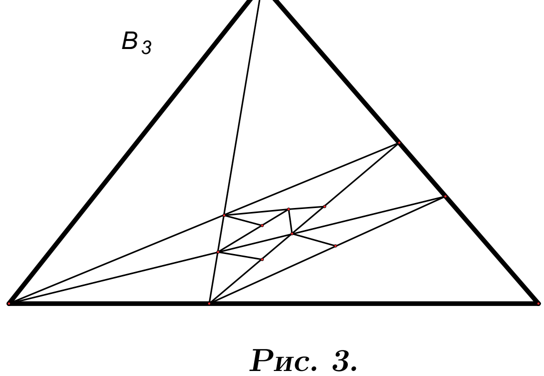

Рис. 3.

Прежде чем напомнить ответ на этот вопрос, отметим два несложных факта.

Предложение 1. *Пусть $g \in O(V)$ — произвольное преобразование и $s \in O(V)$ — отражение. Тогда размерности пространств неподвижных точек преобразований g и gs отличаются на 1.*

Доказательство. Собственные значения оператора g по модулю равны 1, а все комплексные собственные значения имеют сопряженные (с учетом кратностей). Поэтому $\det g = (-1)^{n-k}$, где $k = \dim\ker(1-g)$. Т.к. $\det s = -1$, то $\det g = -\det(gs)$. Отсюда следует, что $\dim\ker(1-g) \neq \dim\ker(1-gs)$.

Пусть для определенности $\dim\ker(1-g) > \dim\ker(1-gs)$. С другой стороны, $\ker(1-g)\cap H \subset \ker(1-gs)$ (где H — гиперплоскость отражения), откуда $\ker(1-g) - 1 \leqslant \ker(1-gs) < \ker(1-g)$ и $\ker(1-gs) = \ker(1-g) - 1$. $\square$

Предложение 2. *Если $wC \cap w'C \neq \{0\}$, то $C_w \cap C_{w'} \neq \{0\}$.*

Доказательство. В самом деле, если $wx = w'x'$, где $x, x' \in C \setminus \{0\}$, то $x = x'$ и $(1-w)x = (1-w')x'$. $\square$

Для каждого $e \in \Pi$ через π_e обозначим вектор, ортогональный V^W и такой, что его скалярное произведение с f равно δ_{ef} для всех $f \in \Pi$. Зафиксируем элемент $w \in W_{\text{reg}}$ и для каждого вектора $u \in V$ рассмотрим вектор v_u, ортогональный V^W и такой, что $(w^{-1}-1)v_u = u$.

Лемма 4 ([7, лемма 3])**.** *Пусть $u, r \in V$ а $e \in \Pi$. Для векторов v_u, v_r и v_e имеют место следующие свойства: 1) $(v_u, r) + (v_r, u) = -(u, r)$; 2) $(v_u, u) = -\frac{1}{2}(u, u)$; 3) $v_u = ws_u v_u$; 4) $v_u \perp (1-w)H_u$; 5) $\ker(1 - ws_u) = \langle v_u\rangle$, 6) $(v_e, (1-w)\pi_e) < 0$;.*

Доказательство. 1) По определению имеем $w^{-1}v_e = v_e + e$ и $w^{-1}v_f = v_f + f$. Скалярно перемножая эти равенства, получаем требуемое. 2) В п.1) положим $f = e$. 3) Из п.2) следует, что $w^{-1}v_e = v_e + e = v_e - \frac{2(v_e, e)}{(e,e)}e = s_e v_e$. 4) По определению имеем $(v_e, (1-w)H_e) = ((1-w^{-1})v_e, H_e) = -(e, H_e) = 0$. 5) По определению имеем $(v_e, (1-w)\pi_e) = ((1-w^{-1})v_e, \pi_e) = -(e, \pi_e) < 0$. 6) Из п.3) следует, что $\langle v_e\rangle \subseteq \ker(1 - ws_e)$. Обратно, пусть $z \in \ker(1-ws_e)$. Тогда $(w^{-1}-1)z = s_e z - z = -\frac{2(e,z)}{(e,e)}e$, откуда следует, что $z \in \langle v_e\rangle$. $\square$

Теорема 4 ([7, теорема 2])**.** *Пусть $w \in W_{\text{reg}}$. Элемент $w' \in W$ регулярен и конусы C_w и $C_{w'}$ являются смежными тогда и только тогда, когда существуют такие векторы $e, f \in \Pi$, что $w' = ws_e s_f$ и $(v_e, f) > 0$, и в этом случае* $\operatorname{codim}(1-w)H_e \cap (1-w')H_f = 1$.

На рис. 4 и 5 изображены сечения трансверсальной гиперплоскостью конусов, рассматриваемых в теореме.

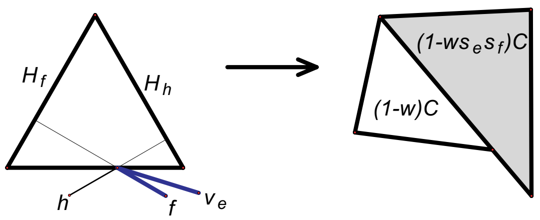

Рис. 4.

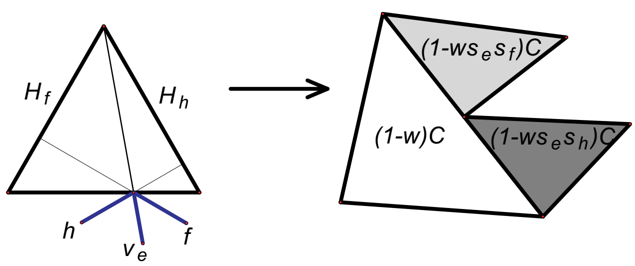

Рис. 5.

Доказательство. 1. Сначала предположим, что существуют такие $e, f \in \Pi$, что $w' = ws_e s_f$ и $(v_e, f) > 0$. Докажем, что $w' \in W_{\text{reg}}$. Предположим противное: пусть $w' \notin W_{\text{reg}}$. Тогда $\dim\ker(1-w') = 2$ по предложению 1. Но $\ker(1-w') \cap H_f = \{0\}$, т.к. $\ker(1-w's_f) = \ker(1-ws_e) = \langle v_e\rangle \not\subset H_f$ — противоречие.

Теперь докажем, что конусы C_w и $C_{w'}$ имеют пересечение коразмерности 1. Т.к. $(v_e, f) > 0$ и $(v_e, e) < 0$, существует открытое подмножество $U \subseteq H_e$, для каждого вектора v из которого найдется такое число $t_0 > 0$, что $v' = v - t_0 v_e \in H_f$. А именно, пусть $U = \{v = u + \delta\pi_f : u \in H_e \cap H_f$ и $\delta > 0$ достаточно мало$\}$. Тогда при $t_0 = \frac{\delta}{2(v_e, f)} > 0$ имеем: $(v', f) = 0$, $(v', e) = -t_0(v_e, e) > 0$ при $\delta > 0$ по свойству 2 предложения 4 и $(v', h) = (u, h) + t_0(v_e, h) > 0$ при достаточно малых δ для всех $h \in \Pi \backslash \{e, f\}$. Значит, $(1-w')v' = (1-ws_e)v' = (1-ws_e)v = (1-w)v$, т.е. $C_w \cap C_{w'} \supseteq (1-w)U$. Т.к. $w \in W_{\mathrm{reg}}$, то пересечение $C_w \cap C_{w'}$ равно $(1-w)H_e \cap (1-w')H_f$ и имеет коразмерность 1.

2. Обратно, пусть конусы C_w и $C_{w'}$ являются смежными и $C_w \cap C_{w'} \subseteq (1-w)H_e$. Заметим, что

$$(1-w)H_e = (1-ws_e)H_e \subseteq (1-ws_e)C \subseteq \bigcup_{f \in \Pi \backslash \{e\}} (1-ws_e)H_f = \bigcup_{f \in \Pi \backslash \{e\}} (1-ws_e s_f)H_f.$$

При этом можно ограничиться теми $f \in \Pi \setminus \{e\}$, для которых $ws_e s_f \in W_{\mathrm{reg}}$ и $\mathrm{codim}(1-w)H_e \cap (1-ws_e s_f)H_f = 1$. Т.к. конусы $(1-w)H_e$ и $C_{w'}$ имеют пересечение коразмерности 1, то найдется вектор $f \in \Pi$, такой, что $w' = ws_e s_f$ и $\mathrm{codim}(1-w)H_e \cap (1-w')H_f = 1$. При этом в силу свойства 3 предложения 4

$$\begin{aligned} 0 < ((1-w')\pi_f, v_e) = ((1-ws_e s_f)\pi_f, v_e) = (\pi_f - ws_e(\pi_f - f), v_e) = \\ = ((1-ws_e)\pi_f, v_e) + (ws_e f, v_e) = (f, v_e). \end{aligned}$$

$\square$

4.2. Общий случай

Теперь выясним, когда конус неполной размерности смежен с конусом полной размерности. Пусть $\dim C_{w'} < \dim C_w = n$. Будем говорить, что конус $C_{w'}$ *смежен* с конусом C_w, если $\dim C_{w'} = \dim(C_{w'} \cap C_w)$.

Лемма 5 ([6, лемма 5])**.** *Если $w = w'\tilde{w} \in W_{\mathrm{reg}}$ и конусы $C_{w'}$ и C_w смежны, то* $\mathrm{rk}(1-w') + \mathrm{rk}(1-\tilde{w}) = n$.

Доказательство. Существует такой минимальный набор $\{\pi_{i_1}, \ldots, \pi_{i_k}\}$, что $C_w \cap C_{w'} \subseteq (1-w)\langle\pi_{i_1}, \ldots, \pi_{i_k}\rangle_+ = (1-w)\widetilde{C}$. Отсюда следует, что $\dim\ker(1-w') \geqslant n - \dim(1-w)\widetilde{C} = n-k$.

Существуют $v \in \widetilde{C}^\circ$ и $v' \in C^\circ$, такие, что $(1-w)v = (1-w')v' \in C_{w'}$. Отсюда $v - v' = w'(\tilde{w}v - v')$. Скалярно возводя это равенство в квадрат и упрощая, получаем: $((1-\tilde{w})v, v') = 0$. Т.к. $v' \in C^\circ$ и $(1-\tilde{w})v \in C^*$, то $v \in \ker(1-\tilde{w})$. По теореме Стейнберга о неподвижной точке $\langle\pi_{i_1}, \ldots, \pi_{i_k}\rangle \subseteq \ker(1-\tilde{w})$, откуда $\dim\ker(1-\tilde{w}) \geqslant k$ и $\dim\ker(1-w) + \dim\ker(1-\tilde{w}) \geqslant (n-k)+k = n$.

Для доказательства обратного неравенства достаточно заметить, что $\ker(1-w') \cap \ker(1-\tilde{w}) = \{0\}$. В самом деле, если $x \in \ker(1-w') \cap \ker(1-\tilde{w})$, то $wx = w'(\tilde{w}x) = x$ и $x \in \ker(1-w) = \{0\}$. Поэтому $\dim\ker(1-w') + \dim\ker(1-\tilde{w}) \leqslant n$. $\square$

Пусть R — множество единичных нормалей к зеркалам группы W. Нам будет удобно представлять элементы из W в виде композиции не только простых отражений s_e, где $e \in \Pi$, но и отражений s_u, где $u \in R$. Следующая теорема (см. [3, п. 5.1]) описывает свойства такого разложения.

Теорема 5 (Б. Костант). *Пусть $w = s_{u_1}s_{u_2}\dots s_{u_k}$, где $u_1, u_2\dots u_k \in R$. Тогда следующие условия эквивалентны: (i)* $\mathrm{rk}(1-w) = k$; *(ii)* $w = s_{u_1}s_{u_2}\dots s_{u_k}$ *— разложение минимальной длины; (iii)* $u_1, u_2\dots u_k$ *линейно независимы.*

Доказательство. (i)⇒(ii) и (i)⇒(iii). Т.к. $\ker(1-w) \supseteq H_{u_1}\cap H_{u_2}\cap\dots\cap H_{u_k}$, то $k \geqslant \mathrm{rk}(1-w)$. При этом в случае линейной зависимости между $u_1, u_2\dots u_k$ неравенство строгое.

(ii)⇒(i). Рассуждая по индукции по $\dim V$, покажем, что существует разложение длины не более чем $\mathrm{rk}(1-w)$. Можно считать, что теорема доказана для всех $w\notin W_{\mathrm{reg}}$. Действительно, пусть $V^w \neq 0$ — подпространство неподвижных векторов для w, тогда применим шаг индукции к подпространству $(V^w)^\perp$ и подгруппе $W_{V^w}\subset W$, поточечно сохраняющей подпространство V^w.

Пусть $w\in W_{\mathrm{reg}}$. Выберем произвольный вектор $u\in R$. Поскольку $w\in W_{\mathrm{reg}}$, из предложения 1 получаем $\dim\ker(1-ws_u) > 0$ (это также следует из леммы 4, 3)). Отсюда $ws_u\notin W_{\mathrm{reg}}$ и для него наше утверждение доказано.

(iii)⇒(i). Пусть $u_1, u_2\dots u_k$ линейно независимы. Выберем $x_1\in (H_{u_2}\cap\dots\cap H_{u_k})\setminus H_{u_1}$. Т.к. $(1-w)x_1 = \frac{2(x_1,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1$, то $u_1\in(1-w)V$. Далее, выбирая $x_2\in(H_{u_3}\cap\dots\cap H_{u_k})\setminus H_{u_2}$, получаем, что $(1-w)x_2 = c_{21}u_1 + \frac{2(x_2,u_2)}{(u_2,u_2)}u_2$, откуда $u_1, u_2\in(1-w)V$. Выбирая $x_i\in(H_{u_{i+1}}\cap\dots\cap H_{u_k})\setminus H_{u_i}$, получаем, что $(1-w)x_i = (1-s_{u_1}\dots s_{u_i})x_i = c_{i1}u_1 + c_{i2}u_2 + \dots + c_{i-1i}u_{i-1} + \frac{2(x_i,u_i)}{(u_i,u_i)}u_i$, откуда $u_i\in(1-w)V$. Отсюда $\dim(1-w)V\geqslant k$, что и требовалось. □

Разложение элемента w, удовлетворяющее условиям теоремы Костанта, будем называть *минимальным.*

Теорема 6 ([6, теорема 6]). *Пусть $w = w'\tilde w\in W_{\mathrm{reg}}$ и $\mathrm{rk}(1-w') = k$, причем $w' = s_{u_1}\dots s_{u_k}$ — минимальное разложение. Конусы $C_{w'}$ и C_w смежны тогда и только тогда, когда $\tilde w = s_{u_{k+1}}\dots s_{u_n}$, где $u_1, \dots, u_n$ линейно независимы и $u_{k+1},\dots u_n\in\widetilde R = R\cap\mathrm{Im}(1-\tilde w)$. В частности, если конусы C_w и $C_{w'}$ смежны, то $\tilde w\in\widetilde W_{\mathrm{reg}}$, где $\widetilde W$ — группа, порожденная отражениями вида s_u, где $u\in\widetilde R$.*

Доказательство. По лемме 5 имеем: $\mathrm{rk}(1-\tilde w) = n - \mathrm{rk}(1-w') = n-k$, откуда согласно теореме Костанта существуют такие $u_{k+1},\dots,u_n$ что $\tilde w = s_{u_{k+1}}\dots s_{u_n}$, причем $u_1,\dots,u_n$ линейно независимы.

Пусть $v\in C$ и $v'\in C^\circ$ таковы, что $(1-w)v = (1-w')v'$. Из теоремы 5 (iii) следует, что $v\in\ker(1-\tilde w) = H_{u_{k+1}}\cap\dots\cap H_{u_n}$. Из условия $\dim C_{w'} = \dim(C_w\cap C_{w'})$ и из доказательства леммы 5 следует, что $\widetilde C\subset H_{u_i}$ для всех $i = k+1,\dots,n$. Это означает, что $u_{k+1},\dots u_n\in\widetilde R$.

Обратно, если $\tilde w = s_{u_{k+1}}\dots s_{u_n}$, где $u_1,\dots,u_n$ линейно независимы, то по теореме Костанта $\mathrm{rk}(1-w) = n$. Т.к. $u_{k+1},\dots u_n\in\widetilde R$, то $\widetilde C\subset H_{u_{k+1}}\cap\dots\cap H_{u_n}$ и $\dim(H_{u_{k+1}}\cap\dots\cap H_{u_n}\cap C) = k$. Для каждого $x\in H_{u_{k+1}}\cap\dots H_{u_n}\cap C$ имеем $(1-w)x = x - w'(s_{u_{k+1}}\dots s_{u_n}x) = (1-w')x$, откуда $\dim C_{w'} = \dim(C_{w'}\cap C_w)$. □

5. Относительные угловые меры конусов

В этом разделе мы докажем удивительную формулу Де Кончини [4] для относительной угловой меры сопряженного конуса. Вначале дадим такое определение.

Определение. Для любого конуса $K\subset V$ назовем *его относительной угловой мерой* и обозначим через $\sigma(K)$ отношение меры его пересечения с единичной сферой (с центром в нуле) к мере всей сферы.

Оказывается, что относительные угловые меры многих конусов, связанных с группой W, могут быть вычислены явно. Например, понятно, что $\sigma(C) = 1/|W|$. Возникает естественный вопрос: чему равно $\sigma(C^*)$?

5.1. Мера сопряженного конуса

Оказывается, что относительная мера сопряженного конуса может быть вычислена по следующей формуле (см. также [8]).

Теорема 7 (К. Де Кончини, К. Прочези [4])**.** $\sigma(C^*) = |W_{\mathrm{reg}}|/|W|$.

Доказательство из [4] было проведено путем перебора случаев. Общее доказательство было дано Стембриджем (см. [9]), но оно было довольно сложным и косвенным. Прямое комбинаторное доказательство было предложено Денхамом (см. [10]). Ниже мы приведем простое геометрическое доказательство, основанное на теореме Вальдшпургера (см. [8]).

Прежде чем переходить с строгому доказательству, поясним, откуда может быть получена данная формула. Рассмотрим разбиение сопряженного конуса C^* на конусы вида $(1-w)C$, где $w \in W_{\mathrm{reg}}$. Таких конусов ровно $|W_{\mathrm{reg}}|$. Если бы все преобразования $1-w$ были бы ортогональными, относительные угловые меры конусов C и $(1-w)C$ были бы равны и теорема 7 была бы доказана. Однако преобразования $1-w$ не являются ортогональными, поэтому это рассуждение не является доказательством. Приведем теперь строгое рассуждение.

Доказательство теоремы 7. Рассмотрим сопряженные конусы всех фундаментальных конусов, т.е. конусы вида $(wC)^*$, где $w \in W$. Их количество равно $|W|$, и они покрывают все пространство V. Пусть также $U = \bigcup\limits_{w_{\mathrm{reg}} \in W_{\mathrm{reg}}} \bigcup\limits_{w \in W} (1-w_{\mathrm{reg}})(wC^\circ)$. Из теоремы Вальдшпургера следует, что U — плотное открытое подмножество в V. Докажем, что каждый вектор $u \in U$ покрывается в точности $|W_{\mathrm{reg}}|$ конусами вида $(wC)^*$. Для этого рассмотрим элемент $w_{\mathrm{reg}} \in W_{\mathrm{reg}}$ и сопоставим ему элемент $w \in W$, такой, что $u \in (1-w_{\mathrm{reg}})(wC^\circ) \subset (wC)^*$ (такой элемент единствен, т.к. вектор $(1-w_{\mathrm{reg}})^{-1}u$ лежит в открытом ядре некоторого фундаментального конуса). Это отображение задает биекцию между множествами W_{reg} и $W(u) = \{w \in W : u \in (wC)^*\}$: если $u \in (wC)^*$ для некоторого $w \in W$, то по теореме Вальдшпургера существует единственный элемент $w_{\mathrm{reg}} \in W_{\mathrm{reg}}$, такой, что $u \in (1-w_{\mathrm{reg}})(wC^\circ)$.

Таким образом, каждый вектор $u \in U$ покрывается в точности $|W(u)| = |W_{\mathrm{reg}}|$ конусами вида $(wC)^*$. Отсюда следует, что $|W| \cdot \sigma(C^*) = |W_{\mathrm{reg}}|$, что и требовалось доказать. □

Замечания. Из формулы Соломона (см. [11]) следует, что $|W| = (m_1+1) \cdot \ldots \cdot (m_\ell+1)$ и $|W_{\mathrm{reg}}| = m_1 \cdot \ldots \cdot m_\ell$, где $m_1, \ldots, m_\ell$ — показатели группы W и $\ell = \dim V$. Поэтому относительная угловая мера сопряженного конуса может быть выражена через показатели группы W:

$$\sigma(C^*) = \frac{m_1 \cdot \ldots \cdot m_\ell}{(m_1+1) \cdot \ldots \cdot (m_\ell+1)}.$$

5.2. Обобщение

Пусть $W_k = \{w \in W : \dim\ker(1-w) = \ell - k\}$. Тогда $\sigma(C) = |W_0|/|W|$ и $\sigma(C^*) = |W_\ell|/|W|$. Можно предположить, что остальные отношения $|W_k|/|W|$ также связаны с относительными угловыми мерами некоторых конусов, причем эти конусы должны быть связаны и с C, и с C^*. Поэтому естественным представляется следующее определение.

Для каждой k-мерной грани F конуса C обозначим через C_F прямую сумму k-мерной грани F и $(\ell-k)$-мерной грани $F^\perp$ конуса C^*, ортогональной F. В частности, $C_C = C$ и $C_0 = C^*$.

Оказывается, теорема 7 может быть обобщена следующим образом (см. [12]).

Теорема 8. $\sum\limits_{F:\dim F=k} \sigma(F)\cdot\sigma(F^\perp) = \sum\limits_{F:\dim F=k} \sigma(C_F) = |W_{\ell-k}|/|W|$ *для всех* $k = 0, \ldots, \ell$.

Доказательство. Зафиксируем k и рассмотрим все конусы вида $w(C_F) = (wC)_{wF}$, где $w \in W$ и $\dim F = k$. Для каждого фиксированного F количество конусов вида $w(C_F)$ равно $|W|$, и они покрывают все пространство V (т.к. $C \subseteq C_F$). Рассмотрим также множество $U = \bigcup\limits_{w\in W} \bigcup\limits_{F:\dim F=k} \Big(wF^\circ \oplus \bigcup\limits_{w'\in W_{\ell-k}} (1-w')(wC^\circ)\Big)$. Из теоремы Вальдшпургера следует, что U — открытое плотное подмножество в V. Докажем, что каждый вектор $u \in U$ покрывается в точности $|W_{\ell-k}|$ конусами вида $w(C_F)$. Для этого рассмотрим элемент $w' \in W_{\ell-k}$ и сопоставим ему пару $(w; F)$ следующим образом. Пусть $\mathcal{K} = \ker(1-w')$ и $\mathcal{I} = \mathrm{Im}(1-w')$. Легко видеть, что $\mathcal{K}\perp\mathcal{I}$. Рассмотрим проекцию $u_\mathcal{K}$ вектора u на $\mathcal{K}$ и проекцию $u_\mathcal{I}$ на $\mathcal{I}$. Существует единственная грань $w_1F \subset \mathcal{K}$ фундаментального конуса w_1C, содержащая $u_\mathcal{K}$, и грань $w_2(C^*_\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$ сопряженного конуса $w_2(C^*)$, содержащая $u_\mathcal{I}$. Докажем, что тогда существует единственный конус $w(C_F)$, такой, что $wF = w_1F$ и $(wF)^\perp = w_2(C^*_\mathcal{I})$ (а значит, содержащий вектор u).

Рассмотрим векторы $v_F \in w_1F^\circ$, $v_\mathcal{I} \in w_2(C^*_\mathcal{I})^\circ$ и $v = tv_\mathcal{I} + v_F$ для достаточно малого $t > 0$. Обозначим через R множество единичных нормалей к зеркалам группы W. Поскольку $w_1F \perp w_2(C^*_\mathcal{I})$, имеем $(v,e) > 0$ для $e \in R \cap w_2(C^*_\mathcal{I})$, а также $(v,e) \neq 0$ для $e \in R$ в силу малости t. Множество $R_v = \{e \in R : (e,v) > 0\}$ является множеством единичных нормалей к некоторым зеркалам группы W. Эти нормали задают сопряженный конус $\langle R_v\rangle_+ = C^*_v = w(C^*)$ и фундаментальный конус $C_v = wC$. При этом конус w_1F является гранью фундаментального конуса C_v, а конус $w_2(C^*_\mathcal{I})$ — гранью сопряженного конуса C^*_v (т.к. $R \cap w_2(C^*_\mathcal{I}) \subseteq R_v \subseteq C^*_v$). Таким образом, конус $w(C_F)$ — искомый.

Итак, мы построили грань F и семейство конусов $\{w(C_F)\}$, каждый из которых содержит вектор u. Среди всех получившихся конусов $\{w(C_F)\}$ выберем тот, для которого $u_\mathcal{I} \in (1-w')(wC^\circ)$ (существование и единственность такого конуса следует из теоремы Вальдшпургера). Сопоставим элементу $w' \in W_{\ell-k}$ пару $(w; F)$. Ясно, что отображение $w' \mapsto (w; F)$ задает биекцию между множествами $W_{\ell-k}$ и $W_k(u) = \{(w; F) : \dim F = k,\ u \in w(C_F)\}$. Поэтому каждый вектор $u \in U$ покрывается в точности $|W_k(u)| = |W_{\ell-k}|$ конусами вида $w(C_F)$. Отсюда следует, что $|W| \cdot \sum\limits_{F:\dim F=k} \sigma(C_F) = |W_{\ell-k}|$, что и требовалось доказать. □

Замечания. Имеет место следующая формула Соломона (см. [11]): $\sum\limits_{k=0}^{\ell} |W_k| t^k = \prod\limits_{k=0}^{\ell} (1 + m_k t)$ где $m_1, \ldots, m_\ell$ — показатели группы W. Поэтому суммы относительных угловых мер конусов из теоремы 8 могут быть выражены через показатели группы W.

Список литературы

[1] Waldspurger J.-L. «*Une remarque sur les systèmes de racines*» // Journal of Lie Theory, Volume 17 (2007), Number 3. P. 597–603.

[2] Meinrenken E. «*Tilings Defined by Affine Weyl Groups*»; arXiv : math/0811.3880v2, 2009.

[3] Wang H-C., Pasiencier S. «*Commutators in a Semisimple Lie Group*» // Proc, Amer. Math. Soc., Volume 13 (1962), 907–913.

[4] De Concini C., Procesi C. «*A curious identity and the volume of the root spherical simplex*» // Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 17 (2006), no. 2, 155–165.

[5] Бурбаки Н. «*Группы и алгебры Ли, главы 4, 5, 6*». М.: Мир, 1972 г.

[6] Бибиков П. В., Жгун В. С. «*О разбиениях, связанных с дискретными групами отражений*» // Известия АН, (2009).

[7] Бибиков П. В., Жгун В. С. «*О теореме Вальдшпургера*» // Успехи математических наук, (2009).

[8] Бибиков П. В. «*Относительная угловая мера конуса, сопряженного фундаментальному конусу конечной линейной группы, порожденной отражениями*» // Успехи математических наук, (2009).

[9] Stembridge J. R. «Appendix to C. De Concini and C. Procesi Paper»; arXiv : math/0602279v2, 2006.

[10] Denham G. «A note of De Concini and Procesi's curious identity» // Mat. Appl. v.19 (2008), n.1, 55-63.

[11] Solomon L. «*Invariants of finite reflection groups*» // Nagoya Math. J. 22 (1963) 57–64.

[12] Бибиков П. В., Жгун В. С. «*Относительные угловые меры конусов, связанных с конечными линейными группами, порожденными отражениями*» // Математические заметки, (2009).