Сохранение положительности секционной кривизны при факторизации по некоторым несвободным действиям*

С. В. Дятлов

18 августа 2007 г.

Аннотация

Исследуется вопрос сохранения положительности секционной кривизны при факторизации по некоторым несвободным изометрическим действиям групп Ли. Рассматриваются действия групп S^1 и S^3, при которых факторпространству можно придать структуру гладкого многообразия при помощи соотношений $S^3/S^1 \simeq S^2$ и $S^7/S^3 \simeq S^4$. Доказано, что при положительности секционной кривизны исходной метрики на всех площадках, ортогональных к орбитам действия, на фактормногообразии есть метрика положительной кривизны.

Введение

В данной работе исследуется некоторый способ построения замкнутых римановых многообразий положительной секционной кривизны. Примеров таких многообразий до сих пор известно достаточно мало (перечень всех известных примеров можно найти, например, во введении к статье [1]).

Основным инструментом построения новых примеров является рассмотрение факторпространств некоторых многообразий по изометрическому свободному действию групп Ли. Более точно, пусть группа Ли G

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-0094а).

действует на замкнутом гладком римановом многообразии M изометриями, т. е. сохраняет метрику M. Допустим, что это действие *свободно*, т. е. для любой точки $p \in M$ и для любого элемента $g \in G$ такого, что $g \neq 1$, имеем $g \cdot p \neq p$. В таком случае факторпространство M/G обладает структурой гладкого многообразия такой, что проекция τ многообразия M на M/G есть гладкое отображение.

На M/G вводится метрика следующим образом. Пусть X, Y — два вектора, касательные к M/G в точке q, и пусть $q = \tau(p)$ для некоторого $p \in M$. В таком случае существуют единственные векторы X' и Y', касательные к M в точке p, ортогональные к орбите действия G и переходящие в X и Y соответственно при отображении τ. Пусть g — метрика на M. Положим $g_*(X,Y) = g(X',Y')$. Из изометричности действия G следует, что это соотношение корректно определяет риманову метрику g_* на M/G, которую мы назовем *факторметрикой* метрики g.

Вычисление кривизны построенной факторметрики проводится с помощью формул кривизны для римановых субмерсий. Отображение $f : M \to N$ многообразий называется *субмерсией*, если оно сюръективно и его дифференциал в каждой точке сюръективен. Пусть f — субмерсия, M и N — римановы многообразия с метриками g_M и g_N соответственно. Рассмотрим в точке $p \in M$ два вектора X' и Y', ортогональные к подмногообразию $f^{-1}(f(p))$. Пусть под действием отображения f они переходят в векторы X и Y соответственно. Отображение f называется *римановой субмерсией*, если для любых X' и Y' выполнено соотношение $g_M(X',Y') = g_N(X,Y)$. Если f — риманова субмерсия, R_M и R_N — тензоры кривизны многообразий M и N соответственно, то из соотношений для кривизны, найденных в работе [2], следует неравенство

$$R_M(X',Y',Y',X') \leq R_N(X,Y,Y,X).$$

Проекция τ многообразия M на M/G есть риманова субмерсия. Отсюда вытекает такое утверждение: *если группа изометрий G действует свободно и метрика M имеет положительную секционную кривизну на всех двумерных площадках, ортогональных к орбитам G, то факторметрика на многообразии M/G имеет положительную секционную кривизну.*

В данной работе мы докажем следующий результат, обобщающий вышеизложенное утверждение:

Теорема 1. *Пусть M — гладкое многообразие, на котором действует* *группа G, равная S^1 или $S^3 = Sp(1)$. Обозначим через N пространство неподвижных точек этого действия, через τ — проекцию M на M/G. Пусть $W \subset M$ — окрестность N. Допустим, что на M задана метрика $(\cdot\,,\cdot)_0$, инвариантная относительно действия G, и выполнены следующие условия:*

1) Метрика $(\cdot\,,\cdot)_0$ имеет положительную секционную кривизну на всех двумерных площадках, ортогональных к орбитам действия G;

2) Для всякой точки $p \in M$, группа изотропий в точке p тривиальна либо совпадает со всей группой G;

3) N — компактное подмногообразие в M коразмерности $2\cdot(1+\dim G)$.

Тогда пространство M/G обладает структурой гладкого многообразия такой, что отображение τ гладкое в точках, где G действует свободно, и на M/G есть метрика положительной секционной кривизны, совпадающая с факторметрикой метрики $(\cdot\,,\cdot)_0$ вне W.

Для построения гладкой структуры на M/G используются бесконечные конусы над расслоением Хопфа $S^3/S^1 \simeq S^2$ и расслоением $S^7/S^3 \simeq \mathbb{S}^4$. Проблемы вызывает тот факт, что при факторизации стандартной круглой метрики на сфере в каждом из этих расслоений мы получаем круглую метрику на сфере вдвое меньшего радиуса, что создает конусную особенность в окрестности пространства неподвижных точек. В §1 данной статьи приводится конструкция, позволяющая сгладить факторметрику в окрестности N. В §2, 3 строится некоторая метрика на нормальном расслоении над N и исследуется ее кривизна. В §4 показывается, что при некоторых условиях одну метрику можно заменить другой в окрестности подмногообразия с сохранением положительности кривизны. В §5 строится гладкая структура на M/G и искомая метрика положительной кривизны.

Автор благодарит Я. В. Базайкина за постановку задачи и полезные советы.

1 Сглаживание конусной метрики

Рассмотрим метрику на $\mathbb{R}^n$ вида

$$g = dr^2 + g^2(r)d\varphi^2. \tag{1.1}$$

Здесь $r(x)$ — длина вектора x, $d\varphi^2$ — метрика на сфере rS^{n-1} единичной секционной кривизны, $g(r)$ — некоторая положительная функция класса $C^2(0,\infty)$ с непрерывными в нуле производными, имеющая третью производную в нуле.

Для того чтобы данная метрика принадлежала классу C^2, необходимо и достаточно выполнение следующих условий согласования:

$$g(0) = 0,\ g'(0) = 1,\ g''(0) = 0. \tag{1.2}$$

Прямым подсчетом с использованием формул кривизны для скрещенных произведений можно убедиться (впрочем, в данной работе это напрямую не используется), что для того чтобы данная метрика имела положительную кривизну, необходимо и достаточно выполнение условий

$$g'''(0) < 0,\ g''(r) < 0,\ |g'(r)| < 1 \text{ при } r > 0. \tag{1.3}$$

Далее в данном параграфе мы построим вспомогательные функции g_ε, которые будут использованы при дальнейших построениях. Хотя существование этих функций с геометрической точки зрения достаточно естественно (см. иллюстрацию далее), на пути формального доказательства встречаются определенные трудности; в связи с этим, доказательство приводится полностью.

Рассмотрим для начала функцию $g_0(r) = r(1-r^2)$ при $0 \le r < 1/2$. В таком случае g_0 удовлетворяет условиям (1.2), (1.3) и $g_0'(r) \ge 1/4$. Рассмотрим для всякого $\delta > 0$ *сглаживающее ядро* $\omega_\delta(x)$, т. е. такую четную неотрицательную гладкую функцию с носителем $[-\delta,\delta]$, интеграл от которой по всей прямой равен 1. Через $f * g$ будем обозначать свертку функций f и g, определенных на всей прямой, т. е. интеграл

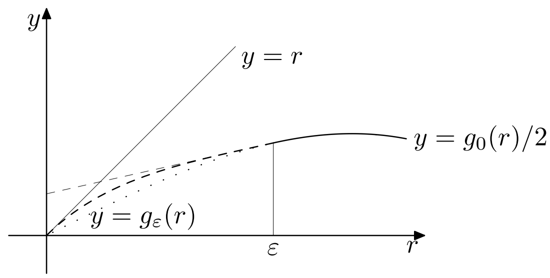
$$(f*g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt.$$

Лемма 1.1. *1. Если функция f липшицева и имеет почти всюду производную f', то $(f*\omega_\delta)' = f'*\omega_\delta$.*

2. Если функция f вогнута, то функция $f*\omega_\delta$ также вогнута.

3. $1*\omega_\delta = 1$, $x*\omega_\delta = x$.

4. Если $f''' = 0$ во всех точках, то $f*\omega_\delta = f + c$ для некоторой константы c.



Доказательство. 1. Достаточно применить теорему Лебега о мажорируемой сходимости.

2. Вогнутость функции f означает, что для нее выполнено неравенство $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ для $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$. Выполнение этого неравенства для функции $f * w_\delta$ следует непосредственно из определения свертки.

3. Первое из утверждений очевидно. Второе следует из того, что $(x * \omega_\delta)(0) = 0$ и $(x * \omega_\delta)' = x' * \omega_\delta$.

4. Имеем: $f'(x)$ — линейная функция, и по п. 3, $(f * \omega_\delta)'(x) = f'(x)$. □

Лемма 1.2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $g_\varepsilon \in C^2(0, 1/2)$ со следующими свойствами:*

1) g_ε удовлетворяет (1.2), $g''_\varepsilon(r) \leq -r$ и $g'_\varepsilon(r) \leq g'_0(r)$;

2) Если $r \geq \varepsilon$, то $g_\varepsilon(r) = g_0(r)/2$.

Доказательство. Считаем, что $\varepsilon < 1/2$. Рассмотрим множество $\mathcal{A}$ функций класса $C^2[0, \varepsilon]$, удовлетворяющих условиям

$$g(0) = 0,\ g''(0) = 0,\ g''(r) \leq -r, \tag{1.4}$$

$$g'(r) \leq g'_0(r) + g'(0) - 1. \tag{1.5}$$

Ясно, что $\mathcal{A}$ выпукло. Рассмотрим оператор $T_\varepsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^4$, действующий по правилу

$$T_\varepsilon(g) = (g(\varepsilon), g'(\varepsilon), g''(\varepsilon), g'(0)).$$

Достаточно показать, что множество $T_\varepsilon(\mathcal{A})$ содержит точку

$$A = \left(\frac{g_0(\varepsilon)}{2}, \frac{g'_0(\varepsilon)}{2}, \frac{g''_0(\varepsilon)}{2}, 1\right).$$

Поскольку это множество выпукло и конечномерно, достаточно убедиться, что оно плотно в окрестности точки A. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(r) = (r^3 - 3\varepsilon^2 r + 2\varepsilon^3)/6$. Отметим, что $\varphi''(r) = r$, $\varphi(\varepsilon) = \varphi'(\varepsilon) = 0$.

Возьмем точку $B = (b_0, b_1, b_2, b_3)$. Если B достаточно близка к A, то выполняются условия

$$\begin{gathered} b_2 + \varphi''(\varepsilon) < 0, \ \varepsilon b_1 + \varphi(0) < b_0 < (b_3 - 1)\varepsilon + g_0(\varepsilon), \\ b_1 < b_3 - 1 + g_0'(\varepsilon). \end{gathered} \tag{1.6}$$

Для доказательства плотности множества $T_\varepsilon(\mathcal{A})$ в окрестности точки A построим семейство функций $g_\delta \in \mathcal{A}$ таких, что $T_\varepsilon(g_\delta) \to B$ при $\delta \to +0$. Построим функцию $g_1 \in C^2[0, \varepsilon]$ такую, что

$$\begin{gathered} g_1'' \le 0, \ g_1(\varepsilon) = b_0, \ g_1'(\varepsilon) = b_1, \ g_1''(\varepsilon) = b_2 + \varphi''(\varepsilon), \\ g_1(0) > \varphi(0), \ g_1'(r) - \varphi'(r) \le b_3 - 1 + g_0'(r). \end{gathered} \tag{1.7}$$

Ее можно искать в виде

$$g_1(r) = b_0 + b_1(r - \varepsilon) - \int\limits_0^{\varepsilon - r} u(t)\, dt.$$

При этом функция $u \in C^1[0, \varepsilon]$ должна удовлетворять условиям

$$\begin{gathered} u(0) = 0, \ u'(0) = -(b_2 + \varphi''(\varepsilon)), \ u' \ge 0, \\ \int\limits_0^{\varepsilon} u(t)\, dt < b_0 - b_1\varepsilon - \varphi(0), \ u(\varepsilon - r) \le \varphi'(r) + g_0'(r) + b_3 - 1 - b_1. \end{gathered}$$

Такая функция u существует, если выполнены условия (1.6).

Имеем: $g_1(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon) < (b_3 - 1)\varepsilon + g_0(\varepsilon)$, но $g_1(0) - \varphi(0) > g_0(0)$. Следовательно, найдется точка $r_0 \in (0, \varepsilon)$ такая, что $g_1(r_0) - \varphi(r_0) = (b_3 - 1)r_0 + g_0(r_0)$. Рассмотрим следующую функцию g_2 на всей числовой прямой:

$$g_2(r) = \begin{cases} (b_3 - 1)r + g_0(r), & r < r_0, \\ g_1(r) - \varphi(r), & r_0 \le r < \varepsilon, \\ b_0 + b_1(r - \varepsilon) + \frac{b_2}{2}(r - \varepsilon)^2, & r \ge \varepsilon. \end{cases}$$

Ясно, что эта функция всюду непрерывна и принадлежит C^2 всюду, кроме точки r_0. Возьмем свертку $g_\delta = g_2 * \omega_\delta$. Как известно, $g_\delta \in C^\infty$, и при $\delta \to 0$ будет $T_\varepsilon(g_\delta) \to T_\varepsilon(g_2) = B$. Остается показать, что $g_\delta \in \mathcal{A}$ при малых δ. Равенства $g_\delta(0) = g''_\delta(0) = 0$ следуют из леммы 1.1 (п. 1) и нечетности функции g_2 в окрестности нуля. Неравенство $g''_\delta(r) \le -r$ выполнено в окрестности нуля по лемме 1.1 (пп. 1, 3), а вне этой окрестности оно следует по лемме 1.1 (п. 2) из вогнутости функции $g_2 + \varphi$ при $r > 0$.

Покажем теперь, что для g_δ выполняется (1.5). В окрестности отрезка $[0, \varepsilon]$, имеем $g'_2 \le b_3 - 1 + g'_0$, поэтому в силу леммы 1.1 (пп. 1, 4), получаем

$$g'_\delta = g'_2 * \omega_\delta \le (b_3 - 1 + g'_0) * \omega_\delta = g'_0 - 1 + g'_\delta(0). \quad \square$$

Лемма 1.3. *Пусть* $0 < t < 1/3$, *и* $g_0(t_0) = g_\varepsilon(t)$. *Тогда* $g'_\varepsilon(t) \le g'_0(t_0)$ *и* $7tg'_\varepsilon(t) \ge t_0 g'_0(t_0) + g_\varepsilon(t)$.

Доказательство. Имеем $g'_\varepsilon \le g'_0$, откуда $g_\varepsilon \le g_0$ и $t_0 \le t$. Но тогда $g'_\varepsilon(t) \le g'_0(t) \le g'_0(t_0)$.

Функции g_0 и g_ε вогнутые, при этом $g'_0(0) = g'_\varepsilon(0) = 1$ и $g_0(1/2) = 3/8$, $g_\varepsilon(1/2) = 3/16$, откуда при $0 \le t \le 1/2$ имеем

$$\frac{3}{4}t \le g_0(t) \le t, \quad \frac{3}{8}t \le g_\varepsilon(t) \le t,$$

Далее,

$$t_0 g'_0(t_0) \le t_0 \le \frac{4}{3} g_0(t_0) = \frac{4}{3} g_\varepsilon(t) \le \frac{4}{3}t, \quad t g'_\varepsilon(t) \ge t g'_\varepsilon(1/3) \ge \frac{t}{3}. \quad \square$$

2 Некоторые метрики на векторных расслоениях

Некоторые результаты данного параграфа могут быть получены как следствия из работы [3] (см. [3, теорема 3.5], [4, теорема 9.59]). Тем не менее, для полноты изложения мы приведем их с доказательством.

Пусть N — некоторое n-мерное компактное многообразие, M — некоторое векторное расслоение над N ранга $m - n$, т. е.

$$M = \{(p, v) \mid p \in N, v \in V_p\}, \tag{2.1}$$

где V_p — $(m-n)$-мерное векторное пространство, которое будем называть *слоем* в точке p. Мы полагаем, что в каждом V_p гладким образом задано скалярное произведение $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ и считаем, что N вложено в M как $\{v = 0\}$. Проекцию M на N обозначим через π. Линию вида $(p, tv)_{t\geq 0}$ будем называть *лучом, исходящим из* p *по направлению* v.

Определим функцию $r : M \to \mathbb{R}$ так:

$$r(p, v) = \sqrt{\langle v, v\rangle}. \tag{2.2}$$

Ясно, что функция r непрерывная и принадлежит классу $C^\infty(M^\circ)$, где $M^\circ = M \setminus N$ — регулярная часть M. *Окрестностью* N будем называть многообразие $\{r < \rho\} \subset M$ для $\rho > 0$.

Заметим, что если $K = \{r = 1\} \in M$, то есть стандартное отождествление $M^\circ \simeq K \times (0, \infty)$. Оно позволяет отождествлять различные *радиальные слои*, т. е. подмногообразия вида $\{r = t\}$ для $t > 0$. Образ стандартного поля 1 на $(0, \infty)$ при данном отождествлении будем обозначать через $\partial/\partial r$. Образы векторных полей на K при этом отождествлении будем называть *радиально-базисными* полями. *Вертикальными полями* будем называть радиально-базисные поля, касательные к слоям. Отметим, что для любого радиально-базисного поля A имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}, A\right] = 0. \tag{2.3}$$

Кроме этого, скобка Ли двух радиально-базисных полей есть опять радиально-базисное поле.

Тривиализацией расслоения M будем называть пару (U, Θ), где U — открытое подмножество в N, Θ — диффеоморфизм $U \times \mathbb{R}^{m-n}$ на $\pi^{-1}(U)$ такой, что для всякого $p \in U$ ограничение Θ на $p \times \mathbb{R}^{m-n}$ есть линейный изоморфизм на V_p, переводящий скалярное произведение на $\mathbb{R}^{m-n}$ в скалярное произведение $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ на V_p. Мы полагаем, что расслоение M *локально тривиально*, т. е. для всякого $p \in N$ существует тривиализация (U, Θ) такая, что $p \in U$.

Пусть заданы две тривиализации (U_1, Θ_1) и (U_2, Θ_2). Тогда есть гладкое отображение $\Psi_{12} : U_1 \cap U_2 \to SO(m-n)$ такое, что при $p \in U_1 \cap U_2$, $x \in \mathbb{R}^{m-n}$ имеем

$$\Theta_2(p, x) = \Theta_1(p, \Psi_{12}(p) \cdot x). \tag{2.4}$$

Рассмотрим на $\mathbb{R}^{m-n}$ метрику вида $dr^2 + g^2(r)d\varphi^2$, как в (1.1). Отметим, что эта метрика инвариантна относительно стандартного действия группы $SO(m-n)$. Будем называть *поворотными* векторные поля на

$\mathbb{R}^{n-m}$ вида $V(x) = A \cdot x$ для некоторой матрицы $A \in \mathfrak{so}(m-n)$. Отметим, что поворотные поля суть в точности киллинговы поля действия $SO(m-n)$, поэтому для векторных полей A и B и поворотного поля C справедливо соотношение

$$(\nabla_A C, B) + (\nabla_B C, A) = 0. \tag{2.5}$$

Отметим также, что поворотное поле при действии $SO(m-n)$ переходит в поворотное поле, поэтому в силу (2.4) мы можем определять поворотные поля на любом слое V_p. Векторное поле на M называем поворотным, если оно касательно к слоям и поворотное на каждом слое.

Рассмотрим некоторую тривиализацию (U, Θ). Образы векторных полей на U при Θ будем называть *локально-горизонтальными*, а образы постоянных в декартовой системе координат векторных полей на $\mathbb{R}^{m-n}$ при Θ — *локально-вертикальными* векторными полями на M. Если X — векторное поле на M, то через X' будем обозначать ортопроекцию X на слои относительно некоторой метрики на M.

Лемма 2.1. *Пусть (U, Θ_1) и (U, Θ_2) — две тривиализации, X_1 и X_2 — локально-горизонтальные в первой и второй тривиализациях соответственно векторные поля на M, порожденные одним и тем же векторным полем на U. В таком случае поле $X_1 - X_2$ поворотное.*

Доказательство. Рассмотрим поле X на U, породившее X_1 и X_2. Пусть Ψ_{12} — отображение, связывающее две тривиализации по формуле (2.4). Имеем

$$(X_2 - X_1)_{\Theta_1(p,x)} = d\Theta_{1(p,x)}(0, (X\Psi_{12})(p) \cdot \Psi_{12}(p)^{-1} \cdot x).$$

Но так как $\Psi_{12}(p) \in SO(m-n)$, то $(X\Psi_{12})(p) \cdot \Psi_{12}(p)^{-1} \in \mathfrak{so}(m-n)$, откуда и получаем требуемое. □

Данная лемма показывает, что корректно следующее

Определение 2.1. *Пусть задана функция g, удовлетворяющая* (1.2). *Метрика $(\cdot\,,\cdot)$ на M называется правильной или g-правильной, если:*

1) сужение метрики $(\cdot\,,\cdot)$ на каждый слой V_p есть $dr^2 + g^2(r)d\varphi^2$;

2) ортопроекция на слой всякого локально-горизонтального в некоторой тривиализации векторного поля есть поворотное поле.

Лемма 2.2. *Пусть метрика $(\cdot\,,\cdot)$ правильная. Тогда*

1) в любой точке $p \in N$ пространства T_pN и T_pV_p ортогональны;

2) любой слой V_p вполне геодезичен.

Доказательство. 1) Имеем: в точках N ортопроекция любого локально-горизонтального поля на слой есть 0.

2) Рассмотрим некоторую тривиализацию (U, Θ). Пусть A и B — два локально-вертикальных векторных поля, X — локально-горизонтальное поле. Достаточно доказать, что $(\nabla_A B, X - X') = 0$. Имеем

$$
\begin{gathered}
[A, X] = [B, X] = [A, B] = 0,\ X(A, B) = 0, \\
(\nabla_A X', B) + (\nabla_B X', A) = 0, \\
(A, X) = (A, X'),\ (B, X) = (B, X'), \\
2(\nabla_A B, X) = A(B, X) + B(A, X) - X(A, B), \\
2(\nabla_A B, X') = A(B, X') + B(A, X') - (\nabla_A X', B) - (\nabla_B X', A),
\end{gathered}
$$

откуда и получаем требуемое. $\square$

Рассмотрим некоторую тривиализацию (U, Θ). Пусть заданы:

1) линейное отображение $Q_p : T_pN \to \mathfrak{so}(m-n)$, гладко зависящее от точки $p \in N$;

2) функция g, удовлетворяющая (1.2);

3) метрика g_N на N.

Лемма 2.3. *Существует единственная g-правильная метрика $(\cdot\,,\cdot)$ на $\pi^{-1}(U)$ такая, что*

1) для $p \in U$, $x \in \mathbb{R}^{m-n}$ и локально-горизонтального поля X имеем

$$X'_{\Theta(p,x)} = d\Theta_{(p,x)}(0, Q_p(X_p) \cdot x); \tag{2.6}$$

2) отображение π — риманова субмерсия на N с метрикой g_N.

При этом подмногообразие N будет вполне геодезическим в этой метрике, и для локально-вертикальных полей A, B, C и локально-горизонтальных полей X, Y в точке $p \in N$ имеют место равенства

$$A(B, C) = 0,\ A(X, Y) = 0,\ A(B, X) = \langle Q_p(X_p) \cdot A, B \rangle. \tag{2.7}$$

В правой части последнего равенства поля A, B отождествляются с породившими их полями на $\mathbb{R}^{m-n}$.

Кроме того, на каждом радиальном слое $\{r = t\}$ при его стандартном отождествлении с $K = \{r = 1\}$ метрика $(\cdot\,,\cdot)$ зависит лишь от отображения Q_p, метрики g_N и значения $g(t)$ (и не зависит напрямую от t).

Доказательство. Отметим, что требование g-правильности фиксирует метрику на слоях V_p. Метрика $(\cdot\,,\cdot)$ задается по формулам

$$(A, X) = (A, X'),\ (X, Y) = (X', Y') + \pi^* g_N(X, Y). \tag{2.8}$$

Здесь поле A локально-вертикальное, поля X, Y локально-горизонтальные, поля X', Y' определяются из (2.6). Из того, что Q_p — линейное отображение из T_pN в $\mathfrak{so}(m-n)$, получаем, что (2.8) определяет гладкую правильную риманову метрику.

Равенства (2.7) проверяются непосредственно. Вполне геодезичность N эквивалентна тому, что в точках N верно равенство

$$(\nabla_X X, A) = 0. \tag{2.9}$$

Но в точках N имеем

$$(\nabla_X X, A) = X(A, X) - (X, \nabla_X A) = -(X, \nabla_A X) = -\frac{1}{2}A(X, X). \tag{2.10}$$

Отсюда вытекает, что (2.9) эквивалентно второму равенству в (2.7). Последнее из утверждений леммы проверяется непосредственно исходя из (2.8) и вида метрики на слое. $\square$

Пусть M_0 — некоторое многообразие, на котором задана риманова метрика $(\cdot\,,\cdot)_0$; N — вполне геодезическое компактное подмногообразие M_0. Положим метрику g_N равной сужению метрики $(\cdot\,,\cdot)_0$ на N. Рассмотрим в качестве M *нормальное расслоение* над N, т. е. положим $V_p = T_pN^\perp = \{v \in T_pM_0 \mid v \perp T_pN\}$. В качестве скалярного произведения $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ на слое V_p возьмем метрику $(\cdot\,,\cdot)_0$ на $T_pN^\perp$. Рассмотрим отображение $\Phi : M \to M_0$, определенное по правилу

$$\Phi(p, v) = \exp_p v. \tag{2.11}$$

Как известно, при малых r это отображение есть диффеоморфизм на свой образ. Перенесем с помощью Φ метрику $(\cdot\,,\cdot)_0$ на окрестность N в M.

Лемма 2.4. *Пусть задана функция g, удовлетворяющая (1.2). Тогда существует единственная g-правильная метрика $(\cdot\,,\cdot)_1$ на M такая, что π — риманова субмерсия для метрики g_N на N и 1-струи метрик $(\cdot\,,\cdot)_0$ и $(\cdot\,,\cdot)_1$ в точках N совпадают. При этом на каждом радиальном слое $\{r=t\}$ при его отождествлении с K метрика $(\cdot\,,\cdot)_1$ зависит лишь от метрики $(\cdot\,,\cdot)_0$ и значения $g(t)$ (и не зависит напрямую от t). Кроме того, для всякого поля X его ортопроекция на слой X' не зависит от функции g.*

Доказательство. Достаточно показать локальное существование и единственность метрики $(\cdot\,,\cdot)_1$. Пусть (U,Θ) — некоторая тривиализация на M. Пусть также A, B, C — локально-вертикальные, X, Y — локально-горизонтальные поля. Ясно, что если искомая метрика существует, то она может быть построена с помощью леммы 2.3 по некоторому отображению Q_p. При этом метрики $(\cdot\,,\cdot)_0$ и $(\cdot\,,\cdot)_1$ на N совпадают автоматически, поэтому для совпадения 1-струй двух метрик необходимо и достаточно добиться выполнения для $(\cdot\,,\cdot)_0$ в точках N равенств

$$(A,X)_0=0,\ (A,B)_0=\langle A,B\rangle \tag{2.12}$$

и равенств (2.7). Выполнение (2.12) и первого равенства из (2.7) следует из конструкции нормального расслоения, выполнение второго равенства из (2.7) следует из вполне геодезичности N (см. (2.9), (2.10)). Последнее равенство из (2.7) эквивалентно равенству

$$\langle Q_p(X_p)\cdot A,B\rangle = A(B,X)_0. \tag{2.13}$$

Но выражение справа полилинейно зависит от A, B, X, поэтому (2.13) определяет единственное отображение Q_p. Остается показать, что определенное таким образом отображение Q_p действует в $\mathfrak{so}(m-n)$, т. е. что в точках N имеем

$$A(A,X)_0=0.$$

Действительно, в точках N будет $\nabla_A A=0$, поэтому

$$A(A,X)_0=(A,\nabla_A X)_0=(A,\nabla_X A)_0=\frac{1}{2}X(A,A)_0=0.$$

Последние два из утверждений этой леммы следуют из последнего утверждения предыдущей леммы, а также формул (2.6) и (2.13). $\square$

Установим некоторые дальнейшие свойства правильных метрик, которые будут полезны при вычислении кривизны. Рассмотрим некоторое поле X на N. Существует единственное поле $\hat{X}$ на N, π-связанное с X и ортогональное к слоям; назовем его *базисным полем* (порожденным полем X). Отметим, что вектор $\partial/\partial r$ ортогонален радиальным слоям, поэтому все базисные поля касательны к радиальным слоям.

Лемма 2.5. *Если на M задана правильная метрика $(\cdot\,,\cdot)$, то*

1) для любых радиально-базисных полей A и X таких, что A касательно к слоям, величина $(A,X)/(A,A)$ постоянна на любом луче;

2) если поле X базисное, то оно радиально-базисное.

Доказательство. 1) Рассмотрим некоторую тривиализацию (U,Θ). Для радиально-базисных полей X, касательных к слою, требуемое утверждение следует из вида метрики на слое, поэтому далее можем считать X локально-горизонтальным. Но тогда $(A,X) = (A,X')$, а поле X' поворотное и потому касательное к слоям и радиально-базисное.

2) Рассмотрим радиально-базисное поле Y, совпадающее с X на радиальном слое $\{r=t\}$ для некоторого t. Это возможно, так как X касательно к радиальным слоям. Теперь, X и Y π-связаны с одним и тем же полем на N, и по п. 1 данной леммы Y ортогонально к слоям. Значит, $X=Y$. $\square$

Лемма 2.6. *Пусть $(\cdot\,,\cdot)$ — правильная метрика, A, B — радиально-базисные поля. Обозначим через* II *вторую фундаментальную форму радиальных слоев. Тогда имеют место равенства*

$$\left(\mathrm{II}(A,B),\frac{\partial}{\partial r}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(A,B), \tag{2.14}$$

$$\left(\frac{DA}{\partial r},B\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(A,B), \tag{2.15}$$

$$\left(\frac{DA}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}\right) = 0. \tag{2.16}$$

Доказательство. Требуемые утверждения следуют из равенств

$$\left(\mathrm{II}(A,B),\frac{\partial}{\partial r}\right)=\left(\nabla_A B,\frac{\partial}{\partial r}\right)=\left(\nabla_B A,\frac{\partial}{\partial r}\right),$$
$$\left(\nabla_A B,\frac{\partial}{\partial r}\right)=A\left(B,\frac{\partial}{\partial r}\right)-\left(B,\nabla_A\frac{\partial}{\partial r}\right)=-\left(B,\frac{DA}{\partial r}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial r}(A,B)=\left(A,\frac{DB}{\partial r}\right)+\left(B,\frac{DA}{\partial r}\right),$$
$$\left(\frac{DA}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}\right)=\left(\nabla_A\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}\right)=\frac{1}{2}A\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}\right)=0.\qquad\square$$

3 Кривизна некоторого семейства правильных метрик

Пусть, как в лемме 2.4, M_0 — многообразие с заданной метрикой $(\cdot\,,\cdot)_0$, N — его вполне геодезическое подмногообразие, M — нормальное расслоение над N и метрика $(\cdot\,,\cdot)_0$ перенесена на M при помощи отображения Φ из (2.11). Пусть также задана функция g, удовлетворяющая (1.2), и константа $L\geq 0$. Рассмотрим по лемме 2.4 g-правильную метрику $(\cdot\,,\cdot)_1$ на M такую, что отображение π — риманова субмерсия. Построим метрику $(\cdot\,,\cdot)$ в окрестности N по формуле

$$(X,Y)=(X,Y)_1-Lr^2\cdot(\pi^*g_N)(X,Y).\tag{3.1}$$

Здесь X, Y — произвольные векторы. Ясно, что построенная метрика является гладкой. Она положительно определена при $r^2<1/L$, и ее 1-струи совпадают в точках N с 1-струями метрики $(\cdot\,,\cdot)_0$. Далее, на каждом радиальном слое $\{r=t\}$ метрика $(\cdot\,,\cdot)$ определяется метрикой $(\cdot\,,\cdot)_0$, константой L и значением $g(t)$. Кроме того, для всякого поля X его ортопроекция X' на слои зависит только от исходной метрики $(\cdot\,,\cdot)_0$ (т. е. не зависит от функции g и константы L). Соответственно метрика $(\cdot\,,\cdot)_0$ однозначно определяет, какие поля являются базисными в метрике $(\cdot\,,\cdot)$.

Сужение отображения π на любой радиальный слой есть риманова субмерсия с вполне геодезическими слоями из M с метрикой $(\cdot\,,\cdot)$ на N с метрикой $(1-Lr^2)g_N$. Поэтому (см. [4, п. 9C]) для базисных полей X,

Y и вертикальных полей A, B имеем

$$\begin{gathered}
[A,X]\in T(V_p),\ (\nabla_X Y,A)=\frac{1}{2}(A,[X,Y]),\\
(\nabla_A X,B)=0,\ (\nabla_X A,B)=([X,A],B),\\
(\nabla_X A,Y)=-\frac{1}{2}(A,[X,Y])=(\nabla_A X,Y).
\end{gathered}\tag{3.2}$$

Для обозначения ковариантной производной и тензора кривизны радиальных слоев будем использовать символы $\overline{\nabla}$ и $\overline{R}$. Как известно, если поля A и B касательные к радиальным слоям, то

$$\nabla_A B=\overline{\nabla}_A B+\mathrm{II}(A,B),\tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}
R(A,B,B,A)=\overline{R}(A,B,B,A)\\
-(\mathrm{II}(A,A),\mathrm{II}(B,B))+(\mathrm{II}(A,B),\mathrm{II}(A,B)).
\end{gathered}\tag{3.4}$$

Пусть A, B — вертикальные, а X, Y — базисные поля. Имеем по (2.15)

$$\begin{gathered}
\left(\frac{DA}{\partial r},B\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(A,B)=\frac{g'(r)}{g(r)}(A,B),\\
\left(\frac{DX}{\partial r},A\right)=\left(\frac{DA}{\partial r},X\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(X,A)=0,\\
\left(\frac{DX}{\partial r},Y\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(X,Y)=-\frac{Lr}{1-Lr^2}(X,Y),
\end{gathered}$$

откуда с учетом (2.16) имеем

$$\frac{DA}{\partial r}=\frac{g'(r)}{g(r)}A,\tag{3.5}$$

$$\frac{DX}{\partial r}=-\frac{Lr}{1-Lr^2}X.\tag{3.6}$$

Займемся вычислением секционной кривизны метрики $(\cdot\,,\cdot)$. Для этого рассмотрим два векторных поля

$$E=a\frac{\partial}{\partial r}+A+X,\ F=b\frac{\partial}{\partial r}+B+Y.$$

Мы считаем, что A, B — вертикальные, X, Y — базисные поля и $[A,B]=0$. Мы также полагаем, что в точке, где вычисляется кривизна, векторы

E, F образуют ортонормированную систему. Введем поля

$$P = A + X,\ Q = B + Y,\ \hat{A} = a\frac{\partial}{\partial r} + A,\ \hat{B} = b\frac{\partial}{\partial r} + B,$$
$$C = aB - bA,\ Z = aY - bX,\ G = C + Z.$$

Имеем

$$R(E, F, F, E) = R(P, Q, Q, P) + R\left(\frac{\partial}{\partial r}, G, G, \frac{\partial}{\partial r}\right) - 2R\left(\frac{\partial}{\partial r}, G, P, Q\right). \tag{3.7}$$

Для любого радиально-базисного поля H справедливо

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial r}, H, H, \frac{\partial}{\partial r}\right) &= \left(\frac{D}{\partial r}\nabla_H H, \frac{\partial}{\partial r}\right) - \left(\nabla_H \frac{DH}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla_H H, \frac{\partial}{\partial r}\right) + \left|\frac{DH}{\partial r}\right|^2 = \left|\frac{DH}{\partial r}\right|^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(H, H). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (3.5), (3.6) получаем

$$R\left(\frac{\partial}{\partial r}, G, G, \frac{\partial}{\partial r}\right) = -\frac{g''(r)}{g(r)}(C, C) + \left(\frac{L}{1 - Lr^2} + \frac{(Lr)^2}{(1 - Lr^2)^2}\right)(Z, Z). \tag{3.8}$$

Далее,

$$\begin{aligned} R\left(A, B, C, \frac{\partial}{\partial r}\right) &= A\left(\nabla_B C, \frac{\partial}{\partial r}\right) - B\left(\nabla_A C, \frac{\partial}{\partial r}\right) \\ &\quad + \left(\nabla_A C, \frac{DB}{\partial r}\right) - \left(\nabla_B C, \frac{DA}{\partial r}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(B(A, C) - A(B, C)) + \left(\nabla_A C, \frac{DB}{\partial r}\right) - \left(\nabla_B C, \frac{DA}{\partial r}\right) \\ &= \frac{g'(r)}{g(r)}(B(A, C) - A(B, C) + (\nabla_A C, B) - (\nabla_B C, A)) = 0, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial r}, Z, X, Y\right) &= \frac{\partial}{\partial r}(\nabla_Z X, Y) - Z\left(\frac{DX}{\partial r}, Y\right) \\
&\quad + \left(\frac{DX}{\partial r}, \nabla_Z Y\right) - \left(\frac{DY}{\partial r}, \nabla_Z X\right) \\
&= \frac{Lr}{1-Lr^2}(-2(\nabla_Z X, Y) + Z(X, Y) - (\nabla_Z Y, X) + (\nabla_Z X, Y)) = 0, \\
R\left(A, B, Z, \frac{\partial}{\partial r}\right) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(B(A, Z) - A(B, Z)) + \left(\nabla_A Z, \frac{DB}{\partial r}\right) - \left(\nabla_B Z, \frac{DA}{\partial r}\right) \\
&= \frac{g'(r)}{g(r)}((\nabla_A Z, B) - (\nabla_B Z, A)) = 0, \\
R\left(\frac{\partial}{\partial r}, C, A, Y\right) &= \left(\frac{D}{\partial r}\nabla_C A, Y\right) - \left(\nabla_C \frac{DA}{\partial r}, Y\right) = 0, \\
R\left(\frac{\partial}{\partial r}, C, X, Y\right) &= \frac{\partial}{\partial r}(\nabla_C X, Y) - C\left(\frac{DX}{\partial r}, Y\right) \\
&\quad + \left(\frac{DX}{\partial r}, \nabla_C Y\right) - \left(\frac{DY}{\partial r}, \nabla_C X\right) = -\left(\frac{Lr}{1-Lr^2} + \frac{g'(r)}{g(r)}\right)(C, [X, Y]), \\
R\left(\frac{\partial}{\partial r}, Z, A, Y\right) &= \frac{\partial}{\partial r}(\nabla_Z A, Y) - Z\left(\frac{DA}{\partial r}, Y\right) \\
&\quad + \left(\frac{DA}{\partial r}, \nabla_Z Y\right) - \left(\frac{DY}{\partial r}, \nabla_Z A\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(A, [Y, Z]) + \frac{1}{2}\left(\frac{Lr}{1-Lr^2} - \frac{g'(r)}{g(r)}\right)(A, [Y, Z]) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{Lr}{1-Lr^2} + \frac{g'(r)}{g(r)}\right)(A, [Y, Z])).
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем

$$
\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial r}, G, P, Q\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{Lr}{1-Lr^2} + \frac{g'(r)}{g(r)}\right)(-2(C, [X, Y]) + (A, [Y, Z]) - (B, [X, Z])) \\
&= -\frac{3}{2}\left(\frac{Lr}{1-Lr^2} + \frac{g'(r)}{g(r)}\right)(C, [X, Y]).
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Наконец, с помощью (2.14) и (3.4) посчитаем

$$
\begin{gathered}
R(P,Q,Q,P)=\overline{R}(P,Q,Q,P)\\
-\left(\frac{g'(r)}{g(r)}(A,A)-\frac{Lr}{1-Lr^2}(X,X)\right)\left(\frac{g'(r)}{g(r)}(B,B)-\frac{Lr}{1-Lr^2}(Y,Y)\right)\\
+\left(\frac{g'(r)}{g(r)}(A,B)-\frac{Lr}{1-Lr^2}(X,Y)\right)^2\\
=\overline{R}(P,Q,Q,P)-\left(\frac{g'(r)}{g(r)}\right)^2((A,A)(B,B)-(A,B)^2)\\
-\left(\frac{Lr}{1-Lr^2}\right)^2((X,X)(Y,Y)-(X,Y)^2)\\
+\frac{g'(r)}{g(r)}\frac{Lr}{1-Lr^2}((A,A)(Y,Y)+(B,B)(X,X)-2(A,B)(X,Y)).
\end{gathered}
\tag{3.10}
$$

Подставив в (3.7) формулы (3.8), (3.9) и (3.10), получаем формулу для кривизны в точках M°.

Лемма 3.1. *Пусть $p\in N\subset M$. Рассмотрим в точке p два вектора E, F, причем $E=A+X$, $F=B+Y$, векторы A, B касательны к слою, а векторные поля X, Y базисные. В таком случае в точке p*

$$
\begin{gathered}
R(E,F,F,E)=R(X,Y,Y,X)-g'''(0)((A,A)(B,B)-(A,B)^2)\\
+L((A,A)(Y,Y)+(B,B)(X,X)-2(A,B)(X,Y))+3(B,\nabla_A[X,Y]).
\end{gathered}
\tag{3.11}
$$

Доказательство. Поскольку справа и слева стоят выражения, зависящие от значений полей A, B только в точке p, без ограничения общности можно полагать, что поля A, B постоянны в декартовой системе координат слоя. Если $A=B=0$, то формула (3.11) очевидна. Поэтому далее будем полагать, что $A\neq 0$. Пусть $a=\sqrt{(A,A)_p}$, $b=(A,B)_p/a$. Рассмотрим луч, исходящий из p по направлению вектора A, и исследуем пределы некоторых выражений по этому лучу при $r\to 0$. Ясно, что на луче $A=a\partial/\partial r$. Далее, рассмотрим на луче поле $\overline{B}=B-b\partial/\partial r$. В таком случае $\overline{B}$ касательно к радиальным слоям. Применяя ранее полученные формулы кривизны для регулярных точек луча, получаем ($C=a\overline{B}$,

$Z = aY - bX$)

$$R\biggl(a\frac{\partial}{\partial r} + X, b\frac{\partial}{\partial r} + \overline{B} + Y, b\frac{\partial}{\partial r} + \overline{B} + Y, a\frac{\partial}{\partial r} + X\biggr)$$
$$= R(X, \overline{B} + Y, \overline{B} + Y, X) - \frac{g''(r)}{g(r)}(C, C)$$
$$+\biggl(\frac{L}{1 - Lr^2} + \frac{(Lr)^2}{(1 - Lr^2)^2}\biggr)(Z, Z) + 3\biggl(\frac{Lr}{1 - Lr^2} + \frac{g'(r)}{g(r)}\biggr)(C, [X, Y]).$$

Но значение $R(E, F, F, E)$ в точке p равно пределу этого выражения при $r \to 0$ и равно

$$R(X, \overline{B} + Y, \overline{B} + Y, X) - a^2 g'''(0)(\overline{B}, \overline{B}) + L(Z, Z) + 3A(\overline{B}, [X, Y]). \quad (3.12)$$

Отметим, что $(\partial/\partial r, [X, Y]) = 0$. Следовательно, $A(\overline{B}, [X, Y]) = A(B, [X, Y])$. С учетом симметрий тензора кривизны из (3.12) получаем, что в точке p

$$R(X, \overline{B} + Y, \overline{B} + Y, X) = R(X, Y, Y, X) + L(\overline{B}, \overline{B})(X, X). \quad (3.13)$$

Остается подставить (3.13) в (3.12) и воспользоваться тем, что $(\nabla_A B)_p = 0$. □

Рассмотрим в некотором векторном пространстве со скалярным произведением $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ векторы A, B, X, Y. Определим

$$V(A, B) = \langle A, A\rangle\langle B, B\rangle - \langle A, B\rangle^2, \quad (3.14)$$
$$W(A, B; X, Y) = \langle A, A\rangle\langle Y, Y\rangle + \langle B, B\rangle\langle X, X\rangle - 2\langle A, B\rangle\langle X, Y\rangle. \quad (3.15)$$

Лемма 3.2. *1.* $W(A, B; X, Y) \geq 0$.

2. Если $\{A, B\} \perp \{X, Y\}$ *и векторы* $A + X$, $B + Y$ *образуют ортонормированную систему, то*

$$W(A, B; X, Y) \geq \frac{1}{2}(\langle A, A\rangle + \langle B, B\rangle)(\langle X, X\rangle + \langle Y, Y\rangle). \quad (3.16)$$

3. Если $\{A, B\} \perp \{X, Y\}$, *то*

$$V(A + X, B + Y) = V(A, B) + V(X, Y) + W(A, B; X, Y). \quad (3.17)$$

Доказательство. 1. Из неравенства Коши —Буняковского получаем

$$W(A,B;X,Y) \geq \langle A,A\rangle\langle Y,Y\rangle + \langle B,B\rangle\langle X,X\rangle - 2\sqrt{\langle A,A\rangle\langle B,B\rangle\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle}$$
$$= (\sqrt{\langle A,A\rangle\langle Y,Y\rangle} - \sqrt{\langle B,B\rangle\langle X,X\rangle})^2.$$

2. Рассмотрим матрицу

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} \langle A,A\rangle & \langle A,B\rangle \\ \langle A,B\rangle & \langle B,B\rangle \end{pmatrix}.$$

Пусть λ, μ — ее собственные значения; ясно, что $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Далее,

$$W(A,B;X,Y) = \langle A,A\rangle(1 - \langle B,B\rangle) + \langle B,B\rangle(1 - \langle A,A\rangle) + 2\langle A,B\rangle^2$$
$$= \langle A,A\rangle + \langle B,B\rangle - 2V(A,B) = \lambda + \mu - 2\lambda\mu,$$
$$(\langle A,A\rangle + \langle B,B\rangle)(\langle X,X\rangle + \langle Y,Y\rangle) = (\lambda+\mu)(2-\lambda-\mu)$$

Соответственно требуемое неравенство превращается в

$$\lambda + \mu - 2\lambda\mu \geq \lambda + \mu - \frac{1}{2}(\lambda+\mu)^2.$$

Последнее неравенство, очевидно, верно.

3. Проверяется непосредственными вычислениями. □

Лемма 3.3. *Для некоторой константы M_1, зависящей лишь от метрики $(\cdot\,,\cdot)_0$, выполнено неравенство*

$$|[X,Y]'| \leq M_1 g(r) \frac{|X|\cdot|Y|}{1 - Lr^2}. \tag{3.18}$$

Здесь поля X, Y базисные.

Доказательство. Фиксируем поля на N, породившие X и Y. Тогда выражение справа не зависит от L (ибо в точке (p,v) оно равно $M_1 g(r)|X_p|\cdot|Y_p|$). Кроме того, поля X и Y не зависят от L и g; поскольку ортопроекция фиксированного поля на слой также не зависит от L и g, поле $[X,Y]'$ зависит лишь от исходной метрики $(\cdot\,,\cdot)_0$. Следовательно, мы можем полагать, что $L = 0$ и $g(r) = r$. Остается выбрать константу M_1, для которой неравенство (3.18) выполнено в этом случае. Такое возможно, ибо значение $[X,Y]'$ в точке (p,v) зависит лишь от значений X_p и Y_p, причем билинейно (и не зависит от значений полей X и Y в других точках); кроме того, в точках N имеем $[X,Y]' = 0$. □

Лемма 3.4. *Пусть метрика g_N имеет положительную секционную кривизну, и $g'''(0) < 0$. Тогда существует константа L_1 такая, что при $L \geq L_1$ метрика $(\cdot\,,\cdot)$ имеет положительную кривизну в точках многообразия N.*

Доказательство. Фиксируем точку $p \in N$. Можем полагать, что поля A и B постоянны в декартовой системе координат. Тогда $(B, \nabla_A[X,Y])_p = A(B,[X,Y])_p$. Рассмотрим луч, исходящий по направлению вектора A и воспользуемся предыдущей леммой:

$$\begin{aligned} A(B,[X,Y])_p &= |A| \cdot \frac{\partial}{\partial r}\bigg|_{r=0} (B,[X,Y]) = |A| \lim_{r\to 0} \frac{(B,[X,Y])}{r} \\ &\leq |A| \cdot |B| \cdot M_1 \cdot |X| \cdot |Y| \lim_{r\to 0} \frac{g(r)}{r} \\ &= M_1 |A| \cdot |B| \cdot |X| \cdot |Y|. \end{aligned}$$

Значит, в точке p

$$|(B, \nabla_A[X,Y])| \leq \frac{M_1}{4}(|A|^2 + |B|^2)(|X|^2 + |Y|^2).$$

Выберем такое $\delta > 0$, что $-g'''(0) \geq \delta$ и $R(X,Y,Y,X) \geq \delta V(X,Y)$. Пользуясь леммами 3.1 и 3.2, получаем, что для ортонормированной системы E, F имеем

$$\begin{aligned} R(E,F,F,E) &\geq \delta(V(X,Y) + V(A,B)) + L \cdot W(A,B;X,Y) \\ &-2M_1 \cdot W(A,B;X,Y) = \delta + (L - \delta - 2M_1) \cdot W(A,B;X,Y). \end{aligned}$$

Остается взять $L \geq 2M_1 + \delta$. □

Лемма 3.5. *Будем рассматривать для различных $\varepsilon > 0$ метрики $(\cdot\,,\cdot)$, построенные посредством (3.1) по фиксированной метрике $(\cdot\,,\cdot)_0$, и функции g_ε из леммы 1.2. Допустим, что метрика g_N имеет положительную секционную кривизну. Тогда существуют не зависящие от ε константы L_0 и $\rho_0 > 0$ такие, что при $L \geq L_0$ метрика $(\cdot\,,\cdot)$ имеет положительную кривизну на $\{r < \rho_0/L\}$.*

Доказательство. Положительность кривизны в точках N следует из предыдущей леммы, поэтому установим положительность кривизны в точках M°. Рассмотрим для некоторой константы $\lambda \in \mathbb{R}$ метрику $(\cdot\,,\cdot)_3$, построенную посредством (3.1) по метрике $(\cdot,\cdot)_0 + \lambda \cdot \pi^* g_N$, функции $g = g_0$ из п. 1 и константе L_3 настолько большой, чтобы эта метрика имела положительную кривизну в точках N при $\lambda = 0$. В таком случае секционная кривизна метрики $(\cdot,\cdot)_3$ в некоторой окрестности N ограничена снизу некоторым числом $\delta_3 > 0$ при λ в некоторой окрестности нуля.

Рассмотрим некоторый радиальный слой $\{r = t\}$. В таком случае при достаточно малом t найдется значение t_0 такое, что $g_0(t_0) = g_\varepsilon(t)$. Метрика $(\cdot,\cdot)$ на слое $\{r = t\}$ совпадает с метрикой $(\cdot,\cdot)_3$ на слое $\{r = t_0\}$ при $\lambda = (1 - Lt^2)/(1 - L_3 t_0^2) - 1$, близком к 0 при малых t и Lt^2. Но тогда тензор кривизны $\overline{R}$ сужения метрики $(\cdot,\cdot)$ на радиальный слой $\{r = t\}$ совпадает с тензором кривизны $\overline{R}_3$ сужения метрики $(\cdot,\cdot)_3$ на радиальный слой $\{r = t_0\}$, откуда по (3.10)

$$\begin{gathered}
R(P,Q,Q,P) \geq \delta_3 V(P,Q) + \frac{g_0'(t_0)^2 - g_\varepsilon'(t)^2}{g_\varepsilon(t)^2} V(A,B) \\
+ \left(\left(\frac{L_3 t_0}{1 - L_3 t_0^2} \right)^2 - \left(\frac{Lt}{1 - Lt^2} \right)^2 \right) V(X,Y) \\
+ \left(\frac{g_\varepsilon'(t)}{g_\varepsilon(t)} \frac{Lt}{1 - Lt^2} - \frac{g_0'(t_0)}{g_0(t_0)} \frac{L_3 t_0}{1 - L_3 t_0^2} \right) W(A,B;X,Y).
\end{gathered}$$

Пользуясь леммой 1.3, получаем, что при больших L, малых t и Lt имеем

$$R(P,Q,Q,P) \geq \frac{\delta_3}{2} V(P,Q) + \frac{L}{7} W(A,B;X,Y).$$

Отсюда и из леммы 3.3 вытекает, что

$$\begin{gathered}
R(E,F,F,E) \geq \frac{\delta_3}{2} V(P,Q) + \frac{L}{7} W(A,B;X,Y) \\
+ L(Z,Z) + (C,C) - 4M_1 |C| \cdot |X| \cdot |Y|.
\end{gathered}$$

Но

$$W(A,B;X,Y) + (Z,Z) = W(\hat{A},\hat{B};X,Y),$$

откуда

$$\begin{gathered}
R(E,F,F,E) \geq \frac{\delta_3}{2} V(P,Q) + \frac{L}{7} W(\hat{A},\hat{B};X,Y) \\
+ (C,C) - 4M_1 |C| \cdot |X| \cdot |Y|.
\end{gathered} \tag{3.19}$$

Допустим, что $W(\hat{A}, \hat{B}; X, Y) \le \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Имеем

$$V(P,Q) + W(\hat{A}, \hat{B}; X, Y) + (C,C) \ge$$
$$V(A,B) + (C,C) + V(X,Y) + W(\hat{A}, \hat{B}; X, Y) = 1;$$

С другой стороны, в силу леммы 3.2 (п. 2) величина $|C| \cdot |X| \cdot |Y|$ бесконечно мала, когда $\delta \to 0$, поэтому для достаточно малого δ имеем $R(E,F,F,E) > 0$. Если же $W(\hat{A}, \hat{B}; X, Y) \ge \delta$, то, поскольку все участвующие в неравенстве (3.19) величины ограничены, выбором L мы можем добиться того, что $R(E,F,F,E) > 0$ и в этом случае. Остается выбрать достаточно малое ρ_0. □

4 Замена метрики в окрестности подмногообразия

Идеи доказательств лемм данного пункта позаимствованы из работы [5, утверждение 2.1].

Лемма 4.1. *Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, для которой выполнены следующие условия:*

1) $\varphi \in C^\infty$;

2) $0 \le \varphi(x) \le 1$ для всех x;

3) $\varphi(x) = 1$ для $x \le \delta_1$, $\varphi(x) = 0$ для $x \ge \delta_2$, где δ_1, δ_2 — некоторые константы, причем $0 < \delta_1 < \delta_2 \le \varepsilon$;

4) $|x\varphi'(x)| \le \varepsilon$, $|x^2\varphi''(x)| \le \varepsilon$ для всех x.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $0 \le f \le 1$, $f(x) = 1$ при $x \le 1$, и $f(x) = 0$ при $x \ge 2$. Выберем константу N так, что для любого x выполнялись неравенства

$$|f'(x)| \le N, \ |f''(x)| \le N.$$

Возьмем $\delta > 0$, $\lambda \in (0,1)$ и положим

$$\varphi(x) = f\Big(\frac{x^\lambda}{\delta}\Big).$$

Ясно, что для фиксированного λ мы можем выбрать δ так, что функция φ будет удовлетворять условию 3. Кроме того, очевидно, что φ удовлетворяет условиям 1 и 2. Покажем, что можно выбрать λ так, чтобы для любого δ, функция φ удовлетворяет условию 4. Имеем

$$\varphi'(x) = f'\Big(\frac{x^\lambda}{\delta}\Big)\delta^{-1}\lambda x^{\lambda-1},$$

$$\varphi''(x) = f''\Big(\frac{x^\lambda}{\delta}\Big)\delta^{-2}\lambda^2 x^{2\lambda-2} + f'\Big(\frac{x^\lambda}{\delta}\Big)\delta^{-1}\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}.$$

Тем самым, достаточно выполнения неравенств

$$N\delta^{-1}\lambda x^\lambda \le \varepsilon,$$
$$N(\delta^{-2}\lambda^2 x^{2\lambda} + \delta^{-1}\lambda(1-\lambda)x^\lambda) \le \varepsilon.$$

Но при $x^\lambda > 2\delta$ имеем $\varphi(x) = 0$, поэтому требуется проверить неравенства только в случае $x^\lambda \le 2\delta$, а для этого достаточно, чтобы

$$N\delta^{-1}\lambda 2\delta \le \varepsilon,$$
$$N(\delta^{-2}\lambda^2(2\delta)^2 + \delta^{-1}\lambda(1-\lambda)2\delta) \le \varepsilon,$$

или

$$2N\lambda \le \varepsilon,\ 2N\lambda(1+\lambda) \le \varepsilon.$$

Так как левые части неравенств стремятся к нулю при $\lambda \to 0$, мы можем выбрать λ, удовлетворяющее необходимым условиям. □

Лемма 4.2. *Определим функцию* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *так:* $\psi(x) = \varphi(|x|)$. *Тогда* $|x| \cdot |\nabla\psi(x)| \le \varepsilon$, $|x|^2 \cdot |\nabla^2\psi(x)| \le 2\varepsilon$ *для всех* x.

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = \varphi'(|x|)\frac{x_i}{|x|},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} = \varphi''(|x|)\frac{x_i x_j}{|x|^2} + \varphi'(|x|)\frac{\delta_{ij}|x|^2 - x_i x_j}{|x|^3},$$

откуда

$$|x| \cdot \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right| \le \varepsilon,\ |x|^2 \cdot \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j}\right| \le 2\varepsilon.$$ □

Пусть M — риманово многообразие с метрикой g_0, N — его компактное подмногообразие; $\dim M = m$, $\dim N = n$. Определим отображение $r : M \to \mathbb{R}$ формулой

$$r(\exp_p v) = |v|. \tag{4.1}$$

Здесь $p \in N$, $v \in T_p N^\perp$.

Лемма 4.3. *Пусть в окрестности N задана риманова метрика g_1, причем:*

1) g_0, g_1 имеют положительную секционную кривизну,

2) 1-струи двух метрик в точках N совпадают.

Тогда для любого $\rho > 0$ существует гладкая риманова метрика g положительной кривизны на M такая, что $g = g_0$ при $r > \rho$ и $g = g_1$ при достаточно малом r.

Доказательство. Определим в окрестности N семейство метрик

$$\overline{g}(q,s) = (1-s)g_0(q) + sg_1(q), \ s \in [0,1]. \tag{4.2}$$

Выберем функцию φ из леммы 4.1 для некоторого $\varepsilon \leq \rho$. Положим

$$g(q) = \overline{g}(q, \varphi(r(q))). \tag{4.3}$$

Из свойств функции φ вытекает, что g — риманова метрика, совпадающая с g_0 при $r > \rho$ и с g_1 при достаточно малом r. Покажем, что для любой точки $p \in N$ найдутся такие открытая окрестность $U(p)$ и число $\varepsilon(p) > 0$, что метрика g имеет положительную кривизну в $U(p)$ при $\varepsilon \leq \varepsilon(p)$. В таком случае, пользуясь компактностью N, получим, что при достаточно малом ε метрика g будет иметь положительную кривизну в некоторой окрестности U многообразия N, не зависящей от ε. Остается взять ε настолько малым, чтобы g имела положительную кривизну в U и множество $\{r \leq \varepsilon\}$ лежало в U; тогда g совпадает с g_0 вне U и, значит, имеет положительную кривизну вне U. Отсюда g — искомая метрика.

Фиксируем $p \in N$ и рассмотрим систему координат $(x_1, \ldots, x_m)$ в окрестности p такую, что $x_i(p) = 0$, и $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_{m-n}^2$. Такая система строится по любой тривиализации нормального расслоения над N. Ясно, что в этом случае для функции $\psi(x) = \varphi(r(x))$ будут выполняться неравенства из леммы 4.2.

Воспользуемся формулами для секционной кривизны:

$$R(X,Y,Y,X) = R_{ijkl}X^iY^jY^kX^l, \ R_{ijkl} = R^{\alpha}_{jkl}g_{\alpha i},$$
$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{j\alpha}\Gamma^{\alpha}_{ik} - \Gamma^l_{k\alpha}\Gamma^{\alpha}_{ij},$$
$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right).$$

Будем обозначать буквами Γ, R символы Кристоффеля и компоненты тензора кривизны метрики g; введем также обозначения $\overline{\Gamma}^k_{ij}(s)$, $\overline{R}^l_{ijk}(s)$ для символов Кристоффеля и компонент тензора кривизны метрики $\overline{g}$ при определенном значении параметра s. Точкой будем обозначать производную по s. Заметим, что

$$\dot{\overline{g}}_{ij} = g_{1ij} - g_{0ij},\ \ddot{\overline{g}}_{ij} = 0.$$

Поскольку метрики g_0 и g_1 и их первые производные совпадают в точках N, при $r = 0$ выполняются соотношения

$$\dot{\overline{g}}_{ij} = 0,\ \dot{\overline{g}}^{ij} = 0,\ \frac{\partial \dot{\overline{g}}_{ij}}{\partial x^k} = 0,\ \frac{\partial \dot{\overline{g}}^{ij}}{\partial x^k} = 0,\ \dot{\overline{\Gamma}}^k_{ij} = 0,\ \ddot{\overline{R}}_{ijkl} = 0;$$

в силу формулы Тейлора, для некоторой константы N при достаточно малом r справедливы неравенства

$$|g_{ij}| \le N,\ |g^{ij}| \le N,\ \left|\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}\right| \le N,$$
$$|\dot{\overline{g}}_{ij}| \le Nr^2,\ |\dot{\overline{g}}^{ij}| \le Nr^2,\ \left|\frac{\partial \dot{\overline{g}}_{ij}}{\partial x^k}\right| \le Nr,$$
$$|\Gamma^k_{ij}| \le N,\ |\overline{\Gamma}^k_{ij}(s)| \le N,\ |\dot{\overline{\Gamma}}^k_{ij}| \le Nr.$$

Имеем

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial \overline{g}_{ij}}{\partial x^k}(\psi(x)) + \dot{\overline{g}}_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial x^k},\ \Gamma^k_{ij} = \overline{\Gamma}^k_{ij}(\psi(x)) + \Delta\Gamma^k_{ij},$$

где

$$\Delta\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\dot{\overline{g}}_{il}\frac{\partial \psi}{\partial x^j} + \dot{\overline{g}}_{jl}\frac{\partial \psi}{\partial x^i} - \dot{\overline{g}}_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial x^l}\right),$$

а также

$$\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^l} = \frac{\partial \overline{\Gamma}^k_{ij}}{\partial x^l}(\psi(x)) + \dot{\overline{\Gamma}}^k_{ij}(\psi(x))\frac{\partial \psi}{\partial x^l} + \frac{\partial \Delta\Gamma^k_{ij}}{\partial x^l},$$
$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(g^{kl}\dot{\overline{g}}_{il}\frac{\partial \psi}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^\alpha}\dot{\overline{g}}_{il}\frac{\partial \psi}{\partial x^j} + g^{kl}\left(\frac{\partial \dot{\overline{g}}_{il}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial x^j} + \dot{\overline{g}}_{il}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^j x^\alpha}\right),$$
$$R_{ijkl} = \overline{R}_{ijkl}(\psi(x)) + g_{\alpha i}\Delta R^\alpha_{jkl},$$

где

$$\Delta R^l_{ijk} = \dot{\overline{\Gamma}}{}^l_{ik}(\psi(x))\frac{\partial\psi}{\partial x^j} + \frac{\partial\Delta\Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} - \dot{\overline{\Gamma}}{}^l_{ij}(\psi(x))\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - \frac{\partial\Delta\Gamma^l_{ij}}{\partial x^k}$$
$$+\overline{\Gamma}^l_{j\alpha}(\psi(x))\Delta\Gamma^\alpha_{ik} + \Gamma^\alpha_{ik}\Delta\Gamma^l_{j\alpha} - \overline{\Gamma}^l_{k\alpha}(\psi(x))\Delta\Gamma^\alpha_{ij} - \Gamma^\alpha_{ij}\Delta\Gamma^l_{k\alpha}.$$

Оценим величины $\Delta\Gamma^k_{ij}$, $\frac{\partial\Delta\Gamma^k_{ij}}{\partial x^l}$ и $g_{\alpha i}\Delta R^\alpha_{jkl}$:

$$|\Delta\Gamma^k_{ij}| \le 2N^2mr^2|\nabla\psi(x)| \le 2N^2m\varepsilon r,$$
$$\left|\frac{\partial\Delta\Gamma^k_{ij}}{\partial x^l}\right| \le 2N^2mr^2|\nabla\psi(x)| + 2N^2mr\cdot|\nabla\psi(x)|$$
$$+2N^2mr^2|\nabla^2\psi(x)| \le 2N^2m\varepsilon(3+r),$$
$$|g_{\alpha i}\Delta R^\alpha_{jkl}| \le 2N^2mr\cdot|\nabla\psi(x)| + 4N^3m^2\varepsilon(3+r) + 8N^4m^3\varepsilon r$$
$$\le 2N^2m\varepsilon(1+2Nm(3+r)+4N^2m^2r).$$

Как видим, выбором ε можно сделать величину $R_{ijkl} - \overline{R}_{ijkl}(\psi(x))$ сколь угодно малой. Остается показать, что для некоторой константы $C > 0$ в достаточно малой окрестности точки p выполняется неравенство $\overline{R}(s)(X,Y,Y,X) > C$ при всех $s \in [0,1]$ для любой ортонормированной системы из двух векторов X, Y.

Так как в точках N имеем $\ddot{\overline{R}}_{ijkl} = 0$, то в них

$$\overline{R}_{ijkl}(s) = (1-s)R_{0ijkl} + sR_{1ijkl}, \tag{4.4}$$

т. е. тензор $\overline{R}$ есть выпуклая комбинация тензоров кривизны метрик g_0 и g_1. Поскольку метрики g_0 и g_1 имеют положительную кривизну, мы можем обеспечить неравенство

$$\overline{R}(s)(p)(X,Y,Y,X) > 2C$$

для некоторой константы $C > 0$. Но выражение $\overline{R}(s)(X,Y,Y,X)$ есть непрерывная функция от переменных x, s, X, Y, причем последние три пробегают некоторый компакт. Тогда это выражение равномерно непрерывно при малом x; значит, при x, достаточно близком к p, будет верно неравенство

$$|\overline{R}(s)(x)(X,Y,Y,X) - \overline{R}(s)(p)(X,Y,Y,X)| \le C.$$

Отсюда получаем требуемое неравенство на тензор кривизны $\overline{R}$ в малой окрестности точки p, что завершает доказательство леммы. $\square$

5 Факторизация метрики по несвободному изометрическому действию

В данном параграфе мы докажем теорему, сформулированную во введении.

Проведем доказательство для случая, когда $G = S^3$ (случай $G = S^1$ разбирается аналогично.) Пусть $M^\circ = M \setminus N$. Тогда на M° в силу условия 2 теоремы действие свободное. Поэтому пространство M°/G обладает структурой гладкого многообразия, и факторметрика $(\cdot\,,\cdot)_{0*}$ метрики $(\cdot\,,\cdot)_0$ имеет на нем положительную секционную кривизну в силу условия 1 теоремы. С другой стороны, в окрестности N многообразие M диффеоморфно нормальному расслоению над N; диффеоморфизм можно построить по формуле (2.11), а именно $\Phi(p, v) = \exp_p v$, где $p \in N$, $v \in T_pN^\perp$. Поэтому в дальнейшей части доказательства можем предположить, что M есть окрестность N в нормальном расслоении над N.

Отметим, что N — пространство неподвижных точек группы изометрий и поэтому вполне геодезично. Кроме того, в каждой точке N орбита группы G одноточечная, значит в силу условия 1 теоремы метрика $(\cdot\,,\cdot)_0$, ограниченная на N, имеет положительную кривизну. Эту метрику, как и раньше, будем обозначать через g_N.

Воспользовавшись (3.1), для некоторой константы L построим в окрестности N g_0-правильную метрику $(\cdot\,,\cdot)_1$, 1-струи которой в точках N совпадают с 1-струями исходной метрики $(\cdot\,,\cdot)_0$. (Здесь и далее используются функции g_0 и g_ε из §1.) В силу единственности метрика $(\cdot\,,\cdot)_1$ будет G-инвариантной. Возьмем теперь L настолько большой, чтобы лемма 3.4 гарантировала положительность кривизны метрики $(\cdot\,,\cdot)_1$ в точках N. Сузив, если потребуется, многообразие M до меньшей окрестности N в нормальном расслоении, можем считать, что метрики $(\cdot\,,\cdot)_0$ и $(\cdot\,,\cdot)_1$ имеют положительную кривизну всюду на M. Факторметрику метрики $(\cdot\,,\cdot)_1$ обозначим через $(\cdot\,,\cdot)_{1*}$.

Теперь изучим действие группы G. Для каждой точки $p \in N$ рассмотрим действие G на пространстве $V_p = T_pN^\perp$. Это представление G на слое V_p, которое мы обозначим через G_p. Если $g \in G$, то через g_p обозначим образ g в представлении G_p. Поскольку G действует изометриями, при $g \in G$ имеем

$$g(\Phi(p, v)) = \Phi(p, g_p v).$$

Поскольку мы полагаем, что M — часть нормального расслоения, т. е.

отображение Φ тождественно, группа G действует на каждом слое V_p согласно представлению G_p. Отметим, что у каждого представления G_p нет ненулевых свободных точек в силу условия 2 теоремы; значит, оно эквивалентно представлению $Sp(1)$ в $\mathbb{H}^2$, задаваемому формулой $g(q_1, q_2) = (g \cdot q_1, g \cdot q_2)$ (такое представление далее называем стандартным).

Пусть (U, Θ) — некоторая тривиализация M. Мы можем полагать, что Θ действует из $U \times \mathbb{H}^2$. Будем в дальнейшем рассматривать только такие тривиализации, при которых действие G на M соответствует стандартному действию на $\mathbb{H}^2$, т. е. для $p \in U$, $x \in \mathbb{H}^2$, $g \in G$ выполнено

$$g\Theta(p, x) = \Theta(p, g \cdot x).$$

Такие тривиализации по-прежнему существуют в окрестности каждой точки из N. Отображение Ψ_{12} в (2.4) будет теперь принадлежать $Sp(2) \subset SO(8)$, при этом элементы $Sp(2)$ вкладываются как умножения справа.

Исследуем теперь структуру пространства $\mathbb{H}^2/Sp(1)$. Сначала рассмотрим пространство $S^7/Sp(1)$, где на $S^7 \subset \mathbb{H}^2$ выбрана стандартная метрика (как на сфере радиуса 1). Отметим, что на S^7 справа изометриями действует $Sp(2)$, и это действие перестановочно с изометричным действием $Sp(1)$ слева; значит, $Sp(2)$ действует на $S^7/Sp(1)$ изометриями. При этом ядро последнего действия равно $\mathbb{Z}_2 = \{\pm E\}$, поэтому группа изометрий $\mathbb{S}^7/Sp(1)$ имеет размерность не менее $\dim Sp(2) = 10$. С другой стороны, $\dim(S^7/Sp(1)) = 4$. Как известно (см. [6, гл. 2, теорема 3.1]), в таком случае $S^7/Sp(1) \simeq S^4$ со стандартной метрикой, умноженной на константу.

Рассмотрим геодезическую $c(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi) \in \mathbb{S}^7$ для $\varphi \in [0, \pi]$. Она всюду ортогональна к орбитам действия $Sp(1)$, поэтому ее проекция c_* на S^4 есть геодезическая той же длины π. С другой стороны, $c_*(0) = c_*(\pi)$, и c_* не имеет других самопересечений. Отсюда с учетом вида геодезических на круглой сфере выводим, что метрика на $\mathbb{S}^4 \simeq S^7/Sp(1)$ такая же, как на круглой сфере радиуса $1/2$.

Пусть $f : S^7 \to S^4$ — фактоототображение; распространим f до отображения из $\mathbb{H}^2$ в $\mathbb{R}^5$ по правилу $f(tv) = tf(v)$, где $t \geq 0$, $v \in S^7$. Отметим, что отображение f всюду непрерывно и гладко везде, кроме нуля. Действие справа $Sp(2)$ на $S^7/Sp(1)$ задает гомоморфизм групп $\gamma : Sp(2) \to SO(5)$. Пусть $\gamma_* : \mathfrak{sp}(2) \to \mathfrak{so}(5)$ — соответствующий гомоморфизм алгебр Ли. Отметим, что для любых $A \in Sp(2)$, $B \in \mathfrak{sp}(2)$,

$x \in \mathbb{H}^2$ верно

$$f(x \cdot A) = f(x) \cdot \gamma(A),$$
$$df_x(x \cdot B) = f(x) \cdot \gamma_*(B).$$

Пусть (U, Θ) — тривиализация. Она естественным образом порождает гомеоморфизм $\Theta_* : U \times \mathbb{R}^5 \to \pi^{-1}(U)/G$ такой, что для $p \in U$, $x \in \mathbb{H}^2$ имеем

$$\Theta_*(p, f(x)) = \tau(\Theta(p, x)).$$

Теперь гладкая стуктура на M/G строится с использованием в качестве карт отображений Θ_* для разных тривиализаций. Гладкость τ на M° следует из гладкости f всюду, кроме нуля. Покажем гладкость функций перехода от одной карты к другой. Пусть (U, Θ_1), (U, Θ_2) — две тривиализации, Ψ_{12} — отображение, связывающее их по (2.4), тогда при $p \in U$, $x \in \mathbb{H}^2$ имеем

$$\begin{aligned} &\Theta_{2*}(p, f(x)) = \tau(\Theta_2(p, x)) = \tau(\Theta_1(p, x \cdot \Psi_{12}(p))) \\ &= \Theta_{1*}(p, f(x \cdot \Psi_{12}(p))) = \Theta_{1*}(p, f(x) \cdot \gamma(\Psi_{12}(p))). \end{aligned}$$

Отметим, что M/G — векторное расслоение над $N/G = N$ ранга 5 с тривиализациями (U, Θ_*).

Перейдем к построению искомой метрики положительной кривизны на M/G. Для начала рассмотрим некоторую тривиализацию (U, Θ). Пусть $Q_p : T_pN \to \mathfrak{so}(8)$ — отображение, использовавшееся при построении метрики $(\cdot\,,\cdot)_1$ в этой тривиализации. Так как метрика $(\cdot\,,\cdot)_1$ и локально-горизонтальные поля инвариантны относительно действия G, получаем, что ортопроекция любого локально-горизонтального поля инвариантна относительно действия G. Значит, для всякого $X \in T_pN$ имеем $Q_p(X) \in \mathfrak{sp}(2)$. В таком случае мы можем определить отображение $Q_{*p} : T_pN \to \mathfrak{so}(5)$ по формуле

$$Q_{*p}(X) = \gamma_*(Q_p(X)).$$

Построим для всякого $\varepsilon > 0$ метрику $(\cdot\,,\cdot)_\varepsilon$ на $\pi^{-1}(U)/G$ с помощью (3.1) и леммы 2.3 по метрике g_N на N, функции g_ε из леммы 1.2, отображению Q_{*p} и константе L. Построенная метрика — единственная g_ε-правильная метрика на расслоении $\pi^{-1}(U)/G$, совпадающая с $(\cdot\,,\cdot)_{1*}$ при $r \geq \varepsilon$ и такая, что отображение π на каждом радиальном слое есть риманова субмерсия на N с метрикой $(1 - Lr^2)g_N$.

Действительно, совпадение метрик на слоях следует из того, что $g_\varepsilon = g_0/2$ при $r \geq \varepsilon$, на ортогональных к ним пространствах — из требования римановой субмерсности; остается показать, что ортопроекции любого локально-горизонтального поля на слой в двух метриках совпадают. Пусть X — такое поле, $p \in N$, $x \in \mathbb{H}^2$. Тогда ортопроекция поля X в метрике $(\cdot\,,\cdot)_\varepsilon$ есть

$$\begin{aligned} X'^{\varepsilon}_{\tau(\Theta(p,x))} &= d\Theta_{*(p,f(x))}(0, f(x)\cdot Q_{*p}(X_p)) \\ = d\Theta_{*(p,f(x))}(0, df_x(x\cdot Q_p(X_p))) &= d\tau_{\Theta(p,x)}(d\Theta_{(p,x)}(0, x\cdot Q_p(X_p))) \\ &= d\tau_{\Theta(p,x)}(X'^{1}_{\Theta(p,x)}). \end{aligned}$$

Здесь X'^1 — ортопроекция на слои в метрике $(\cdot\,,\cdot)_1$ локально-горизонтального поля X° на M, порожденного тем же полем на N, что и X. Отметим, что X и X° τ-связаны. Выражение справа равно ортопроекции поля X на слои в метрике $(\cdot\,,\cdot)_{1*}$.

Единственность метрики $(\cdot\,,\cdot)_\varepsilon$ позволяет определить ее на всем M/G. Отметим, что 1-струи полученной метрики в точках N не зависят от ε. Выберем константы L_0 и ρ_0 из леммы 3.5 такие, что метрика $(\cdot\,,\cdot)_\varepsilon$ имеет положительную кривизну при $L \geq L_0$, $r < \rho_0/L$ и любом ε. Фиксируем $L \geq L_0$. В силу леммы 4.3 существует метрика положительной кривизны $(\cdot\,,\cdot)'$ на M такая, что $(\cdot\,,\cdot)' = (\cdot\,,\cdot)_0$ вне любой заранее фиксированной окрестности N и $(\cdot\,,\cdot)' = (\cdot\,,\cdot)_1$ при $r < 2\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Можем полагать, что $2\varepsilon < \rho_0/L$. Как следует из доказательства леммы 4.3 (согласно (4.3), данная метрика есть линейная комбинация двух G-инвариантных метрик с коэффициентом, постоянным на орбитах G), метрика $(\cdot\,,\cdot)'$ будет инвариантна относительно действия группы G.

Пусть $(\cdot\,,\cdot)'_*$ — факторметрика метрики $(\cdot\,,\cdot)'$ на M°/G. При $\varepsilon < r < 2\varepsilon$ имеем $(\cdot\,,\cdot)'_* = (\cdot\,,\cdot)_{1*} = (\cdot\,,\cdot)_\varepsilon$. Следовательно, найдется C^2-метрика $(\cdot\,,\cdot)_*$ на M/G такая, что $(\cdot\,,\cdot)_* = (\cdot\,,\cdot)'_*$ при $r > \varepsilon$ и $(\cdot\,,\cdot)_* = (\cdot\,,\cdot)_\varepsilon$ при $r < 2\varepsilon$. Эта метрика совпадает с факторметрикой метрики $(\cdot\,,\cdot)_0$ вне окрестности N. Она имеет положительную кривизну при $r > \varepsilon$ по лемме 4.3, а при $r < 2\varepsilon$ — по лемме 3.5. Следовательно, $(\cdot\,,\cdot)_*$ — искомая метрика, что доказывает теорему.

Замечание

К сожалению, на данный момент приведенный выше метод не удалось использовать для построения новых примеров пространств положительной кривизны. Вместе с тем, ниже приводятся два примера использования результата данной работы:

1. $M = \mathbb{CP}^3$, группа $G = S^1$ действует следующим образом: $g \cdot (z_0 : z_1 : z_2 : z_3) = (gz_0 : gz_1 : z_2 : z_3)$. Здесь $g \in S^1 \subset \mathbb{C}$, $z_i \in \mathbb{C}$. Пространство неподвижных точек N состоит из двух компонент связности: $N_1 = \{(z_0 : z_1 : 0 : 0) \mid (z_0 : z_1) \in \mathbb{CP}^1\}$, $N_2 = \{(0 : 0 : z_2 : z_3) \mid (z_2 : z_3) \in \mathbb{CP}^1\}$. Каждая из компонент диффеоморфна $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$. Соответственно, коразмерность N равна 4. Пространство M/G гомеоморфно сфере S^5.

2. $M = Sp(3)/Sp(1)^3$. Здесь $Sp(1)^3$ вложено в $Sp(3)$ как группа матриц вида $\mathrm{diag}(q_1, q_2, q_3)$ для $q_1, q_2, q_3 \in Sp(1)$. Используется метрика положительной секционной кривизны на M, построенная в [7]. Группа $G = S^3 = Sp(1)$ действует следующим образом: $g \cdot [A] = [\mathrm{diag}(g, 1, 1) \cdot A]$. Здесь $g \in Sp(1) \subset \mathbb{H}$, $[A] \in M$ — класс эквивалентности матрицы $A \in Sp(3)$. Пространство неподвижных точек N состоит из трех компонент связности:

$$N_1 = \{[\mathrm{diag}(1, B)] \mid B \in Sp(2)\},$$
$$N_2 = N_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$N_3 = N_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждая из компонент диффеоморфна $Sp(2)/Sp(1)^2 \simeq S^4$. Соответственно, коразмерность N равна 8. Пространство M/G гомеоморфно сфере S^9.

Список литературы

[1] *Базайкин Я. В.* Об одном семействе 13-мерных замкнутых римановых многообразий положительной кривизны // Сиб. мат. журн. — 1996. — Т. 37, № 6. — С. 1219–1237.

[2] *O'Neill B.* The fundamental equations of a submersion // Michigan Math. J. — 1966. — V. 13. — P. 459–469.

[3] *Vilms J.* Totally geodesic maps // J. of Diff. Geom.. — 1970. — V. 4, № 4. — P. 73–79.

[4] *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. — М.: Мир, 1990.

[5] *Gao L. Z.* The construction of negatively Ricci curved manifolds // Math. Ann. — 1985. — Vol. 271, № 2. — P. 185–208.

[6] *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1986.

[7] *Wallach N.* Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature // Ann. of Math. — 1972. — Vol. 96. — P. 277–295.

Сведения об авторе

Дятлов Семен Владимирович, студент 5 курса механико-математического факультета Новосибирского Государственного Университета (начиная с сентября 2007 года).

Кафедра геометрии и топологии, научный руководитель Базайкин Ярослав Владимирович, к.ф.-м.н.

Адрес: 630090, Новосибирск, ул. Жемчужная, 22-41.

Телефон: (383) 3307113.

`mailto: dyatlov@gmail.com`