**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП Л.ЭЙЛЕРА.**

О. А. Кривошеева

Башкирский государственный университет

Пусть $D$ — выпуклая область в комплексной плоскости. Через $H(D)$ обозначим пространство функций, аналитических в $D$ с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах $D$. В работе рассматриваются ряды экспоненциальных мономов, т.е. ряды вида

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z). \qquad (1)$$

Найдено необходимое условие замкнутости множества сумм этих рядов в топологии пространства $H(D)$.

Прежде, чем перейти к результатам работы, введем еще некоторые обозначения и определения. Пусть $D$ — выпуклая область в $\mathbb{C}$. В дальнейшем считаем, что для каждой такой области выбрана и зафиксирована последовательность выпуклых компактов $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ — из $D$, исчерпывающая $D$, то есть такая, что $K_m \subset intK_{m+1}$, $m \geq 1$, и $\bigcup\limits_m K_m = D$; ($intM$ обозначает внутренность множества $M$). Так как $K_m \subset intK_{m+1}$, то для каждого $m \geq 1$ найдется $\alpha_m > 0$ такое, что выполнено неравенство

$$H_{K_m}(z) + \alpha_m |z| \leq H_{K_{m+1}}(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C} \qquad (2)$$

Здесь $H_M(z) = \sup\limits_{y \in M} Rezy$ — опорная функция $M$ (точнее комплексно сопряженного к $M$ множества).

Положим $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$, где $\lambda_k$ — комплексные числа и $m_k$ — натуральные числа, и $m(\Lambda) = \overline{lim}_{k\to\infty} \frac{m_k}{|\lambda_k|}$. Рассмотрим семейство функций $\Phi(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z), k = 1, 2, \ldots, n = 0, 1, \ldots, m_k - 1\}$. Пусть $W$ — нетривиальное замкнутое инвариантное относительно дифференцирования подпространство в $H(D)$. Предположим, что $\Phi(\Lambda)$ совпадает с множеством всех собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в $W$ и при этом полно в $W$. В этом случае говорят, что $W$ допускает спектральный синтез. Проблема представления функций из $W$ посредством рядов вида (1) носит название проблемы фундаментального принципа Л.Эйлера. Ее решение тесно связано с решением интерполяционной задачи в пространствах целых функций и имеет очень богатую историю. Обзор некоторых основных результатов по указанным проблемам можно найти в работе [1]. В этой же работе при условии $m(\Lambda) = 0$ найдено полное решение проблемы фундаментального принципа для произвольных нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, в произвольных выпуклых областях комплексной области. Целью данной работы является доказательство того, что в случае ограниченной области, условие $m(\Lambda) = 0$ необходимо для фундаментального принципа. Таким образом, результат этой работы вместе с результатом работы [1] дает полное решение проблемы фундаментального принципа для произвольных нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, в произвольных ограниченных выпуклых областях уже без всяких дополнительных ограничений.

Сделаем еще некоторые наблюдения, полезные в дальнейшем. В ситуации, описанной выше, совокупность функций $\Phi(\Lambda)$ принадлежит подпространству $W \subset H(D)$, полна в нем и не полна в $H(D)$. Проблема фундаментального принципа состоит в том, чтобы выяснить условия, когда $W$ совпадает с пространством функций $W(D,\Lambda)$, которые являются суммами рядов (1), сходящихся в топологии $H(D)$, или, что эквивалентно, когда $W(D,\Lambda)$ замкнуто в $H(D)$.

Пусть $t > 0$ и $D_t$ — область, полученная из $D$ при помощи преобразования гомотетии с центром в нуле и коэффициентом $t$, т.е. $D_t = \{z = tz' : z' \in D\}$. Положим $\Lambda_t = \{t^{-1}\lambda_k, m_k\}$. Очевидно, что при любом $t > 0$ из равенства $m(\Lambda) = 0$ следует, что $m(\Lambda_t) = 0$. Покажем, что подпространства $W(D,\Lambda)$ и $W(D_t,\Lambda_t)$ замкнуты или незамкнуты одновременно. Пусть $W(D,\Lambda)$ — замкнуто в $H(D)$, и $\{h_l\}_{l=1}^{\infty} \subset W(D_t,\Lambda_t)$ сходится к функции $h_0$ в топологии $H(D_t)$. Положим $g_l(z) = h_l(tz)$, $z \in D$, $l = 0, 1, \ldots$. Тогда $\{g_l\}_{l=1}^{\infty}$ лежит в $H(D)$ и сходится в топологии этого пространства к $g_0$. По определению $W(D_t,\Lambda_t)$ имеем

$$h_l(w) = \sum_{k=1,n=o}^{\infty,m_k-1} d_{k,n}^l w^n \exp(t^{-1}\lambda_k w), l = 1, 2, \ldots,$$

причем ряды сходятся в $H(D_t)$. Следовательно,

$$g_l(z) = h_l(tz) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} \widetilde{d_{k,n}^l} z^n \exp(\lambda_k z), l = 1, 2, \ldots,$$

где $\widetilde{d_{k,n}^l} = t^n d_{k,n}^l$, и ряды сходятся в $H(D)$. Это означает, что $\{g_l\}_{l=1}^{\infty}$ лежит в подпространстве $W(D,\Lambda)$. Поскольку оно замкнуто, то и $g_0$ принадлежит $W(D,\Lambda)$, т.е. $g_0$ раскладывается в ряд (1), сходящийся в $H(D)$. Но тогда, как и выше, функция $h_0$ также раскладывается в ряд (1), сходящийся уже в $W(D_t,\Lambda_t)$, т.е. $h_0 \in W(D_t,\Lambda_t)$. Таким образом, $W(D_t,\Lambda_t)$ — замкнутое подпространство в $H(D_t)$. Аналогично показывается, что замкнутость $W(D_t,\Lambda_t)$ влечет за собой замкнутость $W(D,\Lambda)$.

Приведем, наконец, необходимое условие замкнутости $W(D,\Lambda)$.

**Теорема.** *Пусть $D$—ограниченая выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$ такова, что система $\Phi(\Lambda)$ неполна в $H(D)$. Предположим, что $W(D,\Lambda)$ замкнуто в $H(D)$. Тогда $m(\Lambda) = 0$.*

**Доказательство.** Предположим, что теорема неверна. Тогда найдутся $\tau > 0$ и подпоследовательность $\{\lambda_{k_j}, m_{k_j}\}$ такие, что $\{m_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ сходится к $\tau$, когда $j \to \infty$. Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $\{\lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ также сходится к некоторой точке $\xi$ окружности $S = S(0,1)$. Рассмотрим три возможные ситуации: начало координат лежит во внешности области $D$, в самой области $D$, и на ее границе.

1) Пусть $0 \notin \overline{D}$. Поскольку $D$ — ограничена, то согласно сказанному выше (делая, если необходимо, преобразование гомотетии с центром в нуле), можно считать, что для некоторой точки $a$ окружности $S$ (очевидно, неединственной) круг $B(a,1)$ компактно содержит область $D$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j (z-a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z), \qquad (3)$$

где $m(j) = m_{k_j} - 1$, $c_j = \exp(-H_K(\lambda_{k_j}))$ и $K$ — выпуклый компакт в $D$. Покажем, что при подходящем выборе $K$ этот ряд сходится в топологии $H(D)$. Прежде всего заметим, что в силу компактности вложения $D$ в круг $B(a,r)$ найдется радиус $r \in (0,1)$ такой, что круг $B(a,r)$ все еще содержит $D$. Поэтому для каждого $z \in D$ верна оценка

$$|c_j (z-a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| \le c_j r^{m(j)} \exp(Re(\lambda_{k_j} z)) \le$$

$$\le r^{m(j)} \exp(H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})), j = 1, 2, \dots$$

В последнем неравенстве мы воспользовались определением опорной функции $D$. Поскольку $\{m(j)/|\lambda_{k_j}|\}$ сходится к $\tau$, когда $j \to \infty$, то начиная с некоторого $j_0$ имеем: $m(j) \ge \frac{\tau|\lambda_{k_j}|}{2}$. Следовательно из предыдущего получаем:

$$|c_j (z-a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| \le$$

$$\le \exp(m(j)\ln r + H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})) \le$$

$$\le \exp(-\alpha|\lambda_{k_j}| + H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})), j \ge j_0,$$

где $\alpha = -2^{-1}\tau \ln r > 0$. Выберем теперь компакт $K$ из области $D$ настолько большой, что выполнена оценка

$$H_D(\lambda) \le H_K(\lambda) + 2^{-1}\alpha|\lambda|, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда для всех $z \in D$ имеем:

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} |c_j (z-a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j})| \le \sum_{j=j_0}^{\infty} \exp(-2^{-1}\alpha|\lambda_{k_j}|) < \infty.$$

Сходимость последнего ряда следует из того, что точки $\lambda_k$ являются нулями целой функции экспоненциального типа (преобразование Лапласа функционала, обращающегося в нуль на подпространстве $W$) с кратностью не меньшей чем $m_k$ (см., напр., [2]). Это означает, что ряд (3) сходится равномерно во всей области $D$. Поэтому функция

$$\phi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j (z-a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z) \qquad (4)$$

аналитична в $D$. По условию подпространство $W(D,\Lambda)$ замкнуто в $H(D)$. Следовательно, $\phi(z)$ как предел элементов $W(D,\Lambda)$ (частичных сумм ряда (3)) принадлежит $W(D,\Lambda)$. Поэтому, согласно определению подпространства $W(D,\Lambda)$, имеет место представление

$$\phi(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} d_{k,n} z_n \exp(\lambda_k z), z \in D, \tag{5}$$

при этом ряд сходится в топологии $H(D)$. Пусть $\{\mu_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1}$ — биортоганальная к $\Phi(\Lambda)$ последовательность функционалов из $H^*(D)$. Тогда в силу их линейности и непрерывности получаем:

$$\mu_{k_j,0}(\phi(z)) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} \mu_{k_j,0}(d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z)) = d_{k_j,0},$$

для всех $j = 1, 2, \ldots$. С другой стороны, из представления (4) имеем:

$$\mu_{k_j,0}(\phi(z)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{k_j,0}(c_j (z-a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)) = c_j a^{m(j)}.$$

Поэтому $|d_{k_j,0}| = |c_j a^{m(j)}| = c_j$, $j = 1, 2, \ldots$, т.к. $a \in S$. Поскольку $K$ — компакт в $D$, то существует $z_0 \in D$ такая, что $Re(z_0\xi) > H_K(\xi)$. Тогда из сходимости $\{\lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ к точке $\xi$, непрерывности и однородности опорной функции компакта для всех достаточно больших размеров $j$ следует соотношение $Re(z_0\lambda_{k_j}) > H_K(\lambda_{k_j})$. Отсюда для этих же номеров $j$ с учетом определения коэффициентов $c_j$ получаем:

$$|d_{k_j,0} \exp(\lambda_{k_j} z_0)| = |c_j \exp(\lambda_{k_j} z_0)| = \exp(Re(\lambda_{k_j} z_0) - H_K(\lambda_{k_j})) > 1.$$

Это противоречит необходимому условию сходимости ряда (5) в точке $z_0$. Таким образом, исходное предположение о том, что $m(\Lambda) \neq 0$ неверно. Следовательно, в рассматриваемом случае теорема доказана.

2) Пусть теперь $0 \in D$. Положим $\Gamma = \{z : Re(z\xi) = H_D(\xi)\} \bigcap \partial D$. В силу ограниченности $D$ множество $\Gamma$ не пусто и является точкой или отрезком. Как и выше, можно считать, что для некоторой точки $a$ окружности $S$ круг $B(a, 1)$ содержит множество $\Gamma$ и, кроме того, область $D$ лежит в круге $B(0, 1)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j (z-a)^{n(j)} \exp(\lambda_{k_j} z), \tag{6}$$

где $c_j = \exp(-H_K(\lambda_{k_j}))$ и $K$ — выпуклый компакт в $D$. Покажем, что при подходящем выборе $K$ и чисел $n(j)$, $j = 1, 2, \ldots$, этот ряд сходится в топологии $H(D)$. Прежде всего, заметим, что $\Gamma$ — компакт, а потому лежит в круге $B(a, 1)$

вместе с некоторой своей окрестностью. Следовательно, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что множество

$$\Gamma(\varepsilon) = \{z : Re(z\xi) \geq H_D(\xi) - \varepsilon\} \bigcap D$$

компактно принадлежит $B(a,1)$, т.е. $\Gamma(\varepsilon) \subset B(a,r)$ для некоторого $r \in (e^{-1}, 1)$. Поскольку $\{m(j)/|\lambda_{k_j}|\}$ сходится к $\tau$, то для каждого $j$, начиная с некоторого номера $j_0$, можно выбрать натуральное число $n(j) \leq m(j)$, которое удовлетворяет неравенствам

$$\beta|\lambda_{k_j}| \leq n(j) \leq \frac{\varepsilon|\lambda_{k_j}|}{2}, \tag{7}$$

где $\beta = \min\{\varepsilon/4, \tau/2\}$. Выберем теперь компакт $K$ из $D$ настолько большой, что выполнена оценка (это можно сделать, т.к. $\ln r < 0$)

$$H_D(\lambda) \leq H_K(\lambda) - 2^{-1}\beta|\lambda|\ln r, \lambda \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

Учитывая вложение $\Gamma(\varepsilon) \subset B(a,r)$, определение коэффициентов $c_j$ и опорной функции области $D$, из (7) и (8) получаем

$$|c_j(z-a)^{n(j)}\exp(\lambda_{k_j}z)| \leq \exp(n(j)\ln r + H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})) \leq$$

$$\leq \exp(\beta|\lambda_{k_j}|\ln r + H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})) \leq$$

$$\leq \exp(2^{-1}\beta|\lambda_{k_j}|\ln r), j \geq j_0, z \in \Gamma(\varepsilon). \tag{9}$$

Поскольку $\{\lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ сходится к точке $\xi$ при $j \to \infty$, то увеличивая при необходимости номер $j_0$, можно считать, что для $j \geq j_0$ верна оценка $|Re(z(\xi - \lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|))| \leq 8^{-1}\varepsilon$, когда $|z| \leq 1$ (в частности для всех $z \in D \subset B(0,1)$). Следовательно,

$$Re(z\lambda_{k_j}) \leq |\lambda_{k_j}|Re(z\xi) + 16^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}|, z \in D. \tag{10}$$

Кроме того, используя непрерывность опорной функции ограниченной области, можно также считать, что

$$|\lambda_{k_j}|H_D(\xi) \leq H_D(\lambda_{k_j}) + 16^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}|, j \geq j_0. \tag{11}$$

Пусть теперь $z \in D\backslash\Gamma(\varepsilon)$. Тогда, учитывая определение множества $\Gamma(\varepsilon)$, коэффициентов $c_j$ и числа $\beta$, а также вложение $D \subset B(0,1)$ (в силу которого $|z-a| \leq 2$, $z \in D$) и неравенство $\ln r > -1$, согласно (7), (8), (10) и (11) для всех $j \geq j_0$ имеем:

$$|c_j(z-a)^{n(j)}\exp(\lambda_{k_j}z)| \leq$$

$$\leq \exp(n(j)\ln 2 + |\lambda_{k_j}|Re(z\xi) + 16^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}| - H_K(\lambda_{k_j})) \leq$$

$$\leq \exp(n(j) + |\lambda_{k_j}|(H_D(\xi) - \varepsilon) + 16^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}| - H_K(\lambda_{k_j})) \leq$$

$$\leq \exp(n(j) - \varepsilon|\lambda_{k_j}| + H_D(\lambda_{k_j}) + 8^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}| - H_K(\lambda_{k_j})) \leq$$

$$\leq \exp(n(j) - \varepsilon|\lambda_{k_j}| + 8^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}| - 2^{-1}\beta|\lambda_{k_j}|\ln r) \leq$$

$$\leq \exp((2^{-1}+4^{-1})\varepsilon|\lambda_{k_j}|-\varepsilon|\lambda_{k_j}|)=\exp(-4^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}|).$$

Отсюда и из (9) для всех $z \in D$ и $j \geq j_0$ получаем неравенство:

$$|c_j(z-a)^{n(j)}\exp(\lambda_{k_j}z)| \leq \exp(-\gamma|\lambda_{k_j}|),$$

где $\gamma = \min\{-2^{-1}\beta \ln r, 4^{-1}\varepsilon\}$. Таким образом, как и в случае 1) ряд (6) сходится равномерно в $D$ (а, значит и в топологии пространства $H(D)$) к некоторой функции $\phi(z)$, аналитической в $D$. Все дальнейшие рассуждения дословно повторяют соответствующие рассуждения в случае 1). Следовательно, равенство $m(\Lambda) = 0$ имеет место и в случае 2).

3) Пусть, наконец, $0 \in \partial D$, и $l$—опорная прямая к области $D$, проходящая через начало координат (если таких прямых несколько, то в качестве $l$ выберем любую из них). Через $a$ обозначим одну из точек пересечения $l$ и окружности $S$. Тогда $(-a)$ является другой точкой пересечения $l$ и $S$. Прямая $l$ делит плоскость на две полуплоскости. Область $D$ целиком лежит в одной из этих полуплоскостей. Точку окружности $S$, которая принадлежит той же полуплоскости, что и $D$, и лежит на прямой $l'$, перпендикулярной $l$ и проходящей через начало координат, обозначим через $b$. Прямая $l$ делит круг $B(0,1/2)$ на два полукруга. Делая преобразование гомотетии с центром в нуле, можно считать, что область $D$ лежит в одном из этих полукругов, который обозначим $B'$ (в том, который лежит по ту же сторону от прямой $l$ что и точка $b$). Поскольку $\{m(j)/|\lambda_{k_j}|\}_{j=1}^{\infty}$ сходится к числу, отличному от нуля, то переходя к подпоследовательности, можно также считать, что выполнены неравенства $2\tau|\lambda_{k_j}| \geq m(j) \geq 2\nu(j) \geq 4\nu|\lambda_{k_j}|$, где $\nu > 0$ и $\nu(j)$— натуральное число, $j = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \exp(\delta|\lambda_{k_j}|)(z(z^2-a^2)(z-b))^{\nu(j)}\exp(\lambda_{k_j}z), \tag{12}$$

где $c_j = \exp(-\sup\limits_{z\in D}(\nu(j)\ln(|z|) + Re(z\lambda_{k_j})))$. Покажем, что при подходящем выборе $\delta > 0$ ряд (12) сходится в топологии $H(D)$. Для этого, прежде всего, оценим модуль многочлена $p(z) = (z^2-a^2)(z-b)$ на границе полукруга $B'$. Пусть $z \in [-a, a]$ и $x = |z|$. Тогда $|p(z)| = (1-x^2)\sqrt{1+x^2}$. Непосредственно проверяем, что эта функция строго убывает на отрезке $[0, 1]$ и равна единице при $x = 0$. Следовательно,

$$|p(z)| < 1, z \in [-a, a]\backslash\{0\}, |p(0)| = 1 \tag{13}$$

Пусть теперь $z$ принадлежит той части границы $B'$, которая является полуокружностью. Через $x$ обозначим расстояние от точки $z$ до прямой $l'$, а через $y$ — расстояние от точки $z$ до прямой $l$ (другими словами, $(x, y)$ это координаты точки $z$ в системе координат, образованной прямыми $l$ и $l'$, причем $a$ и $b$ в этой системе координат имеют соответственно координаты $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Тогда прямым подсчетом получаем

$$|p(z)| = \sqrt{(1-x)^2+y^2}\sqrt{(1+x)^2+y^2}\sqrt{(1-y)^2+x^2}.$$

Раскрывая под радикалами скобки и замечая, что $x^2 + y^2 = 1/4$, имеем:

$$|p(z)| = \sqrt{5/4 - 2x}\sqrt{5/4 + 2x}\sqrt{5/4 - 2y} =$$

$$= \sqrt{25/16 - 4x^2}\sqrt{5/4 - 2y} = \sqrt{9/16 + 4y^2}\sqrt{5/4 - 2y}.$$

Легко показать, что последняя функция строго убывает при $y \in [0, 1/2]$, причем на концах этого отрезка принимает значения строго меньше единицы. Таким образом, на всей полуокружности верна оценка: $|p(z)| < 1$. Следовательно, с учетом (13) получаем $|p(z)| < 1, z \in \partial B' \backslash \{0\}, |p(0)| = 1$. Отсюда и из принципа максимума модуля для аналитических функций следует оценка:

$$|p(z)| < 1, z \in \overline{B'} \backslash \{0\}. \tag{14}$$

Фиксируем какую-нибудь точку $z_0$ области $D$. Тогда верны неравенства

$$c_j |z|^{\nu(j)} \exp(Re(\lambda_{k_j} z)) \leq$$

$$\leq \exp(-\nu(j) \ln(|z_0|) - Re(z_0 \lambda_{k_j})) |z|^{\nu(j)} \exp(Re(\lambda_{k_j} z)) =$$

$$= \exp(\nu(j)(\ln|z| - \ln|z_0|) + Re(z\lambda_{k_j}) - Re(z_0 \lambda_{k_j})), j = 1, 2, \ldots.$$

Учитывая, что $\nu|\lambda_{k_j}| \leq \nu(j) \leq \tau|\lambda_{k_j}|$, $j = 1, 2, \ldots$, получаем отсюда для всех $z$ из круга $B(0, r)$, где $r \in (0, 1)$:

$$c_j |z|^{\nu(j)} \exp(Re(\lambda_{k_j} z)) \leq$$

$$\leq \exp(\nu|\lambda_{k_j}| \ln r + \tau|\lambda_{k_j}||\ln|z_0|| + (1 + |z_0|)|\lambda_{k_j}|), j = 1, 2, \ldots.$$

Выберем $r_0 \in (0, 1)$ настолько маленькое, что выполнено неравенство

$$\mu \ln r_0 + \tau|\ln|z_0|| + (1 + |z_0|) < -1.$$

Тогда из предыдущего получаем:

$$c_j |z|^{\nu(j)} \exp(Re(\lambda_{k_j} z)) \leq \exp(-|\lambda_{k_j}|), |z| < r_0, j = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Поскольку $D$ лежит в $B'$, а $\overline{D} \backslash B(0, r_0)$ — компакт, то согласно (14)

$$\max_{z \in \overline{D} \backslash B(0, r_0)} |p(z)| < 1.$$

Следовательно, с учетом того, что $\nu|\lambda_{k_j}| \leq \nu(j)$, $j = 1, 2, \ldots$, найдется $\varepsilon \in (0, 1)$, для которого имеет место оценка

$$|p(z)|^{\nu(j)} \leq \exp(-\varepsilon|\lambda_{k_j}|), z \in \overline{D} \backslash B(0, r_0), j = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

Выберем теперь в качестве $\delta$ какое-нибудь число из интервала $(0, \varepsilon/2)$. Тогда из (14) и (15) для каждого $j = 1, 2, \ldots$ и любого $z \in D \bigcap B(0, r_0)$ следует неравенство

$$c_j \exp(\delta|\lambda_{k_j}|) |z|^{\nu(j)} |p(z)|^{\nu(j)} \exp(Re(\lambda_{k_j} z)) \leq \exp(-\varepsilon|\lambda_{k_j}|/2).$$

Кроме того, в силу (16) и определения чисел $c_j$ это же неравенство будет выполнено для всех $j = 1, 2, \ldots$ и любого $z \in D \backslash B(0, r_0)$. Таким образом, как и выше, ряд (12) сходится равномерно во всей области $D$. Следовательно, его сумма $\phi(z)$ аналитична в $D$. С другой стороны, как и в случае 1) имеет место представление

$$\phi(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty, m_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z), z \in D, \tag{17}$$

причем выполнены равенства

$$|d_{k_j,\nu(j)}| = |\exp(\delta|\lambda_{k_j}|) c_j (a^2 b)^{\nu(j)}| = c_j \exp(\delta|\lambda_{k_j}|), j = 1, 2, \ldots.$$

Поскольку $D$ ограничена, то для каждого $j = 1, 2, \ldots$ найдется точка $z_j \in \partial D$ такая, что

$$|z_j|^{\nu(j)} \exp(Re(z_j \lambda_{k_j})) = \sup_{z \in D}(|z|^{\nu(j)} \exp(Re(z\lambda_{k_j}))) = c_j^{-1}.$$

Выберем подпоследовательность натуральных чисел $j(1), j(2), \ldots$ так, что $\{z_{j(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ сходится к некоторому $z^* \in \partial D$. В силу неравенства (15) точки $z_j$, $j = 1, 2, \ldots$, а вместе с ними и $z^*$ не лежат в круге $B(0, r_0)$. Фиксируем $\delta' \in (0, \delta/4)$, удовлетворяющее условию $\tau \ln(1 + \frac{4\delta'}{r_0}) \leq \frac{\delta}{2}$. Пусть $z' \in D \bigcap B(z^*, \delta')$. Можно считать, что $|z'| \geq r_0/2$. Поскольку $\{z_{j(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ сходится к $z^*$, то для всех номеров $l$, начиная с некоторого $l_0$ выполнено неравенство $|z' - z_{j(l)}| \leq 2\delta'$. Тогда с учетом неравенства $\nu(j) \leq \tau|\lambda_{k_j}|$, выбора точек $z_j$ и числа $\delta'$ имеем:

$$c_{j(l)}^{-1} = |(z_{j(l)} - z') + z'|^{\nu(j(l))} \exp(Re((z_{j(l)} - z') + z', \lambda_{k_j})) \leq$$

$$\exp(\nu(j(l))(\ln|z'| + \ln(1 + \frac{|z_{j(l)} - z'|}{|z'|})) + Re(z', \lambda_{k_{j(l)}}) + |z_j - z'||\lambda_{k_{j(l)}}|) \leq$$

$$\leq \exp(\nu(j(l)) \ln|z'| + 2^{-1}\delta|\lambda_{k_{j(l)}}| + Re(z', \lambda_{k_{j(l)}}) + 2^{-1}\delta|\lambda_{k_{j(l)}}|) =$$

$$= |z'|^{\nu(j(l))} \exp(Re(z', \lambda_{k_j}) + \delta|\lambda_{k_j}|), l \geq l_0.$$

Следовательно,

$$|d_{k_{j(l)},\nu(j(l))} (z')^{\nu(j(l))} \exp(z' \lambda_{k_{j(l)}})| =$$

$$= c_{j(l)} |z'|^{\nu(j(l))} \exp(Re(z', \lambda_{k_j}) + \delta|\lambda_{k_j}|) \geq 1, l \geq l_0.$$

Это противоречит необходимому условию сходимости ряда (17) в точке $z' \in D$. Таким образом, равенство $m(\Lambda) = 0$ имеет место и в этом случае. Теорема полностью доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] *Кривошеев А. С.* Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях. Известия РАН. Сер. матем. 2004. Т.68. №2. С. 71-136.

[2] *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.