Константа Эйлера-Кронекера

Андрей Бадзян

Введение

Пусть K глобальное поле, то есть или конечное расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (числовой случай) или поле функций алгебраической кривой над конечным полем $\mathbb{F}_q$ (функциональный случай). Пусть $\zeta_K(s)$ дзета-функция поля K, тогда $\zeta_K(s)$ имеет в точке $s = 1$ полюс первого порядка. Рассмотрим разложение дзета-функции в ряд Лорана в точке $s = 1$

$$\zeta_K(s) = c_{-1}(s-1)^{-1} + c_0 + c_1(s-1) + \ldots,$$

тогда вещественная величина $\gamma_K = c_0/c_{-1}$ называется константой Эйлера-Кронекера поля K.

В случае когда K есть поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ константа γ_K равна постоянной Эйлера γ

$$\gamma_{\mathbb{Q}} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n} - \log n\right) = 0.57721566\ldots.$$

Таким образом γ_K можно рассматривать как естественное обобщение постоянной Эйлера на случай произвольного глобального поля K.

В статье [1] в случае числового поля K доказана нижняя оценка $\gamma_K \geq -\log\sqrt{|d_K|}$, где d_K дискриминант поля K. С другой стороны, в статье [3] в частности показано, что для любого асимптотически хорошего семейства числовых полей K_i предел $\lim_{i\to\infty} \frac{\gamma_{K_i}}{\log\sqrt{|d_K|}}$ существует и отрицателен, то есть нижняя оценка $\gamma_K \geq -\log\sqrt{|d_K|}$ не улучшаема по порядку. Поэтому можно рассматривать вопрос об улучшении константы C в неравенстве $\gamma_K \geq -C\log\sqrt{|d_K|}$. В разделе 1 мною доказана нижняя оценка $\gamma_K \geq -\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\log\sqrt{|d_K|}$ для любого числового поля K. Также, в предположении, что обобщенная гипотеза Римана (ОГР) верна, получена оценка $\gamma_K \geq -0.459 \log \sqrt{|d_K|}$. В статье [3] доказана асимптотическая оценка $\liminf \frac{\gamma_K}{\log \sqrt{|d_K|}} \geq -0.26049...$, однако, неизвестно выполнена ли оценка $\gamma_K \geq -0.26049... \log \sqrt{|d_K|}$ для любого числового поля K.

В статьях [1], [2] рассматривается γ_K для полей деления круга $K = K_l = \mathbb{Q}(\mu_l)$ и высказано предположение, проверенное для всех $l < 3 \times 10^4$, о том, что в этом случае $\gamma_K > 0$. Доказана лишь оценка $\gamma_{K_l} = O((\log l)^2)$ в предположении, что выполнена ОГР. В разделе 2 данной работы эта оценка улучшена до $\gamma_{K_l} = O(\log l \int_2^{\log l} \frac{dt}{\log t})$ в предположении, что ОГР верна.

Обобщением константы Эйлера-Кронекера глобального поля является константа Эйлера-Кронекера алгебраического многообразия над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Пусть X гладкое проективное многообразие размерности n над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Пусть $\zeta(s, X)$ его дзета-функция, тогда $\zeta(s, X)$ имеет в точке $s = n$ имеет полюс первого порядка. Рассмотрим разложение дзета-функции в ряд Лоран в точке $s = n$

$$\zeta(s, X) = c_{-1}(s-n)^{-1} + c_0 + \ldots,$$

тогда величина $\gamma_X = c_0/c_{-1}$ называется константой Эйлера-Кронекера многообразия X. В разделе 3 рассматривается обобщение оценок для кривых на случай многообразий (см. теоремы 3,4).

1 Нижняя оценка для числовых полей

Лемма 1 *Пусть $\rho \in \mathbb{C}$, $0 < Re(\rho) < 1$, $s \in \mathbb{R}$. Тогда при $s \geq (1+\sqrt{5})/2$ выполнено неравенство*

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-\rho} + \frac{1}{\overline{\rho}} + \frac{1}{1-\overline{\rho}} \geq \frac{1}{2s-1}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-1+\rho} + \frac{1}{s-\overline{\rho}} + \frac{1}{s-1+\overline{\rho}}\right).$$

Доказательство. Пусть $\rho = x + 1/2 + iy$, где $-1/2 < x < 1/2$. Положим $f(u) = \frac{1}{2u-1}(\frac{1}{u-\rho} + \frac{1}{u-1+\rho} + \frac{1}{u-\overline{\rho}} + \frac{1}{u-1+\overline{\rho}})$. Требуется доказать, что $f(1) \geq f(s)$.

$$f(u) =$$

$$= \frac{1}{2u-1}\left(\frac{1}{u-x-1/2-iy} + \frac{1}{u-1/2+x+iy} + \frac{1}{u-x-1/2+iy} + \frac{1}{u-1/2+x-iy}\right)$$

$$= \frac{1}{2u-1}\left(\frac{2(u-x-1/2)}{(u-x-1/2)^2+y^2} + \frac{2(u-1/2+x)}{(u-1/2+x)^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2u-1}\frac{2(2u-1)y^2+2(2u-1)(u-x-1/2)(u-1/2+x)}{((u-x-1/2)^2+y^2)((u-1/2+x)^2+y^2)}$$

$$= 2\frac{y^2+(u-x-1/2)(u-1/2+x)}{((u-x-1/2)^2+y^2)((u-1/2+x)^2+y^2)}$$

$$= \frac{2(y^2+(u-1/2)^2-x^2)}{(y^2+(u-1/2)^2+x^2-2x(u-1/2))(y^2+(u-1/2)^2+x^2+2x(u-1/2))}$$

$$= \frac{2(y^2+(u-1/2)^2-x^2)}{(y^2+(u-1/2)^2+x^2)^2-4(u-1/2)^2x^2}$$

$$= \frac{2(y^2+(u-1/2)^2-x^2)}{(u-1/2)^4+2(y^2-x^2)(u-1/2)^2+(y^2+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(y^2+(u-1/2)^2-x^2)}{(y^2+(u-1/2)^2-x^2)^2+4y^2x^2}.$$

Положим $a = y^2+1/4-x^2$, $b = y^2+(u-1/2)^2-x^2$, $c = 4y^2x^2$, тогда нужно проверить

$$\frac{a}{a^2+c} \geq \frac{b}{b^2+c},$$

то есть

$$ab^2+ac \geq ba^2+bc.$$

Последнее неравенство равносильно $ab(b-a)+c(a-b) \geq 0$ или $(b-a)(ab-c) \geq 0$. Имеем $b-a = y^2+(u-1/2)^2-x^2-y^2-1/4+x^2 = (u-1/2)^2-1/4 \geq 0$, т.к. $u \geq 1$. Для второй скобки $ab-c \geq (y^2+1/4-x^2)(y^2+5/4-x^2)-4y^2x^2 = y^4+(3/2-6x^2)y^2+(1/4-x^2)(5/4-x^2) > 0$.

Лемма 2 *Пусть $\rho \in \mathbb{C}$, $Re(\rho) = 1/2$, $s \in \mathbb{R}$. Тогда при $s > 1$ выполнено неравенство*

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\overline{\rho}} \geq \frac{1}{2s-1}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{s-\overline{\rho}}\right)$$

Доказательство. Пусть $\rho = 1/2+iy$, тогда $\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\overline{\rho}} = \frac{1}{1/4+y^2} \geq \frac{1}{(s-1/2)^2+y^2} = \frac{1}{2s-1}(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{s-\overline{\rho}})$.

Пусть K числовое поле степени $n = r_1+2r_2$, где r_1, r_2 число вещественных и комплексных вложений K, $\zeta_K(s)$ его дзета-функция Дедекинда,

$Z_K(s) = -\frac{\zeta'_K(s)}{\zeta_K(s)}$. Обозначим дискриминант K через d_K, $\alpha_K = \log(\sqrt{d_K})$, $\beta_K = -\frac{r_1}{2}(\gamma + \log 4\pi) - r_2(\gamma + \log 2\pi)$. Тогда ([1],(1.3.3) и (1.3.4))

$$\gamma_K = -\lim_{s\to 1}\left(Z_K(s) - \frac{1}{s-1}\right). \tag{1}$$

Кроме того, верны следующие формулы ([1],(1.3.5) и (1.3.3)):

$$Z_K(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \sum_{\rho}\frac{1}{s-\rho} + \alpha_K + \beta_K + \xi_K(s), \tag{2}$$

$$Z_K(s) = \sum_{P}\frac{\log N(P)}{N(P)^s - 1} \qquad \text{при } Re(s) > 1, \tag{3}$$

где

$$\xi_K(s) = -r_1\left(\frac{1-s}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{1+2n}\right)\right) - r_2\left(\frac{1-s}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+n} - \frac{1}{1+n}\right)\right)$$

Из формул (1) и (2) получаем

$$\gamma_K = \sum_{\rho}\frac{1}{1-\rho} - \alpha_K - \beta_K - 1 = \sum_{\rho}\frac{1}{\rho} - \alpha_K - \beta_K - 1. \tag{4}$$

Теорема 1 *Для любого числового поля K*

$$\gamma_K \geq -\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\alpha_K$$

Доказательство. Нетривиальные нули ρ дзета-функции $\zeta_K(s)$ разбиваются на четверки $\rho, \overline{\rho}, 1-\rho, 1-\overline{\rho}$. По лемме 1 для каждой четверки выполнено неравенство:

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-\rho} + \frac{1}{\overline{\rho}} + \frac{1}{1-\overline{\rho}} \geq \frac{1}{2s-1}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-1+\rho} + \frac{1}{s-\overline{\rho}} + \frac{1}{s-1+\overline{\rho}}\right),$$

где $s = (1+\sqrt{5})/2$. Следовательно,

$$\sum_{\rho}\frac{1}{\rho} \geq \frac{1}{2s-1}\sum_{\rho}\frac{1}{s-\rho}$$

Из формулы (4) для γ_K имеем:

$$\gamma_K \geq \frac{1}{2s-1}\sum_{\rho}\frac{1}{s-\rho} - \alpha_K - \beta_K - 1 =$$

$$= \frac{1}{2s-1}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \alpha_K + \beta_K + \xi_K(s) - Z_K(s)\right) - \alpha_K - \beta_K - 1$$

$$= \frac{1}{2s-1}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right) - \frac{2s-2}{2s-1}\alpha_K - \frac{2s-2}{2s-1}\beta_K + \frac{1}{2s-1}\xi_K(s) - \frac{1}{2s-1}Z_K(s) - 1$$

$\frac{1}{2s-1}(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}) = \frac{1}{s(s-1)} = 1$, при $s = (1+\sqrt{5})/2$. Далее, $\frac{2s-2}{2s-1}\alpha_K = \frac{1+\sqrt{5}-2}{1+\sqrt{5}-1}\alpha_K = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\alpha_K = (1-\frac{\sqrt{5}}{5})\alpha_K$. Таким образом, достаточно показать, что $-\frac{2s-2}{2s-1}\beta_K + \frac{1}{2s-1}\xi_K(s) - \frac{1}{2s-1}Z_K(s) \geq 0 \Leftrightarrow -(2s-2)\beta_K + \xi_K(s) - Z_K(s) \geq 0$.

Пусть простое число p раскладывается в поле K в произведение $(p) = P_1 \cdot ... \cdot P_k$, тогда $\sum_{i=1}^{k}\frac{\log N(P_k)}{N(P_k)^s-1} \leq n\frac{\log p}{p^s-1}$, так как если $N(P_i) = p^{m_i}$, то $\frac{\log N(P_k)}{N(P_k)^s-1} = \frac{m_i \log p}{p^{m_i s}-1} \leq \frac{m_i \log p}{p^s-1}$, и $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$. Значит, $Z_K(s) \leq -n\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, где $\zeta(s)$ - дзета-функция Римана. Получаем

$$-(2s-2)\beta_K + \xi_K(s) - Z_K(s) \geq -(2s-2)\beta_K + \xi_K(s) + n\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} =$$

$$(2s-2)\left(\frac{r_1}{2}(\gamma + \log 4\pi) + r_2(\gamma + \log 2\pi)\right) + r_1\left(\frac{s-1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{s+2n} + \frac{1}{1+2n})\right) +$$

$$+ r_2\left(\frac{s-1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{s+n} + \frac{1}{1+n})\right) + r_1\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + 2r_2\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

Достаточно проверить, что $(s-1)(\gamma + \log(4\pi)) + \frac{s-1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{s+2n} + \frac{1}{1+2n}) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \geq 0$ и $2(s-1)(\gamma + \log(2\pi)) + \frac{s-1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{s+n} + \frac{1}{1+n}) + 2\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \geq 0$ Это верно, так как $(s-1)(\gamma + \log(2\pi)) > (\frac{\sqrt{5}-1}{2}(0.57 + 1.83)) > 1.2(\sqrt{5}-1) > 1.44$, а $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \leq 1.4$

Теорема 2 *Если выполнена обобщенная гипотеза Римана и вещественное* $s > 1$ *таково, что* $\gamma + \log(4\pi) + \frac{s-1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{s+2n} + \frac{1}{1+2n}) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \geq 0$ *и* $\gamma + \log(2\pi) + \frac{s-1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{s+n} + \frac{1}{1+n}) + 2\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \geq 0$, *то выполнена оценка*

$$\gamma_K \geq \frac{2s-2}{2s-1}\alpha_K$$

Доказательство. Нетривиальные нули ρ дзета-функции $\zeta_K(s)$ имеют мнимые части $1/2$ и разбиваются на пары ρ , $\bar{\rho}$. По лемме 2 для каждой пары выполнено неравенство $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar{\rho}} \geq \frac{1}{2s-1}(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-\bar{\rho}})$. Следовательно,

$$\sum_{\rho} \frac{1}{\rho} \geq \frac{1}{2s-1} \sum_{\rho} \frac{1}{s-\rho}$$

и далее дословно повторяется конец доказательства теоремы 1.

Условия теоремы 2 выполнены для $s = 1.425$ и, следовательно, выполнено неравенство $\gamma_K \geq 0.459\alpha_k$

Замечание 1 *В [3] доказано, что при* $|d_K| \to \infty$ *имеется асимптотическая оценка* $\gamma_K \gtrsim -0.26049... \log \sqrt{|d_K|}$. *Однако, выполняется ли неравенство* $\gamma_K \geq -0.26049... \log \sqrt{|d_K|}$ *на конечном уровне, неизвестно.*

2 Оценки для круговых полей

Пусть $K_l = \mathbb{Q}(\mu_l)$ поле деления круга. В [1] высказано предположение о том, что $\gamma_{K_l} \geq 0$ для всех l и доказана оценка $\gamma_{K_l} = O((\log l)^2)$ в предположении, что выполненена обобщенная гипотеза Римана. Мы докажем, что $\gamma_{K_l} = O(\log l \int_2^{\log l} \frac{dt}{\log t})$ предполагая, что выполнена обобщенная гипотеза Римана.

Напомним некоторые неравенства из [1]. Пусть K числовое поле, P его простой дивизор и $N(P)$ норма P. В [1] вводится функция

$$\Phi_K(x) = \frac{1}{x-1} \sum_{N(P)^k \leq x} \left(\frac{x}{N(P)^k} - 1 \right) \log N(P),$$

где (P, k) пробегает все пары с $k \geq 1$ и $N(P)^k \leq x$. Тогда для всех $x > 1$ выполнено неравенство([1], Proposition 2)

$$\gamma_K \geq \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}(\log x - \Phi_K(x) + l_K(x)) - \frac{2}{\sqrt{x}+1}(\alpha_K + \beta_K) - 1,$$

где

$$\alpha_K = \log \sqrt{|d_K|}$$

(d_K - дискриминант поля K),

$$\beta_K = -\Big(\frac{r_1}{2}(\gamma + \log 4\pi) + r_2(\gamma + \log 2\pi)\Big)$$

(r_1, r_2 - число вещественных и комплексных вложений K, γ постоянная Эйлера),

$$l_K(x) = \frac{r_1}{2}\left(\log\frac{x+1}{x-1} + \frac{2}{x-1}\log\frac{x+1}{2}\right) + r_2\left(\log\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1}\log x\right).$$

Применим это неравенство для $K = K_l$ и $x = l^2$. Тогда так как $r_1 + 2r_2 \le l$ и $d_{K_l} \le l^l$, то $\frac{2}{\sqrt{x}+1}(\alpha_K + \beta_K) = O(\log l)$.

Оценим теперь $\Phi_K(l^2)$: $\Phi_K(x) \le \sum_{N(P)^k \le x} \frac{\log N(P)}{N(P)^k} \le \sum_{N(P)^k \le x} \frac{\log(N(P)^k)}{N(P)^k}$. Представим $\sum_{N(P)^k \le x} \frac{\log N(P)}{N(P)^k} = S_1 + S_2$, где в S_1 включим слагаемые с P делящими l, а в S_2 с неделящими.

Лемма 3

$$S_1 = O(\log l).$$

Доказательство. Пусть простое рациональное число p делит l и входит в разложение l в степени α. Заметим, что

$$p = \frac{x^{p^\alpha} - 1}{x^{p^{\alpha-1}} - 1}|_{x=1} = \prod_{(k,p)=1, k \le p^\alpha} (1 - \mu_{p^\alpha}^k).$$

Отсюда $(p) = (1 - \mu_{p^\alpha})^{p^\alpha - p^{\alpha-1}} = (\pi_1 \cdot \ldots \cdot \pi_g)^{p^\alpha - p^{\alpha-1}}$, где $\pi_1, \ldots, \pi_g$ простые дивизоры с нормой $N\pi_1 = \ldots = N\pi_g = p^f$. Кроме того $p^f \equiv 1(l/p^\alpha)$.

Отсюда вклад P делящих p можно сверху оценить как $g\frac{\log(p^f)}{l/p^\alpha} = g \cdot f \cdot p^\alpha \frac{\log p}{l} = \phi(l)\log p/l < \log p$. В итоге

$$S_1 \le \sum_{p|l} \log p \le \log l.$$

Оценим теперь S_2. Для этого воспользуемся леммой

Лемма 4 *Пусть $n_1, n_2, ..., n_H$ различные целые положительные числа, не превосходящие V, p простое число и $N_p(h)$ количество индексов j для которых $n_j = h(mod p)$. Тогда для любого $X > 0$*

$$\sum_{p \le X} p \sum_{h=0}^{p-1} (N_p(h) - \frac{H}{p})^2 \le 2,2\max(X^2, V)H.$$

Доказательство. См. [4] стр. 86.

Для кругового расширения каждое простое p, не делящее l, распадается в произведение g простых идеалов с нормой p^f, где $gf = \phi(l)$, а $p^f = 1(l)$. Таким образом

$$\Phi_K(l^2) \leq \phi(l) \sum_{k=p^f, k=1(l), k<l^2} \frac{\log(k)}{k}.$$

Рассмотрим для каждого такого k число m, что $k = ml + 1$, тогда $m < l$ и рассмотрим множество M всех таких чисел m, тогда

$$\Phi_K(l^2) \leq \phi(l) \sum_{m \in M} \frac{\log(ml+1)}{ml+1} \leq \phi(l) \sum_{m \in M} \frac{\log m + \log l}{ml} \leq \phi(l) \sum_{m \in M} \frac{2 \log l}{ml}.$$

Окончательно получаем

$$\Phi_K(l^2) \leq 2 \log l \frac{\phi(l)}{l} \sum_{m \in M} \frac{1}{m}.$$

Упорядочим элементы множества M $m_1 < m_2 < ... < m_H < ....$ Применим лемму 4 для $X = \sqrt{m_H}$, $V = m_H$ и $n_1 = m_1, n_2 = m_2, ..., n_H = m_H$. Заметим, что либо $p|l$, либо среди элементов множества M есть не более одного числа $m = -1/l(p)$, значит хотя бы один из индексов $N_p(h) \leq 1$. Оценим $(\frac{H}{p} - 1)^2 \geq \frac{H^2}{4p^2}$ при $\frac{H}{p} \geq 2$. Если $\frac{H}{p} < 2$, то $\sqrt{m_H} \geq p > H/2$ и $m_H > H^2/4$.

В итоге получаем, что либо $m_H > H^2/4$, либо

$$H^2 \sum_{p \leq \sqrt{m_H}} \frac{1}{4p} - H^2 \sum_{p \leq \sqrt{m_H}, p|l} \frac{1}{4p} \leq 2,2 H m_H.$$

Во втором случае

$$\sum_{p \leq \sqrt{m_H}} \frac{1}{4p} - \sum_{p \leq \sqrt{m_H}, p|l} \frac{1}{4p} \leq 2,2 \frac{m_H}{H}.$$

Обозначим $f(l) = \sum_{p|l} \frac{1}{p}$, где суммирование идет по всем простым делителям l. Тогда $m_H \geq H \left(\sum_{p \leq \sqrt{m_H}} \frac{1}{8.8p} - \frac{f(l)}{8.8} \right) \geq \frac{1}{9} H \left(\log \log H - f(l) + O(1) \right).$

Выберем наименьшее H_0 такое, что $f(l) \leq \frac{2}{3}\log\log H_0$. Тогда при $H > H_0$ $m_H \geq \frac{1}{27}H\log\log H + O(H)$ и $\sum_{H>H_0}\frac{1}{m_H} = O(\sum_{H=1}^{l}\frac{1}{H\log\log H}) = O(\int_2^{\log l}\frac{dt}{\log t})$.

При $H \leq H_0$ воспользуемся неравенством $m_H \geq H$, тогда $\sum_{H=1}^{H_0}\frac{1}{m_H} \leq \log H_0 + O(1)$. Так как H_0 наименьшее такое, что $f(l) \leq \frac{2}{3}\log\log H_0$, то $\log H_0 = O(\exp(\frac{3}{2}f(l)))$. Покажем теперь, что $\frac{\phi(l)}{l}\exp(\frac{3}{2}f(l)) = O(\int_2^{\log l}\frac{dt}{\log t})$.

Пусть l имеет разложение на простые множители $l = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, тогда $\phi(l)/l = (1-1/p_1)\cdot\ldots\cdot(1-1/p_k)$ и $f(l) = 1/p_1+\ldots+1/p_k$. Воспользуемся для каждого сомножителя в $\phi(l)/l$ неравенством $1-x \leq \exp(-x)$, тогда получим $\frac{\phi(l)}{l}\exp(\frac{3}{2}f(l)) \leq \exp(\frac{1}{2}f(l))$. Пусть теперь $q_1 < \ldots < q_k$ первые k простых чисел, тогда $f(l) \leq 1/q_1 + \ldots + 1/q_k = \log\log q_k + O(1)$ и $l \geq q_1\cdot\ldots\cdot q_k$. Отсюда $\exp(\frac{1}{2}f(l)) = O(\sqrt{\log q_k}) = O(\sqrt{\log l}) = O(\int_2^{\log l}\frac{dt}{\log t})$. Таким образом получаем, что S_2 есть сумма двух слагаемых, каждое из которых $O(\int_2^{\log l}\frac{dt}{\log t})$, значит $S_2 = O(\int_2^{\log l}\frac{dt}{\log t})$ и $S_1 + S_2 = O(\int_2^{\log l}\frac{dt}{\log t})$.

3 Константа Эйлера-Кронекера алгебраического многообразия

3.1 Определение и формулы

Пусть X гладкое проективное многообразие размерности n над конечным полем $\mathbb{F}_q$, $\zeta(s,X)$ его дзета-функция. Пусть

$$\zeta(s,X) = c_{-1}(s-n)^{-1} + c_0 + \ldots$$

разложение дзета-функции в ряд Лорана в точке $s = n$, тогда величина $\gamma_X = c_0/c_{-1}$ называется константой Эйлера-Кронекера многообразия X. γ_X является обощением константы Эйлера-Кронекера функционального поля на случай размерности $n > 1$.

Обозначим числа Бетти многообразия X как $b_i = b_i(X) = \dim_{\mathbb{Q}_l} H^i(\overline{X},\mathbb{Q}_l)$, где $i = 0,1,\ldots,2n$. Определим „род“ многообразия X как $b = b(X) = \max_{i=0,1,\ldots,2n} b_i(X)$.

Пусть $t = q^{-s}$, тогда $\zeta(s,X)$ является рациональной функцией t и выполняется равенство:

$$\zeta(s,X)=\frac{F_1(t)\cdot\ldots\cdot F_{2n-1}(t)}{F_0(t)\cdot\ldots\cdot F_{2n}(t)}, \tag{5}$$

где

$$F_i(t)=\prod_{j=1}^{b_i}(1-q^{i/2}\omega_{i,j}t) \tag{6}$$

и $|\omega_{i,j}|=1$. Из определения для γ_X получаем равенство:

$$\gamma_X=\lim_{s\to n}\left(\frac{\zeta'(s,X)}{\zeta(s,X)}+\frac{1}{s-n}\right). \tag{7}$$

Из формулы (6) получаем равенство:

$$\frac{F_i'(t)}{F_i(t)}=\sum_{j=1}^{b_i}\left(\frac{q^{i/2}\omega_{i,j}}{q^{i/2-n}\omega_{i,j}-1}\right). \tag{8}$$

Отсюда, учитывая формулы (5) и (7), получаем выражение для γ_X :

$$\gamma_X=\frac{\log q}{2}+\log q\sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^i\sum_{j=1}^{b_i}\frac{q^{i/2-n}\omega_{i,j}}{q^{i/2-n}\omega_{i,j}-1}. \tag{9}$$

Обозначим число точек на многообразии X над $\mathbb{F}_{q^r}$ как $N_r=|X(\mathbb{F}_{q^r})|$, тогда получим для $\zeta(s,X)$ следующее выражение :

$$\zeta(s,X)=\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{N_r t^r}{r}\right). \tag{10}$$

Из формулы (10) $\sum_{r=0}^{\infty}N_{r+1}t^r=\frac{Z'(t)}{Z(t)}$, где $Z(t)=\zeta(s,X)$ и из формул (5) и (6) получаем выражение для числа точек N_r:

$$N_r=1+q^{nr}+\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^i\sum_{j=1}^{b_i}(q^{i/2}\omega_{i,j})^r. \tag{11}$$

Так как $|q^{i/2-n}\omega_{i,j}|<1$ при $i\leq 2n-1$, то $\frac{q^{i/2-n}\omega_{i,j}}{q^{i/2-n}\omega_{i,j}-1}=-\sum_{r=1}^{\infty}q^{(i/2-n)r}\omega_{i,j}^r$ при $i\leq 2n-1$. Из формулы (9) получаем $\gamma_X=\frac{\log q}{2}+$

$\log q\sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^i\sum_{j=1}^{b_i}\frac{q^{i/2-n}\omega_{i,j}}{q^{i/2-n}\omega_{i,j}-1} = \frac{\log q}{2}+\log q\sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i+1}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{r=1}^{\infty}q^{(i/2-n)r}\omega_{i,j}^r$. Так как все ряды $\sum_{r=1}^{\infty}q^{(i/2-n)r}\omega_{i,j}^r$ являются абсолютно сходящимися, то можно переставить порядки суммирования и получить, учитывая формулу (11), что $\gamma_X = \frac{\log q}{2}+\log q\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i+1}\sum_{j=1}^{b_i}q^{(i/2-n)r}\omega_{i,j}^r = \log q\left(\frac{1}{2}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{q^{nr}-N_r}{q^{nr}}\right)$. Окончательно получаем:

$$\gamma_X = \log q\left(\frac{1}{2}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{q^{nr}-N_r}{q^{nr}}\right). \tag{12}$$

Формулы (9) и (12) для случая размерности 1 содержатся в работе [2](формулы (II) и (IV)).

3.2 Нижняя оценка

Лемма 5 *Пусть $\omega\in\mathbb{C}$ и $|\omega|=1$. Пусть $A=\frac{q^{i/2-n}\omega}{q^{i/2-n}\omega-1}+\frac{q^{i/2-n}\bar\omega}{q^{i/2-n}\bar\omega-1}$, тогда выполнены неравенства*

$$-\frac{2q^{i/2-n}}{1-q^{i/2-n}}\le A\le\frac{2q^{i/2-n}}{1+q^{i/2-n}}.$$

Доказательство.

$$A=\frac{q^{i/2-n}\omega}{q^{i/2-n}\omega-1}+\frac{q^{i/2-n}\bar\omega}{q^{i/2-n}\bar\omega-1}=$$

$$=\frac{2q^{i-2n}-q^{i/2-n}(\omega+\bar\omega)}{1-q^{i/2-n}(\omega+\bar\omega)+q^{i-2n}}=$$

$$=1-\frac{1-q^{i-2n}}{|1-q^{i/2-n}\omega|^2}.$$

Отсюда видно, что максимальное значение A достигается при $\omega=-1$, а минимальное при $\omega=1$.

Теорема 3 *Для гладкого проективного многообразия X над конечным полем $\mathbb{F}_q$*

$$\gamma_X\ge\log q\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{b_{2i}}{q^{n-i}-1}-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{2i-1}}{q^{n+1/2-i}+1}\right).$$

Доказательство. Корни $\omega_{i,j}$ для каждого i разбиваются на пары комплексно сопряженных, значит по лемме 5

$$-\frac{b_i}{2}\frac{2q^{i/2-n}}{1-q^{i/2-n}} \leq \sum_{j=1}^{b_i}\frac{q^{i/2-n}\omega_{i,j}}{q^{i/2-n}\omega_{i,j}-1} \leq \frac{b_i}{2}\frac{2q^{i/2-n}}{1+q^{i/2-n}}$$

и для γ_X по формуле (9)

$$\gamma_X \geq \log q\left(\frac{1}{2}-\frac{b_0}{2}\frac{2q^{-n}}{1-q^{-n}}-\frac{b_1}{2}\frac{2q^{1/2-n}}{1+q^{1/2-n}}-\dots\right).$$

Следствие 1 *Для гладкого проективного многообразия X над конечным полем $\mathbb{F}_q$*

$$\gamma_X \geq \log q\left(\frac{1}{2}-b(X)\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{q^{n-i}-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q^{n+1/2-i}+1}\right)\right).$$

Доказательство. Следует из теоремы 3 и неравенств $b_i(X) \leq b(X)$.

3.3 Верхняя оценка

Лемма 6 *Для числа $\mathbb{F}_{q^r}$ рациональных точек справедлива оценка*

$$N_r \geq 1+q^{nr}-\sum_{i=1}^{2n-1}b_iq^{ri/2}.$$

Доказательство. По формуле (11) $N_r = 1+q^{nr}+\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^i\sum_{j=1}^{b_i}(q^{i/2}\omega_{i,j})^r$. Оценим $\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^i\sum_{j=1}^{b_i}(q^{i/2}\omega_{i,j})^r$:

$$|\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^i\sum_{j=1}^{b_i}(q^{i/2}\omega_{i,j})^r| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{2n-1}\sum_{j=1}^{b_i}|(q^{i/2}\omega_{i,j})^r| =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{j=1}^{b_i} q^{ri/2}.$$

Значит, $\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^i \sum_{j=1}^{b_i}(q^{i/2}\omega_{i,j})^r \geq -\sum_{i=1}^{2n-1} b_i q^{ri/2}$, откуда и получаем требуемую оценку.

Теорема 4 *Для гладкого проективного многообразия X размерности n над конечным полем $\mathbb{F}_q$*

$$\gamma_X \leq \log q/2 + \frac{q^n+1}{q^n - q^{n-1/2}} \log q + 2\log(b(X)+1).$$

Доказательство. Доказательство использует оценку леммы 6 и неравенство $N_r \geq 0$.

Выберем r_0 так, чтобы $1 + q^{nr_0} - \sum_{i=1}^{2n-1} b_i q^{r_0 i/2} \leq 0$ и $1 + q^{n(r_0+1)} - \sum_{i=1}^{2n-1} b_i q^{(r_0+1)i/2} \geq 0$. Такое r_0 существует так как $1+q^{nr} - \sum_{i=1}^{2n-1} b_i q^{ri/2} > 0$ при $r \to \infty$ и $1 + q^{nr} - \sum_{i=1}^{2n-1} b_i q^{ri/2} < 0$ при $r = 0$.

Оценим γ_X по формуле (12), используя неравенство $N_r \geq 0$ при $r \leq r_0$ и неравенство леммы 6 для $r > r_0$:

$$\gamma_X/\log q \leq 1/2 + r_0 + \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(-\frac{1}{q^{nr}} + \sum_{i=1}^{2n-1} b_i q^{r(i/2-n)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + r_0 - \frac{1}{q^{nr_0}(q^n-1)} + \sum_{i=1}^{2n-1} b_i \cdot \frac{q^{r_0(i/2-n)}}{q^{n-i/2}-1}.$$

Оценим $\sum_{i=1}^{2n-1} b_i \cdot \frac{q^{r_0(i/2-n)}}{q^{n-i/2}-1}$:

$$\sum_{i=1}^{2n-1} b_i \cdot \frac{q^{r_0(i/2-n)}}{q^{n-i/2}-1} \leq \frac{q^{-nr_0}}{q^n - q^{n-1/2}} \sum_{i=1}^{2n-1} b_i q^{(r_0+1)i/2} \leq$$

$$\leq \frac{q^{-nr_0}}{q^n - q^{n-1/2}} \left(1 + q^{n(r_0+1)}\right) \leq \frac{q^n+1}{q^n - q^{n-1/2}}.$$

Оценим r_0:

$$1 + q^{nr_0} \leq \sum_{i=1}^{2n-1} b_i q^{r_0 i/2} \leq b(X) q^{r_0/2} \frac{q^{(2n-1)r_0/2}-1}{q^{r_0/2}-1}.$$

Отсюда

$$q^{r_0/2} - 1 \leq \frac{(1+q^{nr_0}) \cdot (q^{r_0/2} - 1)}{q^{r_0/2} \cdot (q^{(2n-1)r_0/2} - 1)} \leq b(X)$$

и

$$r_0 \leq 2\frac{\log(b(X)+1)}{\log q}.$$

Для γ_X получаем:

$$\gamma_X \leq \log q/2 + \frac{q^n+1}{q^n - q^{n-1/2}} \log q + 2\log(b(X)+1).$$

Благодарности.

Я благодарен своему научному руководителю Цфасману М.А. за ценные замечания во время моей работы над статьей. Также я благодарен Зыкину А. за советы по оформлению работы.

Список литературы

[1] Y.Ihara,"On the Euler-Kronecker constants of global fields and primes with small norms."Algebraic geometry and number theory, 407-451, Progr. Math, 253, Birkhauser.

[2] Y.Ihara,"The Euler-Kronecker invariants in various families of global fields."preprint 2006.

[3] M.A.Tsfasman "Asymptotic behaviour of the Euler-Kronecker constants."Algebraic geometry and number theory, 453-458, Progr. Math, 253, Birkhauser.

[4] С.А.Степанов "Арифметика алгебраических кривых."М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.