Дизъюнктность представлений, возникающих в задаче гармонического анализа на бесконечномерной унитарной группе.

Вадим Горин

Введение

В связи с проблемой гармонического анализа на бесконечномерной унитарной группе $U(\infty)$ в работах [Olsh2] и [BO] было построено и изучено семейство представлений $T_{z,w}$, зависящих от двух комплексных параметров и являющихся естественным обобщением бирегулярного представления на случай "большой" группы $U(\infty)$. Построенные представления не меняются при комплексном сопряжении каждого из чисел z, w, их структура существенно зависит от того, является ли один из параметров целым числом. Нашей целью будет доказательство дизъюнктности этих представлений.

Напомним, что два представления T и T' называются дизъюнктными, если они не имеют изоморфных ненулевых подпредставлений. В работе доказан следующий результат:

Теорема 1. *Пусть все параметры z, w, z', w' не являются целыми, $\{z, \overline{z}\} \neq \{z', \overline{z'}\}$, $\{w, \overline{w}\} \neq \{w', \overline{w'}\}$ (все пары считаются неупорядоченными) , тогда представления $T_{z,w}$ и $T_{z',w'}$ дизъюнктны.*

В работе [KOV] исследовалось семейство представлений бесконечномерной симметрической группы T_z и был получен аналогичный результат. Наши рассуждения заимствуют некоторые идеи из этой работы, однако случай унитарной группы оказался существенно более сложным и для доказательства потребовалось привлечение дополнительных соображений.

Автор благодарен Г. Ольшанскому за постановку задачи, многочисленные плодотворные обсуждения и помощь в упрощении доказательств.

1 Сферические представления $U(\infty)$, граф Гельфанда-Цетлина, редукция к центральным мерам.

В этом разделе мы приводим общие факты о представлениях группы $U(\infty)$, большинство из них были взяты автором из работы [Olsh2].

Рассмотрим цепочку классических групп $U(N)$, $N = 1, 2, \dots$, вложенных друг в другу естественным образом, и обозначим через $U(\infty)$ их объединение. Следуя общей философии [Olsh1], мы образуем (G, K)-пару, где G – это группа $U(\infty) \times U(\infty)$, а K – диагональная подгруппа, изоморфная $U(\infty)$. Мы работаем с унитарными представлениями T группы G, обладающими выделенным циклическим K-инвариантным вектором ξ. Такие представления называются сферическими представлениями (G, K)-пары. Они полностью определяются соответствующим матричным коэффициентом $\psi(\cdot) = (T(\cdot)\xi, \xi)$. Такие функции ψ называются сферическими. Они являются K-биинвариантными функциями на G, из которых могут быть получены (ограничением на подгруппу $U(\infty) \times \{e\} \subset G$) центральные функции χ на $U(\infty)$. Неприводимым представлениям T отвечают экстремальные характеры (т.е. крайние точки выпуклого множества всех характеров – центральных, положительно-определённых непрерывных комплексных функций на $U(\infty)$ со значением 1 в единице группы).

Неприводимые сферические представления (G, K) и экстремальные характеры $U(\infty)$ полностью описаны, они зависят от счётного количества параметров. Существует биективное соответствие $\chi^{(\omega)} \leftrightarrow \omega$ между экстремальными характерами и точками ω бесконечномерной области

$$\Omega \subset \mathbb{R}^{4\infty+2} = \mathbb{R}^{\infty} \times \mathbb{R}^{\infty} \times \mathbb{R}^{\infty} \times \mathbb{R}^{\infty} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

где Ω — множество шестёрок

$$\omega = (\alpha^+, \beta^+; \alpha^-, \beta^-; \delta^+, \delta^-)$$

таких, что

$$\alpha^{\pm} = (\alpha_1^{\pm} \geq \alpha_2^{\pm} \geq \dots \geq 0) \in \mathbb{R}^{\infty}, \quad \beta^{\pm} = (\beta_1^{\pm} \geq \beta_2^{\pm} \geq \dots \geq 0) \in \mathbb{R}^{\infty},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^{\pm} + \beta_i^{\pm}) \leq \delta^{\pm}, \quad \beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1.$$

Для функций $\chi^{(\omega)}(U)$, где $U \in U(\infty)$, существует явная формула, впервые открытая D. Voiculescu. Её мы тут приводить не будем, подробности могут быть найдены в [Vo] и [Olsh2].

Как показано в [Olsh2] для любого характера χ существует и единственна вероятностная мера σ на Ω, такая что

$$\chi(U) = \int_{\Omega} \chi^{(\omega)}(U) \sigma(d\omega), \quad U \in U(\infty).$$

Мы называем σ спектральной мерой характера χ. Верно и обратное: каждой вероятностной мере на Ω соответствует характер группы $U(\infty)$.

В соответствии с общей теорией, дизъюнктность двух сферических представлений T и T' эквивалентна дизъюнктности спектральных мер σ и σ', отвечающих их характерам. Её мы и будем доказывать.

Удобным средством для описания характеров группы $U(\infty)$ является граф Гельфанда-Цетлина (также называемый графом сигнатур). Его вершины символизируют неприводимые представления групп $U(N)$, а ребра задают отношения включения между неприводимыми представлениями $U(N)$ и $U(N+1)$. Обозначим через $\mathbb{G}T_N$ подмножество вершин, отвечающих группе $U(N)$. Элементы $\mathbb{GT}_N$ могут быть отождествлены с доминантными весами представлений $U(N)$, которые являются упорядоченными наборами из N целых чисел $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N)$ — сигнатурами. Мы соединяем две сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\mu \in \mathbb{GT}_{N+1}$ ребром и пишем $\lambda \prec \mu$, если

$$\mu_1 \geq \lambda_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq \mu_{N+1}.$$

По произвольному характеру χ группы $U(\infty)$ мы можем определить коэффициенты разложения его ограничения на $U(N)$ в выпуклую комбинацию функций $\chi^\lambda(\cdot)/\chi^\lambda(e)$, где χ^λ — неприводимый характер $U(N)$, индексированный сигнатурой $\lambda \in \mathbb{GT}_N$. Коэффициенты этого разложения образуют вероятностное распределение $M_N(\lambda)$ на дискретном множестве $\mathbb{GT}_N$. Мы получаем биекцию между характерами и последовательностями вероятностных распределений $\{M_N\}_{N=1,2,\dots}$, называемыми когерентными системами (из-за соотношений когерентности, связывающих M_N и M_{N+1}). Подробнее об этом и последующем можно узнать из [Olsh2].

Путём в графе сигнатур $\mathbb{GT}$ называется конечная бесконечная последовательность $t = (t_1, t_2, \dots)$, такая, что $t_N \in \mathbb{GT}_N$ и t_N соединено с t_{N+1} ребром для каждого $N = 1, 2, \dots$. На множестве $\mathcal{T}$ всех таких бесконечных путей можно ввести топологию, базой которой будут цилиндрические множества C_τ, где $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$– конечный путь:

$$C_\tau = \{t \in \mathcal{T} | t_1 = \tau_1, \dots, t_N = \tau_N\}.$$

Определив топологию, мы можем построить σ-алгебру борелевских множеств и изучать меры на этой σ-алгебре.

Мера на $\mathcal{T}$ называется центральной, если мера цилиндрического множества C_τ, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, зависит только от τ_N.

Рассмотрим теперь произвольную сигнатуру $\lambda \in \mathbb{GT}_N$. Множество конечных путей, оканчивающихся в λ состоит в точности из $\operatorname{Dim}_N(\lambda) = \chi^\lambda(e)$ элементов. Каждой когерентной системе на графе сигнатур можно сопоставить центральную меру ρ на множестве всех путей, объявив меру цилиндрического множества, построенного по конечному пути, оканчивающемуся сигнатурой λ, равной $M_N(\lambda)/\operatorname{Dim}_N(\lambda)$. Корректность этого определения следует из свойств когерентных систем.

Таким образом, мы имеем цепочку биекций между характерами группы $U(\infty)$, вероятностными мерами σ на Ω (спектральными мерами), когерентными системами $\{M_N\}$ и центральными мерами на бесконечных путях в графе сигнатур ρ.

Покажем теперь, что дизъюнктность спектральных мер σ и σ' следует из дизъюнктности отвечающих им центральных мер ρ и ρ' (аналогичная утверждение для случая бесконечномерной симметрической группы доказано в [KOV]).

Предложение 2. *Пусть центральные меры ρ и ρ' на графе сигнатур дизъюнктны, тогда отвечающие им спектральные меры на Ω также дизъюнктны.*

Доказательство. Предположим противное. Обозначим через $\tilde{\sigma} = \sigma \wedge \sigma'$ наибольшую меру, меньшую σ и σ' (мы говорим, что мера μ меньше, чем мера ν, если $\mu(A) \leq \nu(A)$ для любого измеримого множества A). Существование последней легко доказывается. Если меры не являются дизъюнктными, то $\tilde{\sigma}-$ ненулевая мера.

Нетрудно видеть, что соответствие $\sigma \leftrightarrow \rho$ между вероятностными спектральными мерами на Ω и центральными мерами на графе сигнатур, продолжается до соответствия между ненормированными (т.е. не являющимися вероятностными) конечными мерами.

Пусть $\tilde{\rho}$ – центральная мера, отвечающая $\tilde{\sigma}$.

Для значения этой меры на цилиндрическом множестве C_λ, построенном по произвольному пути, который оканчивается сигнатурой λ, существует интегральное представление:

$$\tilde{\rho}(C_\lambda) = \int_\Omega f_\lambda(\omega)\tilde{\sigma}(d\omega),$$

где $f_\lambda(\omega)$ значение на таком же цилиндрическом множестве меры, отвечающей экстремальному характеру, соответствующему параметру ω по формуле Voiculescu.

Из последней формулы, неотрицательности $f_\lambda(\omega)$ и того, что $\tilde{\sigma} \leq \sigma$ и $\tilde{\sigma} \leq \sigma'$, следует, что $\tilde{\rho} \leq \rho$ и $\tilde{\rho} \leq \rho'$. Но тогда $\rho \wedge \rho' \neq 0$ и меры ρ и ρ' не являются дизъюнктными.

□

Далее мы будем доказывать дизъюнктность центральных мер на графе сигнатур, отвечающих характерам представлений $T_{z,w}$ и $T_{z',w'}$. Обозначим эти меры через $\rho_{z,w}$ и $\rho'_{z',w'}$.

Как было показано в [Olsh2], когерентная система, отвечающая представлению $T_{z,w}$ имеет вид:

$$M_N^{z,w}(\lambda) = (S_N(z,w))^{-1} \cdot \prod_{i=1}^{N} \left| \frac{1}{\Gamma(z-\lambda_i+i)\Gamma(w+N+1+\lambda_i-i)} \right|^2 \cdot \mathrm{Dim}_N^2(\lambda),$$

где $S_N(z,w)$ — нормировочная константа, точное значение которой нам не понадобится.

Обозначим через $P_N^{z,w}(\lambda)$ меру $\rho_{z,w}$ произвольного цилиндрического множества C_λ, построенного по пути, который заканчивается сигнатурой λ. Имеет место следующая формула:

$$\rho_{z,w}(C_\lambda) = P_N^{z,w}(\lambda) = M_N^{z,w}(\lambda)/\,\mathrm{Dim}_N(\lambda)$$

.

Саму меру $\rho_{z,w}$ мы в дальнейшем будем называть z, w–мерой.

На этом месте о представлениях $T_{z,w}$ можно забыть, все дальнейшие рассужения отталкиваются только от последних двух формул.

2 Схема дальнейшего доказательства

Рассмотрим две пары z, w и z', w', будем считать, что все четыре числа нецелые. Будем изучать отношение $\frac{P_N^{z,w}}{P_N^{z',w'}}$, Рассмотрим $\mathfrak{Q}$ – множество путей, вдоль которых это отношение стремится к конечному ненулевому пределу. Это множество, очевидно, является борелевским. Нашей задачей становится показать, что оно имеет меру ноль по каждой из мер: $\rho_{z,w}(\mathfrak{Q}) = \rho_{z',w'}(\mathfrak{Q}) = 0$. Из этого будет следовать дизъюнктность мер. Подробное доказательство того, что дизъюнктность мер следует из этого утверждения проведено, в частности в [KOV] (см. раздел 8.4) на примере бесконечномерной симметрической группы и графа Юнга. В нашем случае рассужения повторяются дословно и мы не будем их здесь приводить.

Дальнейшее доказательство состоит из двух независимых частей. В первой из них мы доказываем, что z, w–мера пересечения множества $\mathfrak{Q}$ и множества путей, выходящих из любого тостого крюка (точные определения и формулировки см. далее), равняется нулю. Во второй части обсуждается множество путей, не выходящих из некоторого толстого крюка, и доказывается, что подобные пути можно игнорировать, так как их совокупность является борелевским множеством меры ноль.

Будем говорить, что путь в графе сигнатур лежит в *левом толстом крюке*, если существуют i и j, такие что $\lambda_i < j$ для всех сигнатур пути. Путь лежит в *правом толстом крюке*, если существуют такие i и j, что для сигнатуры пути на этаже N выполнено, что $\lambda_{N-i} > j$.

Обозначим через G^+ множество всех путей, которые не лежат ни в каком левом толстом крюке, а за G^- множество путей, не лежащих ни в каком правом толстом крюке. В дальнейшем мы покажем, что почти (в смысле z, w меры) каждый путь не лежит ни в каком двустороннем толстом крюке, т.е. либо не лежит ни в каком правом толстом крюке, либо не лежит ни в каком левом толстом крюке. Таким образом, $\rho_{z,w}(G^+ \bigcup G^-) = 1$.

На данном этапе мы будем доказывать следующую теорему:

Теорема 3. *Если* $\{z, \overline{z}\} \neq \{z', \overline{z'}\}$, *то*

$$\rho_{z,w}(\mathfrak{Q} \cap G^+) = \rho_{z',w'}(\mathfrak{Q} \cap G^+) = 0$$

Если $\{w, \overline{w}\} \neq \{w', \overline{w'}\}$, *то*

$$\rho_{z,w}(\mathfrak{Q} \cap G^-) = \rho_{z',w'}(\mathfrak{Q} \cap G^-) = 0$$

В частности, отсюда следует, что если $z \neq z'$, $z \neq \overline{z'}$, $w \neq w'$ и $w \neq \overline{w'}$, то соответствующие меры дизъюнктны.

Мы будем доказывать первую часть теоремы, вторая доказывается аналогично.

3 Основное доказательство

Обозначим через h_N двойное отношение

$$h_N = \frac{P^{z,w}_{N+1}}{P^{z',w'}_{N+1}} : \frac{P^{z,w}_{N}}{P^{z',w'}_{N}}.$$

Если отношение $\frac{P^{z,w}_{N}}{P^{z',w'}_{N}}$ стремится к конечному пределу, то $h_N \to 1$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество путей, вдоль которых $h_N \to 1$. Будем теперь доказывать, что z,w-мера множества $\mathfrak{A} \cap G^+$ равняется нулю ($\rho_{z,w}(\mathfrak{A} \cap G^+) = 0$).

Выберем некоторое $\delta > 0$. Назовём событие $|h_k - 1| > \delta$ флуктуацией на этаже k. Обозначим через A^δ_t множество таких путей, для которых начиная с этажа t флуктуации отсутствуют. Покажем, что если выбрать достаточно маленькое δ и достачно большое число T, то для каждого $t > T$ $\rho_{z,w}(A^\delta_t \cap G^+) = 0$. Легко видеть, что из этого будет следовать нужное нам утверждение.

Будем изображать сигнатуру двумя диаграммами Юнга: положительной, длины строчек которой совпадают с положительными λ_i, и отрицательной, набор длин строчек которой совпадает с набором абсолютных величин отрицательных λ_i.

Обратим внимание на то, что при переходе к следующему этажу графа Гельфанда-Цетлина к положительной диаграмме приклеивается некоторый набор клеток, при этом проекции приклеиваемых клеток на горизонтальную ось (если воспринимать диаграмму Юнга как набор расположенных друг под другом горизонтальных строчек из единичных квадратиков на клетчатой плоскости, в котором длина i–ой строчки равна λ_i) не должны пересекаться.

Напомним, что содержанием клетки находящейся в i-ой строчке и j-ом столбце называется число $c(\square) = j - i$.

Легко видеть, что путь лежит внутри левого толстого крюка тогда и только тогда, когда для каждого k к положительной диаграмме Юнга лишь конечное число раз прибавляется клетка с содержанием k.

Идея дальнейшего доказательства в том, что прибавление клетки с не очень большим содержанием при переходе к следующему этажу может вызвать флуктуацию. А именно, мы покажем, что почти любому участку пути, на котором происходит добавление клетки с некоторым фисированным содержанием k и не происходит флуктуации, можно сопоставить другой участок с такими же началом и концом, но в котором флуктуация уже заведомо происходит.

Это в совокупности с тем фактом, что вдоль типичного пути добавляется сколь угодно много клеток с содержанием k, позволит нам по данному конечному, но достаточно длинному пути, не содержащему флуктуаций, построить произвольно большое количество путей с тем же концом, содержащих флуктуации. А из последнего мы уже сможем заключить, что множество путей без флуктуаций имеет меру ноль.

Итак, зафиксируем натуральное число k, значение которого выберем в дальнейшем. Построим семейство множеств путей B_ε, исчерпывающих множество G^+, в ограничении на которые нам в дальнейшем удастся построить преобразования путей, "создающие" флуктуации. Ключевым техническим моментом доказательства является следующее предложение.

Предложение 4. *Пусть $\Re(k+w) > 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность чисел $N_1 < N_2 < N_3 < ..$ и множество путей $B_\varepsilon \subset G^+$, такое что $\rho_{z,w}(G^+ \setminus B_\varepsilon) < \varepsilon$. Для всякого $n > 0$ и для любого пути из B_ε на этажах пути с N_n до $N_{n+1}-1$ клетка с содержанием k добавляется хотя бы один раз. Кроме того, на следующем шаге после первого из таких добавлений не происходит добавления клетки с содержанием $k-1$ (а следовательно, не происходит добавления клетки в тот же столбец)*

Доказательство этого предложения размещено в следующем разделе, а сейчас покажем как оно позволяет доказать теорему.

Из теоремы 10.7 из [Olsh2] следует,что для почти каждого в смысле z,w-меры пути существует предел $\Delta^+(N)/N$, где $\Delta^+(N)$– количество клеток в положительной диаграмме на N-ом этаже пути. Следовательно, для каждого $\alpha > 0$ и почти любого пути существует такой n, что на каждом этаже с номером $N > n$ к положительной диаграмме прибавляется не более αN клеток.

Следовательно, зафиксировав произвольное $\beta > 0$, можно выбрать множество C^α_β меры не менее, чем $1-\beta$, и число $T(\alpha,\beta)$, такое, что вдоль всех путей из C^α_β, на этажах с номером $N > T$ количество прибавляемых клеток не более чем αN.

Обозначим через H пересечение множеств B_ε, C^α_β и A^δ_t. Так как множества B_ε исчерпывают G^+, а множества C^α_β исчерпывают множество почти всех путей, то нам достаточно доказать, что для достаточно маленьких δ и α, произвольных $\varepsilon > 0$ и $\beta > 0$ и каждого $t > T(\alpha,\beta)$ мера H равна нулю.

Неформально путь из множества H можно описать следующим образом: начиная с некоторого этажа вдоль него отсутствуют флуктуации, на каждом шаге прибавляется не очень много клеток, и при этом в нём есть добавления клеток с содержанием k, описанные в предложении.

Выберем теперь некоторое множество H, ему соответствует набор чисел N_i, а также номер этажа T, начиная с которого все нужные нам условия выполнены. Пусть N_p — первое из чисел N_i, большее T, зафискируем некоторое натуральное число $q > p$ и рассмотрим этажи графа сигнатур с N_p по N_q. Выберем X_p — некоторую сигнатуру на этаже N_p и X_q — сигнатуру на этаже N_q и изучим участки путей, проходящих через X_p и X_q, на этажах $N_p \dots N_q$. Для фиксированных X_p и X_q таких участков конечное число и из центральности z,w-мер следует, что на них индуцируется равномерное распределение. Если мы покажем, что доля таких участков, полученных из путей множества H, от общего количества таких участков стремится к 0 при $q \to \infty$ (равномерно по X_p и X_q), то из этого автоматически будет следовать, что мера множество H равна нулю.

Далее зафискируем ещё и $X_{p+1}, \ldots, X_{q-1}$ — сигнатуры на этажах $N_{p+1} \ldots N_{q-1}$ соответственно. Ясно, что достаточно доказать, что при большом q доля участков путей из H среди всех участков путей, проходящих через $X_p \ldots X_q$ становится сколь угодно малой.

Зафиксируем отрезок на этажах $N_p, N_p + 1, \ldots, N_q$ некоторого пути, проходящего на N_i-ом этаже через сигнатуру X_i $(p \leq i \leq q)$. Рассмотрим ограничение пути на этажи $N_s, N_s + 1, \ldots, N_{s+1}$ и определим преобразование пути f_s.

Мы знаем, что на этих этажах происходит добавление клетки с содержанием k, на следующем шаге после которого не происходит добавления клетки в тот же столбец. Пусть на n-ом шаге клетка с содержанием k добавлялась в столбец j, кроме неё в ту же строчку добавились клетки в столбцах $j+1, j+2, \ldots, j+l$, а на $N+1$-ом шаге в j-ый столбец ничего не добавлялось. Рассмотрим теперь другой путь, который отличается тем, что N-ом шаге клетки в столбцы $j+1, j+2, \ldots, j+l$ теперь не добавляются, а вместо этого добавляются в эти столбцы на $N+1$-ом шаге. Мы получили некоторое отображение, определённое на множестве путей из H, обозначим его через f_s. Легко видеть, что оно является инъективным. (Для определения прообраза пути надо выбрать в нём первое добавление клетки с содержанием k и перенести добавление этой клетки и всех расположенных правее в той же строчке на предыдущий этаж)

Кроме того, докажем, что при надлежащем выборе k, δ и α образ участка, полученногопо пути из H, уже не является участком некоторого пути из H, т.к. вдоль него возникают флуктуации.

Действительно, посмотрим на отношение плотностей на этаже N. Суть нашего преобразования в том, что в новом пути для одного фиксированного i длина λ_i уменьшилась. Вспомним, что

$$P_N^{z,w}(\lambda) = (S_N(z,w))^{-1} \cdot \prod_{i=1}^{N} \left| \frac{1}{\Gamma(z-\lambda_i+i)\Gamma(w+N+1+\lambda_i-i)} \right|^2 \cdot \mathrm{Dim}_N(\lambda)$$

Следовательно, при уменьшении длины строчки эта плотность умножилась на

$$\prod_{\square} \left| \frac{w+N+1+c(\square)}{z-c(\square)} \right|^2 \cdot (\text{сомножители, не зависящие от } z, w),$$

где произведение берётся по всем клеткам, которые исчезли из i-ой строчки. Мы можем заключить, что отношение плотностей умножилось на

$$\prod_{\square} \left| \frac{z'-c(\square)}{z-c(\square)} \right|^2 \cdot \prod_{\square} \left| \frac{w+N+1+c(\square)}{w'+N+1+c(\square)} \right|^2 \qquad (*)$$

Сначала разберёмся со вторым сомножителем. Исчезающие клетки в нашем случае имели содержанием $k, k+1, \ldots, k+l$, выбирая k положительным, можно считать, что все содержания также будут положительными. Кроме того, N мы тоже можем считать достаточно большим. Тогда произведение можно оценить следующим образом:

$$\prod_{\square}\left|\frac{w+N+1+c(\square)}{w'+N+1+c(\square)}\right|^2=\prod_{\square}\left|\frac{1+\frac{w}{1+c(\square)+N}}{1+\frac{w'}{1+c(\square)+N}}\right|^2\leq$$

$$\prod_{\square}\left(1+\frac{2|w|+2|w'|}{1+c(\square)+N}\right)^2\leq\prod_{\square}\left(1+\frac{2|w|+2|w'|}{N}\right)^2\leq\left(1+\frac{2|w|+2|w'|}{N}\right)^{2\alpha N}$$

Последнее неравенство следует из оценки на общее число добавляемых клеток. С другой стороны, аналогично

$$\prod_{\square}\left|\frac{w+N+1+c(\square)}{w'+N+1+c(\square)}\right|^2\geq\left|1-\frac{2|w|+2|w'|}{N}\right|^{2\alpha N}.$$

Таким образом, если α достаточно мало, то второй сомножитель в $(*)$ сколь угодно близок к единице, будем считать, что его расстояние до единицы не больше, чем $\delta/100$ Теперь вернёмся к первому сомножителю. Заметим, что если $z\neq z'$ и $z\neq\overline{z'}$, то, начиная с некоторого $k=k_0$, отношение$\frac{|z-k|}{|z'-k|}$ или всегда больше 1, или всегда меньше 1, следовательно, существуют такое $k>0$ и $\nu>0$, что

$$\left|\prod_{r=k}^{l}\left|\frac{z'-r}{z-r}\right|^2-1\right|>\nu$$

для любого $l>k$.

Зафиксируем теперь некоторое достаточно большое k (так, что $k>k_0$ и $\Re(k+w)>0$) и ему соответствующее ν. По ним выберем $\delta\leq\nu/100$, исходя из δ, выберем достаточное малое α.

Понятно, что если отношение плотностей лежало в δ окрестности единицы, то для образа под действием f_s это уже не верно, т.е. в пути появляются флуктуации, и образ пути из H под действием f_s уже не лежит в H.

Теперь заметим, что образы исследуемого участка путей H по действием различных f_s не будут пересекаться, т.к. в них флуктуации возникают на разных этажах. Пусть на этажах $N_p,\ldots,N_q$ у нас имеется E различных участков путей из множества H, тогда каждое из f_s нам даёт ещё E участков, а все f_s вместе как минимум $E(q-p)$ участков. Таким образом, доля участков путей из H среди всех участков не превышает $\frac{E}{E+E(q-p)}$. Выбирая q достаточно большим, мы добьёмся сколь угодно маленьких значений последнего выражения. Теорема доказана.

4 Доказательство предложения 4.

Предложение. *Пусть* $\Re(k+w) > 0$. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует последовательность чисел* $N_1 < N_2 < N_3 < ..$ *и множество путей* $B_\varepsilon \subset G^+$, *такое что* $\rho_{z,w}(G^+ \setminus B_\varepsilon) < \varepsilon$. *Для всякого* $n > 0$ *и для любого пути из* B_ε *на этажах пути с* N_n *до* $N_{n+1}-1$ *клетка с содержанием* k *добавляется хотя бы один раз. Кроме того, на следующем шаге после первого из таких добавлений не происходит добавления клетки с содержанием* $k-1$ *(а следовательно, не происходит добавления клетки в тот же столбец)*

Доказательство. Будем воспринимать z,w–меру как марковский процесс с переходными вероятностями

$$p_{z,w}(\lambda|\mu) = \frac{P^{z,w}_{N+1}(\lambda)}{P^{z,w}_{N}(\mu)}.$$

Лемма 5. *Пусть* $\Re(k+w) > 0$. *Зафиксируем произвольную диаграмму* μ *на этаже* N *(или даже весь путь от* 1 *этажа до диаграммы* μ, *ввиду центральности мер это не имеет значения), тогда условная вероятность того, при переходе к* $N+1$*-му этажу происходит добавление к положительной диаграмме клетки с содержанием* k, *не превышает* $\frac{c(k)}{N}$

Доказательство. Заметим, что для фиксированной диаграммы μ добавление клетки с содержанием k возможно лишь в одной строчке и столбце. Обозначим координаты этой добавляемой клетки через (i,j). Сравним вероятность того, что на $N+1$-ом этаже $\lambda_i = j-1$ (при условии диаграммы μ на N-ом) с вероятностью того, что $\lambda_i \geq j$. Покажем, что последняя отличается от первой в $\frac{c(k)}{N}$ раз, этого будет достаточно для доказательства предложения.

Зафиксируем кроме μ теперь и длины всех строчек на этаже $N+1$ кроме i-ой произвольным образом. Обозначим теперь через p_m отношение вероятности того, что $\lambda_i = j-1+m$, к вероятности того, что $\lambda_i = j-1$. Задача сводится к доказательству того, что $\sum\limits_{m=1}^{\infty} p_m < \frac{c(k)}{n}$ Исходя из определения переходной вероятности и формулы Вейля для размерности, получаем:

$$\mathrm{Dim}_{N+1}(\lambda) = \prod_{1\leq i<j\leq N+1} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j-i}.$$

$$p_m = \left| \frac{\Gamma(z-k+1)\Gamma(w+N+1+k)}{\Gamma(z-k+1-m)\Gamma(w+N+1+k+m)} \right|^2 \cdot \\ \cdot \prod_{a=1}^{i-1} \frac{\lambda_a - a - (k-1+m)}{\lambda_a - a - (k-1)} \cdot \prod_{a=i+1}^{N+1} \frac{(k-1+m) - (\lambda_a - a)}{(k-1) - (\lambda_a - a)}.$$

Следовательно,

$$p_m \le \left|\frac{\Gamma(z-k+1)\Gamma(w+N+1+k)}{\Gamma(z-k+1-m)\Gamma(w+n+1+k+m)}\right|^2 \prod_{a=i+1}^{N+1} \frac{m+(a-i)}{a-i} \le$$
$$\le \left|\frac{\Gamma(z-k+1)\Gamma(w+N+1+k)}{\Gamma(z-k+1-m)\Gamma(w+N+1+k+m)}\right|^2 \prod_{a=1}^{N} \frac{m+a}{a} =$$
$$= \frac{|(k-z)_m|^2}{|(w+N+1+k)_m|^2} \cdot \frac{(m+N)!}{N!m!} = \frac{|(k-z)_m|^2(N+1)_m}{|(w+N+1+k)_m|^2 m!} \le$$
$$\le \frac{\left((|\Re(k-z)|+|\Im z|)_m\right)^2}{|\Re(w+N+1+k)|_m m!} \cdot \frac{(N+1)_m}{|\Re(w+N+1+k)|_m}$$

Заметим, что при $\Re(k+w) > 0$, второй сомножитель меньше единицы, значит,

$$p_m \le \frac{\left((|\Re(k-z)|+|\Im z|)_m\right)^2}{|\Re(w+N+1+k)|_m m!} =$$
$$= \frac{\left((|\Re(k-z)|+|\Im z|)\right)^2}{|\Re(w+N+1+k)|m} \frac{\left((|\Re(k-z)|+|\Im z|+1)_{m-1}\right)^2}{|\Re(w+N+2+k)|_{m-1}(m-1)!} \le$$
$$\le \frac{c(k)}{N} \frac{\left((|\Re(k-z)|+|\Im z|+1)_{m-1}\right)^2}{|\Re(w+N+2+k)|_{m-1}(m-1)!}$$

Отсюда заключаем, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m \le \frac{c(k)}{N} F(|\Re(k-z)|+|\Im z|+1, |\Re(k-z)|+|\Im z|+1, |\Re(w+N+2+k)|; 1)$$

Где $F(a,b,c;z)$ — значение гипергеометрической функции ${}_2F_1$ с параметрами a,b,c в точке z.

В нашем случае $a = b = |\Re(k-z)|+|\Im z|+1$, $c = |\Re(w+N+2+k)|$.

Воспользовавшись явной формулой для значения гипергеометрической функции в единице (см., например, [BE]), получаем, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m \le \frac{c(k)}{N} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-2a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-a)}$$

При $N \to \infty$ параметр $c \to \infty$, а параметр a не меняется, и $\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-2a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-a)} \to 1$, следовательно,

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m \le \frac{c_1(k)}{N}.$$

□

Лемма 6. *Зафиксируем два достаточно больших числа m и n. Вероятность того, что на этажах с n-ого до m-ого добавляется клетка с содержанием k, а на следующем после первого такого добавления шаге добавлется клетка с содержанием $k-1$ не превосходит $\frac{c(k)}{n}$*

Доказательство. Разобьём событие "произошло добавление клетки с содержанием k на этажах с n до m" в дизъюнктное объединение событий "первое после n-ого этажа добавление клетки с содержанием k произошло на этаже i ($n < i < m$)", а последнее событие разобьём на дизъюнктное объединение индикаторов тех путей (от 1 этажа графа сигнатур до этажа i), для которых первое после n-ого этажа добавление клетки с содержанием k произошло на этаже i. Для каждого из таких путей сошлёмся на предыдущее предложение (для содержания $k-1$), а затем просуммируем оценки. □

Вернёмся теперь к доказываемому предложению.

Заметим, что из последнего предложения следует, что если число N_1 достаточно велико, и числа в последовательности N_i растут хотя бы как геометрическая прогрессия со знаменателем 2, то на множестве меры сколь угодно близкой к единице второе условие будет выполнено автоматически.

Теперь по данному нам ε выберем N_1 столь большим, чтобы мера множества, на котором второе условие не выполнено не превосходила $\varepsilon/2$. Обозначим его дополнение через A_1.

Мы знаем, что для всех путей из $A_1 \cap G^+$ клетки с содержанием k добавляются бесконечное число раз. Следовательно, для каждого пути из этого множества определено число $R > N_1$ — такой номер этажа, что первое добавление клетки с содержанием k после этажа N_1 происходит на этаже R. Объединение путей, соответствующим разным R, по всем $R > N_1$, совпадает со множеством $A_1 \cap G^+$ следовательно, если взять достаточно большее число N_2 (возьмём его так, чтобы заодно и $N_2 > 2 \cdot N_1$), то для множества $A_2 \subset A_1 \cap G^+$ таких путей, для которых $R < N_2$, верно, что $\rho_{z,w}((A_1 \cap G^+) \setminus A_2) < \varepsilon/4$. Далее аналогичным образом выберем число $N_3 > 2 \cdot N_2$ и множество $A_3 \subset A_2$, $\rho_{z,w}(A_2 \setminus A_3) < \varepsilon/8$. И так далее.

Пересечение всех A_i и является искомым множеством B_ε.

□

5 Мера множества путей, лежащих в толстом крюке.

Теорема 7. *z, w-мера множества путей, лежащих внутри двустороннего толстого крюка (т.е. таких, что существуют i и j, что $\lambda_i < j$ для всех диаграмм пути и существуют l и m, такие, что $\lambda_{N-l} > m$, где N - номер этажа) равна нулю*

Доказательство. Обозначим через $R(i, j, l, m, t)$ множество таких путей, что на всех этажах, начиная с t-ого $\lambda_i = j-1$, $\lambda_{i-1} \geq j$ $\lambda_{N-l} =$

$m+1$, $\lambda_{N-l+1} \leq m$. Нам достаточно доказать, что для каждой пятёрки (i,j,l,m,t) $\rho_{z,w}(R(i,j,l,m,t)) = 0$.

Удобно смотреть на z,w-меру как на марковский процесс на графе сигнатур.

Лемма 8. *Пусть на этаже N $\lambda_i = j-1$, $\lambda_{i-1} \geq j$, $\lambda_{N-l} = m+1$, $\lambda_{N-l+1} \leq m$. Тогда начиная с некоторого N, p_N – условная вероятность того, что на $N+1$-ом этаже $\lambda_i = j-1$ и $\lambda_{N-l} = m+1$– не превосходит $1 - \frac{\varepsilon}{N}$*

Доказательство. Рассмотрим всевозможные сигнатуры из $N+1$ строчки, получаемые из данной сигнатуры, состоящей из N строчек. Каждой сигнатуре λ на $N+1$-ом этаже, у которой $\lambda_i = j-1$, сопоставим сигнатуру λ', у которой длины всех строчек, кроме i-ой такие же, но $\lambda_i = j$. Сравним условные вероятности первой и второй. Они отличаются в

$$\frac{P_N^{z,w}(\lambda')}{P_N^{z,w}(\lambda)} = \left|\frac{z-j+i}{w+N+1+j-i}\right|^2 \cdot \frac{\mathrm{Dim}_{N+1}(\lambda')}{\mathrm{Dim}_{N+1}(\lambda)}$$

раз. Начиная с некоторого N, первый сомножитель больше, чем $const/N^2$.

По формуле Вейля

$$\mathrm{Dim}_{N+1}(\lambda) = \prod_{1 \leq i < j \leq N+1} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j-i}.$$

Следовательно

$$\frac{\mathrm{Dim}_{N+1}(\lambda')}{\mathrm{Dim}_{N+1}(\lambda)} = \prod_{1 \leq p < i} \frac{\lambda_p - p - j + i}{\lambda_p - p - (j-1) + i} \cdot \prod_{N+1 \geq p > i} \frac{j - i - (\lambda_p - p)}{j - i - 1 - (\lambda_p - p)}. \quad (**)$$

Заметим, что первое произведение ограничено снизу величиной $2^{-(i-1)}$, т.е. константой. Далее, все сомножители во втором произведении больше единицы и меньше двойки. Кроме того, при $i < p < N-l$: $m < \lambda_p < j$, следовательно, $\lambda_p - p$ принимает все значения от $(j-i-2)$ до $j-i-n$, кроме конечного числа. Мы можем заключить, что $(**)$ оценивается снизу следующим выражением:

$$const \cdot \prod_{g=j-i-2}^{j-i-N} \frac{j-i-g}{j-i-g-1} = const \cdot \frac{2}{1}\frac{3}{2} \cdots \frac{N}{N-1} = const \cdot N$$

Таким образом, условные вероятности отличаются не более чем в $const/N$ раз. Следовательно, $p_N \leq 1 - \frac{\varepsilon}{N}$ □

Теперь мы можем заключить, что

$$\rho_{z,w}(R(i,j,l,m,t)) \leq \prod_{N=t+1}^{\infty} p_N \leq \prod_{N=t+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right) \to 0$$

□

Как представляется автору, доказанная теорема о дизъюнктности мер справедлива и в несколько более общем случае.

Можно предположить, что верно более сильное утверждение. А именно, что z, w-мера множества путей, лежащих внутри левого толстого крюка (т.е. таких, что существуют i и j, что $\lambda_i < j$ для всех диаграмм пути) равна нулю.

Однако пока что простого непосредственного доказательства этого утверждения нет. Видимо, его можно вывести из рассуждений работы [BO2] о предельном поведении промежуточных (intermediate) координат Фробениуса для положительной и отрицательной диаграмм (tail kernel).

В случае верности гипотезы доказываемая нами теорема распространяется и на некоторые дополнительные случаи. Можно было бы утверждать, что и представления $T_{z,w}$ и $T_{z,w'}$, где $\{w, \overline{w}\} \neq \{w', \overline{w'}\}$ дизъюнктны.

Литература

[BE] Г. Бейтман и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, том 1. Москва, Физмат, 1973.

[BO] A. Borodin, G. Olshanski, Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes, Ann. of Math. 161 (2005), no. 3, 1319–1422, arXiv:math/0109194.

[BO2] A. Borodin, G. Olshanski, Random partitions and the gamma kernel, Advances in Mathematics 194 (2005), 141-202, arXiv:math-ph/0305043.

[KOV] S. Kerov, G. Olshanski, A. Vershik, Harmonic Analysis on the infinite symmetric group. Invent. Math. 158 (2004), no. 3, 551–642, arXiv:math/0312270.

[Olsh1] Г. Ольшанский, Унитарные представления бесконечномерных пар (G,K) и формализм Р.Хау. Доклады АН СССР 269 (1983), no. 1, 33–36.

[Olsh2] G. Olshanski, The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group, J. Funct. Anal. 205 (2003), no. 2, 464–524, arXiv:math/0109193.

[Vo] D. Voiculescu, Représentations factorielles de type II_1 de $U(\infty)$, J. Math. Pures et Appl. 55 (1976), 1-20.