О мотивной мере на пространстве функций.

Е. А. Горский*

1 Введение

Мотивная мера на пространстве функций была введена С. М. Гусейн-Заде, А. Кампильо и Ф. Дельгадо в [3] (см. также [4]) как аналог мотивной меры на пространстве дуг, введённой М. Л. Концевичем (см., например, [5]).

Рассмотрим отображение

$$Z : \mathbb{P}\mathcal{O} \to \sqcup_k S^k\mathcal{B},$$

переводящее функцию f в набор униформизаций компонент ростка кривой $\{f = 0\}$, определённых с точностью до автоморфизма $(\mathbb{C}, 0)$ (здесь $\mathcal{B}$ обозначает факторпространство пространства дуг по естественному действию группы $Aut_{\mathbb{C},0}$).

В статье доказывается, что мера на пространстве функций может быть связана с мерой на пространстве наборов дуг. А именно, для каждого измеримого множества $M \subset \sqcup_k S^k\mathcal{B}$ выполнено равество

$$\mu(Z^{-1}(M)) = \int_M \mathbb{L}^{-\delta(\gamma)-v(\gamma)}d\mu,$$

где $v(\gamma)$ – порядок кривой в нуле, а $\delta(\gamma)$ – число точек самопересечения деформации γ общего положения. Эта формула позволяет переписывать мотивные интегралы по пространству функций (или его проективизации) как интеграла по объединению всевозможных симметрических степеней пространства кривых.

Гомоморфизм эйлеровой характеристики нельзя применить к этому равенству. В параграфе 5 доказывается аналогичная формула для соответствия эйлеровых характеристик.

2 Мотивные меры

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathbb{C}^2,0}$ – пространство дуг в начале координат на плоскости. Это множество пар $(x(t), y(t))$ формальных степенных рядов без свободного члена. Пусть $\mathcal{L}_n$ – множество n-струй дуг, $\pi_n : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_n$ – естественная проекция.

*Работа поддерживается грантами НШ-4719.2006.1, РФФИ-04-01-00762 и стипендией конкурса им А. Мёбиуса.

Обозначим через $K_0(Var_{\mathbb{C}})$ кольцо Гротендика квазипроективных комплексных многообразий. Оно порождено классами изоморфизма комплексных квазипроетивных многообразий по модулю соотношений вида $[X] = [Y] + [X \setminus Y]$, где Y – замкнутое по Зарисскому подмножество X. Умножение задается равенством $[X] \cdot [Y] = [X \times Y]$. Через $\mathbb{L} \in K_0(Var_{\mathbb{C}})$ обозначим класс комплексной прямой.

Известно, что эйлерова характеристика задает гомоморфизм колец

$$\chi : K_0(Var_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{Z}.$$

Через $S^k X$ будем обозначать k-ю симметрическую степень многообразия X.

Лемма 1 *([7]) Для любых k и m $[S^k\mathbb{C}^m] = \mathbb{L}^{km}$.*

Рассмотрим кольцо $K_0(Var_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$ со следующей фильтрацией на нем: F_k порождено элементами вида $[X] \cdot [\mathbb{L}^{-n}]$ с $n - \dim X \geq k$. Пусть $\mathcal{M}$ – пополнение $K_0(Var_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$ по этой фильтрации.

На алгебре подмножеств $\mathcal{L}$ М. Л. Концевич, а затем Я. Денеф и Ф. Лозер ([5]) построили меру μ со значениями в кольце $\mathcal{M}$.

Подмножество $A \subset \mathcal{M}$ называется цилиндрическим, если существуют такие натуральное n и конструктивное подмножество $A_n \subset \pi_n(L)$, что $A = \pi_n^{-1}(A_n)$. Для цилиндрического множества A определим

$$\mu(A) = [A_n] \cdot \mathbb{L}^{-2n}.$$

Как доказано в ([5]), эта мера может быть продолжена до счетно-аддитивной меры на некоторой сигма-алгебре подмножеств L.

Функция $f : \mathcal{L} \to G$ со значениями в абелевой группе G называется простой (или ступенчатой), если ее образ – конечное или счётное множество, и для любого $g \in G$ множество $f^{-1}(g)$ измеримо. Определим (мотивный) интеграл для простых функций на $\mathcal{L}$ формулой $\int_{\mathcal{L}} f d\mu = \sum_{g \in G} g \cdot \mu(f^{-1}(g))$, если сумма в правой части имеет смысл в $G \otimes \mathcal{M}$.

Заметим, что для цилиндрических подмножеств эйлерова характеристика может быть корректно определена равенством $\chi(A) = \chi(A_n)$ и задает меру с целочисленными значениями на алгебре цилиндрических подмножеств, которая, впрочем, не может быть продолжена на алгебру измеримых множеств. Этой мере соответствует понятие интеграла по эйлеровой характеристике для функций на $\mathcal{L}$ с цилиндрическими множествами уравня. Ясно, что для таких функций

$$\chi(\int_{\mathcal{L}} f d\mu) = \int_{\mathcal{L}} f d\chi.$$

В дальнейшем будут использоваться простые функции, $v_x = Ord_0 x(t), v_y = Ord_0 y(t)$ и $v = \min\{v_x, v_y\}$, определённые для дуг $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Гусейн-Заде, Дельгадо и Кампильо ([4]) построили аналогичную меру на пространстве $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} = \mathcal{O}$ ростков формальных функций на плоскости в начале координат. Пусть $j_n(\mathcal{O})$ – пространство n-струй функций из $\mathcal{O}$. Подмножество $A \subset \mathcal{O}$ назовем цилиндрическим, если найдутся такие n и конструктивное подмножество $A_n \subset j_n(\mathcal{O})$, что $A = j_n^{-1}(A_n)$. Для цилинрических подмножеств положим

$$\mu(A) = [A_n] \cdot \mathbb{L}^{1 - \frac{(N+1)(N+2)}{2}}.$$

Аналогичным образом можно определить и мотивный интеграл на пространстве функций.

Ниже нам также потребуются мотивные меры на факторпространствах пространства дуг по действию групп $\mathbb{C}^*$ и $Aut_{\mathbb{C},0}$, определённые в [8].

На пространстве $\mathcal{L}$ действует $\mathbb{C}^*$ по формуле $a \cdot \gamma(t) = \gamma(at), a \in \mathbb{C}^*$. Пусть $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \setminus \{0\}$.

Утверждение.([8])Пусть $p : \mathcal{L}^* \to \mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*$ – отображение факторизации. Тогда $\mu(p^{-1}(X)) = (\mathbb{L} - 1)\mu(X)$.

Для дуги $\gamma : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ и $h \in Aut_{\mathbb{C},0}$ положим $h \cdot \gamma(t) = \gamma(h^{-1}(t))$. Получим действие группы $Aut_{\mathbb{C},0}$ на пространстве дуг.

Определение:([8]) Орбита описанного действия называется ветвью. Пространство ветвей будем обозначать $\mathcal{B}$.

Пусть $p_0 : \mathcal{L} \to \mathcal{B}$ – отображение факторизации.

Утверждение.([8]) Пусть ψ – простая интегрируемая функция на $\mathcal{B}$. Тогда

$$\int_{\mathcal{L}} (p_0^* \psi) \cdot \mathbb{L}^v d\mu = (\mathbb{L} - 1) \int_{\mathcal{B}} \psi d\mu.$$

3 Степенные структуры

Понятие степенной структуры на (полу)кольце было введено С. М. Гусейн-Заде, И. Луенго и А. Меле-Эрнандезом в [7].

Определение: Степенной структурой на кольце R называется отображение

$$(1 + tR[[t]]) \times R \to 1 + tR[[t]] : (A(t), m) \mapsto (A(t))^m,$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1.$(A(t))^0 = 1$,
2.$(A(t))^1 = A(t)$,
3.$((A(t) \cdot B(t))^m = ((A(t))^m \cdot ((B(t))^m$,
4.$(A(t))^{m+n} = (A(t))^m \cdot (A(t))^n$,
5.$(A(t))^{mn} = ((A(t))^n)^m$,
6.$(1 + t)^m = 1 + mt+$ члены старшей степени,
7.$(A(t^k))^m = ((A(t))^m)|_{t \to t^k}$.

Степенная структура называется конечноопределённой, если для любого $N > 0$ существует такое $M > 0$, что N-струя ряда $(A(t))^m$ однозначно определяется M-струей ряда $A(t)$.

Для того, чтобы определить конечноопределённую степенную структуру, достаточно задать ряд $(1-t)^{-m}$ для каждого $m \in R$ так, что $(1-t)^{-m-n} = (1 - t)^{-m} \cdot (1 - t)^{-n}$. На кольце Гротендика многообразий существует степенная структура такая, что

$$(1 - t)^{-[X]} = 1 + [S^1 X]t + [S^2 X]t^2 + \dots,$$

где $S^k X$ обозначает k-ю симметрическую степень X. Например, для $j \geq 0$ из леммы 1 следует, что

$$(1 - t)^{-\mathbb{L}^j} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbb{L}^{kj} = (1 - t\mathbb{L}^j)^{-1}.$$

Из формулы Макдональда для когомологий симметрических степеней многообразия следует, что

$$(1-t)^{-\chi(X)} = 1 + \chi(S^1X)t + \chi(S^2X)t^2 + \dots,$$

поэтому эйлерова характеристика задает морфизм степенных структур:

$$\chi((A(t))^m) = \chi(A(t))^{\chi}(m)$$

для всех m и $A(t)$, лежащих в кольце $K_0(Var_{\mathbb{C}})$.

Утверждение.(see e.g. [6]) На кольце $K_0(Var_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$ существует естественная степенная структура, продолжающая степенную структуру на $K_0(Var_{\mathbb{C}})$. Она может быть непрерывно продолжена на кольцо $\mathcal{M}$.

4 Соответствие между функциями и дугами

Построим мотивную меру на симметрической степени $S^k\mathcal{L}$.

Заметим, что симметрическая степень $S^k\mathcal{L}_n$ является квазипроективным алгебраическим многообразием и определено естественное продолжение проекции $\pi_n^{(k)} : S^k\mathcal{L} \to S^k\mathcal{L}_n$. Подмножество $A \subset S^k\mathcal{L}$ назовем цилиндрическим, если найдется такие n и конструктивное подмножество $A_n \subset S^k\mathcal{L}_n$, что $A = \pi_n^{-1}(A_n)$. Для этого случая положим $\mu(A) = [A] \cdot \mathbb{L}^{-2kn}$. Так как $[S^k\mathcal{L}_n] = \mathbb{L}^{-2kn}$, это определение не зависит от n.

Для цилиндрического множества $D = \pi_n^{-1}(D_n) \subset \mathcal{L}$ легко видеть, что $\mu(S^kD) = \mathbb{L}^{-2nk}[S^kD_n]$. Поэтому описанная конструкция согласуется со степенной структурой на кольце $\mathcal{M}$, так что

$$\sum_k \mu(S^kD)t^k = (1-t)^{-\mu(D)}.$$

Пусть B_i – набор непересекающихся цилиндрических подмножеств $\mathcal{L}$, k_i – неотрицательные целые числа с суммой $\sum k_i = n$. Для естественного вложения

$$S^{k_1}B_1 \times S^{k_2}B_2 \times \dots \to S^n\mathcal{L}$$

легко видеть, что $\mu(\prod_i S^{k_i}B_i) = \prod_i \mu(S_{k_i}B_i)$.

Кроме того, ясно, что мера множества точек симметрической степени пространства дуг, в котором какие-то две дуги совпадают ("диагональ"), равна нулю, так как оно имеет бесконечную коразмерность.

Лемма 2 *([6]) Пусть f – простая функция $\mathcal{L}$. Зададим функцию F на $\sqcup_k S^k\mathcal{L}$ формулой $F(\gamma_1, \dots, \gamma_k) = \prod_i f(\gamma_i)$. Тогда*

$$\int_{\sqcup_k S^k\mathcal{L}} F d\chi_g = \int_{\mathcal{L}} (1-f)^{-d\chi_g}.$$

Аналогиным образом можно прожолжить меру с пространства ветвей $\mathcal{B}$ на $\sqcup_k S^k\mathcal{B}$. Пусть $p : \sqcup_k S^k(\mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*) \to \sqcup_k \mathcal{B}$ – естественная проекция.

Лемма 3 *Пусть F – простая интегрируемая функция на $S^k\mathcal{B}$. Тогда*

$$\int_{\sqcup_k S^k(\mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*)} (p^*F) \cdot \mathbb{L}^v d\mu = \int_{\sqcup_k S^k\mathcal{B}} F d\mu.$$

Доказательство. Пусть $X \subset \mathcal{B}$ – цилиндрическое множество,содержащее дуги порядка i. Тогда $\mu(p^{-1}(X)) = \mathbb{L}^{-i}\mu(X_i)$, и $\mathbb{L}^i\mu(p^{-1}(X_i)) = \mu(X_i)$. Поэтому

$$\mu(1-\mathbb{L}^i t)^{-p^{-1}(X)} = \mu(1-t)^{-\mathbb{L}^i p^{-1}(X_i)} = (1-t)^{-(\mathbb{L}-1)\mu(X_i)} = (1-t)^{\mu(X)} = \mu(1-t)^{-X}.$$

Следовательно, для любого m

$$\mathbb{L}^{mi}\mu(p^{-1}(S^m X)) = \mu(S^m X).$$

Таким образом, для произвольного подмножества $Y \subset S^k\mathcal{B}$

$$\mu(Y) = \int_{p^{-1}(Y)} \mathbb{L}^v d\mu,$$

откуда следует утверждение леммы. $\square$

Определение: Дугу $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ будем называть вырожденной, если существуют такие $h(x)$, $x'(t), y'(t)$, что порядок нуля h больше или равен 2, и $x(t) = x'(h(t)), y(t) = y'(h(t))$.

Легко видеть, что множество вырожденных кривых имеет мотивную меру 0. Это означает, что с точностью до меры ноль всякая кривая является униформизацией своего образа.

Рассмотрим естетственное отображение

$$Z : \mathbb{P}\mathcal{O} \to \sqcup_k S^k\mathcal{B},$$

переводящую функцию f (определённую с точностью до умножения на константу) в набор дуг – униформизаций ростка кривой $\{f = 0\}$, определённых с точностью до автоморфизма $(\mathbb{C}, 0)$. Если неприводимая компонента $\{f = 0\}$ имеет кратность m, то $Z(f)$ содержит m копий её униформизации.

Опишем, как преобразуется мотивная мера при отображении Z.

Лемма 4 *Пусть $f, g \in \mathcal{O}$, $g(\gamma(t)) = 0$ и $j_n(f) = j_n(g)$. Пусть $Ord_0(\gamma) = m$, $\min\{Ord_0(\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))), Ord_0(\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)))\} = Q$ и $n > 4Q$. Положим $n_1 = mn - Q$. Тогда существует такое $\gamma'(t)$, что $j_{n_1}(\gamma') = j_{n_1}(\gamma)$ и $f(\gamma'(t)) = 0$.*

Доказательство. Заметим, что $j_{mn}(f-g)(\gamma) = 0$, поэтому $j_{mn}(f(\gamma)) = 0$.

Не теряя общности, можно считать, что $\gamma(t) = (t^m, y(t))$ и $ord(f_y(\gamma)) = Q$. Этого можно достигнуть, делая замену переменной t для дуги, а также аффинную замену переменных на плоскости общего положения.

Пусть

$$\gamma_0 = \gamma, \gamma_{k+1} = \gamma_k - (0, \frac{f(\gamma_k)}{f_y(\gamma_k)}).$$

По формуле Тейлора

$$f(\gamma_{k+1}) = f(\gamma_k - \frac{f(\gamma_k)}{f_y(\gamma_k)}) = f(\gamma_k) - f_y(\gamma_k)\cdot\frac{f(\gamma_k)}{f_y(\gamma_k)} + O((\frac{f(\gamma_k)}{f_y(\gamma_k)})^2) = O((\frac{f(\gamma_k)}{f_y(\gamma_k)})^2).$$

Тогда если $f(\gamma_k)$ имеет порядок N , то порядок $f(\gamma_{k+1})$ больше или равен $2(N - Q)$. Так как $f(\gamma_0)$ имеет порядок, больший или равный mn, то

$mn-Q$-струи γ_1 и γ_0 совпадают. Значит, для всех k n_1-струи γ_k и γ совпадают. Поэтому порядок $f(\gamma_1)$ не меньше $2(mn-Q)$, что больше $\frac{3}{2}mn$ при $n>4Q$. Аналогично заключаем, что последовательность $\{\gamma_k\}$ сходится в t-адической топологии, и порядок $f(\gamma_k)$ не меньше $(\frac{3}{2})^k mn$, что стремится к бесконечности, когда k стремится к бесконечности. Поэтому существует предел $\gamma'=\lim_{k\to\infty}\gamma_k$, поэтому $f(\gamma')=0$ и $j_{n_1}(\gamma')=j_{n_1}(\gamma)$. $\square$

Лемма 5 *Пусть $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ – набор дуг, рассмотрим линейное отображение*

$$ev_\gamma:\mathcal{O}\to\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}\otimes\mathbb{C}^k, f\mapsto(f(\gamma_1(t)),\ldots,f(\gamma_k(t))).$$

Пусть μ – число Милнора (см., например,[1]) функции, задающей объединение γ этих дуг, $\delta(\gamma)=\frac{1}{2}(\mu+k-1)$. Тогда коразмерность образа отображения ev_γ равняется $\delta(\gamma)$.

Лемма следует из результатов [9].

Для (вообще говоря, приводимой) кривой, задаваемой уравнением $f(x,y)=0$, компоненты которой имеют параметризации $\gamma_1(t),\ldots,\gamma_k(t)$, положим

$$P_i(\gamma)=\min\{Ord_0(\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_i(t))),Ord_0(\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma_i(t)))\}, P(\gamma)=\sum P_i(\gamma).$$

Теорема 1 *Пусть $M\subset S^k\mathcal{B}$ – измеримое подмножество, $N=Z^{-1}(M)$. Тогда*

$$\mu(N)=\int_M\mathbb{L}^{\delta(\gamma)-k-P(\gamma)}d\chi_g,$$

где $\delta(\gamma)$ определяется в предыдущей лемме.

Доказательство. Пусть порядки компонент кривых в M равны $m_1,\ldots,m_k$, тогда порядок всякой функции $f\in N$ равен $m=\sum_{i=1}^k m_i$. Не нарушая общности, можно считать, что $\delta(\gamma)$ также постоянно на M.

Рассмотрим отображение ζ пространства n-струй функций в пространство наборов из (m_in-P_i)-струй кривых, сопоставляющее многочлену f набор из соответствующих струй $Z(f)$. Докажем, что при достаточно больших n его образ совпадает с множеством $\pi(M)$ соответствующих наборов струй для всевозможных кривых из M.

Если $(\gamma_1,\ldots,\gamma_k)=Z(f)$, $f_1=j_n(f)$, то n – струи f и f_1 совпадают, поэтому по лемме 4 найдутся такие кривые $(\widetilde{\gamma}_1,\ldots,\widetilde{\gamma}_k)$, что $f_1(\widetilde{\gamma}_i)=0$ и $j_{m_in-P_i}(\widetilde{\gamma}_i)=j_{m_in-P_i}(\gamma_i)$. Поэтому $\zeta(f_1)$ совпадает с проекцией $(\gamma_1,\ldots,\gamma_k)$.

Если f принадлежит N, то $(\gamma_1,\ldots,\gamma_k)$ принадлежит M, поэтому $\zeta(\pi_n(f))$ лежит в $\pi(M)$. Обратно, если $(\gamma_1,\ldots,\gamma_k)\in M$, а $\{f=0\}$ – уравнение, определяющее этот набор кривых, то $\pi(\gamma_1,\ldots,\gamma_k)=\zeta(\pi_n(f))\in\zeta(\pi_n(N))$. Итак,

$$\zeta(\pi_n(N))=\pi(M).$$

Опишем слои отображения ζ. Заметим, что из доказательства леммы 4 следует, что $j_{mn}(f(\gamma_i))=0$ тогда и только тогда, когда существует такая кривая $\widetilde{\gamma}_i$, что $f(\widetilde{\gamma}_i)=0$ и $j_{m_in-P_i}(\gamma_i)=j_{m_in-P_i}(\widetilde{\gamma}_i)$.

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \pi(M)$. Найдем размерность пространства E_n таких n-струй f, что для каждого i $j_{m_i n}(f(\gamma_i)) = 0$. Рассмотрим отображение

$$ev_\gamma : f \mapsto (j_{m_i n}(f(\gamma_i)).$$

Отметим, что $m_i n$-струя ряда $f(\gamma_i(t))$ однозначно определяется n-струей f и $m_i n - P_i$ – струей γ_i. Коразмерность образа этого отображения равна $\delta(\gamma)-k+1$ при достаточно больших n (так как рассматриваются функции с нулевым свободным членом), поэтому коразмерность ядра равна размерности образа, то есть $\sum_i m_i n - \delta(\gamma) + k - 1 = mn - \delta(\gamma) + k - 1$. В пространстве E_n выделим подпространство E'_n функций порядка не меньше $m + 1$. Так как все функции порядка m, обращающиеся в 0 на γ, имеют одну и ту же главную часть (однородное слагаемое степени m) с точностью до умножения на число, то факторпространство E_n/E'_n одномерно, поэтому $\dim E'_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 - (mn - \delta(\gamma) + k - 1) - 1$. С другой стороны, если $f \in \zeta^{-1}(\gamma)$, то

$$\zeta^{-1}(\gamma) = \{\lambda f + h | \lambda \neq 0, h \in E'_n\},$$

поэтому $[\zeta^{-1}(\gamma)] = [E'_n]$. Значит,

$$[\pi_n(N)] = \mathbb{L}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2} - (mn - \delta(\gamma) + k - 1) - 2}[\pi(M)].$$

Тогда

$$\mathbb{L} \cdot \mathbb{L}^{-\frac{(n+1)(n+2)}{2}}[\pi_n(N)] = \mathbb{L} \cdot \mathbb{L}^{-\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \cdot \mathbb{L}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2} - (mn - \delta(\gamma) + k - 1) - 2}[\pi(M)] =$$

$$\mathbb{L}^{\delta(\gamma) - k - mn}[\pi(M)] = \mathbb{L}^{\delta(\gamma) - k - P}\mu(M).$$

Последнее равенство следует из того, что

$$\mu(M) = [\pi(M)] \cdot \mathbb{L}^{-\sum_i (m_i n - P_i)} = [\pi(M)] \cdot \mathbb{L}^{-mn + P}.$$

□

Таким образом, на пространстве непараметризованных кривых можно ввести универсальный множитель $R(\gamma) = \mathbb{L}^{\delta(\gamma) - k - P(\gamma)}$ такой, что

$$\mu(Z^{-1}(M)) = \int_M R(\gamma) d\mu,$$

поэтому для любой измеримой функции $a(\gamma)$

$$\int_{\mathbb{P}\mathcal{O}} a(Z(f)) d\mu = \int_{\sqcup_k S^k \mathcal{B}} R(\gamma) a(\gamma) d\mu.$$

Пример. Пусть $M_k \subset S^k\mathcal{B}$ – множество наборов из k гладких кривых с попарно различными касательными в начале координат , $N_k = Z^{-1}(M_k)$. Пусть $(S^k\mathbb{P}^1)^*$ – множество неупорядоченных наборов различных точек на $\mathbb{P}^1$. Легко видеть, что

$$\mu(M_k) = [(S^k\mathbb{P}^1)^*] \cdot \mathbb{L}^{-k}.$$

Множество N_k содержит такие функции порядка k, что их однородная компонента порядка k имеет k различных корней. Поэтому

$$\mu(N_k) = (\mathbb{L} - 1) \cdot [(S^k\mathbb{P}^1)^*] \cdot \mathbb{L}^{1 - \frac{(k+1)(k+2)}{2}}.$$

В данном случае $\delta(\gamma) = \frac{k(k-1)}{2}$, $P_i(\gamma) = k-1, P(\gamma) = k(k-1)$, поэтому утверждение теоремы 1 легко проверить.

Пример. Пусть $M_{2k} \subset \mathcal{B}$ – множество кривых, имеющих особенность типа A_{2k} в начале координат. Предположим, кривая касается оси абсцисс. Тогда можно выбрать параметризацию кривой , в которой $x(t) = t^2, y(t) = \sum y_k t^k$. Тогда кривая имеет особенность A_{2k} тогда и только тогда, когда $y_2 = 0, y_1 = y_3 = \ldots = y_{2k-1} = 0, y_{2k+1} \neq 0$, поэтому мера множества таких кривых равна $(\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-k-2}$. Учитывая, что касательная к кривой может принимать произвольное значение на $\mathbb{P}^1$, получаем

$$\mu(M_{2k}) = (\mathbb{L}+1)(\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-k-2}.$$

Далее, $\delta(\gamma) = k, P(\gamma) = 2k+1$. Значит,

$$\mu(N_{2k}) = (\mathbb{L}+1)(\mathbb{L}-1)^2\mathbb{L}^{-2k-4}.$$

Пусть $k > 1, M_{2k-1} \subset S^2\mathcal{B}$ – множество кривых, имеющих особенность типа A_{2k-1} в начале координат. Предположим, кривая касается оси абсцисс. Тогда можно выбрать параметризацию компонент кривой , в которой $x^{(1)}(t) = t, x^{(2)}(t) = t$. Тогда кривая имеет особенность A_{2k-1} тогда и только тогда, когда $Ord_0(y^{(1)}(t) - y^{(2)}(t)) = k$, поэтому мера множества таких кривых равна $(\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-k}$. Учитывая, что касательная к кривой может принимать произвольное значение на $\mathbb{P}^1$, получаем

$$\mu(M_{2k-1}) = (\mathbb{L}+1)(\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-k-1}.$$

Далее, $\delta(\gamma) = k, P(\gamma) = 2k$. Значит,

$$\mu(N_{2k-1}) = (\mathbb{L}+1)(\mathbb{L}-1)^2\mathbb{L}^{-2k-3}.$$

Этот ответ можно проверить явно, записывая условие того, что функция имеет особенность A_s в начале координат, в териминах ее диаграммы Ньютона.

Из предыдущего примера вытекает, что мера множества функций, имеющих особенность типа A_1, равна

$$\mu(A_1) = (\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-3}.$$

Вычислим меру множества функций, задающих особенность типа A_m для некоторого m. Имеем:

$$\mu(A) = (\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-3} + \sum_{k=1}^{\infty}(\mathbb{L}+1)(\mathbb{L}-1)^2\mathbb{L}^{-2k-4} + \sum_{k=2}^{\infty}(\mathbb{L}+1)(\mathbb{L}-1)^2\mathbb{L}^{-2k-3}$$

$$= (\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-3} + (\mathbb{L}+1)(\mathbb{L}-1)^2(\frac{\mathbb{L}^{-6}}{1-\mathbb{L}^{-2}} + \frac{\mathbb{L}^{-7}}{1-\mathbb{L}^{-2}}) = (\mathbb{L}-1)(\mathbb{L}^{-3}+\mathbb{L}^{-4}+\mathbb{L}^{-5}) = \mathbb{L}^{-2}-\mathbb{L}^{-5}.$$

С другой стороны, функция имеет особенность типа A_m тогда и только тогда, когда ее 1-струя нулевая, а 2-струя ненулевая, поэтому (рассматривая пространство 2-струй) получаем:

$$\mu(A) = \mathbb{L}^{-5}(\mathbb{L}^3-1),$$

что согласуется с предыдущим ответом.

Пример 2. Найдем меру страта $\{\mu = const\}$ в $\mathcal{O}$ для особенности $x^p + y^q$ для взаимно простых p и q.

С точки зрения параметризации, если кривая касается оси абсцисс, то можно считать, что $x(t) = t^p$. Тогда кривая имеет нужную особенность, если наименьшим не делящимся на p номером монома в $y(t)$ с ненулевым коэффициентом будет q, а также коэффициент при t^p равен 0. Мера множества таких кривых равна $(\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-q+[\frac{q}{p}]-1}$, поэтому

$$\mu(M) = (\mathbb{L}+1)(\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-q+[\frac{q}{p}]-1}.$$

Далее, $\delta(\gamma) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$, $P(\gamma) = (p-1)q$, поэтому

$$\mu(N) = (\mathbb{L}+1)(\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{[\frac{q}{p}]-1-\frac{(p+1)(q+1)}{2}}.$$

Например, коразмерность N равна $c = \frac{(p+1)(q+1)}{2} - 2 - [\frac{q}{p}]$. Имеет место формула ([1]), связывающая коразмерность особенности, ее число Милнора и модальность m:

$$\mu = c + m - 1,$$

откуда можно найти модальность указанной особенности:

$$m = \frac{pq}{2} - \frac{3p}{2} - \frac{3q}{2} + 3,5 + [\frac{q}{p}].$$

Можно проверить, что это выражение для модальности согласуется с формулой Кушниренко([10]), описывающей модальность этой особенности как число точек целочисленной решётки в прямоугольнике с вершинами $(0,0), (0,p-2), (q-2,0), (q-2,p-2)$, лежащих выше прямой $px+qy = pq$.

Оказывается, инвариант $P(\gamma)$ особенности кривой может быть выражен через её число Милнора.

Лемма 6 *Пусть μ и v – соответственно число Милнора и порядок в нуле кривой γ. Тогда*

$$P(\gamma) = \mu + v - 1.$$

Доказательство. Предположим сначала, что кривая неприводимая с параметризацией $(x(t), y(t))$ и уравнением $f = 0$. Не нарушая общности, можно считать, что порядок $x(t)$ меньше порядка $y(t)$. Так как $f(x(t), y(t)) \equiv 0$, то

$$f_x(\gamma(t))\dot{x}(t) + f_y(\gamma(t))\dot{y}(t) = 0.$$

Приравнивая порядки нуля слагаемых, получаем:

$$Ordf_x(\gamma(t)) + v_x - 1 = Ordf_y(\gamma(t)) + v_y - 1,$$

откуда

$$Ordf_x(\gamma(t)) = Ordf_y(\gamma(t)) + (v_y - v_x),$$

и $P(\gamma) = Ordf_y(\gamma(t))$,

$$P(\gamma) - v = Ordf_y(\gamma(t)) - v_x = Ordf_x(\gamma(t)) - v_y.$$

Проведём сигма-процесс. Новое уравнение кривой будет иметь вид $\hat{f} = x^{-v} f(x, \theta x) = 0$, и

$$\hat{P} - \hat{v} = Ord \hat{f}_\theta - v_x = Ord[x^{1-v} f_y(\gamma(t))] - v_x = P - v - v(v-1).$$

С другой стороны, легко видеть, что $\hat{\mu} = \mu - v(v-1)$, поэтому если утверждение леммы выполнено для кривой в раздутии, то оно верно и для исходной кривой. Но для неособой кривой $P = 0, v = 1, \mu = 0$, поэтому утверждение верно, следовательно, оно верно и для любой неприводимой кривой.

Докажем теперь утверждение леммы по индукции по числу кеомпонент кривой. Пусть $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, тогда $f = f_1 f_2$. Для всякой кривой, входящей в γ_1, порядок f_x на ней равен сумме порядков f_{1x} и f_2, поэтому сумма всех таких порядков равна $P(\gamma_1) + \gamma_1 \circ \gamma_2$. Проведя аналогичное вычисление для кривых из γ_2 и сложив, получим

$$P(\gamma) = P(\gamma_1) + P(\gamma_2) + 2\gamma_1 \circ \gamma_2.$$

С другой стороны, нетрудно видеть (например, из метода вещественных шевелений, см. [1]), что

$$\mu(\gamma) = \mu(\gamma_1) + \mu(\gamma_2) + 2\gamma_1 \circ \gamma_2 - 1,$$

и по предположению индукции утверждение верно для γ_1 и γ_2, следовательно, оно верно и для γ. $\square$

Теорема 2 *Пусть a – измеримая функция на $\sqcup_k S^k \mathcal{B}$. Тогда*

$$\int_{\mathbb{P}\mathcal{O}} a(Z(f)) d\mu = \int_{\sqcup_k S^k(\mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*)} (p^* a) \mathbb{L}^{-\delta(\gamma)} d\mu.$$

Доказательство. По теореме 1,

$$\int_{\mathbb{P}\mathcal{O}} a(Z(f)) d\mu = \int_{\sqcup_k S^k \mathcal{B}} a \mathbb{L}^{\delta(\gamma) - P(\gamma) - k} d\mu = \int_{\sqcup_k S^k(\mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*)} (p^* a) \mathbb{L}^{\delta(\gamma) - k - \mu - v + 1} \mathbb{L}^v d\mu.$$

Остается воспользоваться тем фактом, что $\delta(\gamma) = \frac{1}{2}(\mu + k - 1)$. $\square$

Отметим, что $\delta(\gamma)$ имеет простой геометрический смысл: это количество точек самопересечения шевеления γ общего положения.

Пример:

$$(\mathbb{L} - 1) \int_{\sqcup_k S^k(\mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*)} a^{v_x} b^{v_y} \mathbb{L}^{-\delta(\gamma)} d\mu = \int_{\mathcal{O}} a^{v_x} b^{v_y} d\mu = \frac{ab\mathbb{L}^{-2}(\mathbb{L}-1)^2}{(1 - a\mathbb{L}^{-1})(1 - b\mathbb{L}^{-1})}.$$

Прямое объяснение этого ответа, не использующее соответствие между кривыми и функциями, автору не известно. Например, аналогичный интеграл по пространству $\mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*$ гораздо сложнее и удовлетворяет некоторым функциональным уравнениям ([6]). Можно сказать, что добавление всех остальных симметрических степеней упрощает интеграл.

Пример. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ – набор дуг на плоскости в начале координат. Он задает функцию со значениями в $\mathbb{Z}^k$ на пространстве $\mathcal{O}$:

$$\underline{v}_\gamma(f) = (Ord_0 f(\gamma_1(t)), \ldots, Ord_0 f(\gamma_k(t))).$$

Как показано в ([4]), интеграл по эйлеровой характеристике

$$P_\gamma(\underline{t}) = \int_{\mathbb{P}\mathcal{O}} \underline{t}^{\underline{v}_\gamma} d\chi$$

совпадает с полиномом Александера зацепления $(\gamma \cap S^3_\varepsilon)$.

Рассмотрим интеграл

$$P_{mot}(\underline{t}) = \int_{\mathbb{P}\mathcal{O}} \underline{t}^{\underline{v}_\gamma} \mathbb{L}^{\delta(f)} d\mu.$$

Его эйлерова характеристика равняется $P(\underline{t})$ так как совместные множества уровня функций $\underline{v}_\gamma$, v и $\delta(Z(f))$ цилиндрические.

Если ω – набор униформизаций компонент ростка кривой $\{f = 0\}$, то $\underline{v}_\gamma(f)$ совпадает с набором индексов пересечения γ_k с ω. Поэтому из теоремы 2 следует, что

$$P_{mot}(\underline{t}) = \int_{\sqcup_k S^k(\mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*)} \underline{t}^{\gamma \circ \omega} d\mu = \int_{\mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*} (1 - \underline{t}^{\gamma\circ\omega})^{-d\mu}.$$

Последнее равенство следует из леммы 2.

Рассмотрим вложенное разрешение дуги ω. Это отображение $(X, D) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, являющееся изоморфизмом вне начала координат, такое что полный прообраз γ – дивизор с нормальными пересечениями . Исключительный дивизор D – дивизор с нормальными пересечениями, компоненты E_s которого изоморфны $\mathbb{CP}^1$, а прообраз γ пересекает их в гладких точках. Пусть $J = \sum_s \nu_s E_s$ – относительный канонический дивизор (локально задающийся якобианом отображения). Пусть (m_{ij}) – матрица, обратная к $(-E_i \circ E_j)$.

Положим

$$F(q) = \prod_k \frac{1}{1 - q^k}, \qquad G(x, y) = \prod_{k,m} \frac{1}{1 - x^k y^m}$$

Из аргументов теоремы 1 в [8] вытекает, что

Теорема 3

$$P_{mot}(\underline{t}) = \prod_s F(\underline{t}^{\underline{m}_s} \mathbb{L}^{-(\nu_s+1)})^{-[E_s^\circ]} \prod_{E_i \cap E_j \neq \emptyset} G(\underline{t}^{\underline{m}_i} \mathbb{L}^{-(\nu_i+1)}, \underline{t}^{\underline{m}_j} \mathbb{L}^{-(\nu_j+1)})^{-(\mathbb{L}-1)} \times$$

$$\prod_{E_i \cap \widetilde{\gamma}_j \neq \emptyset} G(\underline{t}^{\underline{m}_i} \mathbb{L}^{-(\nu_i+1)}, \underline{t}^{\underline{1}_j} \mathbb{L}^{-1})^{-(\mathbb{L}-1)}.$$

Следствие 1

$$\chi(P_{mot}(\underline{t})) = \prod_s F(\underline{t}^{\underline{m}_s})^{-\chi(E_s^\circ)} = \prod_{k=1}^{\infty} \Delta_\gamma(t_1^k, \ldots, t_s^k).$$

Кажущееся противоречие объясняется тем, что гомоморфизм эйлеровой характеристики не может быть продолжен на кольцо $\mathcal{M}$ с $K_0(Var_{\mathbb{C}})$.

5 Соответсвие между эйлеровыми характеристиками

Так как множество мотивной меры ноль может иметь ненулевую эйлерову характеристику, то из результата теоремы 2 нельзя напрямую никакого соотношения между интегралами по эйлеровой характеристике. Однако в некоторых случаях аналогичное соотношение может быть выписано.

Пусть $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ – множество невырожденных кривых, то есть кривых, являющихся униформизацией своего образа.

Ясно, что образ отображения $Z : \mathbb{P}\mathcal{O} \to \sqcup_k S^k\mathcal{B}$ совпадает с $\sqcup_k S^k\mathcal{U}$, а его слои – аффинные пространства.

Пусть $a(\gamma)$ – такая функция на $\mathcal{L}$, что если $\gamma(t) = \gamma'(h(t))$, то

$$a(\gamma) = (a(\gamma'))^{Ord_0 h(t)}.$$

В частности, она $Aut_{\mathbb{C},0}$ – инвариантна. Пусть A – функция на $\sqcup_k S^k\mathcal{L}$, задаваемая равенством

$$A(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) = a(\gamma_1) \cdot \ldots \cdot a(\gamma_k).$$

Теорема 4

$$\int_{\mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*} (1 - a(\gamma))^{-d\chi} = \prod_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{P}\mathcal{O}} A(Z(f))^k d\chi.$$

Доказательство. Так как эйлеровы характеристики слоев отображения Z равны 1, то по формуле Фубини имеем

$$\prod_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{P}\mathcal{O}} A(Z(f))^k d\chi = \prod_{k=1}^{\infty} \int_{\sqcup_m S^m\mathcal{U}} A(\gamma)^k d\chi = \prod_{k=1}^{\infty} \int_{\mathcal{U}} (1 - a(\gamma)^k)^{-d\chi}.$$

С другой стороны, всякая дуга γ из $\mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*$ допускает единственную униформизацию γ' с точностью до автоморфизма $(\mathbb{C}, 0)$, тогда $\gamma = \gamma'(h(t))$. Так как мы факторизуем по действию $\mathbb{C}^*$, можно считать, что $h(t) = t^k + \ldots$. Тогда $(\mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*)$ разбивается на части с фиксированным порядком $h(t)$, и проекция каждой части на $\mathcal{U}$ имеет аффинные слои. Поэтому

$$\int_{\mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*} (1 - a(\gamma))^{-d\chi} = \prod_{k=1}^{\infty} \int_{\mathcal{U}} (1 - a(\gamma)^k)^{-d\chi}.$$

□

Следствие 2 *Пусть μ – функция Мёбиуса. Тогда*

$$\int_{\mathbb{P}\mathcal{O}} A(Z(f)) d\chi = \prod_{k=1}^{\infty} \int_{\mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*} (1 - a^k)^{-\mu(k) d\chi}.$$

Доказательство. По теореме 3

$$\prod_{k=1}^{\infty} \int_{\mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*} (1 - a^k)^{-\mu(k) d\chi} = \prod_{k,m=1}^{\infty} (\int_{\mathbb{P}\mathcal{O}} A^{km}(Z(f)) d\chi)^{\mu(k)},$$

поэтому утверждение леммы следует из формулы обращения Мёбиуса .
□

Благодарности

Я благодарен моему научному руководителю С. М. Гусейн-Заде, указавшему возможность описанного соответствия между мотивными мерами, за постоянное внимание и ценные комментарии.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений - М.: Наука, 1984.

[2] A. Campillo, F. Delgado, S. M. Gusein-Zade. The Alexander polynomial of a plane curve singularity via the ring of functions on it. Duke Math J. 117 (2003), no.1, 125–156.

[3] A. Campillo, F. Delgado, S. M. Gusein-Zade. Integrals with respect to the Euler characteristic over spaces of functions and the Alexander polynomial. Proc. Steklov Inst. Math. 2002, no.3 (238), 134–147.

[4] A. Campillo, F. Delgado, S. M. Gusein-Zade. Multi-index filtrations and motivic Poincaré series. Monatshefte *für* Mathematik. 150 (2007), no.3, 193–210.

[5] J. Denef, F. Loeser. Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration. Inventiones Math. 135 (1999), no.1 ,201–232.

[6] E. Gorsky "Motivic integrals and functional equations". arXiv: math.AG/0606521

[7] S. M. Gusein-Zade, I. Luengo, A. Melle-Hernández. A power structure over the Grothendieck ring of varieties. Math. Res. Lett. 11(2004),no.1,49-57.

[8] S. M. Gusein-Zade, I. Luengo, A. Melle-Hernandez. Integration over the space of non-parametrized arcs and motivic analogs of monodromy zeta function. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2006, Vol. 252, pp. 63–73.

[9] K. Kodaira. On the compact analytic surfaces, I. Ann. of Math. (2) 71, 1960, 111–152.

[10] A. G. Kouchnirenko. Polyederes de Newton et nombres de Milnor. - Invent. Math., 1976, v. 32, pp. 1-31.

[11] I. G. Macdonald. The Poincaré polynomial of a symmetric product. Proc. Camb. Phil. Soc. 58 (1962), 563-568.

Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет.

E.mail: gorsky@mccme.ru