ОБ УСЛОВИЯХ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СКОЛЬЗЯЩИХ СРЕДНИХ

Д. И. Сидоров

Аннотация

Изучается применимость классических условий перемешивания для последовательностей скользящих средних, построенных как по независимым, так и зависимым случайным величинам. В частности, описан класс скользящих средних без условия m-зависимости, но со свойством равномерно сильного перемешивания. Также доказано отсутствие перемешивания для некоторых классов скользящих средних.

Ключевые слова: скользящие средние, сильное перемешивание, равномерно сильное перемешивание.

Введение

Пусть $\{\xi_j;\ j \in \mathbb{Z}\}$ – последовательность случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве, $\{a_j;\ j \in \mathbb{Z}\}$ – некоторые вещественные числа, где $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел. *Скользящие средние* $\{X_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$, порожденные последовательностью $\{\xi_j\}$, определяются равенством

$$X_k := \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{k-j}\xi_j; \tag{1}$$

при этом предполагается, что ряд в (1) сходится с вероятностью 1. В частности, это будет выполнено, если

$$\sum_j |a_{k-j}|\mathbf{E}|\xi_j| < \infty. \tag{2}$$

Если же случайные величины $\{\xi_j;\ j \in \mathbb{Z}\}$ независимы, имеют конечный второй момент и центрированы, то для сходимости ряда в (1) достаточно потребовать более слабое условие

$$\sum_j a_{k-j}^2 \mathbf{E}\xi_j^2 < \infty.$$

Отметим, что для независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_j;\ j \in \mathbb{Z}\}$ скользящие средние в (1) представляют собой последовательность стационарно связанных случайных величин. Если множество отличных от нуля коэффициентов a_j в (1) конечно, то при условии независимости порождающих случайных величин $\{\xi_j\}$ последовательность $\{X_k\}$ представляет собой совокупность m-зависимых случайных величин. Если множество $A_0 := \{j \in \mathbb{Z} : a_j \neq 0\}$ бесконечно, то зависимость между частями последовательности $\{X_k\}$ может быть достаточно сильной, и, в частности, классические условия перемешивания Розенблатта и Ибрагимова для нее могут не выполняться [1-3, 5].

Напомним, что последовательность $\{X_k\}$ удовлетворяет условию перемешивания Розенблатта (так называемое *сильное* или *α-перемешивание*), если при $m \to \infty$

$$\alpha(m) := \sup_{k\in\mathbb{Z}, A\in\mathcal{A}_{-\infty}^k, B\in\mathcal{A}_{k+m}^{\infty}} |\mathbf{P}(B\cap A) - \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A)| \to 0,$$

и удовлетворяет условию перемешивания Ибрагимова (так называемое *равномерно сильное* или *φ-перемешивание*), если при $m \to \infty$

$$\varphi(m) := \sup_{k\in\mathbb{Z}, A\in\mathcal{A}_{-\infty}^k, B\in\mathcal{A}_{k+m}^{\infty}, \mathbf{P}(A)\neq 0} \frac{|\mathbf{P}(B\cap A) - \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A)|}{\mathbf{P}(A)} \to 0,$$

где $\mathcal{A}_{-\infty}^k = \sigma\{X_j, j \le k\}$ и $\mathcal{A}_{k+m}^{\infty} = \sigma\{X_j, j \ge k+m\}$ – σ-алгебры, порожденные соответствующими наборами случайных величин.

Условие Розенблатта для последовательностей скользящих средних исследовалось в [4-6] (в [6] – для последовательностей в более общей форме), и был найден класс скользящих средних, удовлетворяющих этому условию. Условие Ибрагимова является более ограничительным, и, например, в случае независимых (или стационарно связанных) гауссовских величин $\{\xi_j\}$ оно выполняется только для последовательностей $\{X_k\}$ с условием m-зависимости [3], т. е. если только множество A_0 конечно. В настоящей работе, в частности, найдены скользящие средние, удовлетворяющие условию Ибрагимова, когда множество A_0 бесконечно. Кроме этого, для некоторых классов скользящих средних доказано отсутствие перемешивания.

1. α-перемешивание

Условие α-перемешивания было предложено М. А. Розенблаттом в 1956 году [8]. В работах [4-6] исследовались последовательности, удовлетворяющие этому условию. Результат в наиболее общей форме был получен в [6], где описан подкласс скользящих средних со свойством α-перемешивания. Основным условием в [6] на распределение случайных величин ξ_j при этом является наличие плотности $p(t)$, удовлетворяющей условию Липшица в среднем: $\int |p(t+x) - p(t)|dt \le C|x|$.

С другой стороны, в [1] было доказано, что для последовательности $X_k = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \rho^j \xi_{k-j}$, где ξ_j – независимые бернуллиевские случайные величины, условие сильного перемешивания не выполняется. Основываясь на тех же рассуждениях, что и в [1], данный результат можно распространить и на более общий случай скользящих средних, построенных по дискретным величинам с конечным множеством значений.

Предложение 1. *Пусть* $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ *– независимые дискретные случайные величины, из которых хотя бы одна невырожденная. Кроме того, пусть существуют такие константы* $0 < \delta \le \Delta < \infty$*, не зависящие от* j*, что расстояние между любыми двумя атомами распределения* ξ_j *не меньше* δ *и не превосходит* Δ*. Наконец, пусть для всех* k *ряд в* (2) *сходится и выполнено одно из следующих двух условий на коэффициенты:*

1) $a_j = \begin{cases} a_0 q^{|j|}, & j < 0, \\ a_0 a^j, & j \ge 0, \end{cases}$ $a_0 \ne 0$, $0 < q < 1$, $0 < a \le \frac{\delta}{\Delta+\delta}$;

2) $0 < |a_{k_{j+1}}| \leqslant |a_{k_j}| \frac{\delta}{\Delta+\delta}$ *для всех* $j \ge 0$*, где* $\{a_{k_j};\, j \ge 0\}$ *– упорядоченные по убыванию абсолютных величин ненулевые коэффициенты* a_j.

Тогда последовательность $\{X_k\}$ *не удовлетворяет условию* α*-перемешивания.*

Если в условиях 1) *и* 2) *неравенства для* a *и* a_{k_j} *строгие, то утверждение останется верным и в случае произвольно зависимых случайных величин* ξ_j.

Отдельно можно выделить класс последовательностей, построенных по независимым гауссовским случайным величинам ξ_j. В этом случае $\{X_k\}$ является стационарной гауссовской последовательностью, а α-перемешивание эквивалентно полной регулярности. Известны необходимые и достаточные условия в терминах спектральной плотности, при которых стационарная последовательность является вполне регулярной: это так называемая теорема Хелсона – Сарасана (см. [7]) Однако непосредственная проверка этих условий является непростой задачей. С помощью этой теоремы в [5] было доказано отсутствие перемешивания для некоторой последовательности $\{X_k\}$, построенной по недискретным случайным величинам $\{\xi_j\}$ (см. в [5] пример И. А. Ибрагимова).

Более простые достаточные условия получены в [2] и [3]. Они сводятся к проверке положительности и непрерывности спектральной плотности стационарной гауссовской последовательности. В случае скользящих средних, построенных по независимым одинаково распределенным случайны величинам $\{\xi_j\}$, спектральная плотность $f(\lambda)$ последовательности $\{X_k\}$ имеет вид

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{-i\lambda k}\Big|^2 \mathbf{E}\xi_0^2,$$

при этом данная функция является непрерывной и положительной, если, например, $\sum\limits_{k\neq k_0} |a_k| < |a_{k_0}|$ для некоторого k_0.

2. φ-перемешивание

Как уже было отмечено [3], в случае гауссовской последовательности $\{X_k\}$ равномерно сильное перемешивание влечет за собой m-зависимость $\{X_k\}$. Таким образом, если множество A_0 бесконечно а $\{\xi_j\}$ – независимые гауссовские случайные величины, то условие φ-перемешивания не выполнено. Следующие две теоремы описывают случаи, когда φ-перемешивания скользящих средних отсутствует для некоторых других классов распределений ξ_j.

Теорема 1. *Пусть $\{\xi_j, j\in\mathbb{Z}\}$ – независимые случайные величины, $a_j > 0$ при всех j, ряд в (2) сходится при всех k, и выполнены условия:*

1) *существуют положительные константы x_0, c_0, c_1, c_2, такие что для некоторого целого j_0 и некоторого $j_1 > 0$*

$$\sup_{x\geq x_0} \frac{\mathbf{P}(\xi_{j_0} \geq x+y)}{\mathbf{P}(\xi_{j_0} \geq x)} \leq c_1 e^{-c_2 y} \quad \text{для всех } \ y \geq 0,$$

$$\mathbf{P}(\xi_j \geq x) \leq c_1 e^{-c_2 x} \quad \text{для всех } \ x \geq x_0, \ \text{если } |j| < j_1,$$

$$\mathbf{P}(\xi_j \geq x) \leq c_0 \mathbf{P}(\xi_{j_0} \geq x) \quad \text{для всех } \ x \geq x_0, \ \text{если } |j| \geq j_1;$$

2)

$$\inf_{j\in\mathbb{Z}} \frac{a_j}{a_{j+1}} > 0;$$

а также выполнено одно из следующих условий:

3)

$$\sum_{j\neq 0} a_j \ln|j| < \infty \text{ и } \inf_{j\in\mathbb{Z}} \frac{a_{j+1}}{a_j} > 0;$$

3′) *для некоторых* $\delta > 0$, $c_3 > 0$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j |j|^\delta < \infty \text{ и } \frac{a_{j+1}}{a_j} \geq \frac{c_3}{ln|j|} \text{ при } |j| \to \infty.$$

Тогда соответствующая последовательность $\{X_k\}$ *не удовлетворяет условию* φ*-перемешивания.*

Теорема 2. *Пусть* $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ – *последовательность ограниченных случайных величин, из которых хотя бы одна невырожденная и не зависит от остальных, множество* $A^- := \{j < 0 : a_j \neq 0\}$ *бесконечно, и для любого* k *случайная величина* X_k *ограничена. Тогда последовательность* $\{X_k\}$ *не удовлетворяет условию* φ*-перемешивания.*

Если в условиях теоремы 2 не требовать бесконечность множества A^-, то φ-перемешивание последовательности $\{X_k\}$ возможно и в том случае, когда множество всех ненулевых коэффициентов a_j бесконечно. Описанию такого класса скользящих средних посвящена следующая теорема.

Введем для некоторого $p \geq 1$ (включая случай $p = \infty$) дополнительное ограничение на коэффициенты $\{a_j\}$:

$$\begin{gathered} \sum_{k\geq 0} \Big(\sum_{j\geq k} |a_j|^p \Big)^{1/p} < \infty, \text{ если } p < \infty, \\ \sum_{k\geq 0} \sup_{j\geq k} |a_j| < \infty, \text{ если } p = \infty. \end{gathered} \tag{3}$$

Очевидно, из (3) следует, что $\sum |a_k| < \infty$. Обозначим через L линейный оператор, который отображает пространство суммируемых последовательностей l_1 в себя по следующему правилу: образ $Ly := ((Ly)_k; k \in \mathbb{Z})$ любого элемента $y := (y_j; j \in \mathbb{Z}) \in l_1$ задается формулой

$$(Ly)_k = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{k-j} y_j, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Легко видеть, что оператор L является ограниченным в пространстве l_1.

Теорема 3. *Пусть $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ – независимые ограниченные случайные величины, имеющие плотности распределений $p_j(x)$, множество A^- конечно, и существует такое $C_1 > 0$, что для всех j*

$$\int |p_j(y+x) - p_j(y)|dy \le C_1|x| \text{ при всех } x.$$

Пусть также для некоторого $p \ge 1$ выполнено (3) и существует ограниченный обратный оператор L^{-1} в пространстве l_1. Кроме того, пусть для некоторого $C > 0$

$$\mathbf{P}\Big(\big(\sum_j |\xi_j|^q\big)^{1/q} \le C\Big) = 1, \text{ если } p > 1,$$
$$\mathbf{P}\Big(\sup_j |\xi_j| \le C\Big) = 1, \text{ если } p = 1,$$

где $1/p + 1/q = 1$. Тогда последовательность $\{X_k\}$ удовлетворяет условию φ-перемешивания.

Замечание. Если для некоторого k_0 имеет место неравенство $|a_{k_0}| > \sum\limits_{k \ne k_0} |a_k|$, то оператор L имеет ограниченный обратный в пространстве l_1, так как он представим в виде $L = a_{k_0}(I - \widetilde{L})$, где I – тождественный оператор, а для операторной нормы $||\widetilde{L}||$ справедлива следующая оценка:

$$||\widetilde{L}|| = ||I - \frac{1}{a_{k_0}}L|| = \sup_{||y|| \le 1} \Big|\Big(I - \frac{1}{a_{k_0}}L\Big)y\Big| \le \sup_{||y|| \le 1} \frac{1}{|a_{k_0}|} \sum_{k \ne k_0} |a_k| \sum_j |y_j| < 1.$$

3. Доказательства.

3.1. Доказательство предложения 1. Сначала докажем это утверждение при выполнении условия 2). Так как детерминированный сдвиг случайной величины ξ_j не влияет на коэффициент перемешивания, то можно считать, что $|\xi_j| \le \Delta/2$ для всех j.

Пусть $V_{m,n}$ – множество значений, принимаемых случайной величиной $Y_{m,n} := \sum\limits_{j=0}^{n} a_{k_j}\xi_{m-k_j}$. Индукцией по n можно показать, что расстояние между любыми двумя точками множества $V_{m,n}$ не менее $|a_{k_n}|\delta$, значение величины $Y_{m,n}$ однозначно определяет значения всех ξ_{k_j}, $j = 0, \ldots, n$. Так как

$$\Big| \sum_{j \geq n+1} a_{k_j} \xi_{m-k_j} \Big| \leq \sum_{j \geq n+1} |a_{k_n}| \Big(\frac{\delta}{\Delta + \delta}\Big)^{j-n} \Delta/2 = |a_{k_n}|\delta/2,$$

при этом равенство достигается с нулевой вероятностью, $X_m = Y_{m,n} + \sum\limits_{j \geq n+1} a_{k_j} \xi_{m-k_j}$, то событие $\Big\{X_m \in \big[v - |a_{k_n}|\delta/2, v + |a_{k_n}|\delta/2\big]\Big\}$, где $v \in V_{m,n}$ совпадает с $\{Y_{m,n} = v\}$ с точностью до множества нулевой вероятности.

Обозначим $W_{m,n} := \bigcup\limits_{v \in V_{m,n-1}} \{v + a_{k_n} z\}$ множество всех значений, принимаемых $Y_{m,n}$ при условии $\xi_{m-k_n} = z$. Таким образом,

$$\{Y_{m,n} \in W_{m,n}\} = \{\xi_{m-k_n} = z\}, \quad W_{m,n} \subset V_{m,n}.$$

Положим $B_{m,n} := \bigcup\limits_{w \in W_{m,n}} \big[w - |a_{k_n}|\delta/2, w + |a_{k_n}|\delta/2\big]$. Тогда событие $\{X_m \in B_{m,n}\}$ совпадает с событием $\{\xi_{m-k_n} = z\}$ с точностью до множества нулевой вероятности.

Пусть ξ_n – невырожденная случайная величина, а значение z выбрано так, что $0 < \mathbf{P}(\xi_n = z) < 1$. В этом случае условие сильного перемешивания не выполнено, поскольку

$$|\mathbf{P}(X_{k_j} \in B_{k_j+n,j}, X_{k_0} \in B_{k_0+n,0}) - \mathbf{P}(X_{k_j} \in B_{k_j+n,j})\mathbf{P}(X_{k_0} \in B_{k_0+n,0})| =$$

$$|\mathbf{P}(\xi_n = z) - \mathbf{P}(\xi_n = z)\mathbf{P}(\xi_n = z)| =$$

$$\mathbf{P}(\xi_n = z)(1 - \mathbf{P}(\xi_n = z)) \nrightarrow 0 \text{ при } |k_j - k_0| \to \infty.$$

Пусть теперь выполнено условие 1). Тогда

$$\sum_{j \geq 0} a^j \xi_{k-j} = \frac{X_k - qX_{k+1}}{a_0(1 - aq)} =: Y_k.$$

В этом случае отсутствие перемешивания доказывается аналогично предыдущему заменой X_k на Y_k, полагая $k_j = j$.

Таким образом, предложение 1 доказано.

3.2. Доказательство теоремы 1. Можно считать, что $\mathbf{E}\xi_j = 0$ при всех j. Докажем сначала, что для $m > 0$

$$\liminf_{x \to \infty} \mathbf{P}(X_0 < 0 | X_{-m} \geq x) = 0. \tag{4}$$

Для любого $\alpha > 0$ имеем

$$\mathbf{P}(X_0 < 0 | X_{-m} \geq x) = \frac{\mathbf{P}(X_0 < 0, X_{-m} \geq x)}{\mathbf{P}(X_{-m} \geq x)} \leq$$

$$\frac{\mathbf{P}(X_{-m} - \alpha X_0 \geq x)}{\mathbf{P}(X_{-m} \geq x)} = \frac{\mathbf{P}(\sum (a_j - \alpha a_{m+j}) \xi_{-m-j} \geq x)}{\mathbf{P}(X_{-m} \geq x)}.$$

Введем следующие величины:

$$q := \frac{1}{2} \inf_{j \in \mathbb{Z}} \frac{a_j}{a_{j+1}}, \;\; t_j := t_j(m) = \min_{|k| \leq |j|} \frac{a_{k+m}}{a_k},$$

$$\lambda \in (0, q^m), \;\; \alpha := q^m, \;\; b_j := a_j - \alpha a_{m+j}.$$

Тогда $0 < b_j < a_j$ для всех j, и справедлива следующая оценка:

$$\mathbf{P}(X_0 < 0 | X_{-m} \geq x) \leq \frac{\mathbf{P}(\sum b_j \xi_{-m-j} \geq x)}{\mathbf{P}(X_{-m} \geq x)} \leq$$

$$\frac{\mathbf{P}\Big(\sum\limits_{|j| \leq j_2} b_j \xi_{-m-j} \geq (1 - \lambda t_{j_2}) x\Big)}{\mathbf{P}(X_{-m} \geq x)} + \frac{\mathbf{P}\Big(\sum\limits_{|j| > j_2} b_j \xi_{-m-j} \geq \lambda t_{j_2} x\Big)}{\mathbf{P}(X_{-m} \geq x)} = S_1 + S_2, \quad (5)$$

где j_2 выбирается достаточно большим так, чтобы слагаемое S_2 стремилось к нулю при $x \to \infty$. Докажем, что такое j_2 существует. Пусть $f_j = \ln |j|$, если выполнено условие 3), и $f_j = |j|^\delta$, если выполнено 3$'$). Тогда

$$c_f := \sum_{j \neq 0} a_j f_j < \infty,$$

и для каждого m существуют такие $K \in \mathbb{N}$ и $c_4 > 0$, что

$$f_j t_j \geq c_4 \ln |j|, \text{ если } |j| \geq K.$$

Положим

$$j_2 := \max\{K, j_1 + m, \exp \frac{c_f}{\lambda c_4 a_{-m-j_0}}\}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{|j| > j_2} b_j \xi_{-m-j} \geq \lambda t_{j_2} x\Big) \leq \mathbf{P}\Big(\sum_{|j| > j_2} b_j \xi_{-m-j} \geq \lambda t_{j_2} x \sum_{|j| > j_2} \frac{a_j f_j}{c_f}\Big) \leq$$

$$\sum_{|j|>j_2} \mathbf{P}\Big(b_j\xi_{-m-j} \ge \lambda \frac{a_j f_j}{c_f} t_{j_2} x\Big) \le c_0 \sum_{|j|>j_2} \mathbf{P}\Big(\xi_{j_0} \ge \lambda \frac{f_j}{c_f} t_j x\Big) \le$$

$$c_0 \sum_{|j|>j_2} \mathbf{P}\Big(\xi_{j_0} \ge \frac{\lambda c_4 \ln|j|}{c_f} x\Big) \le$$

$$c_0 \mathbf{P}\Big(\xi_{j_0} \ge \frac{x}{a_{-m-j_0}}\Big) \sum_{|j|>j_2} c_1 \exp\Big\{-c_2\Big(\frac{\lambda c_4 \ln|j|}{c_f} - \frac{1}{a_{-m-j_0}}\Big)x\Big\},$$

где ряд $\sum\limits_{|j|>j_2}$ не превосходит величину

$$\frac{2c_1 c_f j_2}{\lambda c_2 c_4} \frac{1}{x} \exp\Big\{-c_2\Big(\frac{\lambda c_4 \ln j_2}{c_f} - \frac{1}{a_{-m-j_0}}\Big)x\Big\} \to 0 \text{ при } x \to \infty.$$

Кроме того,

$$\mathbf{P}\Big(\xi_{j_0} \ge \frac{x}{a_{-m-j_0}}\Big) \le \frac{\mathbf{P}(X_{-m} \ge x)}{\mathbf{P}\big(\sum\limits_{j \ne j_0} a_{-m-j}\xi_j \ge 0\big)}.$$

Поэтому $S_2 \to 0$ при $x \to \infty$.

Покажем, что $\liminf\limits_{x\to\infty} S_1 = 0$. Представим S_1 в виде произведения

$$\frac{\mathbf{P}\Big(\sum\limits_{|j|\le j_2} b_j\xi_{-m-j} \ge (1-\lambda t_{j_2})x\Big)}{\mathbf{P}\Big(\sum\limits_{|j|\le j_2} b_j\xi_{-m-j} \ge (1-q^m t_{j_2})x\Big)} \times \frac{\mathbf{P}\Big(\sum\limits_{|j|\le j_2} b_j\xi_{-m-j} \ge (1-q^m t_{j_2})x\Big)}{\mathbf{P}\Big(\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} a_j\xi_{-m-j} \ge x\Big)}. \quad (6)$$

Нижний предел первого множителя в (6) равен нулю, так как правая часть неравенства

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{|j|\le j_2} b_j\xi_{-m-j} \ge x\Big) \le \sum_{|j|\le j_2} \mathbf{P}\Big(\xi_{-m-j} \ge \frac{1}{2j_2 b_j} x\Big)$$

представляет собой функцию, которая при $x \to \infty$ убывает экспоненциально или быстрее некоторой экспоненты, а $1-\lambda t_{j_2} > 1 - q^m t_{j_2}$.

Второй множитель в (6) ограничен по x. Индукцией по k докажем, что для любого k найдется такая константа d_k, что

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{j\in J} b_j\xi_{-m-j} \ge (1-q^m t_{j_2})x\Big) \le d_k \mathbf{P}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\xi_{-m-j} \ge x\Big) \text{ для всех } x \ge 0,$$

где $J \subset \{-j_2, -j_2+1, \ldots, j_2\}$ и содержит не более k элементов. Для всех $|j| \le j_2$ выполнено

$$\frac{b_j}{a_j} = 1 - \alpha \frac{a_{m+j}}{a_j} \le 1 - q^m t_{j_2} < 1 - \lambda t_{j_2}.$$

При $k = 1$ для любого $|i| \le j_2$ имеем

$$\mathbf{P}(b_i \xi_{-m-i} \ge (1 - q^m t_{j_2})x) \le \mathbf{P}(a_i \xi_{-m-i} \ge x) \le \frac{\mathbf{P}\Big(\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} a_j \xi_{-m-j} \ge x\Big)}{\mathbf{P}\Big(\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{i\}} a_j \xi_{-m-j} \ge 0\Big)},$$

$$d_1 := \max_{|i|\le j_2} \Big\{ \Big(\mathbf{P}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{i\}} a_{-j}\xi_j \ge 0 \Big)\Big)^{-1} \Big\}.$$

Если d_{k-1} существует и J содержит k элементов, то справедлива следующая оценка:

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{j\in J} b_j \xi_{-m-j} \ge (1 - q^m t_{j_2})x \Big) \le$$

$$\sum_{i\in J} \mathbf{P}\Big(\sum_{j\in J} b_j \xi_{-m-j} \ge (1 - q^m t_{j_2})x,\ \xi_{-m-i} < 0 \Big) +$$

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{j\in J} b_j \xi_{-m-j} \ge (1 - q^m t_{j_2})x,\ \xi_{-m-j} \ge 0\ \ \forall j \in J \Big) \le$$

$$\sum_{i\in J} \mathbf{P}\Big(\sum_{j\in J\setminus\{i\}} b_j \xi_{-m-j} \ge (1 - q^m t_{j_2})x \Big) + \mathbf{P}\Big(\sum_{j\in J} a_j \xi_{-m-j} \ge x \Big) \le$$

$$k d_{k-1} \mathbf{P}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \xi_{-m-j} \ge x \Big) + \frac{\mathbf{P}\Big(\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} a_j \xi_{-m-j} \ge x\Big)}{\mathbf{P}\Big(\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}\setminus J} a_j \xi_{-m-j} \ge 0\Big)}.$$

Следовательно, существует и d_k, поскольку

$$d_k = k d_{k-1} + \max_{\widetilde{J}\subset\{-j_2,\ldots,j_2\}, \#\widetilde{J}=k} \Big\{ \Big(\mathbf{P}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\widetilde{J}} a_{-j}\xi_j \ge 0 \Big)\Big)^{-1} \Big\}.$$

Таким образом, доказано, что $\liminf\limits_{x\to\infty} S_1 = 0$, и из (5) следует (4).

В рассматриваемом случае условие равномерно сильного перемешивания не выполнено, так как функция $\varphi(m)$ ограничена снизу:

$$\varphi(m) \geq \sup_x \big|\mathbf{P}(X_0 < 0|X_{-m} \geq x) - \mathbf{P}(X_0 < 0)\big| \geq$$

$$\liminf_{x\to\infty} \big|\mathbf{P}(X_0 < 0|X_{-m} \geq x) - \mathbf{P}(X_0 < 0)\big| = \mathbf{P}(X_0 < 0) > 0.$$

Теорема 1 доказана.

3.3. Доказательство теоремы 2. Можно считать, что $a_0 > 0$ и ξ_0 – невырожденная центрированная случайная величина, не зависящая от остальных ξ_j. Тогда для некоторого $\delta > 0$ будут выполнены неравенства $\mathbf{P}(\xi_0 > \delta) > 0$, $\mathbf{P}(\xi_0 < -\delta) > 0$.

Пусть целое число m такое, что $a_{-m} \neq 0$ (допустим для определенности, что $a_{-m} > 0$), y_0 – нижняя граница носителя распределения величины $\sum\limits_{j\neq 0} a_{-j}\xi_j$, а x_m – верхняя граница для величины $\sum\limits_{j\neq 0} a_{-m-j}\xi_j$. Тогда

$$\mathbf{P}(X_{-m} \geq x_m) \geq \mathbf{P}\Big(\sum_{j\neq 0} a_{-m-j}\xi_j \geq x_m - \delta a_{-m}\Big)\mathbf{P}(a_{-m}\xi_0 > \delta a_{-m}) \neq 0,$$

$$\mathbf{P}(X_0 < y_0) \geq \mathbf{P}\Big(\sum_{j\neq 0} a_{-j}\xi_j < y_0 + \delta a_{-m}\Big)\mathbf{P}(a_0\xi_0 > \delta a_0) \neq 0,$$

$$\{X_{-m} \geq x_m\} \subset \{\xi_0 = \frac{1}{a_{-m}}(X_{-m} - \sum_{j\neq 0} a_{-m-j}\xi_j) \geq 0\},$$

$$\{X_0 < y_0\} \subset \{\xi_0 = \frac{1}{a_0}(X_0 - \sum_{j\neq 0} a_{-j}\xi_j) < 0\}.$$

Коэффициент φ-перемешивания не стремится к нулю с ростом m, так как

$$\varphi(m) \geq |\mathbf{P}(X_0 < y_0|X_{-m} \geq x_m) - \mathbf{P}(X_0 < y_0)| = \mathbf{P}(X_0 < y_0).$$

Теорема 2 доказана.

3.4. Доказательство теоремы 3. Можно считать, что $a_0 \neq 0$ и $a_j = 0$ при всех $j < 0$. Пусть $G := (g_{k,j})_{k,j\in\mathbb{Z}}$ – оператор, обратный к

L, при этом $g_{k,j} := g_{k-j}$, $g_{k-j} = 0$ при $k < j$. Определим операторы $G^n, L^n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ их матрицами

$$L^n := \begin{pmatrix} a_0 & 0 & ... & 0 \\ a_1 & a_0 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & ... & a_0 \end{pmatrix}, \quad G^n := \begin{pmatrix} g_0 & 0 & ... & 0 \\ g_1 & g_0 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ g_n & g_{n-1} & ... & g_0 \end{pmatrix}.$$

При этом G^n является обратным к L^n и $||G^n|| \le ||G||$. Нам достаточно доказать, что существует верхняя оценка $\widetilde{\varphi}(m) \to 0$ при $m \to \infty$, такая что

$$\frac{|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|}{\mathbf{P}(A)} \le \widetilde{\varphi}(m) \tag{7}$$

для любых событий $A \in \sigma\{X_k, k \le k_0\}$ с условием $\mathbf{P}(A) \ne 0$ и событий $B = \bigcap\limits_{k=k_0+m}^{k_0+m+M} \{X_k \in B_k\}$, где B_k – любые борелевские множества, k_0 – любое целое, M – любое натуральное число.

Обозначим $m_1 := k_0 + m$, $m_2 := k_0 + m + M$. Для $m_1 \le k \le m_2$ введем случайные величины $Y_k := \sum\limits_{j=k_0+1}^{k} a_{k-j}\xi_j$ и множество $D := \bigcap\limits_{k=m_1}^{m_2} \{Y_k \in B_k\}$ и сначала оценим величину $|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(D)|$. Так как $A \in \mathcal{F}_{-\infty}^{m_1-1} := \sigma\{\xi_j, \ \ j \le m_1 - 1\}$, то

$$|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(D)| =$$

$$\Big|\mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\big(I_A I_B - I_A I_D|\mathcal{F}_{-\infty}^{m_1-1}\big)\Big)\Big| = \Big|\mathbf{E}\Big(I_A\, \mathbf{E}\big(I_B - I_D|\mathcal{F}_{-\infty}^{m_1-1}\big)\Big)\Big| \le$$

$$\mathbf{P}(A)\text{ess.sup}\Big|\mathbf{E}\big(I_B|\mathcal{F}_{-\infty}^{m_1-1}\big) - \mathbf{E}\big(I_D|\mathcal{F}_{-\infty}^{m_1-1}\big)\Big|, \tag{8}$$

где I_A, I_B, I_D – индикаторы соответствующих множеств.

$$I_1 := \text{ess.sup}\Big|\mathbf{E}\big(I_B|\mathcal{F}_{-\infty}^{m_1-1}\big) - \mathbf{E}\big(I_D|\mathcal{F}_{-\infty}^{m_1-1}\big)\Big| \le$$

$$\sup\Big|\int I\Big(\bigcap_{k=m_1}^{m_2}\Big\{\sum_{j=-\infty}^{m_1-1} a_{k-j}v_j + \sum_{j=m_1}^{k} a_{k-j}\widetilde{y}_j \in B_k\Big\}\Big)\prod_{j=m_1}^{m_2} p_j(\widetilde{y}_j)d\widetilde{y}_j -$$

$$\int I\Big(\bigcap_{k=m_1}^{m_2}\Big\{\sum_{j=k_0+1}^{m_1-1} a_{k-j}v_j + \sum_{j=m_1}^{k} a_{k-j}y_j \in B_k\Big\}\Big)\prod_{j=m_1}^{m_2} p_j(y_j)dy_j\Big|, \tag{9}$$

где sup берется по множеству последовательностей v_j, таких что $||v_j||_q < C$. Сделаем замену переменных в первом интеграле правой части (9) по формуле $y_k = \widetilde{y}_k + w_k$, $m_1 \le k \le m_2$, где

$$(w_{m_1}, w_{m_1+1}, \ldots, w_{m_2})^T = G^M(z_{m_1}, z_{m_1+1}, \ldots, z_{m_2})^T, \quad z_k := \sum_{j \le k_0} a_{k-j} v_j,$$

при этом w_k удовлетворяют условию

$$\sum_{k=m_1}^{m_2} |w_k| \le ||G|| \sum_{k=m_1}^{m_2} |z_k| \le ||G|| \sum_{k=k_0+m}^{m_2} \Big| \sum_{j \le k_0} a_{k-j} v_j \Big| \le S(m),$$

где

$$S(m) = C||G|| \sum_{k \ge m} \Big(\sum_{j \ge k} |a_j|^p \Big)^{1/p}, \text{ если } p < \infty, \text{ и}$$

$$S(m) = C||G|| \sum_{k \ge m} \sup_{j \ge k} |a_j|, \text{ если } p = \infty.$$

Из равенств $w_k + \widetilde{y}_k = y_k$, $m_1 \le k \le m_2$, следует, что

$$\sum_{j \le k_0} a_{k-j} v_j + \sum_{m_1 \le j \le k} a_{k-j} \widetilde{y}_j = \sum_{m_1 \le j \le k} a_{k-j} y_j,$$

поэтому после замены переменных аргументы индикаторных функций в (9) совпадают, а, стало быть,

$$I_1 \le \sup_{\sum |w_j| < S(m)} \int \Big| \prod_{j=m_1}^{m_2} p_j(y_j - w_j) - \prod_{j=m_1}^{m_2} p_j(y_j) \Big| \prod_{j=m_1}^{m_2} dy_j \le$$

$$\sup_{\sum |w_j| < S(m)} \sum_{j=m_1}^{m_2} \int |p_j(y_j - w_j) - p_j(y_j)| dy_j \le C_1 \sup_{\sum |w_j| < S(m)} \sum_{j=m_1}^{m_2} |w_j| \le C_1 S(m).$$

Таким образом, из (8) следует $|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(D)| \le \mathbf{P}(A) C_1 S(m)$. Так как это верно для любого множества $A \in \sigma\{X_k, k \le k_0\}$, то из этого неравенства также следует, что $|\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(D)| \le C_1 S(m)$ и

$$\frac{|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|}{\mathbf{P}(A)} \le$$

$$\frac{|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(D)|}{\mathbf{P}(A)} + |\mathbf{P}(D) - \mathbf{P}(B)| \le 2C_1 S(m),$$

то есть (7) выполнено с $\widetilde{\varphi}(m) = 2C_1 S(m)$. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Donald W. K. Andrews.* Non-strong mixing autoregressive processes. – J. Appl. Prob., 1984, v. 21, № 4, p. 930-934.

2. *Колмогоров А. Н., Розанов Ю. А.* Об условиях сильного перемешивания гауссовского стационарного процесса. – Теор. вер. и ее примен., 1960, т. 5, № 2, с. 222-227.

3. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные случайные величины. М., 1965.

4. *K. C. Chanda.* Strong mixing properties of linear stochastic processes. – J. Appl. Prob., 1974, v. 11, № 2, p. 401-408.

5. *Городецкий В. В.* О свойстве сильного перемешивания для линейно порожденных последовательностей. – Теор. вер. и ее примен., 1977, т. 22, № 2, с. 421-423.

6. *Doukhan, P.* Mixing: Properties and Examples. Lecture Notes in Statistics, Springer, Berlin, 1994, v. 85.

7. *Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А.* Гауссовские случайные процессы. М., Наука, 1970.

8. *Rosenblatt, M.* A central limit theorem and a strong mixing condition. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, v. 42, p. 43-47.

Сидоров Дмитрий Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
dsidorov@mail.ru