PL-аналог теоремы Нэша—Кейпера

Арсений Акопян

28 сентября 2007 г.

1 Вступление

Аннотация

В статье идет речь о PL-изометрии — кусочно-линейной изометрии. Будет дано конструктивное доказательство теоремы Киршбрауна, а также доказан аналог теоремы Нэша—Кейпера для полиэдральных пространств.

Определение. *PL-отображением одного полиэдрального пространства в другое называется отображение действующие на каждый симплекс триангуляции как линейное.*

Определение. *PL-изометрией называется PL-отображение сохраняющее длины кривых. Или что тоже самое, линейные отображения между симплексами суть изометрии.*

Наглядным примером PL-изометрии служит отображение переводящие обычный лист бумаги в фигуру оригами.

Понятно, что PL-изометрия является нерастягивающим (иногда его также называют коротким или слабосжимающим) отображением, то есть не увеличивает расстояние между любыми двумя точками.

2 PL-изометрия в пространстве

В этом разделе мы будем рассматривать только PL-изометрии действующие на политопах в $\mathbb{E}^d$, $\mathbb{H}^d$ или $\mathbb{S}^d$ и оставляющие их в содержащих их пространствах.

Пусть PL-изометрия ϕ переводит точки A и B в точки $\phi(A)$ и $\phi(B)$. Предположим, что существует движение g, что $\phi(A) = g(A)$, а $\phi(B) = g(B)$. Тогда, в силу слабого сжатия, для любой точки X лежащей на отрезке AB верно $\phi(X) = g(X)$ (иначе бы нарушалось неравенство треугольника).

Поэтому каждому движению из набора движений PL-изометрии соответствует одна и притом выпуклая область. Далее будем называть такие области *листами*. И считать, что всем листам соответствую разные движения.

Рассмотрим какие-нибудь два соседних по гиперграни листа L и L'. Поскольку на этой гиперграни у листов движения совпадают, но сами они отличаются, можно сказать что движение первого листа это композиция движений второго листа и симметрии относительно этой гиперграни (поскольку существует только два движения совпадающие на гиперплоскости):

$$g_{L'} = g_L \circ sym(L \cap L'). \tag{1}$$

Если две PL-изометрии ϕ и ϕ' имеют одно и тоже разбиение на листы L_1, L_2, ..., то в силу вышесказанного движения соответствующие этим листам в первой и второй отличаются на одно и тоже движение. Поэтому далее нас будут интересовать только разбиение на листы, и это разбиение мы будем называть тоже PL-изометрией тогда, когда это не будет приводить к путанице.

Следующие две теоремы 1 и 2 для $\mathbb{E}^d$ доказали J.Lawrence и J.E.Spingart.в [5]. Мы здесь приведем более короткие доказательства подходящие также и для пространств $\mathbb{S}^d$ и $\mathbb{H}^d$.

Теорема 1. *Локально конечное разбиение политопа на политопы является PL-изометрией тогда и только тогда, когда любая грань коразмерности 2, принадлежит четному числу листов, причем альтерированная сумма углов при этой грани (то есть соседние углы входят в сумму с разными знаками) равна 0.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим некоторую грань l коразмерности 2, и все листы, содержащие эту грань. Выберем произвольное отображение некоторого листа, затем последовательно будем строить отображения остальных листов по кругу вокруг l, это построение будет однозначным.

При PL-изометрии листы откладываются по одну сторону относительно общей гиперграни, значит листы будут откладываться поочередно в различных направлениях. Когда мы доберемся до последнего, у нас должна совместиться общая грань этого листа с первым. Значит количество листов должно быть чётно, а сумма углов листов при грани l взятая с чередующимся знаком равна 0.

Достаточность. Выберем произвольный лист L_1. Будим считать, что ему соответствует тождественное движение. Его можно соединить цепочкой $L_1, L_2, \ldots, L_n$ с произвольным листом L_n, так что соседние L_i, L_{i+1} имеют общую гипергрань. Тогда вдоль этой цепочки движение листа L_n однозначно задается с помощью формулы 1. Необходимо доказать, что при любом выборе цепочки результат g_n будет однозначным.

Пусть h некоторой кривая, начинающаяся в L_1 и заканчивающаяся в L_n и не пересекающая грани коразмерности 2 и выше. Каждой такой кривой соответствует цепочка листов, в соответствии с тем, в каком порядке эта кривая проходит листы. В силу односвязности области определения PL-изометрии, эту кривую h_0 можно перевести в любую другую подобную кривую h_1, непрерывной гомотопией h_t оставляющей концы кривой на месте. Эту гомотопию можно осуществить не пересекая грани PL-изометрии коразмерности 3 и выше (это следует из слабой теоремы Тома о трансверсальности), а пересечения с гранями коразмерности 2 происходя при различных t.

Как будет изменяться g_n при подобной гомотопии? В моменты t, когда нет пересечения с гранями коразмерности 2, соответствующая цепочка листов не меняется. В момент пересечения некоторой подобной грани l, один кусок цепочки будет заменен другим. Эти два куска вместе образуют цикл вокруг грани l. Эти два куска приводят к одному результату (поскольку альтерированная сумма углов равна 0), а значит g_n при таком переходе не изменяется. □

Замечание 1. *Конечно, для окружности эта теорема не верна. Для неё аналогичным критерием будет то что число частей должно быть четным и сумма длин всех "четный" отрезков, должна быть равна сумме всех "нечетных" отрезков.*

Следующую теорему можно также рассматривать как аналитическое определение PL-изометрии.

Теорема 2. *Отображение ϕ заданное на политопе P (находящимся в в пространстве $\mathbb{E}^d$, $\mathbb{H}^d$ или $\mathbb{S}^d$) является PL-изометрией тогда и только тогда, когда выполнено следующее требование:*

$$\forall X \in P, \exists r(X), \forall Y \in B(X, r(X)) \text{ верно } XY = \phi(X)\phi(Y).$$

Доказательство. То что PL-изометрия обладает этим свойством понятно. Действительно, в качестве $B(X, r(X))$ можно взять шар лежащий целиком в объединении листов содержащих точку X.

Докажем, что требования существования такой окрестности для каждой точки достаточно. Для начала, заметим что можно считать что P — ограничено. Действительно, очевидно, существует локально-конечное разбиение P (да и всё всеобъемлющее пространство) на ограниченные политопы (для сферических пространств, потребуем также, чтобы они не содержали двух противоположных точек). И если ограничение отображения ϕ на каждый из политопов разбиения суть PL-изометрия, то отображение и на весь политоп P тоже, очевидно, PL-изометрия.

Легко понять, что отображение ϕ слабосжимающее (а значит непрерывно). Рассмотри произвольные две точки A и B. Соединяющий их отрезок покроем открытыми множествами $B(X, r(X))$, такие множества берутся для всех точек лежащих на отрезке AB. Эти множества, очевидно покрывают весь отрезок AB, и в силу компактности отрезка, можно выбрать конечное число таких множеств, которые также покрывают весь отрезок. Пусть центры выбранных окрестностей это точки $X_1, X_2 \dots X_n$ (взятые в порядке от A к B). Поскольку области точек X_1 и X_2 пересекаются, существует точка лежащая между ними и принадлежащая обеим областям. Обозначим её через Y_1. Аналогично построим точки $Y_i, i = 2 \dots n-1$. Получим, что длины звеньев ломанной $AX_1Y_1X_2 \dots Y_{n-1}X_nB$ не меняются при отображении. А поскольку расстояние между концами ломаной не превосходит её длины, получаем, что $AB \leqslant \phi(A)\phi(B)$.

Кроме того, видно, что ограничение ϕ на отрезок AB это PL-изометрия, листы которой это отрезки AX_1, X_1Y_1, …,$Y_{n-1}X_n$, X_nB. Поэтому, можно считать, что теорема доказана в случае если P лежит в одномерном пространстве.

Предположим что теорема доказана для пространства размерности $d-1$, докажем и для d-мерного пространства. Действовать будем аналогично и одномерному случаю. Политоп P полностью покрыт открытыми шарами $B(X, r(X))$, построенными для каждой точки P, поэтому в силу компактности (он замкнут и ограничен), можно выбрать конечное число шаров $B(X_1, r(X_1))$, $B(X_2, r(X_2))$, …, $B(X_n, r(X_n))$ тоже покрывающих все P. Для удобства, будем считать, что мы брали $r(X)$ таким маленьким, чтобы шар $B(X_i, r(X_i))$ не пересекался с гранями меньшей размерности, чем та грань, в которой лежит X_i. Тогда ограничение отображения F на $B(X_i, r(X_i)) \cap P$ будет однозначно определяться по тому как оно действует на точку X_i и на часть сферы $S_i = S(X_i, r(X_i) \cap P$

Покажем, что ограничение F на любой кусок шара $B(X_i, r(X_i)) \cap P$ это PL-изометрия. Действительно, рассмотрим часть сферы S_i. Отображение ϕ переводит её в сферу $S(\phi(X_i), r(X_i))$ (того же радиуса). Кроме того, для любой точки A из S_i существует область, точки которой к ней не приближаются (в силу условия теоремы). А значит, в силу предположения индукции, ограничение ϕ на S_i это PL-изометрия. Очевидно, поскольку расстояние от точки X_i до точек S_i под действием ϕ не меняется, а ϕ отображение слабосжимающее, значит отрезки X_iY переходят в отрезки, для любого Y из S_i. Поэтому $B(X_i, r(X_i)) \cap P$ разбивается на конечное число частей (листов), на каждой из которых ϕ действует как движение.

Понятно, что если какие-то два листа, из соседних шаров $B(X_i, r(X_i))$ и $B(X_j, r(X_j))$ пересекаются "по мясу" (размерность пересечения равна d), то на этих листах совпадает и движение, а значит их можно считать просто одним большим листом.

Поскольку шаров, которыми мы покрыли P конечное число, и каждое из них мы разбили на конечное число листов, мы получаем что P можно представить как объединение конечного числа листов, на каждом из которых F действует как движение. А это и есть PL-изометрия. $\square$

Отметим еще одно важное свойство, которое является удобным инструментом при построении различных PL-изометрий.

Лемма 3. *Для любой PL-изометрии заданной на многограннике можно указать несколько точек и их образов под действием этой PL-изометрии, что по этим точка она восстанавливается однозначно.*

Доказательство. В случае $\mathbb{E}^d$ и $\mathbb{H}^d$ достаточно выбрать все вершины всех многогранников. Поскольку каждый выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой своих вершин, все листы (который в данном случае будут выпуклыми многогранниками) можно однозначно восстановить.

Это свойство можно обобщить и на всё сферическое пространство. Но возникает трудность, поскольку лист может содержать полусферы в качестве своих граней и тогда вершины политопа не достаточно для её определения (например в $\mathbb{S}^2$ существует целое семейство полуокружностей с общими концами). "Разрежем" сферу $\mathbb{S}^d$ с помощью $d+1$ попарно перпендикулярных гиперплоскостей. Эти гиперплоскости также и разрезают листы из которых состоит наша PL-изометрия. Эти новые "маленькие" листы не могут содержать полусферы, потому мы можем задать действие PL-изометрии на них, задав его только на вершинах. $\square$

Докажем теорему, которая будет основным инструментом при доказательстве аналога теореме Нэша-Кейпера.

Теорема 4. *Пусть на конечном множестве точек в пространстве $\mathbb{E}^d$, $\mathbb{H}^d$ или $\mathbb{S}^d$ задано слабосжимающее отображение f. Тогда это слабосжимающее отображение можно продолжить до PL-изометрии на все пространство.*

Доказательство. Доказательство будем проводить индукцией числу точек на которых задано это отображение f.

Если размерность пространства равна 0 то утверждение — очевидно.

В случае если у нас задано отображение только для одной точки теорема очевидна. Действительно, всё пространство можно считать одним листом. А соответствующим движением — какое-нибудь движение переводящее A_1 в B_1.

Итак, будем считать, что теорема доказана в случае если число точек в отображении не превосходит $n-1$. Докажем её для случая когда число точек равно n.

Пусть задано слабосжимающее отображение переводящее точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ соответственно. Без ограничения общности, можно считать что точки A_n и B_n совпадают. По предположению индукции, существует PL-изометрия ϕ (заданная на всем d-мерном пространстве), переводящая A_i в B_i, где i пробегает значения от 1 до $n-1$.

Пусть ϕ не оставляет A_n на месте (иначе в качестве нужной нам PL-изометрии можно взять само ϕ). Рассмотрим множество точек X удаляющихся от A_n, иначе говоря, множество точек X таких, что

$$A_n X < A_n \phi(X).$$

Обозначим его за Ω. Понятно что Ω не пусто, открыто (ϕ — непрерывное отображение, а неравенство ограничивающее Ω — строгое) и не заполняет всё пространство, поскольку точки A_i, $i = 1, \ldots, n-1$ ему не принадлежат (они по-условию теоремы не удаляются от A_n).

Покажем что вместе с любой точкой X принадлежащей Ω, отрезок $A_n X$ также целиком лежит в Ω. Возьмем произвольную точку Y лежащую на этом отрезке. Так как ϕ — слабосжимающее отображение, $XY \geqslant \phi(X)\phi(Y)$, а поскольку, $A_n X < A_n F(X)$, следовательно:

$$A_n Y = A_n X - XY < A_n \phi(X) - \phi(X)\phi(Y) \leqslant A_n \phi(Y).$$

Последнее верно, в силу неравенства треугольника.

Посмотрим, как образуется граница Ω. Пусть L какой-нибудь лист ϕ, а g_L соответствующее ему движение. Рассмотрим точку $g_L^{-1}(A_n)$ (она не обязательно должна лежать в L). Легко понять, что $L \cap \Omega$ суть множество точек L лежащих ближе к A_n, чем к $g_L^{-1}(A_n)$. Если это множество не пусто и не весь лист L (эти случаи нам не интересны, поскольку тогда L лежит либо целиком вне, либо целиком внутри Ω), то часть границы Ω лежащей в L это просто пересечение L и срединной гиперплоскости между точками A_n и $g_L^{-1}(A_n)$. Таким образом, рассматривая все листы ϕ приходим к тому, что граница Ω состоит из выпуклых политопов.

Теперь опишем построение нужного нам отображения ϕ'. Вне множества Ω отображение ϕ' будет совпадать с ϕ. Далее, пусть L' часть границы Ω, лежащей внутри листа L. Рассмотрим пирамиду с вершиной в A_n и основанием L' (или проще говоря, их выпуклую оболочку) — это будет лист ϕ'. Сопоставим ему движение $g_L \circ s_{L'}$, где $s_{L'}$ — симметрия относительно гиперплоскости содержащей L'. По построению этой симметрии, $s_{L'}(A_n) = g_L^{-1}(A_n)$. Проведем эту процедуру для всей границы Ω.

Пусть точка X принадлежит L'. Тогда, легко понять, что движение $g_L \circ s_{L'}$ переводит отрезок XA_n в отрезок $F(X)A_n$. Действительно, $g_L \circ s_{L'}(X) = g_L(X) = \phi(X)$, а $g_L \circ s_{L'}(A_n) = g_L(g_L^{-1}(A_n)) = A_n$, и отрезок XA_n лежит целиком внутри одного листа отображения ϕ'.

Таким образом, на границе двух листов соответствующие листам движения совпадают, поскольку они совпадают на границе Ω.

Если мы определили отображение ϕ' на всем Ω, то оно является искомым. Однако, ϕ' может быть определено не на всем Ω. Рассмотрим луч выходящий из A_n. Если он пересекает границу Ω, на нем отображение ϕ' определено. Если же он полностью лежит в Ω, то A_n является единственной точкой на луче на которой определено отображение ϕ'.

В случае, если мы находимся в $\mathbb{S}^d$, то ϕ' уже определен на всём пространстве. Покажем это.

Заметим, что точка A'_n — противоположная A_n, не может удалиться от A_n (поскольку находиться итак на максимальном расстоянии). Покажем что она принадлежит внутренности дополнения к Ω.

1. Если A'_n не остается на месте, значит она приближается к A_n, а в силу непрерывности приближается вместе с некоторой своей окрестностью.

2. Если $\phi(A'_n) = A'_n$. Легко понять, что существует окрестность точки A'_n, что для любой точки X из этой окрестности $A'_n X = A'_n \phi(X)$ (в качестве этой окрестности можно взять все точки листов содержащих A'_n). Для любой точки сферы верно равенство $A_n X = A_n A'_n - A'_n X = A_n \phi(X)$, поскольку точки A_n и A'_n противоположные. Значит, выбранная нами окрестность не пересекается с Ω. Таким образом, любая дуга большой окружности $A_n A'_n$ пересекает границу Ω, а значит на ней определено отображение ϕ'.

Теперь покажем что можно доопределить ϕ' в случае пространств $\mathbb{E}^d$, $\mathbb{H}^d$.

Рассмотрим сферу S с центром в A_n и достаточно маленькую, чтобы она целиком лежала внутри Ω. Построенная нами неполная PL-изометрия ϕ' (то есть PL-изометрии, область определения которой не совпадает со всем пространством) отображает S в себя. Таким образом, у нас определена неполная PL-изометрия на S. По лемме 3 движение каждого листа можно однозначно восстановить по движению нескольких точек (вершин и иногда точек внутри и на границе листа). Отметим все такие точки для каждого листа. Если у нас задана PL-изометрия, которая действует также как и ϕ' на всех этих точках, то он совпадает с действием ϕ' на сфере S. Такая PL-изометрия существует, поскольку для сферических пространств наша теорема уже доказана. Его можно продолжить на всё Ω. Действительно, если точка X лежащая на сфере переходит в точку X', тогда луч $A_n X$ (точнее его часть, лежащая внутри Ω) переведем в $A_n X'$. Это отображение будет совпадать с ϕ', там где ϕ' определено, поэтому если мы доопределим ϕ' таким образом, мы получим PL-изометрию действующую на всё пространство. $\square$

Заметим что прямым следствием этой теоремы является теорема Киршбраума

Следствие 5 (Теорема Киршбрауна). *Если на конечном множестве точек в пространстве $\mathbb{E}^d$, $\mathbb{H}^d$ или $\mathbb{S}^d$ задано слабосжимающее отображение f. Тогда это слабосжимающее отображение можно продолжить на все пространство*

Данцер, Грюнбаум и Кли в книге "Теорема Хелли" поднимают задачу о построении простого геометрического продолжения. Построение из теоремы 4 является достаточно наглядным и простым. Отметим, что в теорема Киршбрауна, конечно, не обязательно требовать конечность начального множества точек.

Замечание 2. *Отметим, что в теореме 4 не обязательно требовать, чтобы политоп был той же размерности, что и пространство (пространство может быть и большей размерности).*

3 PL-аналог теоремы Нэша-Кейпера

Существование PL-изометрии погружающей конечные двумерные и трехмерные полиэдральные пространства в $\mathbb{E}^d$ ($\mathbb{H}^d$ и $\mathbb{S}^d$) было доказано Залгаллером в [1].

С. Крат, А. Петрунин и Д. Бураго [3] доказали это для полиэдральных пространств любой размерности. А именно:

Теорема 6 (С. Крат, А. Петрунин и Д. Бураго). *Любое конечное d-мерное евклидово полиэдральное пространство (сферическое или гиперболическое) допускает PL-изометрию на d-мерный полиэдр в $\mathbb{E}^d$ (или $\mathbb{S}^d$ и $\mathbb{H}^d$ соответственно).*

В этой же работе была доказана следующая теорема:

Теорема 7 (С. Крат, А. Петрунин и Д. Бураго). *Пусть P конечное двумерное евклидово полиэдральное пространство , а отображение $f : P \to \mathbb{E}^2$ является нерастягивающим. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует PL изометрия $\phi_\varepsilon : P \to \mathbb{E}^2$, что $d(f(x), \phi_\varepsilon(x)) < \varepsilon$ для любой точки x из P.*

Упомянем также связанный с этой теоремой результат Ю.Бураго и В. Залгаллера:

Теорема 8 (Ю.Бураго и В.Залгаллер). *Каждое короткое C^2-погружение f_0 многогранника M в $\mathbb{E}^3$ можно C^0-аппроксимировать изометрическими кусочно-линейными C^0-погружениями. Если f_0 является C^0-вложением, то и аппроксимирующие кусочно-линейные изометрии можно выбрать C^0-вложениями.*

Авторы называют эти теоремы PL-аналогами теоремы Нэша-Кейпера. Мы докажем обобщение этих теорем (если говорить о теореме 8 то в классе погружений) для пространств любой размерности, а также сферических и гиперболических. Но сначала сделаем два важных замечания.

Замечание 3. *Аналог теоремы 4 для полиэдральных пространств не верен. Рассмотрим следующий пример (автору его сообщил Антон Петрунин). Пусть $ABCD$ — правильный тетрайдер, а M — центр грани ABC. Пусть наше полиэдральное пространство состоит из трех треугольников ADM, BDM и CDM. Легко понять, что не существует PL-изометрии, переводящий это пространство в плоскость грани ABC и оставляющая точки A, B, C и D на месте.*

Замечание 4. *Аналог теоремы 7 не верен для сферических полиэдральных пространств. Контрпримером может служить полиэдральное пространство состоящее из сферы радиуса 1 и построенной на ней конструкции из замечания 3. А именно, возьмем на сфере произвольную точку M и построим окружность радиуса 1 с центром в ней. Пусть ABC — правильный треугольник вписанный в эту окружность. Приклеим к сфере три правильных треугольника со стороной 1 — ADM, BDM и CDM. Пусть f — функция, которая оставляет на месте сферу, а эти три треугольника переводит соответственно в отрезки AM, BM и CM (например, в треугольнике AMD функция f склеивает все точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от A). Такую функцию, конечно, нельзя аппроксимировать с помощью PL-изометрии.*

Из-за последнего замечания придется наложить некоторое ограничение на функцию f в случае сферических полиэдральных пространств.

Теорема 9. *Пусть P — конечное d-мерное евклидово полиэдральное пространство, пусть функция $f : P \to \mathbb{E}^n$ ($n \geqslant d$) является нерастягивающей. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует PL изометрия $\phi_\varepsilon : P \to \mathbb{E}^n$, что $d(f(X), \phi_\varepsilon(X)) < \varepsilon$ для любой точки X из P. Аналогичная теорема верна и для гиперболических полиэдральных пространств. В случае сферических пространств на f должно быть наложено одно из двух следующих ограничений: либо f является $(1 - \delta)$-сжимающей (для некоторого $\delta > 0$), либо его образ целиком лежит в открытой полусфере.*

Доказательство. Сначала мы несколько модифицируем наше полиэдральное пространство и функцию f, которую мы аппроксимируем.

Функцию f сделаем строгосжимающей. А именно, докажем следующую лемму:

Лемма 10. *Для любой функции f из условия теоремы 9 и любого $\varepsilon > 0$ существует такая $(1-\delta)$-короткая (для некоторого $\delta > 0$) функция f' такая, что $d(f(X), f'(X)) < \varepsilon$ для любого $X \in P$.*

Доказательство. Наша цель показать что на всех трех пространствах (точнее их ограниченных областях) существует строгосжимающее отображение, сдвигающее каждую точку не более чем на ε.

Для евклидового пространства, это достаточно ясно. Пусть X произвольная точка образа полиэдрального пространства P. Сделаем гомотетию образа относительно X с коэффициентом $\frac{\operatorname{diam}(P)-\varepsilon/2}{\operatorname{diam}(P)}$. Тогда расстояние между любыми двумя точками уменьшится хотя бы в $\frac{\operatorname{diam}(P)-\varepsilon/2}{\operatorname{diam}(P)}$, а расстояние между образами любой точки Y при отображении f и f' (сжатом f) не превосходит $\varepsilon/2$.

Теперь рассмотрим случай сферического пространства. В условии было сказано, что в сферическом случае функция f либо уже строгосжимающая либо отображает P в полусферу. В первом случае доказывать нечего, рассмотрим второй случай. Пусть это сфера S с центром в O, находящаяся в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве. Пусть образ P попадает в открытую полусферу S', центром которой (как круга в сферической геометрии) является точка A. Гиперплоскость в $\mathbb{E}^{n+1}$, проходящую через O и перпендикулярную AO, обозначим через a. На луче AO отметим точку X. Рассмотрим следующее преобразование:

$$g_X = sym(a) \circ inv(X),$$

где $inv(X)$ — инверсия с центром в X и оставляющая сферу S на месте (то есть радиуса $R = \sqrt{XO^2 - OA^2}$)). Как известно, если A и B две произвольные точки, а A' и B' их образы, то треугольники AXB и $A'XB'$ подобны с коэффициентом подобия $AX \cdot BX/R^2$. Поскольку образ P всегда лежит целиком вне сферы инверсии, для любой точки A из образа P, получаем $XA > R + \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Поэтому инверсия $inv(X)$ всегда уменьшает расстояние между любыми двумя точками хотябы в $1 + \delta/R$, а значит и уменьшает расстояния на сфере по сферической метрике (поскольку эта метрика индуцируется евклидовой).

Кроме того, понятно, что при стремлении X к бесконечности g_X стремится к тождественному преобразованию (причем равномерно, в силу компактности сферы). Поэтому, выбрав X достаточно далеко, чтобы преобразование g_X не смещало никакую точку дальше чем на ε, мы получим сжимающее хотя бы в $1 + \delta/R$ раз отображение.

Для гиперболического пространства рассуждение практически аналогично. Мы должны рассмотреть модель, где гиперболическое пространство суть одна из двух (пусть той где x_1 положительно) полостей гиперболоида, заданного уравнением $x_1^2 - x_2^2 \cdots - x_n^2 - x_{n+1}^2 = 1$ в $\mathbb{E}^{n+1}$ и метрикой индуцируемой на нем псевдометрикой $ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 \cdots + dx_n^2 + dx_{n+1}^2$, заданной на всем пространстве. Пусть X — точка, лежащая на оси x_1, а s_1 — плоскость, проходящая через начало координат и перпендикулярная x_1. Так же, как и для сферического пространства определим функцию g_X:

$$g_X = sym(s_1) \circ inv(X),$$

где $inv(X)$ — инверсия (по псевдометрике) с центром в X и оставляющая гиперболоид на месте. Так же, как и в сферическом случае, легко видеть что g_X является сжимающим отображением (на образе P) и стремится к тождественному (равномерно, в силу компактности образа P) при стремлении X к $-\infty$. Поэтому можно выбрать такое X, что g_X сдвигает каждую точку из образа P не более чем на ε, и тем самым отображение $g_X \circ f$ будет искомым. □

В дальнейшем мы будем считать, что наша задача — аппроксимировать функцию f, которая уменьшает расстояние между любыми двумя точками хотя бы в $1 - \mu$ раз, для некоторго $\mu > 0$.

Триангулируем P так, что диаметр каждого симплекса не превосходит ε. Наша цель построить PL-изометрию, переводящую все вершины симплексов в их образы при отображении f.

Для сферических и гиперболических пространств нам понадобится сделать еще более мелкую триангуляцию. Возьмем $\nu > 0$ такое, что $(1 + \nu)^{4d}(1 - \mu) < 1$. Далее возьмем такое ρ, что любую фигуру диаметра ρ нашего пространства можно так отобразить в $\mathbb{E}^n$, что расстояния при этом изменятся не более чем в $(1+\nu)$. Будем полагать, что диаметры нашей триангуляции P меньше ρ.

Далее мы покажем, что можно наложить еще одно условие на функцию f. А именно, потребуем, чтобы вблизи каждой грани триангуляции она вела себя так же, как и сама грань.

Определение. *Будем говорить, что функция h, заданная на симплексе удовлетворяет U-требованию, если для любой k-грани значение функции h в некоторой окрестности этой грани зависит только от проекции точки на эту грань.*

Например, если симплекс одномерный, то функция удовлетворяет U-требованию, если вместе с каждым концом в ту же точку она отображает некоторую область этой точки. Аналог этой леммы для двумерных евклидовых полиэдральных пространств был доказан в работе [3].

Лемма 11. *Пусть на конечном d-мерном полиэдральном пространстве P задана триангуляция, и диаметр каждого симплекса меньше ρ. Тогда для любого $\delta > 0$ существует такая функция $h : P \to P$, удовлетворяющая U-требованию на любом симплексе триангуляции, переводящая его в себя, оставляющая вершины на месте и такая, что для любых двух точек X и Y из P :*

$$(1 + \delta)(1 + \nu)^{4d} d(X, Y) > d(h(X), h(Y)).$$

Доказательство. Рассмотрим 0-грани этого разбиения. Пусть h на этих вершинах тождественно. Далее будем проводить построение функции h индукцией по размерности граней на которых её определяем.

Пусть для любого $\delta' > 0$ и $k < d$ мы можем построить функцию h'_δ удовлетворяющую условию теоремы на k-остове нашего пространства. П остроим её на всем полиэдральном пространстве.

Возьмем произвольный симплекс T из нашей триангуляции и функцию $h_{\delta'}$ на его $(d-1)$-гранях. Внутри симплекса T выберем какую-нибудь точку, скажем центр вписанной сферы I. Зафиксируем некоторое число $1 > \lambda > 0$ и каждой вершине X симплекса T поставим в соответствие точку X', лежащую на отрезке XI и делящую его в отношении $XX'/X'I = \lambda$. Симплекс с вершинами в этих точках обозначим через T'.

Для всех точек X лежащих в $T \setminus T'$ определим $h_{\delta,\lambda}(X) = h_{\delta'}(pr(X))$, где $pr(X)$ — проекция точки X на соответствующую грань (ту грань, в которую попадает луч IX). Очевидно, что при выборе λ достаточно маленьким это определение будет корректным для всех симплексов триангуляции.

Покажем, что при этом можно выбрать λ таким, что расстояние между точками увеличиться не более чем в $(1+\delta)(1+\nu)^{4d}$.

Действительно, когда мы говорили что $pr()$ проецирует на конкретную плоскость, — это не совсем верно. Поскольку вблизи любой грани a размерности меньшей, чем $d-1$ функция $h_{\delta'}$ ведет себя так же, как и на грани a, мы можем такие точки проецировать на любую гипергрань, содержащую a. Очевидно, что для любого $\sigma > 0$ существует λ такое, что расстояние между точками при проекции будет увеличиваться не более чем в $1+\sigma$ (для евклидового и гиперболического пространства оно и вовсе всегда уменьшается).

Если же X и Y нельзя спроектировать на одну грань, значит расстояние между ними превосходит некоторое τ. Поэтому для того, чтобы при проекции расстояния увеличивались не более чем в $(1+\sigma)$, надо выбрать λ таким маленьким, чтобы каждая точка при проекции смещалась меньше чем на $\tau\sigma/2$. А это сделать, очевидно, можно.

Выбрав σ таким, что $(1+\sigma)(1+\delta') < 1+\delta$, мы можем получить функцию на $T \setminus T'$, которая увеличивает расстояния не более, чем в $(1+\delta)(1+\nu)^{4d-4}$. Осталось её продолжить до функции на всем T так, чтобы она увеличивала расстояния не более, чем в $(1+\delta)(1+\nu)^{4d}$. Для евклидового пространства, это следует из теоремы Киршбрауна. Для сферических и гиперболических пространств сделаем следующее. Поскольку диаметр T не превосходит ρ, существует отображение $\pi : T \to \mathbb{E}^d$, изменяющее расстояния не более, чем в $(1+\nu)$. Поэтому отображение $\pi(h_{\delta,\lambda} : \pi(T \setminus T') \to \pi(T)$ увеличивает расстояние не более, чем в $(1+\nu)^{4d-2}(1+\delta)$. По теореме Киршбрауна оно может быть продолжено до отображения $h' : \pi(T) \to \pi(T)$, увеличивающего расстояния также не более, чем в $(1+\nu)^{4d-2}(1+\delta)$. Теперь рассмотрим отображение $\pi^{-1}(h') : T \to T$. Оно будет увеличивать расстояия не более, чем в $(1+\delta)(1+\nu)^{4d}$, и совпадать с $h_{\delta,\lambda}$ на $T \setminus T'$. Таким образом, индукционный переход доказан.

$\square$

Выбрав δ достаточно маленьким, мы можем добиться, чтобы функция $f \circ h$ уменьшала все расстояния в $1-\mu'$ раз для некоторого $\mu' > 0$ (для этого надо, чтобы выполнялось неравенство $(1-\mu)(1+\delta)(1+\nu)^{4d} < 1-\mu'$).

Подытожим всё вышесказанное:

Итак, мы можем считать, что функция f является $(1-\mu)$-сжимающей (то есть уменьшает все расстояния хотя бы в $1-\mu$ раз) для некоторого $\mu > 0$ и, кроме того, удовлетворяет U-требованию на симплексах триангуляции. Наша цель построить PL-изометрию так, чтобы она переводила любую вершину триангуляции X в $f(X)$.

Сделаем некоторое преобразование нашего полиэдра P.

Ниже мы опишем процедуру склейки (отождествления) некоторых частей полиэдра вокруг его граней. Начинать эту процедуру будем с граней размерности $d-1$, потом $d-2$ и так далее.

Описание процедуры. Пусть l — k-грань нашего полиэдрального пространства, а P_l все $(k+1)$-мерные грани, содержащие l. Пусть I — центр вписанной сферы симплекса l. Для каждого $S \in P_l$ построим перпендикуляр к грани l (в S) в точке I, и на расстоянии δ от l выберем точку X. Выберем δ достаточно маленьким чтобы все такие симплексы попали в область грани l, в которой значение функции h зависит только от проекции точек на грань l.

Назовем “трубой” грани l (обозначим U_l) выпуклую оболочку всех таких точек X и грани l (во всех симплексах полиэдрального пространства P). Например, для обычного трехмерного тетрайдера трубой вершины будет соответствующий уголок. Заметим, что U_l по своему строению суть произведение k-мерной грани l и $(d-k-1)$-мерного сферического полиэдрального пространства. Воспользуемся теоремой 6 и с помощью PL-изометрии отобразим (мысленно) это пространство в $\mathbb{S}^{d-k-1}$. После чего отождествим в P склеивающиеся при этом отображении части. Обозначим получившейся политоп через P'. Поскольку значения функции f на склеивающихся частях совпадают, никаких проблем с определением функции f на P' не возникает. Заметим, что поскольку трубы являются частями d-мерного пространства, к ним можно применять теорему 4.

Мы постепенно будем доопределять нашу PL-изометрию на остов (точнее на “трубы” граней этого остова) очередной размерности.

Итак, возьмем “трубы” всех вершин (0-мерных граней) нашего модифицированного полиэдрального пространства P' и аппроксимируем отображение f на них с точностью ε. Это можно сделать, поскольку для любой вершины X соответствующая ей “труба” может PL-изометрично погрузиться в наше пространство. После чего надо покрыть образ ε-сетью и все точки этой сети с помощью PL-изометрии перевести в точку X с помощью теоремы 4. Выбором достаточно маленького ε можно добиться, чтобы это погружение было не растягивающим в совокупности. Проблемы могут возникнуть, если речь идет о двух точках из разных “труб”. Но поскольку отображение f $(1-\mu)$-сжимающие, то при выборе достаточно маленького ε отображение будет нерастягивающим в совокупности).

Пусть мы научились аппроксимировать все “трубы” k-остова (обозначим их U_k) с любой наперед заданной точностью $\varepsilon' > 0$. Покажем, как аппроксимировать “трубы” $(k+1)$-остова с любой точностью $\varepsilon > 0$. Покроем ε-сетью множество $U_{k+1} \setminus U_k$ (важно заметить, что остатки “труб” разных $(d+1)$-мерных граней не пересекаются). Пусть a — минимум из расстояний между точками этой сети до множества U_k и между разными компонентами связности множества $U_{k+1} \setminus U_k$. Выберем ε меньшим, чем $a\mu/2$. Заметим, что PL-изометрия $\phi_{\varepsilon'}$, аппроксимирующая f на U_k с точностью ε', может быть однозначно задана отображением на конечном числе точек (лемма 3). Добавим к этим точкам точки нашей ε-сети множества $U_{k+1} \setminus U_k$ и получим совокупность точек, на которых у нас задано нерастягивающее отображение (на ε-сети это отображение f, а на вершинах и точках из U_k это $\phi_{\varepsilon'}$).

С помощью теоремы 4 мы можем продолжить это отображение на все трубы из U_{k+1}, и оно будет нерастягивающим (по внутренней метрики полиэдра P'). Действительно, если X и Y — две точки из одной трубы, то на них это отображение нерастягивающее по определению. Если из разных, то:

$$d(\phi_\varepsilon X, \phi_\varepsilon Y) < d(f(X), f(Y)) + 2\varepsilon < (1-\mu)d(X,Y) + a\mu < d(X,Y),$$

где $\phi_\varepsilon X$ — построенная PL-изометрия.

□

Замечание 5. *Отметим, что по сути мы еще раз доказали теорему 6. Действительно, в доказательстве теоремы 9 мы пользовались этой теоремой только для меньших размерностей.*

Благодарности

Автор благодарен Алексею Тарасову и Антону Петрунину за многочисленные обсуждения и внимание к работе.

Список литературы

[1] Залгаллер В.А. “Изометрические вложения полиэдров.” Доклады АН СССР 123 (1958) 599-601.

[2] Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. “Изометрические кусочно-линейные погружения двумерных многообразий с полиэдральной метрикой в R(3)” Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, N3. С. 76-95.

[3] S. Krat D. Burago and A. Petrunin. Approximatings Short Maps by *pl*-isometies and Arnold’s “Can You Make Your Dollar Biegger” Problem.

[4] Л. Данцер, Б. Грюнбаум и В. Кли. Теорема Хелли и её применения. “МИР”, 1968.

[5] J. Lawrence and JĖ. Spingarn An intrinsic characterization of Foldings of Euclidean Space. *Ann. Inst. Henri Poincarè, Analyse non linèaire.*, S6:365–383, 1989