Алгебра Ли формальных векторных полей, сохраняющих структуру слоения.

Антон Хорошкин

Аннотация

В работе вычислены когомологии алгебры Ли формальных векторных полей на n-мерном пространстве с коэффициентами в симметрических степенях коприсоединённого представления. Получены существенные ограничения на относительные когомологии с коэффициентами в тензорных степенях коприсоединённого представления. Вычисления основаны на вычислении когомологий алгебры Ли формальных векторных полей, сохраняющих структуру флага слоений.

1 Введение

Данная работа посвящена вычислению когомологий некоторых бесконечномерных алгебр Ли. Результаты вычислений могут быть использованы для построения характеристических классов флагов слоений, обобщающих классы Годбийона-Вея, и других объектов дифференциальной геометрии. Основным результатом является теорема 1 о когомологиях алгебры Ли формальных векторных полей с коэффициентами в симметрических степенях коприсоединённого представления. Гипотеза о размерностях описанных пространств когомологий была предложена в статьях [Фе],[ФЦ]. В настоящей статье изложен метод, позволяющий доказать данную гипотезу и некоторые её обобщения. Предложенный метод представляет самостоятельный интерес и может быть применим для других коэффициентов. В качестве иллюстрации разобран случай тензорных степеней коприсоединённого представления.

Опишем схему доказательства основной теоремы 1. Изучим кольцо относительных когомологий алгебры Ли $W_{m,n}$ формальных векторных полей на $\Bbbk^{m+n}$, сохраняющих структуру тривиального слоения коразмерности n, по модулю максимальной редуктивной подалгебры Ли в линейных векторных полях. Редуктивная подалгебра естественно изоморфна $\mathbf{gl}_{m,n} \stackrel{def}{=} \mathbf{gl}_m \oplus \mathbf{gl}_n$ и вся алгебра Ли $W_{m,n}$ распадается в пополнение прямой суммы конечномерных представлений этой подалгебры. В предыдущей работе автора по этой тематике [Х] было доказано, что фактор-алгебра $\mathcal{H}^{\bullet}_{m,n}$ алгебры Вейля алгебры Ли W_n по $2m+1$ члену стандартной фильтрации выделяется прямым слагаемым в коцепном комплексе алгебры Ли $W_{m,n}$.

Алгебра Ли $W_{m,n}$ вкладывается в алгебру Ли всех формальных векторных полей W_{m+n} на $\Bbbk^{m+n}$. Тем самым относительный коцепной комплекс $C^{\bullet}(W_{m+n}, \mathbf{gl}_{m,n}; \Bbbk)$ сюрьективно отображается на урезанную относительную алгебру Вейля $\mathcal{H}^{\bullet}_{m,n}$. Назовём это отображение буквой φ. Утверждается, что построенное отображение φ сюрьективно и на когомологиях предъявленных комплексов. Для доказательства сюрьективности достаточно предъявить расщепление (правый обратный морфизм комплексов к отображению φ). Все коцепи из описанных комплексов линейно порождаются $\mathbf{gl}_{m,n}$-инвариантами, задаваемыми графами с какими-то условиями. Любая линейная зависимость на графы может быть разложена в сумму однородных линейных зависимостей, то есть линейную комбинацию графов, в которых зафиксирован набор валентностей всех вершин. Следовательно, имеется естественное расщепление ψ на уровне векторных пространств и даже алгебр. К сожалению оно не согласовано с дифференциалами в комплексах. В работе показано, что можно дифференциалы уменьшить (определить фильтрацию и взять присоединённо-градуированный к ней) так, что когомологии комплексов не изменятся, а отображение ψ станет морфизмом комплексов. Явный вид коциклов и их число показывают, что спектральная последовательность, ассоциированная со стандартной фильтрацией на относительной алгебре Вейля алгебры Ли W_n, вырождается в первом члене и когомологии столбцов совпадают с относительными когомологиями с коэффициентами в симметрических степенях коприсоединённого представления.

1.1 План статьи

Автор предполагает минимальное знакомство с понятиями когомологий и в частности когомологий алгебр Ли. Определения и часто используемые методы их вычислений можно найти в [Фу]. В том числе нам потребуется понятие спектральная последовательность Серра-Хохшильда алгебры по подалгебре и знание когомологий редуктивных алгебр Ли с всевозможными конечномерными коэффициентами.

Работа построена следующим образом. В параграфе §2 приведены формулировки основных теорем, необходимые определения рассматриваемых алгебр Ли и алгебры Вейля приведены в этом же параграфе. В часте §3 рассказывается про применения полученных результатов вычислений к построению различных характеристических классов. В параграфе §3.1 показано, как строить характеристические классы флагов слоений, такие классы также называют вторичными характеристическими классами. В подпараграфе §3.1.1 подсчитано их число для случая полных флагов, то есть в случае, когда разности коразмерностей слоений равны 1. В параграфе §3.2 приведено ещё одно применение, подобное использованному в работе [ФЦ] для доказательства теоремы Римана-Роха.

Часть §4 целиком посвящена доказательству теорем 1 и 2 и уточнением явного вида представителей коциклов. Теорема 3 является их простым следствием. Сначала (параграф §4.1) разрабатывается язык графов, приспособленный для работы с инвариантами линейных групп. Таким образом рассматриваемые коцепные комплексы и дифференциалы в них могут быть описаны комбинаторно. В параграфе §4.2 показано, как можно вычислить относительные когомологии алгебры Ли W_{n+m} и как уменьшить коцепной дифференциал, чтобы когомологии остались прежними. В параграфе §4.3 напротив подробно разбирается относительный коцепной комплекс алгебры Ли $W_{m,n}$. Основные результаты опираются на предыдущую работу автора [Х]. Приведены явные формулы для представителей коциклов (параграф §4.3.2) и разобран отдельно случай $n = 1$, где приведённые формулы могут быть сильно упрощены (параграф §4.3.3).

Часть §5 посвящена применению описанного в статье метода для подсчёта когомологий алгебры Ли W_n с коэффициентами в тензорных степенях коприсоединённого представления.

2 Определения и Результаты

В этом параграфе будет описан набор алгебр Ли, когомологии которых будут вычисляться в дальнейшем. Пусть $\Bbbk$ — основное поле характеристики 0, обычно в приложениях $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Обозначим $\mathcal{O}_n = \Bbbk[[x_1, \ldots, x_n]]$ — кольцо формальных степенных рядов на $\Bbbk^n$. W_n — алгебра Ли формальных векторных полей на $\Bbbk^n$ (алгебра Ли дифференцирований $\mathcal{O}_n$). Линейные векторные поля $\langle x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$ образуют подалгебру Ли, изоморфную алгебре Ли матриц $\mathbf{gl}_n$. Главный результат состоит в вычислении когомологий алгебры Ли W_n с коэффициентами в симметрических степенях коприсоединённого представления.

Теорема 1.

$$\forall k \geq 1 \quad \mathrm{H}^i(W_n, \mathbf{gl}_n; S^k W_n^*) = \begin{cases} [S^{n+k}\mathbf{gl}_n]^{\mathbf{gl}_n}, & \text{если } i = 2n, \\ 0, & \text{если } i \neq 2n. \end{cases}$$

Явное описание предъявленных коциклов будет дано в параграфе §4.3.2. Из вычисления относительных когомологий легко получить ответ для абсолютных когомологий, ввиду вырождения соответствующей спектральной последовательности.

Следствие 1.

$$\forall k \geq 1 \quad \mathrm{H}^i(W_n; S^k W_n^*) = \begin{cases} [S^{n+k}\mathbf{gl}_n]^{\mathbf{gl}_n} \otimes \mathrm{H}^{i-2n}(\mathbf{gl}_n; \Bbbk), & \text{если } 2n \leq i \leq n^2 + 2n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1 будет получено одновременно с подсчётом когомологий с постоянными коэффициентами алгебры Ли формальных векторных полей, сохраняющих структуру n-мерного слоения в $(n+m)$-мерном пространстве. Обозначим эту алгебру Ли $W_{m,n} \stackrel{def}{=} W_m \ltimes W_n \otimes \mathcal{O}_m$. Прямое обобщение такой алгебры Ли на большее число групп переменных состоит в следующем. Рассмотрим флаг тривиальных слоений $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_k\}$, пусть n_i — коразмерность $\mathcal{F}_{i+1}$ в $\mathcal{F}_i$. Набор положительных индексов $\overline{n} = (n_0, n_1, \ldots, n_k)$ определяет алгебру Ли $W_{\overline{n}}$, инфинитезимально сохраняющую этот флаг в окрестности точки 0. Векторное поле $\omega = \sum_{i=1}^{n_0+\cdots+n_k} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ принадлежит алгебре Ли $W_{\overline{n}}$, если формальный степенной ряд для f_i зависит только от переменных $x_1, \ldots, x_{n_0+\cdots+n_r}$, где число r определено из неравенства $n_0 + \cdots + n_{r-1} < i \leq n_0 + \cdots + n_r$. Подалгебра в линейных векторных полях, порождённая $\langle x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$, где индексы i, j лежат в полуинтервале $(n_0 + \cdots + n_{r-1}; n_0 + \cdots + n_r]$, изоморфна матричной алгебре $\mathbf{gl}_{n_r}$. Элементы из разных подалгебр коммутируют и сумма этих подалгебр изоморфна сумме матричных $\mathbf{gl}_{\overline{n}} \stackrel{def}{=} \mathbf{gl}_{n_0} \oplus \cdots \oplus \mathbf{gl}_{n_k} \hookrightarrow W_{\overline{n}}$. Рассмотрим идеал I в симметрической алгебре $S^\bullet \mathbf{gl}_{\overline{n}}$, порождённый набором подпространств $S^{n_0+\cdots+n_r+1}(\mathbf{gl}_{n_0} \oplus \cdots \oplus \mathbf{gl}_{n_r})$, для $r = 0, \ldots, k$.

Теорема 2. *Относительные когомологии алгебры Ли $W_{\overline{n}}$ по модулю подалгебры Ли $\mathbf{gl}_{\overline{n}}$ имеются только в четных степенях и совпадают с $\mathbf{gl}_{\overline{n}}$-инвариантами в фактор-алгебре $S^\bullet \mathbf{gl}_{\overline{n}} / I$.*

$$\mathrm{H}^{2j}(W_{\overline{n}}, \mathbf{gl}_{\overline{n}}; \Bbbk) = \left[\frac{S^j \mathbf{gl}_{\overline{n}}}{I}\right]^{\mathbf{gl}_{\overline{n}}}$$

Алгебра $\mathbf{gl}_{\overline{n}}$-инвариантов имеет явное простое описание из теории инвариантов в терминах образующих и соотношений. Для формулировки неотносительного случая нам потребуется рассмотреть алгебру Вейля алгебры Ли $\mathbf{gl}_{\overline{n}}$.

Определение 1. *Алгеброй Вейля алгебры Ли* $\mathbf{g}$ *называется свободная дифференциально-градуированная алгебра* $W^\bullet(\mathbf{g}) \overset{def}{=} \Lambda(\mathbf{g}^*[-1] \oplus \mathbf{g}^*[-2]) = \oplus_{i,j}\Lambda^i(\mathbf{g}^*) \otimes S^j(\mathbf{g}^*)[-(i+2j)]$, *дифференциал определён на образующих, как сумма отображения двойственного к скобке Ли и тождественного отображения из* $\Lambda^1(\mathbf{g}^*) \to S^1(\mathbf{g}^*)$.[1]

Теорема 3. *Кольцо когомологий урезанной алгебры Вейля* $W_0^\bullet(\mathbf{gl}_{\overline{n}}) \overset{def}{=} W^\bullet(\mathbf{gl}_{\overline{n}})/(\Lambda^\bullet(\mathbf{gl}_{\overline{n}}^*) \otimes I^\bullet)$ *совпадает с кольцом когомологий алгебры Ли формальных векторных полей, сохраняющих структуру флага слоения, с постоянными коэффициентами* $\mathrm{H}^\bullet(W_{\overline{n}}; \Bbbk)$.

Мы дадим подробное доказательство только для случая двух групп переменных (случай $k = 1$), то есть для случая алгебры Ли, сохраняющей структуру одного слоения. Общий случай доводится совершенно аналогичными методами. Для доказательства нам необходимо каким-нибудь способом описать коцепные комплексы, с которыми будет производиться работа. Это будет проделано в параграфе 4.1 при помощи техники теории инвариантов. Более того описанный в статье метод доказательства может быть применён к подсчёту относительных когомологий алгебры Ли W_n с коэффициентами в тензорных степенях коприсоединённого представления. Сформулируем основной результат, оставив доказательство до части 5,

Теорема 4. *Относительные когомологии алгебры Ли* W_n *по модулю подалгебры Ли* $\mathbf{gl}_n$ *с коэффициентами в тензорных степенях коприсоединённого представления отличны от нуля только в степенях от* n *до* $2n$.

3 Построение различных характеристических классов

В этой главе мы покажем несколько стандартных построений характеристических классов различных геометрических структур методами формальной геометрии, где могут быть существенно полезны результаты вычислений, проделанных в этой работе.

3.1 Характеристические классы флагов слоений

Рассмотрим C^∞-гладкое многообразие M и флаг слоений $\bar{\mathcal{F}} \overset{def}{=} \{\mathcal{F}^1, \ldots, \mathcal{F}^k\}$ на нём. Пусть ν_i фактор нормального расслоения $\mathcal{F}^i$ по нормальному расслоению $\mathcal{F}^{i-1}$, ν_1 — нормальное расслоение к $\mathcal{F}^1$. Пусть $\overline{n} \overset{def}{=} (n_1, \ldots, n_k)$ — вектор размерностей расслоений ν_i. Пусть $\mathcal{V}(\bar{\mathcal{F}})$ пространство главного $GL_{\overline{n}}$-расслоения ассоциированного с $(\nu_1 \oplus \cdots \oplus \nu_k)$. Построим естественный по отношению к $\bar{\mathcal{F}}$ гомоморфизм

$$\theta : \mathrm{H}^\bullet(W_{\overline{n}}; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{H}^\bullet_{DR}(\mathcal{V}(\bar{\mathcal{F}}))$$

Зафиксируем тривиальный флаг $\mathcal{R}_{\overline{n}} = \{\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2+\cdots+n_k}, \ldots, \mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_{k-1}} \times \mathbb{R}^{n_k}\}$ с теми же коразмерностями. Пусть $S^p(\bar{\mathcal{F}})$ есть многообразие p-струй субмерсий $M \to \mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_k}$ с

[1] подробнее можно посмотреть в [Фу],[Х]

устьем в точке 0, переводящих флаг $\bar{\mathcal{F}}$ в стандартный $\mathcal{R}_{\overline{n}}$. Определим бесконечномерное многообразие $S(F)$, как обратный предел отображений

$$\cdots \to S^p(\bar{\mathcal{F}}) \to S^{p-1}(\bar{\mathcal{F}}) \to \cdots \to S^1(\bar{\mathcal{F}}) \to S^0(\bar{\mathcal{F}}) = M$$

На функциях на многообразии $S(F)$ действует алгебра Ли $W_{\overline{n}}$, задавая в каждой точке многообразия изоморфизм $W_{\overline{n}}$ с касательным пространством в этой точке. То есть на $S(\bar{\mathcal{F}})$ имеется структура главного однородного $W_{\overline{n}}$-пространства (см. [ГКФ],[БР]), что задаёт отображение $\tilde{\theta} : C^\bullet(W_{\overline{n}}; \mathbb{R}) \to \Omega^\bullet_{DR}(S(\bar{\mathcal{F}}))$. Многообразие $S(\bar{\mathcal{F}})$ гомотопически эквивалентно 1-струям $S^1(\bar{\mathcal{F}}) \sim \mathcal{V}(\bar{\mathcal{F}})$. Гомоморфизм $\tilde{\theta}$ коммутирует с действием компактной группы $O_{\overline{n}} \stackrel{def}{=} O_{n_1} \times \cdots \times O_{n_k}$. Следовательно, имеем гомоморфизм

$$\bar{\theta} : \mathrm{H}^\bullet(W_{\overline{n}}, \mathbf{o}_{\overline{n}}; \mathbb{R}) \to \mathrm{H}^\bullet_{DR}(S(\bar{\mathcal{F}})/O_{\overline{n}}) = \mathrm{H}^\bullet_{DR}(M)$$

Из вычислений, проделанных в этой статье, следует, что те же самые характеристические классы могут быть получены следующим образом. В расслоении $\mathcal{V}(\bar{\mathcal{F}}) \stackrel{GL_{\overline{n}}}{\to} M$ выберем такую $\mathbf{gl}_{\overline{n}}$-связность $\theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$, что θ_i обращается в ноль на слоях слоения $\mathcal{F}_i$. Пусть $\kappa \stackrel{def}{=} d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]$ задаёт форму кривизны такой связности. Тогда образ этой формы при проекции на первые i сомножителей $\pi_i : \mathbf{gl}_{\overline{n}} \twoheadrightarrow \mathbf{gl}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{gl}_{n_i}$ тривиален на прообразе любого слоя слоения $\mathcal{F}_i$ при отображении $\mathcal{V}(\bar{\mathcal{F}}) \to M$. Следовательно $(\pi_i\kappa)^{n_1+\cdots+n_i+1} = 0$ и идеал $(I \otimes \Lambda^\bullet(\mathbf{gl}^*_{\overline{n}}))$ из теоремы 3 лежит в ядре отображения всей алгебры Вейля в формы на пространстве расслоения. Имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^\bullet\left(W^\bullet(\mathbf{gl}_{\overline{n}}) / \left(I \otimes \Lambda^\bullet(\mathbf{gl}^*_{\overline{n}})\right)\right) \arrow[rr, dashed, "\alpha"] \arrow[dr] & & \mathrm{H}^\bullet(W_{\overline{n}}; \mathbb{R}) \arrow[dl] \\
& \mathrm{H}^\bullet_{DR}(M) &
\end{tikzcd} \tag{3.1.1}$$

Доказательство коммутативности диаграммы (3.1.1) мы опустим, заметим только, что теорема 3 доказывает изоморфизм горизонтальной стрелки.

3.1.1 Случай полных флагов $\overline{n} = (1, \ldots, 1)$

Рассмотрим полный флаг из N слоений. То есть, пусть коразмерности $\mathcal{F}_{i+1}$ в $\mathcal{F}_i$ равна 1 для любого i. Опишем явно характеристические классы такого флага, задаваемые коциклами, представляющими когомологии соответствующей бесконечномерной алгебры Ли векторных полей. Поскольку соответствующая ортогональная группа $O(1) \times \cdots \times O(1)$ тривиальна, все нормальные расслоения ν_i тривиальны. Нас будет интересовать пространство абсолютных когомологий $H^\bullet(W_{(1,\ldots,1)}; \Bbbk)$. Введём дополнительные обозначения для перечисления инвариантов из теоремы 3, которой мы собираемся воспользоваться. Пусть $\zeta_i \in [\Lambda^1(\mathbf{gl}_1)]^{\mathbf{gl}_1}, i = 1, \ldots, N$ — образующие $\mathbf{gl}_{1,\ldots,1}$-инвариантов во внешней алгебре $\Lambda^\bullet(\mathbf{gl}_{1,\ldots,1)})$, соответствующие спариваниям с эйлеровым линейным векторным полем, направленным вдоль $\mathcal{F}_i$ и перпендикулярно $\mathcal{F}_{i+1}$. Пусть $\xi_i \in [S^1\mathbf{gl}_1]^{\mathbf{gl}_1}$ образующие соответствующей алгебры инвариантов в симметрической алгебре $S^\bullet(\mathbf{gl}_{1,\ldots,1)})$. Следующая теорема описывает коциклы, представляющие классы когомологий фактор-алгебры алгебры Вейля по идеалу $I \stackrel{def}{=} (\xi_1^{i_1} \ldots \xi_k^{i_s} | i_1 + \cdots + i_s > s \leq N)$.

Теорема 5. *Мономы*

$$\zeta_{\alpha_1}\dots\zeta_{\alpha_s}\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\dots\xi_{\alpha_s}^{i_{\alpha_s}},\ 1\le\alpha_1<\dots<\alpha_s\le N, \tag{3.1.2}$$

$$\text{с условиями}\quad \begin{array}{l}\forall k<\alpha_s \text{ выполнено } i_1+\dots+i_k\le k\\ i_1+\dots+i_{\alpha_s}=\alpha_s,\end{array} \tag{3.1.3}$$

Образуют базис в когомологиях алгебры Ли $W_{(1,\dots,1)}$ с постоянными коэффициентами.

Ряд Гильберта $\sum_{q\ge 0} q^k \dim \mathrm{H}^k(W_{(1,\dots,1)};\Bbbk)$ равен $1+\sum_{k=1}^N q^{2n+1}(1+q)^{n-1}C(n)$, где $C(n)\stackrel{def}{=}\frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n}$ — n-ое число Каталана.

Доказательство. Теорема 3 сводит задачу к сугубо комбинаторной задаче, которую мы докажем индукцией по N. Выпишем второй член спектральной последовательности ассоциированной со стандартной фильтрацией на урезанной алгебре Вейля $W_0^\bullet(\mathbf{gl}_{(1,\dots,1)})$.

$$E_2^{2p,q}=\Lambda^q(\zeta_1,\dots,\zeta_N)\otimes S^p(\xi_1,\dots,\xi_N)/(I),\quad E_2^{2p+1,q}=0,$$
$$d_2=\sum_{i=1}^N \xi_i\frac{\partial}{\partial\zeta_i}$$

Все старшие дифференциалы равны нулю, поэтому наша задача выписать третий член. Упорядочим переменные по возрастанию, положим $\zeta_1<\dots<\zeta_N$ и $\xi_1<\dots<\xi_N$. Тогда присоединённо-градуированный к дифференциалу d_2 относительно выбранного возрастания дифференциал мономиален и равен $\xi_N\frac{\partial}{\partial\zeta_N}$. Его когомологии порождены двумя типами мономов: мономами, содержащими буквы с номером N и не содержащими. Первые обязаны иметь вид $\zeta_{\alpha_1}\dots\zeta_{\alpha_{s-1}}\zeta_N\xi_1^{i_1}\dots\xi_N^{i_N}$, так что $\xi_1^{i_1}\dots\xi_N^{i_N}\notin I$, а $\xi_1^{i_1}\dots\xi_N^{i_N+1}\in I$. Эти условия в точности соответствуют условиям (3.1.3) для $\alpha_s=N$. Если отличный от нуля моном не содержит переменных ζ_N,ξ_N, то он заведомо лежит в когомологиях дифференциала $\xi_N\frac{\partial}{\partial\zeta_N}$. На подпространстве не зависящем от переменных ζ_N,ξ_N дифференциал d_2 также не зависит от этих переменных, а значит его когомологии могут быть подсчитаны из предположения индукции. Все операторы $\xi_k\frac{\partial}{\partial\zeta_k}$ действуют нулём на мономах, описанных в теореме, и первая часть теоремы 5 доказана.

Остаётся заметить, что количество мономов степени N от N переменных $\xi_1,\dots,\xi_N$ с условиями $i_1+\dots+i_k\le k$ для любого $k\le N$, равно N-ому числу Каталана (такое описание чисел Каталана можно найти, например, в [Ст]). $\square$

3.2 Характеристические классы на пространстве модулей

Пусть $\pi: S\to M$ расслоение гладких комплексных многообразий, слои которого есть гладкие невырожденные компактные комплексные n-мерные многообразия. Построим расслоение $\pi^{coor}: S^{coor}\to M$ с бесконечномерным тотальным пространством. Точкой многообразия S^{coor} является пара (s,f), где $s\in S$, а f есть регулярная в точке s ∞-струя голоморфного отображения $U_s\mapsto\mathbb{C}^n$ с устьем в нуле. U_s — окрестность в слое отображения точки s. Проекция π^{coor} определена по естественному правилу $\pi^{coor}(s,f)\stackrel{def}{=}\pi(s)$.

На S^{coor} определена 1-форма со значениями в W_n, задающая в каждом слое структуру главного однородного W_n-пространства. Что задаёт согласованное с фильтрациями отображение алгебры Вейля $W^\bullet(W_n)$ на формы на S^{coor}. В слоях расслоения π^{coor} действует свободно и гладко группа GL_n линейных регулярных замен координат, так что слои расслоения $S^{coor}/GL_n \to M$ гомотопически эквивалентны слоям расслоения $S \to M$. Имеем отображение относительной алгебры Вейля $W^\bullet(W_n, \mathbf{gl}_n)$ в формы на S^{coor}/GL_n и, в частности, отображение вторых членов соответствующих спектральных последовательностей:

$$\mathrm{H}^q(W_n, \mathbf{gl}_n; S^p W_n^*) \longrightarrow \mathrm{H}^{2p}(M, \mathrm{H}^q(F^{coor}/GL_n)) = \mathrm{H}^{2p}(M, \mathrm{H}^q(F))$$

Слои π компактны, комплексны и n-мерны, и ввиду теоремы 1 имеем:

$$[S^{n+p}(\mathbf{gl}_n)]^{\mathbf{gl}_n} \cong \mathrm{H}^{2n}(W_n, \mathbf{gl}_n; S^p W_n^*) \to \mathrm{H}^{2p}_{DR}(M, \mathrm{H}^{2n}(F)) \cong \mathrm{H}^{2p}_{DR}(M).$$

4 Когомологии W_n с коэффициентами в $S^m W_n^*$

4.1 Граф-комплексы

Чтобы иметь более явное описание представителей комплекса $C^\bullet(W_{m,n}, \mathbf{gl}_{m,n}; \Bbbk)$, нам потребуется ввести чуть больше обозначений. Пусть V — тавтологическое m-мерное представление $\mathbf{gl}_m$, U — n-мерное для $\mathbf{gl}_n$. Напомним необходимый для работы с W_n набор стандартных изоморфизмов $\mathbf{gl}_n$-модулей:

$$\mathbf{gl}_n \cong V^* \otimes V,$$
$$\mathcal{O}_n \cong \widehat{\bigoplus_{m\geq 0}} S^m V^*,$$
$$W_n \cong \widehat{\bigoplus_{m\geq 0}} S^m V^* \otimes V,$$

где крышка над суммой означает пополнение до формальных степенных рядов. Имеем

$$\begin{aligned}
C^\bullet(W_{m,n}, \mathbf{gl}_{m,n}; \Bbbk) &= [\Lambda^\bullet(W_m \ltimes W_n \otimes \mathcal{O}_m)/(\mathbf{gl}_m \oplus \mathbf{gl}_n)]^{\mathbf{gl}_{m,n}} = \\
&= \left[\Lambda^\bullet\left(\left(\bigoplus_{\substack{i\geq 0\\ i\neq 1}} S^i V \otimes V^*\right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{i,j\geq 0\\ (i,j)\neq(1,0)}} S^i U \otimes U^* \otimes S^j V\right)\right)\right]^{\mathbf{gl}_{m,n}} = \\
&= \left[\bigoplus_{\substack{p_i,\ i\geq 0, i\neq 1\\ q_{i,j},\ i,j\geq 0,(i,j)\neq(1,0)}} \left(\bigotimes_i \Lambda^{p_i}(S^i V \otimes V^*) \bigotimes_{(i,j)} \Lambda^{q_{i,j}}(S^i U \otimes S^j V \otimes U^*)\right)\right]^{\mathbf{gl}_{m,n}} = \\
&= \bigoplus_{\substack{p_i,\ i\geq 0, i\neq 1\\ q_{i,j},\ i,j\geq 0,(i,j)\neq(1,0)}} \left[\bigotimes_i \Lambda^{p_i}(S^i V \otimes V^*) \bigotimes_{(i,j)} \Lambda^{q_{i,j}}(S^i U \otimes S^j V \otimes U^*)\right]^{\mathbf{gl}_{m,n}}. \qquad (4.1.4)
\end{aligned}$$

Классическая теорема из теории инвариантов утверждает, что $\mathbf{gl}_m$-инварианты в тензорном модуле $V^{*\otimes s} \otimes V^{\otimes t}$, могут быть только при совпадающих s и t и порождены следами, спаривающими V и V^* (подробнее можно посмотреть [B]). Спаривания удобно изображать графически — стрелками, идущими из сомножителя V^* в сомножитель V. Более того на спаривания (графы) отсутствуют соотношения при $s \leq m$. Последнее соображение наталкивает на естественную попытку описать элементы коцепного комплекса с помощью графов, дающие точное описание, при устремлении m, n к бесконечности.

Сопоставим каждому биоднородному относительно действия $\mathbf{gl}_m \oplus \mathbf{gl}_n$ элементу пространства двойственного к алгебре Ли $W_n \ltimes W_m \otimes \mathcal{O}_n$ вершину графа. Каждому спариванию U^* с U сопоставим ориентированное простое ребро $u^* \bullet\!\!\longrightarrow\!\!\bullet\ u$. Каждому спариванию V^* с V, дабы отличать его от предыдущего спаривания, сопоставим ориентированное пунктирное ребро $v^* \bullet \dashrightarrow \bullet\ v$. Получим ориентированный граф, рёбра которого покрашены в 2 цвета. Для того чтобы ориентированный граф с крашенными рёбрами задавал элемент коцепного комплекса $C^\bullet(W_{m,n}, \mathbf{gl}_{m,n}; \mathbb{k})$ необходимо также ввести следующие условия на его вершины:

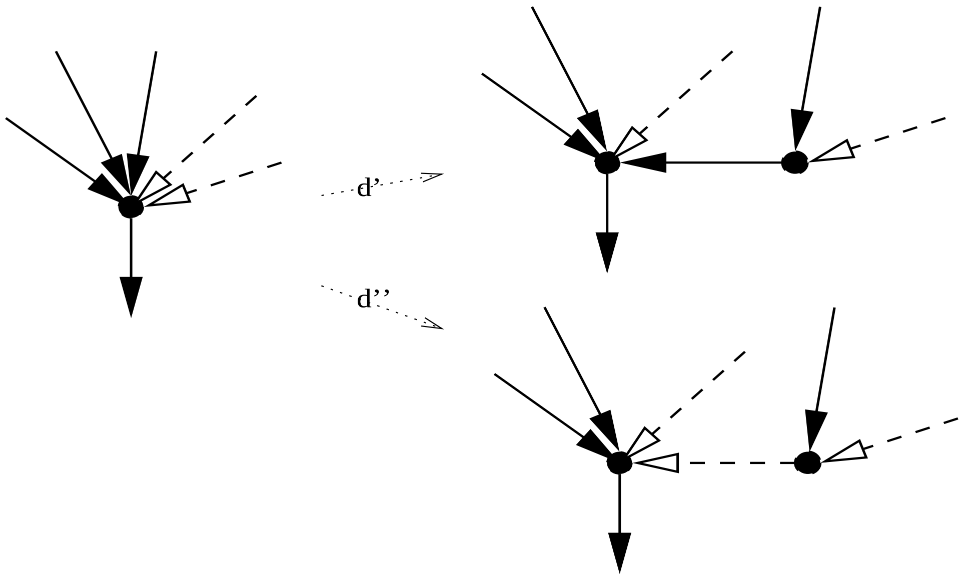
(*і*) *Из каждой вершины выходит ровно одно ребро.*
(*іі*) *Не существует вершины графа, в которую входит ровно одно ребро того же цвета, что и выходит.*
(*ііі*) *Не существует вершины графа, из которой выходит пунктирное ребро, а входит ненулевое количество простых рёбер.*

Назовём буквой $\Im$ множество всех графов с крашенными в два цвета рёбрами и с ненумерованными вершинами, удовлетворяющими условиям (*і*)$-$(*ііі*). Это множество естественно градуировано по числу вершин в графе $\Im = \sqcup \Im^r$. Построим по графу $\Gamma \in \Im^r$ с r вершинами определённую с точностью до знака относительную r-коцепь. Перенумеруем вершины графа произвольным образом. Каждой вершине поставим в соответствие тройку чисел (k, l, ϵ), однозначно определяющую цвета входящих и выходящих рёбер. k — число входящих пунктирных рёбер, l — число входящих простых рёбер, ϵ равно 1, если выходящее ребро пунктирное и 0 иначе. С каждой вершиной γ можно связать пространство тензоров $\mathcal{V}_\gamma \overset{def}{=} S^{k_\gamma} V \otimes V^{*\otimes \epsilon_\gamma} \otimes S^{l_i} U \otimes U^{*\otimes(1-\epsilon_\gamma)}$. Граф задаёт естественную свёртку индексов для любого элемента из тензорного произведения пространств $\mathcal{V}_i$. Должное альтернирование по всем возможным нумерациям вершин определяет коцепь $c_\Gamma \in C^r(W_{m,n}, \mathbf{gl}_{m,n}; \mathbb{k})$. Множество коцепей $\{c_\Gamma | \Gamma \in \Im\}$ не является линейно независимым, но их линейная оболочка порождает весь коцепной комплекс. Следует заметить, что множество графов $\Im$ биградуированно по числу простых и пунктирных рёбер. Эти градуировки переносятся на коцепной комплекс алгебры Ли и мы будем обозначать их двумя дополнительными нижними индексами $\Im = \sqcup_{k,l} \Im_{k,l}$. Описанные градуировки считают у коцепи её тензорную степень, то есть для графа $\Gamma \in \Im_{k,l}$ соответствующая коцепь $c_\Gamma \in (U^* \otimes U)^k \otimes (V^* \otimes V)^l$. Определим дифференциал на коцепях c_Γ графически.

Определение 2. *Растяжением в вершине γ графа $\Gamma \in \Im$ называется замена вершины γ на две γ', γ'', соединённые крашенным, ориентированным ребром. Входящие в вершину γ рёбра распределяются произвольным образом между вершинами γ' и γ''. Если дополнительное ребро было ориентированно от γ' к γ'' (как будет на всех наших рисунках), то выходящее из вершины γ ребро у растянутого графа должно выходить из вершины γ''. Назовём растяжение допустимым, если полученный граф будет также принадлежать множеству $\Im$.*

Дифференциал d переводит коцепь c_Γ в сумму коцепей $c_{\Gamma'}$ с какими-то коэффициентами, по всем графам Γ', полученным из Γ каким-либо *допустимым растяжением*. Следует отметить, что введённые две градуировки на графах превращают коцепной комплекс в бикомплекс. Дифференциал d раскладывается в сумму двух $d' + d''$, так что слагаемое $c_{\Gamma'}$ будет принадлежать образу $d'(d'')$, если вставленное при растяжении ребро было

Рис. 1:



простым(пунктирным). Зафиксируем, для удобства, на множестве $\Im$ убывающую фильтрацию $F^p_{\pm}\Im \stackrel{def}{=} \Im_{\bullet,\geq p}$. Тогда d' будет присоединённо градуированным дифференциалом к этой фильтрации.

Рассмотрим также фильтрацию Серра-Хохшильда $\{F^p_{\mathbf{b}}\}$, построенную по подалгебре Ли верхнеблочных матриц $\mathbf{b} \stackrel{def}{=} W_{m,n} \cap \mathbf{gl}_{m+n}$. Присоединённо-градуированный дифференциал δ будет переводить коцепь c_Γ в сумму таких коцепей $c_{\Gamma'}$, что граф Γ' получен из графа Γ *допустимым растяжением* с условием, что число вершин с одним входящим пунктирным ребром и выходящим простым увеличилось. Подобная вершина отвечает тензору из $(\mathbf{b}/\mathbf{gl}_{m,n})^* = V \otimes U^*$. Присоединённые факторы к фильтрации $\{F^\bullet_{\mathbf{b}}\}$ биградуированы в соответствии с градуировками на графах. Так что дифференциал δ также раскладывается в сумму двух в соответствии с биградуировками на графах: $\delta = \delta' + \delta''$. Фильтрации $\{F^\bullet_{\mathbf{b}}\}$ и $\{F^\bullet_{\pm}\}$ коммутируют. Дифференциал δ' будет присоединённо-градуированным к совместной фильтрации $\{F^p_{\mathbf{b}\pm} \stackrel{def}{=} +_{i+j=p} F^i_{\mathbf{b}} F^j_{\pm}\}$.

Граф Γ определяет зависящее от (m,n) семейство коцепей $c_\Gamma \in C^\bullet(W_{m,n}, \mathbf{gl}_{m,n}; \Bbbk)$, коммутирующих с сюрьекциями коцепных комплексов $C^\bullet(W_{m',n'}, \mathbf{gl}_{m',n'}; \Bbbk) \twoheadrightarrow C^\bullet(W_{m,n}, \mathbf{gl}_{m,n}; \Bbbk)$ для $m' \geq m$ и $n' \geq n$. Рассмотрим стабильный вариант коцепного комплекса, который соответствует $m, n \to \infty$. Назовём полученный (би)комплекс буквой $\mathcal{P}^\bullet$. Все фильтрации и дифференциалы имеют место, как для стабильного, так и для нестабильного комплексов.

Рассмотрим алгебру Ли $W_{(m+n)}$ всех формальных векторных полей на $\Bbbk^{m+n}$. У относительного коцепного комплекса этой алгебры Ли по модулю уже рассматриваемой ранее подалгебры Ли $\mathbf{gl}_{m,n}$ имеется аналогичная реализация граф-комплексом. Единственное отличие по сравнению с алгеброй Ли $W_{m,n}$ состоит в том, что рассматриваются графы, на которые наложены условия $(\imath), (\imath\imath)$, а условие $(\imath\imath\imath)$ отсутствует. Назовём соответствующий стабильный $(m, n \to \infty)$ коцепной комплекс $\mathcal{Q}^\bullet$. Полученный комплекс также будет биградуированным и дифференциал будет раскладываться в сумму двух. Более того на комплексе $\mathcal{Q}^\bullet$ могут быть совершенно аналогичным образом введены фильтрации $\{F^\bullet_{\mathbf{b}}\}, \{F^\bullet_{\pm}\}$

и $\{F^\bullet_{\mathfrak{b}\pm}\}$, а значит и присоединённые к ним дифференциалы, которые мы будем обозначать теми же буквами.

Естественное вложение алгебры Ли $W_{m,n} \hookrightarrow W_{m+n}$ задаёт проекцию построенных бикомлексов:

$$\varphi : \mathcal{Q}^\bullet \twoheadrightarrow \mathcal{P}^\bullet$$

Любой граф, задающий коцепь комплекса $\mathcal{P}^\bullet$, задаёт также и коцепь комплекса $\mathcal{Q}^\bullet$. Заметим, что графы с разными наборами валентностей вершин (неупорядоченными наборами троек чисел $(k_\gamma, l_\gamma, \epsilon_\gamma)$) принадлежат разным подпространствам, нумеруемым тензорными произведениями $\otimes_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{V}_\gamma$. В связи с этим любая линейная зависимость на графы может быть разложена в сумму однородных линейных зависимостей. Под однородной мы понимаем линейную комбинацию графов, в которых зафиксирован набор валентностей всех вершин. Таким образом на уровне графов имеется вложение в обратном направлении $\psi : \mathcal{P}^\bullet \twoheadrightarrow \mathcal{Q}^\bullet$. К сожалению, оно не является морфизмом комплексов.

В следующем параграфе мы посчитаем когомологии комплекса $\mathcal{Q}^\bullet$, как в стабильном так и не в стабильном случаях. Покажем вырождение спектральной последовательности, построенной по фильтрации $\{F^\bullet_{\mathfrak{b}\pm}\}$, в первом члене.

4.2 Относительные когомологии $\mathrm{H}^\bullet(W_{m+n}, \mathbf{gl}_{m,n}; \Bbbk)$

Лемма 1. *Относительная спектральная последовательность Серра-Хохшильда для пары $\mathbf{gl}_{m+n} \hookrightarrow W_{m+n}$ по модулю подалгебры $\mathbf{gl}_{m,n}$ вырождается в первом члене. Все когомологии имеются только в чётных степенях.*

Доказательство. Действительно, вычисления, проделанные И.М.Гельфандом и Д.Б.Фуксом ([ГФ]), показывают совпадение относительного коцепного комплекса со своими когомологиями.

Теорема. *[ГФ] Относительный коцепной комплекс алгебры Ли W_N относительно подалгебры Ли $\mathbf{gl}_N$ содержит только чётные коцепи и совпадает с кольцом $\mathbf{gl}_N$-инвариантных полиномов в присоединённом представлении, степени не превосходящей N:*

$$C^\bullet(W_N, \mathbf{gl}_N; \Bbbk) = \Bbbk[\xi_2, \ldots, \xi_{2N}]/I, \text{ где } deg(\xi_{2i}) = i, \text{ а идеал } I = (\xi_2^{i_1} \cdots \xi_{2N}^{i_N} | i_1 + \cdots + i_N > N).$$

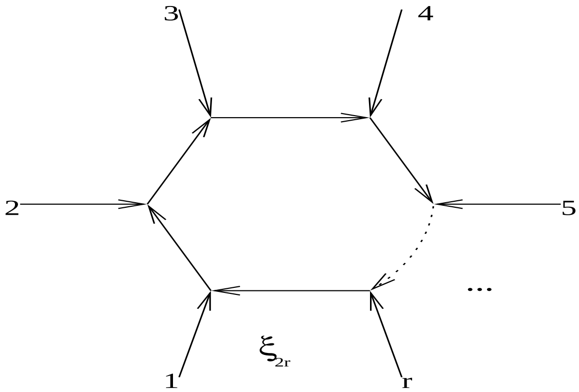
Дадим также полезное для дальнейшего графическое описание коцепей ξ_{2r} (рис.2), стрелки графа будут раскрашены в один цвет и будут соответствовать спариванию тавтологического и двойственного к нему представлений $\mathbf{gl}_N$.

Лемма 2. *Относительный коцепной комплекс алгебры Ли $\mathbf{gl}_{m+n}$ по подалгебре $\mathbf{gl}_{m,n}$ содержит только чётные ненулевые компоненты и тем самым совпадает со своими когомологиями.*

$$C^\bullet(\mathbf{gl}_{m+n}, \mathbf{gl}_{m,n}; \Bbbk) = \Bbbk[c_2, \ldots, c_{2m}]/J, \text{ где } deg(c_{2i}) = 2i.$$

Графическое изображение коцепи c_{2i} смотри на рисунке 3.

Рис. 2:



Первый член относительной спектральной последовательности Серра-Хохшильда для пары $\mathbf{gl}_{m+n} \hookrightarrow W_{m+n}$ по модулю подалгебры $\mathbf{gl}_{m,n}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} = \mathrm{H}^q(\mathbf{gl}_{(m+n)}, \mathbf{gl}_{m,n}; \Lambda^p(W_{(m+n)}/\mathbf{gl}_{(m+n)})^*) = \\ = \mathrm{H}^q(\mathbf{gl}_{(m+n)}, \mathbf{gl}_{m,n}; \Bbbk) \otimes \left[\Lambda^p(W_{(m+n)}/\mathbf{gl}_{(m+n)})^*\right]^{\mathbf{gl}_{(m+n)}} = \\ = \mathrm{H}^q(\mathbf{gl}_{(m+n)}, \mathbf{gl}_{m,n}; \Bbbk) \otimes \mathrm{H}^p(W_{(m+n)}, \mathbf{gl}_{(m+n)}; \Bbbk). \quad (4.2.5) \end{aligned}$$

Таким образом, $E_1^{p,q}$ отлично от нуля только при чётных p, q, а значит спектральная последовательность вырождается и лемма 1 доказана. $\square$

Хорошо известно, что $\mathrm{H}^\bullet(\mathbf{gl}_{m+n}, \mathbf{gl}_{m,n}; M) = \mathrm{H}^\bullet(\mathbf{gl}_{m+n}, \mathbf{gl}_{m,n}; \Bbbk) \otimes [M]^{\mathbf{gl}_{m+n}}$, если $\mathbf{gl}_{m+n}$-модуль M - конечномерный. Покажем, как на относительном коцепном комплексе $C^\bullet(\mathbf{gl}_{m+n}, \mathbf{gl}_{m,n}; M)$ ввести фильтрацию $\{F^\bullet_{\mathfrak{b}\pm}\}$ и докажем, что комплекс, присоединённо-градуированный к данной фильтрации, имеет те же когомологии, что и исходный.

Разберём подробно случай присоединённых коэффициентов, произвольные коэффициенты будут следовать из этого примера. Опишем стабильный комплекс, то есть $m, n \to \infty$. У графа, задающего $\mathbf{gl}_{m,n}$-инвариант должны быть окрашены рёбра в соответствии со спариванием, а также должны быть окрашены вершины, дабы различать вершину из модуля и вершины из самой алгебры Ли. Вершины, отвечающие элементам из алгебры Ли, мы будем обозначать чёрными, элементу из модуля поставим в соответствие белую вершину. Выпишем условия на граф, задающий коцепь:

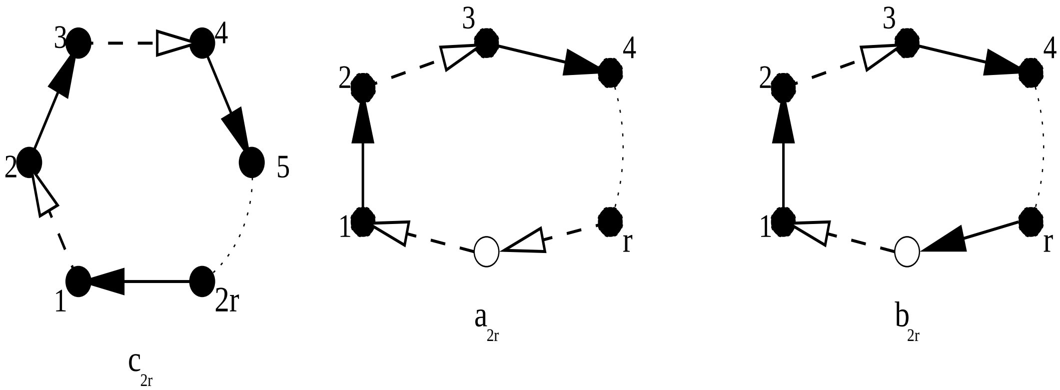
(1) *граф содержит ровно* 1 *белую вершину, число чёрных вершин равно степени коцепи.*
(2) *У каждой вершины имеется ровно одно входящее и одно выходящее ребро.*
(3) *У каждой чёрной вершины окраска входящего и выходящего ребра противоположны.*

Условие (1) следует из определения граф-комплекса с коэффициентами в модуле. Условие (2) следует из того, что коцепь определяется на наборе элементов из $\mathbf{gl}_{m+n} \cong (V \oplus U) \otimes (V \oplus U)^*$. Последнее условие (3) следует из изоморфизма $\mathbf{gl}_{m,n}$-модулей для фактора:

$$\left(\mathbf{gl}_{(m+n)}/(\mathbf{gl}_{m,n})\right) \cong \frac{((V \oplus U) \otimes (V \oplus U)^*)}{(V \otimes V^* \oplus U \otimes U^*)} \cong V \otimes U^* \oplus U \otimes V^*.$$

Любая связная компонента такого графа есть колесо, если оно не содержит белой вершины, то это колесо с $2r$ вершинами, соответствующее коцепи c_{2r}. Если связная компонента содержит белую вершину, то таких графов с r чёрными вершинами может быть 2, в зависимости от того какое ребро входит в белую вершины, если пунктирное, то назовём коцепь a_r, если простое, то b_r (рис.3). Легко проверить, что на коцепи $< a_i, b_j > \otimes \Bbbk[c_{2k}]$ не бывает

Рис. 3:



соотношений степени не превосходящей $min(m, n)$, то есть при устремлении $m, n \to \infty$ описанные коцепи линейно независимы. Как и в параграфе §4.1 на описанных коцепях вводится биградуировка по числу пунктирных и простых рёбер:

$$c_{2r} \in C^{2r}_{r,r}, \quad a_r \in C^r_{[\frac{r+2}{2}],[\frac{r+1}{2}]}, \quad b_r \in C^r_{[\frac{r+1}{2}],[\frac{r+2}{2}]}$$

Графический дифференциал, как и ранее, является суммой по растяжением графа во всевозможных вершинах в классе описанных графов. Также, по аналогии могут быть введены фильтрации $\{F^\bullet_\pm\}, \{F^\bullet_{\mathfrak{b}}\}$ и $\{F^\bullet_{\mathfrak{b}\pm}\}$. Выпишем явно действие дифференциалов d, d', d'', δ'

$$\begin{gathered} d(c_r) = 0 \\ d(a_{2r}) = d'(a_{2r}) = a_{2r+1} + b_{2r+1}, \quad d''(a_{2r}) = 0 \\ d(b_{2r}) = d''(b_{2r}) = -a_{2r+1} - b_{2r+1}, \quad d'(b_{2r}) = 0 \\ d'(a_{2r-1}) = -d'(b_{2r-1}) = a_{2r} \\ d''(a_{2r-1}) = -d''(b_{2r-1}) = b_{2r} \\ \delta'(a_r) = b_{r+1}, \quad \delta'(b_r) = 0 \end{gathered}$$

Откуда легко видеть, что первые члены спектральных последовательностей стабильного комплекса, построенные по фильтрациям $\{F^\bullet_\pm\}$ и $\{F^\bullet_{\mathfrak{b}\pm}\}$ равны $\Bbbk[c_{2i}] \otimes \langle b_0 \rangle$. Следовательно, они вырождаются в первом члене. То же верно и про нестабильный комплекс. Относительный коцепной комплекс $C^\bullet(\mathbf{gl}_{m+n}, \mathbf{gl}_{m,n}; \mathbf{gl}_{m+n})$, как векторное пространство и даже как $\mathbf{gl}_{m+n}/\mathbf{gl}_{m,n}$-модуль изоморфен цепному комплексу. Цепной дифференциал d^* соответствует сумме графов, полученных всевозможными стягиваниями ребра в графах a_r, b_r. Мы не будем выписывать его явно, ввиду аналогии с дифференциалом d, заметим только, что он является гомотопией к дифференциалу d, как в стабильном, так и в нестабильном комплексах. Коцепи, порождённые графами a_i, c_{2k} и графами b_j, c_{2k} принадлежат разным подпространствам:

$$A_{2r} \stackrel{def}{=} [(V\otimes V^*)\otimes \Lambda^{2r}(\mathbf{gl}_{m+n}/\mathbf{gl}_{m,n})]^{\mathbf{gl}_{m,n}} = \langle a_{2i}c_{2k_1}\dots c_{2k_s} | i+k_1+\dots+k_s=r\rangle,$$
$$B_{2r} \stackrel{def}{=} [(V\otimes U^*)\otimes \Lambda^{2r}(\mathbf{gl}_{m+n}/\mathbf{gl}_{m,n})]^{\mathbf{gl}_{m,n}} = \langle b_{2i}c_{2k_1}\dots c_{2k_s} | i+k_1+\dots+k_s=r\rangle,$$
$$A_{2r-1} \stackrel{def}{=} [(V\otimes U^*)\otimes \Lambda^{2r-1}(\mathbf{gl}_{m+n}/\mathbf{gl}_{m,n})]^{\mathbf{gl}_{m,n}} = \langle a_{2i-1}c_{2k_1}\dots c_{2k_s} | i+k_1+\dots+k_s=r\rangle,$$
$$B_{2r-1} \stackrel{def}{=} [(U\otimes V^*)\otimes \Lambda^{2r-1}(\mathbf{gl}_{m+n}/\mathbf{gl}_{m,n})]^{\mathbf{gl}_{m,n}} = \langle a_{2i}c_{2k_1}\dots c_{2k_s} | i+k_1+\dots+k_s=r\rangle.$$

Определим оператор $\delta'^* : A_r \to B_{r-1}$, как композиция оператора d^* с проектором на подпространство B_{r-1}, на подпространстве B_r положим δ'^* равным нулю. Тогда δ'^* задаёт гомотопию к δ', как в стабильном, так и в нестабильном коцепных комплексах. Спектральная последовательность, построенная по фильтрации $\{F^\bullet_{\mathfrak{b}\pm}\}$, вырождается в первом члене.

Рассмотрим теперь произвольный $\mathbf{gl}_{m+n}$-модуль M вложенный в (k,l)-ко- и контравариантную тензорную степень тавтологического представления $((V\oplus U)^{\otimes k}\otimes (V\oplus U)^{*\otimes l})$. Для него может быть определён стабильный граф-комплекс $(m,n\mapsto\infty)$ и фильтрация $\{F^\bullet_{\mathfrak{b}\pm}\}$ как на стабильном, так и на нестабильном комплексах.

Лемма 3. *Спектральная последовательность, построенная по фильтрации $\{F^\bullet_{\mathfrak{b}\pm}\}$ на относительном коцепном комплексе $C^\bullet(\mathbf{gl}_{m+n},\mathbf{gl}_{m,n};M)$, вырождается в первом члене.*

Доказательство. Достаточно проверить, что для первого члена спектральной последовательности выполнено равенство

$$\mathrm{H}^\bullet(C^\bullet(\mathbf{gl}_{m+n},\mathbf{gl}_{m,n};M),\delta') = \mathrm{H}^\bullet(\mathbf{gl}_{m+n},\mathbf{gl}_{m,n};\Bbbk)\otimes [M]^{\mathbf{gl}_{m+n}} \tag{4.2.6}$$

Если модуль M имеет различную степень ко- и контра-вариантности, как тензорный $\mathbf{gl}_{m+n}$-модуль, то есть $k\neq l$, то комплекс $C^\bullet(\mathbf{gl}_{m+n},\mathbf{gl}_{m,n};M)$ не содержит ни одного элемента и утверждение леммы очевидно. Поэтому будет достаточно описать случай $k=l$, то есть $M=\mathbf{gl}_{m+n}^{\otimes k}$. Проделаем это схематично. Все $\mathbf{gl}_{m+n}$-инварианты в $\mathbf{gl}_{m+n}^{\otimes k}$ порождены мономами от следов, занумерованными перестановками $\sigma\in S_k$ на k точках:

$$tr_\sigma : A_1\otimes\dots\otimes A_k \to tr(A_1A_{\sigma(1)}A_{\sigma^2(1)}\dots)\dots tr(\dots),\quad A_i\in\mathbf{gl}_{m+n}.$$

Выписанные инварианты линейно независимы при достаточно больших m,n. С каждым инвариантом tr_σ связан подкомплекс $C^\bullet_\sigma$, изоморфный стандартному $\oplus_{i\geq 0}\langle a_i,b_i\rangle[-i]$, возведённому в k-ую тензорною степень. Последний комплекс имеет одномерное пространство когомологий в степени ноль. При $m,n\to\infty$ весь коцепной комплекс раскладывается в сумму тривиальных:

$$C^\bullet(\mathbf{gl}_{m+n},\mathbf{gl}_{m,n};\mathbf{gl}_{m+n}^{\otimes k})\cong \Bbbk[c_{2i}]\otimes(\oplus_{\sigma\in S_k}C^\bullet_\sigma).$$

Описанный изоморфизм коммутирует с действием дифференциалов d и с имеющимися на них фильтрациями. Следовательно равенство (4.2.6) имеет место и лемма доказана. □

Следствие 2. *Спектральная последовательность, построенная по фильтрации $\{F^\bullet_{\mathfrak{b}\pm}\}$, для относительного коцепного комплекса алгебры Ли W_{m+n} по модулю $\mathbf{gl}_{m,n}$ вырождается в первом члене.*

4.3 Алгебра Вейля алгебры Ли W_n.

4.3.1 Связь с алгеброй Ли $W_{m,n}$.

Основной результат статьи [X] состоит в изучение относительного коцепного комплекса алгебры Ли $W_m \ltimes \mathbf{g} \otimes \mathcal{O}_m$:

Теорема 6. *Для произвольной подалгебры Ли $\mathbf{h} \subset \mathbf{g}$ имеет место изоморфизм урезанной относительной DG-алгебры Вейля и относительного коцепного комплекса бесконечномерной алгебры Ли $W_m \ltimes \mathbf{g} \otimes \mathcal{O}_m$ по модулю подалгебры Ли $(\mathbf{gl}_m \oplus \mathbf{h}) \subset (\mathbf{gl}_m \oplus \mathbf{g})$:*

$$W^\bullet(\mathbf{gl}_m \oplus \mathbf{g}, \mathbf{gl}_m \oplus \mathbf{h})/(\Lambda^\bullet(\mathbf{gl}_m \oplus \mathbf{g})^* \otimes S^{>m}(\mathbf{gl}_m \oplus \mathbf{g})^*) \xrightarrow{\simeq} C^\bullet(W_m \ltimes \mathbf{g} \otimes \mathcal{O}_m, \mathbf{gl}_m \oplus \mathbf{h}; \Bbbk).$$

Подставим в условия теоремы в качестве $\mathbf{g}$ алгебру Ли формальных векторных полей W_n, а в качестве $\mathbf{h}$ её подалгебру линейных векторных полей $\mathbf{gl}_n$. Получим более подробное описание относительного коцепного комплекса $C^\bullet(W_{m,n}, \mathbf{gl}_{m,n}; \Bbbk)$. Доказательство теоремы 6 было основано на аккуратном изучение $\mathbf{gl}_m$-инвариантов. Напомним полученные в статье [X] ограничения на $\mathbf{gl}_m$-инварианты, дабы сузить класс графов из $\Im$, задающих ненулевые коцепи. В соответствии с равенством векторных пространств (4.1.4) нетривиальные коцепи могут быть только при следующих условиях на $p_i, q_{i,j}$:

p_i отличны от нуля только для $i = 0, 2$,
$q_{i,j}$ отличны от нуля только для $j = 0, 1$,
$p_0 = p_2 + \sum q_{i,1} \leq m$.

Из полученных ограничений и стандартных условий на совпадение степени ко- и контравариантности тензоров следует конечномерность комплекса для фиксированных m, n. Связные компоненты у графов должны выглядеть следующим образом:

(a) Связная компонента не содержащая простых рёбер имеет вид Гельфанда-Фукса. Обозначим соответствующую коцепь $\psi_{2r} \in [\Lambda^r V^* \otimes \Lambda^r(S^2 V \otimes V^*)]^{\mathbf{gl}_m}$, граф соответствующий ей нарисован на рис.2, с той разницей, что все рёбра должны быть пунктирными.

(b) Аналогичные коцепи $\varphi_{2r} \in [\Lambda^r U^* \otimes \Lambda^r(S^2 U \otimes U^*)]^{\mathbf{gl}_n}$ перечисляют связные компоненты не содержащие пунктирных рёбер.

(c) Подграф, образованный простыми рёбрами внутри связной компоненты, содержащей, как простые, так и пунктирные рёбра, должен быть связен. Пунктирные рёбра соединяют отдельно стоящие вершины без входов с вершинами внутри подграфа из простых рёбер. То есть, коцепь принадлежит пространству $[\Lambda^r V^* \otimes \Lambda^k(W_n/\mathbf{gl}_n)^* \otimes \Lambda^r(W_n \otimes V)^*]^{\mathbf{gl}_{m,n}} \overset{\alpha}{\cong} [\Lambda^k(W_n/\mathbf{gl}_n)^* \otimes S^r(W_n)^*]^{\mathbf{gl}_n}$.

Дифференциал $d(\psi_{2i}) = 0$ и теорема 6 говорит, что комплекс $\mathcal{H}^{\bullet 2}$, порождённый графами, не содержащими связных компонент типа (a)(все рёбра которых пунктирные), выделяется прямым слагаемым и изоморфен урезанной алгебре Вейля:

$$\alpha : \mathcal{H}^\bullet \cong W^\bullet(W_n, \mathbf{gl}_n)/(F^{2m+1}W^\bullet(W_n, \mathbf{gl}_n)) \cong \left[\Lambda^\bullet(W_n/\mathbf{gl}_n[1])^* \otimes \left(S^{\bullet \leq n}(W_n[2])^*\right)\right]^{\mathbf{gl}_n}. \tag{4.3.7}$$

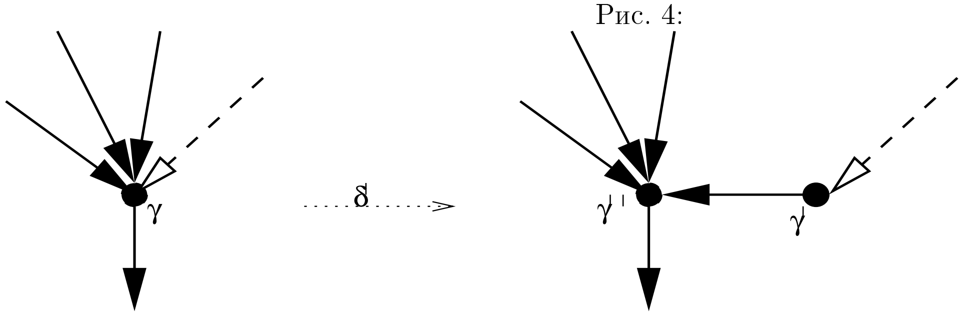
[2] Иногда снизу будут писаться индексы m, n, когда хочется подчеркнуть зависимость от m, n

Рассмотрим на этом комплексе фильтрацию $\{F^{\bullet}_{\mathfrak{b}\pm}\}$ так что присоединённо-градуированным дифференциалом на $\mathcal{H}^{\bullet}$ является δ'. Как описано в параграфе 4.2, подобная фильтрация имеется и на комплексе $\mathcal{Q}^{\bullet}$, спектральная последовательность относительно которой вырождается в первом члене. Ключевым леммой является следующее простое наблюдение.

Лемма 4. *Естественное вложение комплекса $\psi : \mathcal{H}^{\bullet} \hookrightarrow \mathcal{Q}^{\bullet}$ коммутирует с дифференциалом δ'.*

Доказательство. Дифференциал δ' в комплексе $\mathcal{Q}^{\bullet}$ от коцепи задаваемой графом $c_{\Gamma}, \Gamma \in \mathfrak{I}$ может отличаться на дополнительные слагаемые, соответствующие растяжениям в графы не удовлетворяющие условию $(\imath\imath)$. Напомним, что в дифференциал δ' входят растяжения, при которых, во-первых, появляется дополнительное простое ребро, во-вторых, одна из появившихся вершин должна иметь входящими одно пунктирное ребро, а выходящим простое. При таких ограничениях, только вершина γ', из которой выходит вставленное ребро, должна быть с описанными условиями (рисунок 4).

Рис. 4:



Поскольку в графе, задающем ненулевую коцепь в $\mathcal{P}$, вершины, из которых выходят пунктирные рёбра, не имеют входов (условие (c) на предыдущей странице), то в растянутом графе, как вершина γ', так и вершина γ'' имеют выходящими простые рёбра, а значит удовлетворяют условию $(\imath\imath)$. □

Композиция проекции $\varphi : \mathcal{Q}^{\bullet} \twoheadrightarrow \mathcal{P}^{\bullet}$ с естественной проекцией $\pi : \mathcal{P}^{\bullet} \twoheadrightarrow \mathcal{H}^{\bullet}$ даёт отображение обратное справа к вложению ψ и также является морфизмом комплексов с дифференциалами δ'.

Следствие 3. *Отображение пространств когомологий $(\pi\varphi)^* : \mathrm{H}\mathcal{Q}^{\bullet} \longrightarrow \mathrm{H}\mathcal{H}^{\bullet}$ является сюръекцией и когомологии комплексов $\mathcal{H}^{\bullet}$ и $\mathcal{Q}^{\bullet}$ относительно дифференциала δ' и d имеются только в чётных степенях.*

Изучим подробно явный вид получаемых коциклов и их образы при отображении φ^*.

4.3.2 формулы для коциклов

Рассмотрим относительные коциклы $C^{\bullet}(W_{m+n}, \mathbf{gl}_{m,n}; \Bbbk)$. Любой коцикл есть многочлен от ξ_{2i} и c_{2j}. Опишем их образы при отображении φ на граф-комплекс алгебры Ли $W_{m,n}$. После этого выпишем старшие члены коциклов относительно фильтрации $\{F^{\bullet}_{\mathfrak{b}\pm}\}$, то есть коциклы относительно дифференциала δ'. Коцикл c_{2j} задаётся одним графом (см. рис.3) и образ его при отображении φ нулевой. Коцикл ξ_{2i} задается суммой по графам, получаемым из графа с рис.2 произвольной окраской рёбер в два цвета. Отображение φ оставляет из этой суммы те графы, у которых все внутренние рёбра простые. Понятно, что старшим членом относительно фильтрации $\{F^{\bullet}_{\mathbf{b}\pm}\}$ в стабильном случае будет граф, все рёбра которого простые. Но, к сожалению, граф с простыми рёбрами, который содержит более n свободных вершин (не имеющих входов), задаёт нулевой инвариант, так как $\Lambda^{>n}U = 0$. Определим множество старших членов относительно рассматриваемой фильтрации для мономов от ξ_i. По каждому разбиению $\lambda \stackrel{def}{=} \{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_k > 0\}$[3] определим коцепь $\bar{\xi}_\lambda$ равную проекции коцикла $\xi_{2\lambda_1} \ldots \xi_{2\lambda_n}$ на подпространство

$$[\Lambda^{|\lambda|}U^* \otimes \Lambda^{|\lambda|}(S^2U \otimes U^*)]^{\mathbf{gl}_n} \subset [\Lambda^{2|\lambda|}(W_n/\mathbf{gl}_n)^*]^{\mathbf{gl}_n} = C^{2n}(W_n, \mathbf{gl}_n; \Bbbk), \text{ если } |\lambda| \leq n,$$

и проекции на подпространтсво

$$[\Lambda^n U^* \otimes \Lambda^n(S^2U \otimes U^*) \otimes \Lambda^{|\lambda|-n}U^* \otimes \Lambda^{|\lambda|-n}(V \otimes U \otimes U^*)]^{\mathbf{gl}_{m,n}} \subset C^{2|\lambda|}(W_{m,n}, \mathbf{gl}_{m,n}; \Bbbk),$$

если $|\lambda| > n$.

Лемма 5. *Множество коцепей $\{\bar{\xi}_\lambda | l(\lambda) \leq n, |\lambda| \leq m+n\}$ образуют базис в когомологиях комплекса $\mathcal{H}^\bullet$ относительно дифференциала δ'.*

Доказательство. Схема доказательства будет разбита на 3 шага. Сначала будет показано, что выписанный набор коцепей линейно независим. Далее будет показано, что они являются коциклами, то есть дифференциал δ' на них действует нулём. Доказательство того, что отсутствуют другие когомологии, будет неявным и использует машинерию с алгеброй Вейля.

Проверим линейную независимость. Достаточно проверять линейную независимость коцепей принадлежащих одному подпространству, то есть коцепей $\bar{\xi}_\lambda$ с одинаковым модулем разбиения $|\lambda|$. Случай $|\lambda| \leq n$ был проверен Гельфандом и Фуксом в [ГФ]. Случай $|\lambda| = n+1$ проверен в статье [ГФФ].

Для того, чтобы проверить линейная независимость для большего значения модуля разбиения, достаточно предъявить набор цепей v_μ, так что квадратная матрица значений коцепей $\bar{\xi}_\lambda$ на векторах v_μ треугольная с ненулевыми элементами на диагонали. Значение коцепи c_Γ на разложимом тензоре $v \in \Lambda^r(W_{m,n}/\mathbf{gl}_{m,n})$ может быть подсчитано следующим образом: нужно просуммировать со знаками все возможные способы расстановки сомножителей в вершины графа Γ, так что ребра имеют одинаковые входящие и выходящие индексы. Например, сомножитель $x_{j_1} \cdots x_{j_s} y_{i_1} \cdots y_{i_t} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ может быть посажен в вершину с t пунктирными входами, s одинарными входами и одинарным выходом; индексы $j_1, \ldots, j_s$ и $i_1, \ldots, i_t$ должны быть распределены между одинарными и пунктирными входами соответственно. Такое определение спаривания позволяет легко построить вектора v_μ.

Пусть $l = l(\lambda) \leq n$ — длина разбиения λ. Разобьём множество $\{1, \ldots, n\}$ на l непересекающихся непустых подмножеств $\{i^1_1, \ldots i^1_{k_1}\}, \ldots, \{i^l_1, \ldots i^l_{k_l}\}$, так что мощность j-ого подмножества не превосходит λ_j. Для удобства дальнейших обозначений в каждой последовательности, перечисляющей элементы подмножества, увеличим число индексов на 1, положив последний индекс $i^j_{k_j+1}$ равным первому i^j_1. Определим тензор $v_\lambda \in (\Lambda^n U \otimes$

[3]Примем стандартные обозначения для разбиений. Сумма компонент разбиения $\sum \lambda_i$ называется модулем разбиения и обозначается $|\lambda|$. Число ненулевых элементов в разбиении λ называется длиной разбиения и обозначается $l(\lambda)$.

$\Lambda^n(S^2U^*\otimes U)\otimes\Lambda^{|\lambda|-n}U\otimes\Lambda^{|\lambda|-n}(V^*\otimes U^*\otimes U))\subset\Lambda^{2|\lambda|}W_{m,n}$.

$$v_\lambda \stackrel{def}{=} \wedge_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\otimes\wedge_{j=1}^l\wedge_{r=1}^{k_j} x_{i_r^j}^2\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}^j}}\otimes\wedge_{j=1}^{|\lambda|-n} y_j\otimes\wedge_{j=1}^l\wedge_{r=1}^{\lambda_j-k_j} y_{(\lambda_1+\cdots+\lambda_j+r)}x_{i_1^j}\frac{\partial}{\partial x_{i_1^j}}$$

где x_i — координаты в слое слоения (в U), y_j — координаты в факторе (в V). Из комбинаторного определения спаривания видно, что значение инвариантной коцепи $\bar{\xi}_\lambda$ на тензоре v_μ может быть отлично от нуля только если разбиение λ является подразбиением разбиения μ. Действительно, сомножители $x_{i_r^j}^2\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}^j}}$ и $x_{i_{r'}^{j'}}^2\frac{\partial}{\partial x_{i_{r'+1}^{j'}}}$ тензора v_μ должны принадлежать одной связной компоненте графа из коцепи $\bar{\xi}_\lambda$, если и только если $j=j'$. То же верно про пары вершин $y_{(\mu_1+\cdots+\mu_j+r)}x_{i_1^j}\frac{\partial}{\partial x_{i_1^j}}$ и $y_{(\mu_1+\cdots+\mu'_j+r')}x_{i_1^{j'}}\frac{\partial}{\partial x_{i_1^{j'}}}$. Пара вершин $x_{i_r^j}^2\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}^j}}$ $y_{(\mu_1+\cdots+\mu'_j+r)}x_{i_1^{j'}}\frac{\partial}{\partial x_{i_1^{j'}}}$ может принадлежать одной связной компоненте, только если $j=j'$. Тем самым матрица спаривания коцепей $\bar{\xi}_\lambda$ и тензоров v_μ треугольная с отличными от нуля элементами на диагонали. Следовательно, $\bar{\xi}_\lambda$ линейно независимы. В частности отсюда следует, что все они отличны от нуля.

Поэтому, коцепи $\bar{\xi}_\lambda$ являются младшей частью коцепей ξ_λ относительно градуировки $\{F_\pm^\bullet\}$ по числу одинарных рёбер в графе. Коцепь ξ_λ имеет степень фильтрации $2|\lambda|$ относительно фильтрации $\{F_{\mathbf{b}}^\bullet\}$, максимально возможную для коцепей степени $2|\lambda|$. Следовательно, младший член относительно фильтрации $\{F_{\mathbf{b}\pm}^\bullet\}$ от коцепи ξ_λ будет совпадать с младшим членом относительно фильтрации $\{F_\pm^\bullet\}$. Таким образом, коцепи $\bar{\xi}_\lambda$ будут представителями коциклов ξ_λ в члене E_0 относительно фильтрации $\{F_{\mathbf{b}\pm}^\bullet\}$. Так как ни один из графов, входящий в описание коцепей $\xi_\lambda,\bar{\xi}_\lambda$, не содержит вершины соответствующей $(\mathbf{b}/\mathbf{gl}_{m,n})^*$, то никакая линейная комбинация коцепей $\bar{\xi}_\lambda$ не может принадлежать образу дифференциала δ'. Таким образом $\bar{\xi}_\lambda$ являются коциклами, представляющими линейно независимые когомологии.

Покажем, что других когомологий у комплекса $\mathcal{H}^\bullet$ нету. Действительно, комплекс $\mathcal{H}^\bullet$ изоморфен урезанной относительной алгебре Вейля(4.3.7). Когомологии же всей относительной алгебры Вейля должны совпадать с когомологиями

$$W^\bullet(\mathbf{gl}_n,\mathbf{gl}_n)\cong[S^\bullet(\mathbf{gl}_n[-2])]^{\mathbf{gl}_n}\cong\Bbbk[\Psi_2,\dots\Psi_{2n}]$$

Поскольку алгебра Вейля факторизуется по $(2m+1)$-ому члену фильтрации, что не затрагивает элементы, гомологическая степень которых не превосходит $2m$, имеем для $k\le 2m$: $dim\mathrm{H}\mathcal{H}^k = dim\mathrm{H}W^k(W_n,\mathbf{gl}_n)$, что равно числу мономов степени k от переменных степеней $2,4,\dots,2n$. То есть, нечётных когомологий до степени $2m$ у $\mathcal{H}^\bullet$ нету, а чётных степени $k\le 2m$ столько же, сколько разбиений (диаграмм Юнга) с модулем, равным $k/2$, и длиной, не превосходящей n. Покажем, что для чётных $k>2m$ размерность k-ых когомологий не превосходит числа разбиений длины не больше n. Рассмотрим коммутативную диаграмму вложений алгебр Ли и их подалгебр:

$$\begin{array}{ccc}(W_{m+r+n},\mathbf{gl}_{m+r+n}) & \longleftarrow & (W_{m+r,n},\mathbf{gl}_{m+r,n})\\ \uparrow & & \uparrow\\ (W_{m+n},\mathbf{gl}_{m+n}) & \longleftarrow & (W_{m,n},\mathbf{gl}_{m,n})\end{array}$$

По ней строиться коммутативная диаграмма комплексов:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}^\bullet_{m+r,n} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H}^\bullet_{m+r,n} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_2} \\ \mathcal{Q}^\bullet_{m,n} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H}^\bullet_{m,n} \end{array} \tag{4.3.8}$$

Отображения φ и p_1 являются сюрьекциями на когомологиях. Из коммутативности диаграммы следует сюрьективность p_2 на когомологиях. Это наблюдение даёт оценку сверху на размеры пространств когомологий комплекса $\mathcal{H}^\bullet_{m,n}$, которые совпадают с нижней предъявленной нами оценкой из коциклов $\bar{\xi}_\lambda$. $\square$

Следствие 4. *Когомологии обрезанной относительной алгебры Вейля совпадают с когомологиями $2(n+m)$-мерного остова классифицирующего пространства BGL_n.*

$$\mathrm{H}W^\bullet(W_n, \mathbf{gl}_n)/(F^{2m+1}W^\bullet(W_n, \mathbf{gl}_n)) \cong \mathrm{H}^{\bullet \le 2(n+m)}(BGL_n; \Bbbk) \cong \Bbbk^{\bullet \le 2(n+m)}[\Psi_2, \dots \Psi_{2n}]$$

Рассмотрим короткую точную последовательность комплексов:

$$0 \longrightarrow C^\bullet(W_n, \mathbf{gl}_n; S^m\mathbf{gl}_m)[2m] \longrightarrow \frac{W^\bullet(W_n,\mathbf{gl}_n)}{F^{2m+1}W^\bullet(W_n,\mathbf{gl}_n)} \xrightarrow{\pi} \frac{W^\bullet(W_n,\mathbf{gl}_n)}{(F^{2m-1}W^\bullet(W_n,\mathbf{gl}_n))} \longrightarrow 0$$

Явное описание коциклов из леммы 5, а также диаграмма (4.3.8) позволяют утверждать, что отображение π является также сюрьекцией и на когомологиях предъявленных комплексов. Следовательно, длинная точная последовательность когомологий вырождается до короткой:

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^\bullet(W_n, \mathbf{gl}_n; S^m\mathbf{gl}_m)[2m] \longrightarrow \mathrm{H}\frac{W^\bullet(W_n,\mathbf{gl}_n)}{F^{2m+1}W^\bullet(W_n,\mathbf{gl}_n)} \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}\frac{W^\bullet(W_n,\mathbf{gl}_n)}{(F^{2m-1}W^\bullet(W_n,\mathbf{gl}_n))} \longrightarrow 0$$

что доказывает теорему 1. Более того явный вид коциклов остаётся прежним, как и в лемме 5, если принять во внимание изоморфизм (4.3.7)($[\Lambda^m V^* \otimes \Lambda^m(W_n^* \otimes V)]^{\mathbf{gl}_m} \xrightarrow{\alpha} S^m W_n^*$).

4.3.3 Частный случай $n = 1$

Для случая W_1 коцепи и коциклы поддаются более простому описанию через многочлены. Отождествим q-линейные функционалы на W_1 с кольцом многочленов от q переменных $\Bbbk[y_1, \dots, y_q]$. Моному $y_1^{r_1} \dots y_q^{r_q}$ сопоставим q-линейный функционал, действующий по формуле :

$$\left(\sum_{r\ge 0} a_{1r}x^r\frac{\partial}{\partial x}, \dots, \sum_{r\ge 0} a_{qr}x^r\frac{\partial}{\partial x}\right) \mapsto r_1! \dots r_q! a_{1r_1} \dots a_{qr_q}.$$

Тогда пространство коцепей $C^p(W_1; S^m W_1^*)$ отождествляется с кольцом многочленов от $p+m$ переменных, кососимметричных по первым p переменным и симметричных по последним m переменным. Чтобы разделять кососимметричные и симметричные переменные, будем использовать символы $y_1, \dots, y_p$ для кососимметричных аргументов и символы $z_1, \dots, z_m$ для симметричных. Опишем коцепной дифференциал $d : C^p(W_1; S^m W_1^*) \to$

$C^{p+1}(W_1; S^m W_1^*)$ в этих обозначениях:

$$dP(y_1, \dots, y_{p+1}; z_1, \dots, z_m) = \sum_{1\le s<t\le p+1} (-1)^{s+t-1}(y_s - y_t)P(y_s + y_t, y_1, \dots, \hat{y_s}, \dots, \hat{y_t}, \dots, y_{p+1}; z_1, \dots, z_m) + \\ + \sum_{\substack{1\le s\le p+1\\ 1\le t\le m}} (-1)^s (y_s - z_t)P(y_1, \dots, \hat{y_s}, \dots, y_{p+1}; y_s + z_t, z_1, \dots, \hat{z_t}, \dots, z_m)$$

Теорема 7. *Коцепи*

$$a_{2m} \stackrel{def}{=} (y_1^2 - y_2^2)z_1 \dots z_m \in C^2(W_1; S^m W_1)$$
$$a_{3m} \stackrel{def}{=} (y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)z_1 \dots z_m \in C^3(W_1; S^m W_1)$$

представляют базис в когомологиях $\mathrm{H}^\bullet(W_1; S^m W_1)$.

Доказательство. Коцепь a_{2m} может рассматриваться, как относительная коцепь по модулю $\mathbf{gl}_1$ и тогда она совпадает с коцепью $\bar{\xi}_{m+1}$ из леммы 5. Коцепь a_{3m} представляет другой коцикл из спектральной последовательности Серра-Хохшильда относительно подалгебры $\mathbf{gl}_1 \hookrightarrow W_1$. Легко проверить, что дифференциалы от выписанных коцепей равны нулю, следовательно, они представляют абсолютные коциклы. □

5 Когомологии W_n с коэффициентами в $W_n^{*\otimes m}$

В этой главе мы покажем, как, используя методы, описанные выше, получить какую-то информацию про когомологии с коэффициентами в тензорных степенях коприсоединённого представления.

Доказательство теоремы 4 очень похоже на доказательство теоремы 1, поэтому большинство деталей будет опущено в изложении, а зафиксированы только основные утверждения и подчёркнуты отличия. Сначала будет введено семейство алгебр Ли $W_{1^m,n}$ векторных полей с условиями. Коцепные комплексы содержат подкомплексы изоморфные $C^\bullet(W_n, \mathbf{gl}_n; W_n^{*\otimes m})$. Когомологии алгебр Ли из этого семейства могут быть подсчитаны методами, аналогичными, использованными ранее для алгебр Ли сохраняющих флаг слоений. После этого подробное изучение спектральной последовательностей Серра-Хохшильда для подалгебры Ли $W_n \hookrightarrow W_{1^m,n}$ позволяет доказать оценку сверху в теореме 4.

Рассмотрим алгебру Ли $W_{1^m,n} \stackrel{def}{=} W_1^{\oplus m} \ltimes W_n \otimes O_m$ формальных векторных полей, сохраняющих n-мерный слой и набор из m ортогональных прямых на базе в $(m+n)$-мерном пространстве. Векторное поле $\omega = \sum_{i=1}^{m+n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ принадлежит алгебре Ли $W_{1^m,n}$, если $\forall 1 \le i \le m$ формальный степенной ряд для f_i зависит только от переменной x_i. Посчитаем относительные когомологии алгебры Ли $W_{1^m,n}$ по модулю её подалгебры Ли $\mathbf{gl}_{1^m,n} \stackrel{def}{=} \underbrace{\mathbf{gl}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{gl}_1}_{m} \oplus \mathbf{gl}_n$.

Теорема 8. *Относительные когомологии алгебры Ли $W_{1^m,n}$ с постоянными коэффициентами отличны от нуля только в чётных степенях и являются фактор-алгеброй алгебры* *инвариантов* $[S^\bullet(\mathbf{gl}_{1^m,n}[-2])]^{\mathbf{gl}_{1^m,n}}$.

$$\mathrm{H}^\bullet(W_{1^m,n},\mathbf{gl}_{1^m,n};\Bbbk)=\Bbbk[\tau_1,\dots,\tau_m,\xi_2,\xi_4,\dots,\xi_{2n}]/I\ ,\quad deg(\tau_i)=2, deg(\xi_{2j})=2j$$
$$I\overset{def}{=}(\tau_i^2;\tau_{i_1}\dots\tau_{i_k}\xi_2^{j_2}\dots\xi_{2n}^{j_n}|(k+\sum_{l=1}^n lj_l)>n)$$

Рёбра графа, представляющего $\mathbf{gl}_{1^m,n}$-инвариантную коцепь из $C^\bullet(W_{1^m,n},\mathbf{gl}_{1^m,n};\Bbbk)$, должны быть окрашены в $(m{+}1)$ цвет. Пусть $(m{+}1)$-ый цвет (будем называть его простым) отвечает спариванию элементов из представлений $\mathbf{gl}_n\hookrightarrow W_n$. Остальные m цветов, назовём их дополнительными, будут отвечать спариваниям представлений различных $\mathbf{gl}_1$, вложенных в $\mathbf{gl}_{1^m,n}$. Опишем графы, задающие ненулевые коцепи. Связная компонента такого графа, не содержащая простых рёбер, должна быть целиком одного цвета и соответствовать каноническому $\mathbf{gl}_1=\mathbf{gl}(V_i)$-инварианту в одномерном представлении $[V_i\otimes(S^2V_i\otimes V_i^*)]^{\mathbf{gl}(V_i)}$. Связная компонента графа, содержащего ненулевое число простых рёбер, Подграф, образованный простыми рёбрами внутри связной компоненты, должен быть связен. Дополнительные рёбра соединяют отдельно стоящие вершины без входов с вершинами внутри подграфа из простых рёбер. Дополнительные рёбра окрашены каждый в свой цвет. Пусть r число вершин, в которые входили рёбра дополнительных цветов, перенумеруем их. Пусть $i_1^s,\dots,i_{k_s}^s$ номера дополнительных цветов рёбер, входящих в s-ую вершину. Тогда коцепь, задаваемая графом, описанным выше, принадлежит пространству:

$$\left[\left(\otimes_{a,b}V_{i_a^b}\right)\otimes\Lambda^t(W_n/\mathbf{gl}_n)^*\otimes\left(\otimes_{s=1}^r\left(W_n^*\otimes(V_{i_1^s}\otimes\dots\otimes V_{i_{k_s}^s})\right)\right)\right]^{\mathbf{gl}_{1^m,n}}$$
$$\overset{\alpha}{\cong}\left[\Lambda^t(W_n/\mathbf{gl}_n)^*\otimes W_n^{*\otimes r}\right]^{\mathbf{gl}_n}\quad(5.0.9)$$

Подкомплекс $\mathcal{T}^\bullet$, порождённый графами, не содержащими связных компонент, окрашенных целиком в дополнительные цвета, выделяется прямым слагаемым. Теорема 8 будет следовать из следующей леммы:

Лемма 6.
$$\mathrm{H}^\bullet(\mathcal{T}^\bullet_{1^m,n})=\left[S^{\le(m+n)}(\mathbf{gl}_n[-2])\right]^{\mathbf{gl}_n}$$

Доказательство. Введём на коцепном комплексе аналог фильтрации $\{F^\bullet_{\mathbf{b}\pm}\}$, где $\mathbf{b}\overset{def}{=}W_{1^m,n}\cap\mathbf{gl}_{m+n}$. Поскольку $\mathbf{b}/\mathbf{gl}_{1^m,n}\cong(V_1^*\oplus\dots\oplus V_m^*)\otimes U$, то присоединённо-градуированный дифференциал будет растягивать граф, вставляя простое ребро и вершину с одним входящим дополнительным ребром и выходящим простым.

Имеют место аналогичные утверждения про относительные когомологии $\mathbf{gl}_{m+n}$ по модулю подалгебры $\mathbf{gl}_{1^m,n}$ и способ их подсчёта с помощью фильтрации $\{F^\bullet_{\mathbf{b}\pm}\}$.

Лемма 7. *Относительные когомологии алгебры Ли* $\mathbf{gl}_{m+n}$ *по модулю подалгебры* $\mathbf{gl}_{1^m,n}$ *с постоянными коэффициентами имеются только в чётных степенях.*

Доказательство. Рассмотрим пространство комплексных частичных флагов $Fl_{1,2,\dots,m,m+n}$. Одно из описаний даётся через фактор полной линейной группы по параболической подгруппе B с блоками на диагонали размеров $1,\dots,1,n$. Подгруппа B стягивается на полупростую подгруппу блочных матриц $GL_1 \times \cdots \times GL_1 \times GL_n$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^\bullet(\mathbf{gl}_{m+n}, \mathbf{gl}_{1^m,n}; \mathbb{R}) = \mathrm{H}^\bullet(GL_{m+n}, GL_1 \times \cdots \times GL_1 \times GL_n; \mathbb{R}) = \\ = \mathrm{H}^\bullet(GL_{m+n}/B; \mathbb{R}) = \mathrm{H}^\bullet_{DR}(Fl_{1,2,\ldots,m,m+n})\end{aligned}$$

С другой стороны многообразие $Fl_{1,2,\ldots,m,m+n}$ имеет клеточное разбиение с клетками только чётной размерности, а значит имеет только чётные когомологии. $\square$

Лемма 8. *Спектральная последовательность, построенная по фильтрации $\{F^\bullet_{\mathfrak{b}\pm}\}$ на относительном коцепном комплексе $C^\bullet(\mathbf{gl}_{m+n}, \mathbf{gl}_{1^m,n}; M)$ с коэффициентами в произвольном конечномерном $\mathbf{gl}_{m+n}$-модуле M, вырождается в первом члене.*

Доказательство совершенно аналогично доказательству леммы 3.

Следовательно, спектральная последовательность, построенная по аналогичной фильтрации $\{F^\bullet_{\mathfrak{b}\pm}\}$ на относительном коцепном комплексе $\mathcal{Q}^\bullet_{1^m,n} \overset{def}{=} C^\bullet(W_{m+n}, \mathbf{gl}_{1^m,n}; \Bbbk)$, вырождается в первом члене, равном

$$\mathrm{H}^\bullet(W_{m+n}, \mathbf{gl}_{m+n}; \Bbbk) \otimes \mathrm{H}^\bullet(\mathbf{gl}_{m+n}, \mathbf{gl}_{1^m,n}; \Bbbk)$$

Рассмотрим вложения алгебр Ли:

$$W_{1^m,n} \hookrightarrow W_{1,\ldots,1,n} \hookrightarrow W_{m+n}$$

Имеем набор сюръекций соответствующих относительных коцепных комплексов и их подкомплексов:

$$\begin{tikzcd} C^\bullet(W_{1^m,n}, \mathbf{gl}_{1^m,n}; \Bbbk) \arrow[d] & C^\bullet(W_{1,\ldots,1,n}, \mathbf{gl}_{1^m,n}; \Bbbk) \arrow[l] \arrow[d] & C^\bullet(W_{m+n}, \mathbf{gl}_{1^m,n}; \Bbbk) \arrow[l] \arrow[d, equal] \\ \mathcal{T}^\bullet_{1^m,n} & \mathcal{H}^\bullet_{1,\ldots,1,n} \arrow[l] & \mathcal{Q}^\bullet_{1,\ldots,1,n} \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{5.0.10}$$

Сюръекции в нижней строчке этой коммутативной диаграммы имеют естественные левые обратные отображения, которые коммутируют с дифференциалами δ' (присоединённо-градуированным к фильтрациям $\{F^\bullet_{\mathfrak{b}\pm}\}$). Следовательно, нижняя строчка диаграммы (5.0.10) задаёт сюръекцию когомологий соответствующих комплексов относительно дифференциала δ'. Когомологии комплекса $\mathcal{Q}^\bullet_{1,\ldots,1,n}$ относительно дифференциала δ' имеются только в чётных степенях и совпадают с когомологиями относительно полного коцепного дифференциала. Значит, то же верно и про остальные комплексы в нижней строчке и мы имеем сюръекцию на когомологиях

$$\mathrm{H}^\bullet\mathcal{T}^\bullet_{1^m,n} \twoheadleftarrow \mathrm{H}^\bullet\mathcal{H}^\bullet_{1,\ldots,1,n}$$

Посмотрев на явный вид коциклов из $\mathcal{H}^\bullet_{1,\ldots,1,n}$, легко понять, что это отображение изоморфизм, что завершает доказательство леммы 6. $\square$

Приступим к доказательству теоремы 4 по индукции.

Доказательство. База индукции $m = 1$ уже проверена в теореме 1. Предположим утверждение теоремы выполнено для всех $k < m$. Рассмотрим подкомплекс $\mathcal{T}^{\bullet}_{1^m,n}$ в относительный коцепной комплекс алгебры Ли $W_{1^m,n}$. Изучим подробно спектральную последовательность Серра-Хохшильда, построенную по подалгебре Ли W_n. Первый член выглядит следующим образом:

$$E_1^{0,\bullet}(\mathcal{T}) = \mathrm{H}^{\bullet}(W_n, \mathbf{gl}_n; \Bbbk)$$
$$E_1^{k,\bullet}(\mathcal{T}) = \mathrm{H}^{\bullet}(W_n, \mathbf{gl}_n; W_n^*)^{\oplus r_{k1}} \oplus \dots \oplus \mathrm{H}^{\bullet}(W_n, \mathbf{gl}_n; W_n^{*\otimes[\frac{k}{2}]})^{\oplus r_{k[\frac{k}{2}]}}, \text{ при } k \leq 2m$$
$$E_1^{k,\bullet}(\mathcal{T}) = 0, \text{ при } k > 2m$$

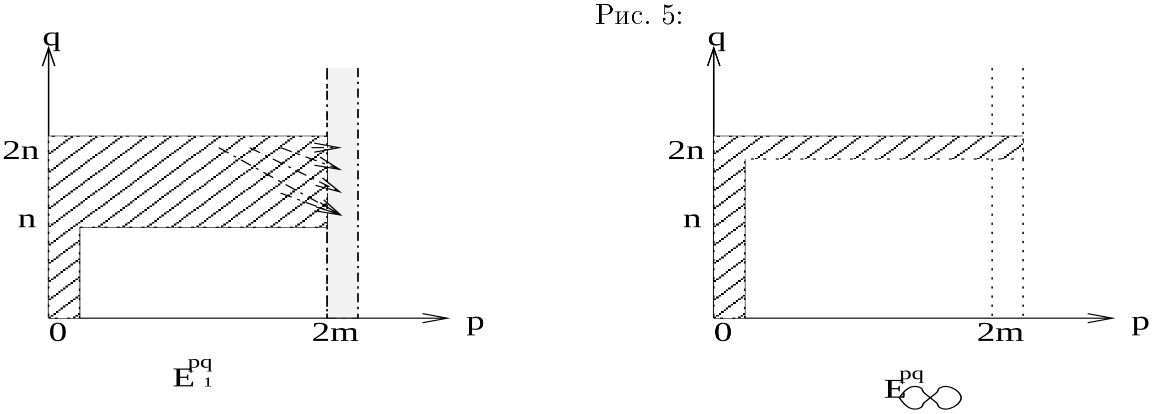
Где числа $r_{i,j}$ определены из равенства (5.0.9), а именно $r_{i,j}$ равно числу разбиений множества $\{1, \dots, (i-j)\}$ на j непустых непересекающихся подмножеств, если $(i-j) \leq m$ и нулю иначе. Например, $r_{2m,j}$ отлично от нуля, только если $j = m$, и $r_{2m,m} = 1$, $r_{i,j} = 0$, если $i > 2m$.

Член $E_\infty(\mathcal{T})$ должен совпадать с членом $E_\infty(\mathcal{H})$, описание которого мы знаем:

$$E_\infty^{0,\bullet}(\mathcal{H}) = \mathrm{H}^{\bullet}(W_n, \mathbf{gl}_n; \Bbbk), \text{ что отлично от нуля в степенях } 2, 4, \dots, 2n$$
$$E_\infty^{2k,\bullet}(\mathcal{H}) = \begin{cases} \mathrm{H}^{\bullet}(W_n, \mathbf{gl}_n; S^k W_n^*) \text{ при } 1 \leq k \leq m, \Rightarrow E_\infty(\mathcal{H})^{2k,i} = 0, \text{ если } i \neq 2n \\ 0, \text{ если } k > m \end{cases}$$
$$E_\infty(\mathcal{H})^{2k+1,\bullet} = 0$$

Только первые $2m$ столбцов первого члена спектральной последовательности $E_{\bullet}^{\bullet,\bullet}(\mathcal{T})$ отличны от нуля. Соображения индукции говорят, что высота всех, кроме последнего не превосходит $2n$ ($E_1^{i,j}(\mathcal{T}) = 0$, при $i < 2m$, $j > 2n$). Тотальные когомологии имеются только до степени $2(m+n)$. На рисунке 5 нарисовано поведение возможных старших диффе-

Рис. 5:



ренциалов в описанной спектральной последовательности. В незаштрихованных клетках находятся нулевые пространства. Легко понять, что, при подобных ограничениях, высота последнего также должна не превосходить $2n$ и оценка сверху в теореме 4 доказана.

Оценка снизу использует немножко другие соображения и имеет сильно более простое доказательство.

Рассмотрим коммутативную подалгебру Ли постоянных векторных полей

$$\mathbf{u} \stackrel{def}{=} \langle \frac{\partial}{\partial x_i} | i = 1, \dots, n \rangle \hookrightarrow W_n.$$

Изучим её когомологии с коэффициентами в свободном модуле $S^\bullet \mathbf{u}$.

Лемма 9.

$$\mathrm{H}^i(\mathbf{u}; S^\bullet \mathbf{u}) = \begin{cases} \Lambda^m U^*, & \textit{если} \;\; i = m \\ 0, & \textit{если} \;\; i \neq m \end{cases}$$

Доказательство. Пусть d - коцепной дифференциал, d^* - двойственный ему дифференциал. В координатах эти отображения записываются так:

$$d\left(x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial}{\partial x_{j_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{j_l}}\right) = \\ = \sum_{\alpha=1}^{n} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_k} \wedge x_\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial}{\partial x_{j_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{j_l}}$$

$$d^*\left(x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial}{\partial x_{j_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{j_l}}\right) = \\ = \sum_{\substack{1 \le s \le k \\ 1 \le t \le l}} (-1)^s \frac{\partial x_{i_s}}{\partial x_{j_t}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_{i_s}} \wedge \cdots \wedge x_{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial}{\partial x_{j_2}} \cdots \widehat{\frac{\partial}{\partial x_{j_t}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{j_l}}$$

Выпишем действие оператора Лапласа $\triangle \stackrel{def}{=} (d \circ d^* + d^* \circ d)$ на однородном элементе. После сокращений имеем:

$$\triangle|_{(\Lambda^k \mathbf{u}^* \otimes S^l \mathbf{u})} = (l + n - k) \cdot Id|_{(\Lambda^k \mathbf{u}^* \otimes S^l \mathbf{u})}.$$

Следовательно нули оператора Лапласа совпадают с пространством $\Lambda^n \mathbf{u}^*$. □

Операторы d, d^* $\mathbf{gl}_n$-инвариантны, поэтому для представления M алгебры Ли $\mathbf{gl}_n \oplus \mathbf{u}$, индуцированного с какого-то $\mathbf{gl}_n$-представления N, имеем:

$$\mathrm{H}^i(\mathbf{u} \oplus \mathbf{gl}_m, \mathbf{gl}_m; M) = \begin{cases} [\bigwedge^m U^* \otimes N]^{\mathbf{gl}_m}, & \text{если } i = m \\ 0, & \text{если } i \neq m \end{cases}$$

Пусть теперь M представление алгебры Ли W_n индуцированное с представления подалгебры Ли L_0 векторных полей, равных нулю в точке 0. Рассмотрим спектральную последовательность Серра-Хохшильда на $C^\bullet(W_n, \mathbf{gl}_n; M)$, построенную по подалгебре Ли $\mathbf{u} \oplus \mathbf{gl}_n$. Имеем $E_1^{\bullet,q} = 0$, если $q \neq n$. В частности отсюда следует, что $\mathrm{H}^q(W_n, \mathbf{gl}_n; M) = 0$ при $q < n$.

Заметим, что модуль $W_n^* = Ind_{L_0}^{W_n} U^*$. Свойство модуля быть свободным для подалгебры $\mathbf{u}$ сохраняется при тензорном произведение модулей. Следовательно $H^q(W_n, \mathbf{gl}_n; W_n^{*\otimes m}) = 0$, при $q < n$, и оценка снизу в теореме 4 доказана. □

Список литературы

[БР] **И.Н.Берштейн, Б.И.Розенфельд** Однородные пространства бесконечномерных алгебр Ли и характеристические классы слоений *УМН, вып. 4 (1973) 103-138*

[В] **Герман Вейль** Классические группы, их инварианты и представления. *М.: ИЛ* (1947)

[ГКФ] **И.М.Гельфанд, Д.А.Каждан, Д.Б.Фукс** Действия бесконечномерных алгебр Ли. *Функц.анализ* (1972)

[Г] **V. W. Guillemin** Notes on Gelfand-Fucks.cohomology. *M.I.T.* (1973)

[ГФ] **И.М.Гельфанд, Д.Б.Фукс** Когомологии алгебры Ли формальных векторных полей *Изв. Акад. Наук СССР, Сер. Мат., 34, 2,* (1970)

[ГФФ] **И.М.Гельфанд, Б.Л.Фейгин, Д.Б.Фукс** Когомологии алгебры Ли формальных векторных полей с коэффициентами в сопряжённом представлении и вариации характеристических классов слоений. *Функц.Анализ т.8, вып.2,* (1974)

[Ст] **Ричард Стенли** Перечислительная комбинаторика *русский перевод Мир 1990*

[Фе] **Б.Л.Фейгин** Характеристические классы флагов слоений *Функц.Анализ т.9, вып.4,* (1975)

[ФФШ] **Feigin B., Felder G., Shoikhet B.** Hochschild cohomology of the Weyl algebra and traces in deformation quantization *math.QA/0311303*

[ФЦ] **Feigin B.L., Tsygan B.L.** Riemann-Roch theorem and Lie algebra cohomology 1. *Proc. Winter Sch. Geom. Phys., Srni/Czech. 1988, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. 21, 15-52 (1989).* 15-52.

[Фу] **Фукс Д.Б.** Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. *Москва Наука* (1984)

[Х] **Хорошкин А.С.** Алгебра Ли формальных векторных полей, расширенных формальными $\mathbf{g}$-значными функциями. *Труды семинаров ПОМИ, т.335* 2006