УДК 512.745.2

Вариация фактора Мамфорда действия тора на многообразии полных флагов

Жгун В.С.

Аннотация

В работе изучается вариация фактора Мамфорда действия максимального тора T на многообразии флагов G/B в зависимости от проективного вложения $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$, где T-линеаризация приходит из стандартной G-линеаризации. Для этого описываются линейные оболочки носителей полустабильных орбит, что позволяет вычислить ранг группы Пикара фактора $(G/B)^{ss}/\!\!/T$ в случае, когда группа G не содержит простых компонент типа A_n.

Пусть G — полупростая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, T — максимальный тор в G, а B — содержащая его борелевская подгруппа. Рассмотрим действие T на G/B левыми сдвигами. Пусть χ — некоторый строго доминантный вес. Хорошо известно, что G/B G-эквивариантно вкладывается в проективизацию $\mathbb{P}(V(\chi))$ неприводимого модуля $V(\chi)$ старшего веса χ как проективизация орбиты старшего вектора. Так реализуются все G-эквивариантные вложения $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}^N$. Обозначим через L_χ ограничение на G/B G-линеаризованного пучка $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbb{P}(V(\chi))$. Тогда, согласно [3], можно определить открытое по Зарисскому подмножество $X^{ss}_{L_\chi}$ флагового многообразия $X = G/B$, для которого существует категорный фактор $X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T$ для действия T. В настоящей работе мы рассмотрим вариацию фактора Мамфорда в зависимости от T-линеаризованного пучка L_χ. Также мы опишем линейные оболочки носителей полустабильных T-орбит, что позволит нам вычислить ранг группы Пикара $Pic(X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T)$ проективного многообразия $X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T$ (в зависимости от доминантного веса χ). Заметим, что в данном случае $Pic(X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T)$ — конечно порожденная свободная абелева группа.

Для удобства читателя напомним определение множества (полу)стабильных точек.

Определение Пусть X — алгебраическое многообразие с действием группы G, L — обратимый обильный G-линеаризованный пучок на X.

(i) Множеством полустабильных точек называется $X^{ss}_L = \{x \in X : \exists n > 0, \exists \sigma \in \Gamma(X, L^{\otimes n})^G,\ \sigma(x) \neq 0\}$.

(ii) Множеством стабильных точек называется $X^s_L = \{x \in X^{ss}_L :$ орбита Gx замкнута в X^{ss}_L и стабилизатор G_x конечен $\}$

Орбиты действия максимального тора T на флаговых многообразиях изучались, в частности, в работах [7],[8],[12]. В работе [8] доказывается нормальность замыканий типичных T-орбит на G/P (где $P \supseteq B$ — параболическая подгруппа). В работе [7] изучается нормальность необщих T-орбит на G/P. В [12] выясняется вопрос, для каких групп G и их параболических подгрупп P возможно равенство $(G/P)^{ss}_L = (G/P)^s_L$ для некоторого обильного пучка L.

В первой части работы мы выведем критерий Сешадри [13] стабильности точки на G/B относительно действия максимального тора и разобьем камеру Вейля C на классы GIT-эквивалентности, для точек которых совпадают множества $X^{ss}_{L_\chi}$, во второй опишем линейные оболочки носителей замкнутых T-орбит подмногообразия $X^{ss}_{L_\chi}$, в третьей применим полученные сведения к вычислению ранга $Pic(X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T)$ в случае, когда группа G не содержит простых компонент типа A_n.

Автор глубоко признателен своему научному руководителю И.В.Аржанцеву за тему работы, а также за постоянное внимание к ней. Также он хочет поблагодарить Д.А.Тимашева, замечания которого позволили существенно упростить доказательство теоремы 3.1, и Э.Б.Винберга за полезные комментарии и обсуждение некоторых вопросов.

В последующих публикациях автор надеется разобрать случай A_n, а также изучить вариацию фактора Мамфорда не только для стандартной, но и для всех возможных T-линеаризаций обильных линейных расслоений над G/B.

Зафиксируем обозначения.

Готическими буквами будем обозначать алгебры Ли, соответствующие группам Ли.

$\Xi = \Xi(T)$ — решетка характеров тора T. Двойственная к ней решетка отождествляется с решеткой однопараметрических подгрупп $\Lambda(T)$ с помощью инвариантного относительно группы Вейля спаривания, которое мы обозначим $\langle .;. \rangle$. $\Xi_{\mathbb{Q}} = \Xi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ — рациональные характеры тора T. $\Lambda_{\mathbb{Q}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ — рациональные однопараметрические подгруппы тора T. $W = N_G(T)/T$ — группа Вейля. На $\Xi_{\mathbb{Q}}$ мы введем W-инвариантное скалярное произведение $(.;.)$, которое позволит отождествить $\Xi_{\mathbb{Q}}$ с $\Lambda_{\mathbb{Q}}$.

Δ — система корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно тора T. $\Delta^+(\Delta^-)$ — система положительных (отрицательных) корней относительно борелевской подалгебры $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$. Π — система простых корней. $w_0 \in W$ — самый длинный элемент группы Вейля. C — положительная камера Вейля.

Пусть $\widetilde{\Delta} \subset \Delta$ — подсистема корней, то есть множество корней, являющееся абстрактной системой корней. $C_{\widetilde{\Delta}} := \{\chi \in \Xi_{\mathbb{Q}} | (\chi; \alpha_i) \geqslant 0$, для всех $\alpha_i \in \widetilde{\Delta}^+\}$ обозначает положительную камеру Вейля для системы корней $\widetilde{\Delta}$.

Подсистемы корней $\widetilde{\Delta} \subset \Delta$, для которых выполнено $\widetilde{\Delta} = \langle \widetilde{\Delta} \rangle \cap \Delta$ (где $\langle \widetilde{\Delta} \rangle$ обозначает линейную оболочку системы $\widetilde{\Delta}$), мы будем называть насыщенными.

$V(\chi)$ — неприводимый G-модуль со старшим строго доминантным весом $\chi \in C \cap \Xi$ и старшим вектором $v_\chi \in V(\chi)$.

Пусть тор T действует на линейном пространстве $V = \bigoplus\limits_{\lambda \in \Xi} V_\lambda$ (V_λ — весовая компонента веса $\lambda \in \Xi$), $v = \sum\limits_{\lambda \in \Xi} v_\lambda$, где $v_\lambda \in V_\lambda$ и $v_\lambda \neq 0$. Обозначим через $supp(v) \subset \Xi_{\mathbb{Q}}$ выпуклую оболочку весов вектора v. Заметим, что $supp(v) = supp(tv)$ для любого $t \in T$, тем самым корректно определен носитель T-орбиты, обозначаемый $supp(Tv)$. Также определим носитель T-инвариантного множества, как выпуклую оболочку носителей всех T-орбит из этого множества. Пусть $x \in \mathbb{P}(V)$ — точка, отвечающая прямой, порожденной вектором $v \in V$. Обозначим $supp(Tx \hookrightarrow \mathbb{P}(V))$ носитель орбиты $Tv \hookrightarrow V$. Множество весов T-орбиты при вложении $Tx \subset \mathbb{P}(V(\chi))$ обозначим $Pd_\chi(Tx)$.

Далее, если не оговорено противное, везде рассматривается G-эквивариантное замкнутое вложение $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$ в качестве G-орбиты прямой, порожденной старшим вектором v_χ.

1. Критерий стабильности точки $x \in G/B$ относительно действия T.

Как мы увидим позднее, стабильность точки зависит от того, в каком многообразии Шуберта она лежит, поэтому ниже приведем без доказательства лемму из работы И.Н.Берштейна, И.М.Гельфанда, С.И.Гельфанда, описывающую строение многообразий Шуберта при данном проективном вложении.

Лемма 1.1($[1, 2.12]$) Пусть $w \in W$ — элемент группы Вейля, BwB/B — соответствующая ему клетка Шуберта. Рассмотрим замкнутое вложение $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$ (где χ — строго доминантный вес). Пусть $f \in V(\chi)$ — вектор из орбиты старшего вектора. Тогда $\langle f\rangle \in BwB/B \Leftrightarrow w\chi \in supp(f)$ и $f \in \mathfrak{U}(\mathfrak{b})v_{w\chi}$, где $\mathfrak{U}(\mathfrak{b})$ — универсальная обертывающая алгебры Ли $\mathfrak{b}$, а $v_{w\chi} = wv_{\chi}$ — вектор веса $w\chi$, входящего в неприводимое представление $V(\chi)$ с кратностью 1.$\blacksquare$

Используя эту лемму легко доказать следующий критерий стабильности, принадлежащий Сешадри [13] (Утверждение 1.5). Мы приведем доказательство отличное от доказательства самого Сешадри.

Но сначала напомним определение численной функции Мамфорда для действия тора и численный критерий Мамфорда.

Определение 1.3 Пусть L — обильное T-линеаризованное расслоение на T-многообразии X, определяющее T-эквивариантное вложение X в проективное пространство $\mathbb{P}(V)$, $\lambda \in \Lambda(T)$ — однопараметрическая подгруппа. Тогда для точки $x \in \mathbb{P}(V)$ значение численной функцией Мамфорда определяется как

$$\mu^L(x, \lambda) = \min_{\tau \in supp(Tx)} \langle \tau; \lambda\rangle.$$

Численный критерий Мамфорда 1.4 ([3]) Пусть X — многообразие с действием T, а L — обильное T-линеаризованное расслоение на нем, задающее T-эквивариантное вложение X в проективное пространство $\mathbb{P}(V)$. Точка $x \in \mathbb{P}(V)$ (полу)стабильна тогда и только тогда, когда $\mu^L(x, \lambda)(\leqslant)\ <\ 0$ для любой нетривиальной однопараметрической подгруппы $\lambda \in \Lambda(T)$.

Утверждение 1.5 (Сешадри [13]) Пусть C — камера Вейля, $x \in G/B$ и $x = bwB/B$. Рассмотрим очень обильный пучок L_χ, отвечающий строго доминантному весу χ. Пусть $\lambda \in C$ — однопараметрическая подгруппа, лежащая в камере Вейля. Тогда $\mu^{L_\chi}(x, \lambda) = \langle w\chi; \lambda\rangle$.

Доказательство. Рассмотрим носитель орбиты Tx. Поскольку $Tx \subset BwB/B$, по предыдущей лемме вес $w\chi \in supp(Tx)$. Также имеем $supp(Tx) \subset supp(BwB/B) = supp(\mathfrak{U}(\mathfrak{b})v_{w\chi})$, где последнее равенство опять следует из предыдущей леммы.

Если вес τ принадлежит $supp(\mathfrak{U}(\mathfrak{b})v_{w\chi})$, то $\tau = w\chi + \sum\limits_{\alpha_i \in \Delta^+} c_i\alpha_i$, где $c_i \geqslant 0$. Спаривая вес τ с однопараметрической подгруппой λ получаем:

$$\langle \tau; \lambda \rangle = \langle w\chi; \lambda \rangle + \sum_{\alpha_i \in \Delta^+} c_i \langle \alpha_i; \lambda \rangle \geqslant \langle w\chi; \lambda \rangle,$$

так как $c_i \geqslant 0$ и $\langle \lambda; \alpha_i \rangle \geqslant 0$. Теперь вычислим численную функцию:

$$\mu^{L_\chi}(x, \lambda) = \min_{\tau \in supp(Tx)} \langle \tau; \lambda \rangle = \langle w\chi; \lambda \rangle. \blacksquare$$

Получим описание множества полустабильных точек. Для этого введем следующее определение.

Определение 1.6 Элемент $w \in W$ называется χ-полустабильным, если $\langle w\chi; \lambda \rangle \leqslant 0$ для любого $\lambda \in C$. Множество таких w обозначим W_χ^{st}.

Теорема 1.7 Рассмотрим G-эквивариантное замкнутое вложение $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$. Тогда множество полустабильных точек относительно действия тора (с линеаризацией, пришедшей со стандартного действия T на $V(\chi)$) может быть найдено по следующей формуле:

$$X_{L_\chi}^{ss} = \bigcap_{\widetilde{w} \in W} \bigcup_{w \in W_\chi^{st}} \widetilde{w}BwB/B$$

Доказательство. Действительно, $\bigcup\limits_{w \in W_\chi^{st}} BwB/B$ — множество точек x, таких что $\mu^{L_\chi}(x, \lambda) \leqslant 0$ для любой однопараметрической подгруппы $\lambda \in C$.

Воспользуемся известным равенством для численных функций: $\mu^{L_\chi}(x, \lambda) = \mu^{L_\chi}(\widetilde{w}x, \widetilde{w}\lambda)$, где $\widetilde{w}$ — представитель элемента группы Вейля в нормализаторе тора T.

Из вышесказанного следует, что условие полустабильности точки x, а именно $\mu^{L_\chi}(x, \lambda) \leqslant 0$ для любого $\lambda \in \Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$, может быть переписано как $\mu^{L_\chi}(\widetilde{w}x, \lambda) \leqslant 0$ для любых $\lambda \in C$ и $\widetilde{w} \in W$. Таким образом, множество удовлетворяющее этим условиям может быть получено как:

$$X_{L_\chi}^{ss} = \bigcap_{\widetilde{w} \in W} \widetilde{w} \Big(\bigcup_{w \in W_\chi^{st}} BwB/B \Big) = \bigcap_{\widetilde{w} \in W} \bigcup_{w \in W_\chi^{st}} \widetilde{w}BwB/B$$

$\blacksquare$

Замечание 1.8 Множество $X^{ss}_{L_\chi}$ является наибольшим $N_G(T)$-инвариантным подмножеством в $\bigcup\limits_{w\in W^{st}_\chi} BwB/B$.

Утверждение 1.9 Рассмотрим два обильных T-линеаризованных расслоения L_{χ_1} и L_{χ_2}. Тогда из $X^{ss}_{L_{\chi_1}} = X^{ss}_{L_{\chi_2}}$ следует $W^{st}_{\chi_1} = W^{st}_{\chi_2}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого элемента $w \in W^{st}_\chi$ найдется полустабильная T-орбита, лежащая в клетке BwB/B. Отсюда будет следовать, что множество W^{st}_χ однозначно восстанавливается по $X^{ss}_{L_\chi}$. Имеем $\langle w\chi;\lambda\rangle \leqslant 0$ для любого $\lambda \in C$, что равносильно $0 \in w\chi + \sum\limits_{\alpha_i\in\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha_i$. Откуда следует, что $0 \in supp(BwB/B)$ (согласно следствию 2.6, которое мы докажем в следующей части из-за его технической сложности). Но для типичной орбиты Tx из клетки BwB/B имеем $supp(Tx) = supp(BwB/B)$, тем самым $0 \in supp(Tx)$, то есть типичная орбита клетки BwB/B полустабильна.$\blacksquare$

Разобьем камеру Вейля на клетки C_i — классы GIT-эквивалентности, характеризуемые следующим свойством: два характера χ_1, χ_2 принадлежат одной клетке C_i, тогда и только тогда, когда $X^{ss}_{L_{\chi_1}} = X^{ss}_{L_{\chi_2}}$, что по предыдущему утверждению эквивалентно $W^{st}_{\chi_1} = W^{st}_{\chi_2}$.

Пусть A — конус, порожденный простыми корнями. Определим по элементу $\chi \in C^0$ конус $\sigma_\chi = C \cap \bigcap\limits_{\substack{w_i\in W\\ \chi\in -w_i^{-1}A}} -w_i^{-1}A$.

Теорема 1.10 (Вариация фактора Мамфорда)

Множество конусов σ_χ для $\chi \in C^0$ конечно. Они образуют веер с носителем C.

Внутренности этих конусов отвечают классам GIT-эквивалентности.

Доказательство. Конечность множества следует из того, что конуса σ_χ получаются пересечением конусов из конечного набора $\{-w_i^{-1}A | w_i \in W\}$. Также из определения ясно, что либо внутренности конусов не пересекаются, либо один является гранью другого (в частности, эти конуса могут совпадать).

По определению $w \in W^{st}_\chi$, когда $\langle w\chi;\lambda\rangle \leqslant 0$ для любого $\lambda \in C$. Это равносильно $w\chi \in -A$, что в свою очередь эквивалентно $\chi \in -w^{-1}A$. Таким образом, внутренность конуса σ_χ, соответствует в точности тем элементам $\widetilde{\chi}$, для которых $W^{st}_{\widetilde{\chi}} = W^{st}_\chi$. $\blacksquare$

Теперь перейдем к изучению множества полустабильных точек. В последующих двух утверждениях мы докажем, что для полупростых групп, не содержащих простых компонент типа A_n, коразмерность множества нестабильных точек не меньше двух.

Лемма 1.11 Пусть группа G не содержит простых компонент типа A_n. Пусть $s_\alpha \in W$ — отражение, отвечающее простому корню α. Тогда $s_\alpha w_0$ принадлежит множеству W_χ^{st}.

Доказательство. Нужно проверить, что $\langle s_\alpha w_0 \chi; \lambda \rangle \leqslant 0$ для любого $\lambda \in C$. Обозначим π_α фундаментальный вес, двойственный к простому корню α. Если $\beta, \gamma \in \Pi$, то $(\pi_\gamma; \beta) = \frac{(\beta;\beta)}{2}\delta_{\gamma\beta}$. Также имеет место равенство $s_\gamma \pi_\gamma = \pi_\gamma - \gamma$.

Вес χ — доминантный, значит $w_0\chi$ — антидоминантный и $w_0\chi = -\sum c_\beta \pi_\beta$, где $c_\beta > 0$. Так как $\lambda \in C$ имеем $\lambda = \sum a_\beta \pi_\beta$, где $a_\beta \geqslant 0$. Итак,

$-\langle s_\alpha w_0 \chi; \lambda \rangle = \langle s_\alpha \sum c_\beta \pi_\beta; \sum a_\beta \pi_\beta \rangle = (c_\alpha(\pi_\alpha - \alpha) + \sum\limits_{\beta \neq \alpha; \beta \in \Pi} c_\beta \pi_\beta; a_\alpha \pi_\alpha + \sum\limits_{\beta \neq \alpha; \beta \in \Pi} a_\beta \pi_\beta) = c_\alpha a_\alpha ((\pi_\alpha; \pi_\alpha) - \frac{(\alpha;\alpha)}{2}) + (\sum\limits_{\beta \neq \alpha; \beta \in \Pi} c_\beta \pi_\beta; \sum\limits_{\beta \neq \alpha; \beta \in \Pi} a_\beta \pi_\beta) + (c_\alpha \pi_\alpha; \sum\limits_{\beta \neq \alpha; \beta \in \Pi} a_\beta \pi_\beta) + (\sum\limits_{\beta \neq \alpha; \beta \in \Pi} c_\beta \pi_\beta; a_\alpha \pi_\alpha) \geqslant 0.$

Последнее неравенство выполнено так как $(\pi_\alpha; \pi_\alpha) - \frac{(\alpha;\alpha)}{2} \geqslant 0$ верно для простых систем корней отличных от A_n (что несложно получить из таблицы 2 стр. 308-309 [2]), остальные же слагаемые неотрицательны, так как это скалярное произведение двух доминантных весов.■

Теорема 1.12 Пусть группа G не содержит простых компонент типа A_n. Тогда дополнение до множества полустабильных точек в G/B имеет коразмерность не менее 2.

Доказательство. Применим формулу для множества полустабильных точек, учитывая, что по предыдущей лемме $s_\alpha w_0 \in W_\chi^{st}$ для всех $\alpha \in \Pi$, а также $w_0 \in W_\chi^{st}$:

$$X_{L_\chi}^{ss} = \bigcap_{\widetilde{w} \in W} \widetilde{w} \bigcup_{w \in W_\chi^{st}} BwB/B \supset \bigcap_{\widetilde{w} \in W} \widetilde{w} (\bigcup_{\alpha \in \Pi} Bs_\alpha w_0 B/B \cup Bw_0B/B)$$

Множество $\bigcup\limits_{\alpha \in \Pi} Bs_\alpha w_0 B/B \cup Bw_0B/B$ уже имеет дополнение коразмерности два, отсюда $X_{L_\chi}^{ss}$ имеет дополнение коразмерности не менее двух, так как является конечным пересечением множеств с дополнением коразмерности не менее двух (сдвиг на $\widetilde{w}$ не меняет коразмерности дополнения).$\blacksquare$

Следствие 1.13 В условиях предыдущей теоремы $\mathrm{Pic}(G/B) = \mathrm{Pic}(X^{ss}_{L_\chi})$, а также $\mathrm{Pic}_T(G/B) = \mathrm{Pic}_T(X^{ss}_{L_\chi})$ (где $\mathrm{Pic}_T(X)$ обозначает группу T-линеаризованных линейных расслоений на T-многообразии X).

Пример 1.14 Приведем пример, который показывает, что в случае системы корней A_2 утверждения леммы 1.11 и теоремы 1.12 перестают быть верными.

Пусть $\chi = a\pi_1 + b\pi_2$, где $a > b$ (см. рис.1). Тогда $\langle s_{\alpha_2} w_0 \chi; \lambda\rangle > 0$, для $\lambda = \pi_2 \in C$. Таким образом, $s_{\alpha_2} w_0 \notin W^{st}_\chi$, а значит дивизор $B s_{\alpha_2} w_0 B/B$ состоит из неполустабильных точек.

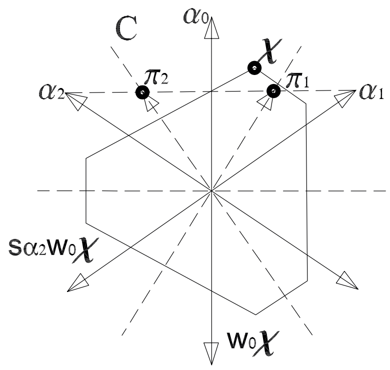

рис.1

2. Линейные оболочки носителей полустабильных T-орбит

В этой части работы мы опишем линейные оболочки носителей T-орбит на $X^{ss}_{L_\chi}$.

Пусть $x \in G/B$ представлен в виде $x = bww_0B/B$. Разложим $b \in B$ в произведение элемента тора на унипотентный элемент $b = tu$. Тогда $supp(Tx) = supp(Tbww_0B/B) = supp(Tuww_0B/B)$. Представим элемент u в виде экспоненты от элемента алгебры Ли:

$$u = \exp(\sum_{\alpha_i \in \bar{\Delta}^+ \subseteq \Delta^+} c_i e_i) = \mathrm{id} + \frac{\sum c_i e_i}{1!} + \frac{(\sum c_i e_i)^2}{2!} + \ldots,$$

где e_i соответствует положительному корню α_i; $c_i \neq 0$, а $\bar{\Delta}^+ \subseteq \Delta^+$ — некоторый набор положительных корней. Будем считать, что элемент u записан в нормальной форме, то есть $\bar{\Delta}^+ \subseteq \Delta^+ \cap w\Delta^+$ [5, 28.4].

Так как $supp(ww_0B/B) = ww_0\chi$ и действие T не меняет носитель, то, исходя из формулы для u, получаем, что $supp(Tx) \subset ww_0\chi + \sum\limits_{\alpha_i \in \bar{\Delta}^+} \mathbb{Z}_+\alpha_i$.

Докажем следующее утверждение, описывающее линейную оболочку носителя в терминах подсистемы корней $\widetilde{\Delta}^+$, для которой мы предполагаем, что она насыщена.

Теорема 2.1 Пусть w — элемент группы Вейля, такой что $ww_0 \in W_\chi^{st}$, $\widetilde{\Delta} \subseteq \Delta$ — насыщенная подсистема корней, для которой $0 \in (ww_0\chi + \sum\limits_{\alpha_i \in \widetilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha_i)$. Тогда носитель Т-орбиты $supp(Tuww_0B/B)$, где $u = \exp(\sum\limits_{\alpha_i \in \widetilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+} c_ie_i)$, содержит ноль для почти всех значений c_i.

Доказательство. Докажем следующую лемму.

Лемма 2.2 В условиях предыдущей теоремы пусть α_0 — старший корень системы корней $\widetilde{\Delta}$. И пусть во множестве весов орбиты содержится строго антидоминантный вес $M \in (-C)^0 \cap supp(Tuw_0B/B)$. Тогда вес $\alpha_0 + M$ также принадлежит множеству весов T-орбиты.

Доказательство. Пусть v_M — вектор веса M, входящий в весовое разложение вектора, соответствующего точке орбиты Tx. Напишем формулу для вектора v_M:

$$v_M = \sum_{M = w_0\chi + \sum\limits_{\alpha_i \in \bar{\Delta}^+} a_i\alpha_i} \frac{c_{\alpha_0}^{a_0} \cdots c_{\alpha_l}^{a_l}}{(\sum\limits_i a_i)!} Sym(\underbrace{e_{\alpha_0}, \ldots, e_{\alpha_0}}_{a_0}, \ldots, \underbrace{e_{\alpha_l}, \ldots, e_{\alpha_l}}_{a_l}) v_{w_0\chi},$$

где $Sym()$ означает сумму по всем перестановкам произведений переменных, стоящих в скобках.

Заметим, что если вектор v_M ненулевой при почти всех значениях коэффициентов $\{c_{\alpha_i}\}$ $\Leftrightarrow$ найдется набор $\{a_i\}$, такой что $Sym(\underbrace{e_{\alpha_0}, \ldots, e_{\alpha_0}}_{a_0}, \ldots, \underbrace{e_{\alpha_l}, \ldots, e_{\alpha_l}}_{a_l}) v_{w_0\chi} \neq 0$ (обозначим этот вектор v_M^0). Таким образом, чтобы доказать, что вектор $v_{M+\alpha_0}$, ненулевой (при почти всех значениях $\{c_{\alpha_i}\}$) достаточно доказать что $Sym(e_{\alpha_0}, \underbrace{e_{\alpha_0}, \ldots, e_{\alpha_0}}_{a_0}, \ldots, \underbrace{e_{\alpha_l}, \ldots, e_{\alpha_l}}_{a_l}) v_{w_0\chi} \neq 0$.

Покажем, что вектор $Sym(e_{\alpha_0}, \underbrace{e_{\alpha_0}, \ldots, e_{\alpha_0}}_{a_0}, \ldots, \underbrace{e_{\alpha_l}, \ldots, e_{\alpha_l}}_{a_l}) v_{w_0\chi}$ пропорционален вектору $e_{\alpha_0}v_M^0$. Элемент e_{α_0} коммутирует со всеми e_{α_i}, где $\alpha_i \in \widetilde{\Delta}^+$ ($[e_{\alpha_i}, e_{\alpha_0}] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha_i+\alpha_0} = 0$, так как вес $\alpha_i + \alpha_0$ не является корнем алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Значит e_{α_0} можно вынести из-под знака симметризации.

Тем самым мы завершим доказательство леммы, если покажем, что $e_{\alpha_0} v_M^0 \neq 0$. Рассмотрим представление $\mathfrak{sl}_2 = \langle e_{\alpha_0}, f_{\alpha_0}, h_{\alpha_0} \rangle$, порожденное вектором v_M^0. Тогда имеем $e_{\alpha_0} v_M^0 \neq 0$, так как M — строго антидоминантен, а значит v_M^0 не может быть старшим вектором.■

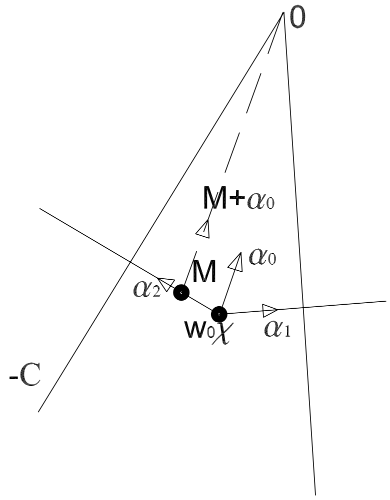

рис.2

Замечание 2.3 В лемме антидоминантность веса M можно заменить на более слабое условие, а именно $(M; \alpha_0) < 0$. Тогда $e_{\alpha_0} v_M^0 \neq 0$. Действительно, из условия $(M; \alpha_0) < 0$ следует, что v_M^0 не может быть старшим вектором для соответствующего представления $\mathfrak{sl}_2$ (остальная часть доказательства остается без изменений).

Докажем следующее вспомогательное утверждение. Но перед этим введем следующие обозначения. Пусть M — рациональный вес, а $\widetilde{\Delta}$ — некоторая система корней. Обозначим $H_M(\widetilde{\Delta}^+)$ аффинный конус $M + \sum\limits_{\alpha_i \in \widetilde{\Delta}^+} \mathbb{Q}_+ \alpha_i$, а $\delta H_M(\widetilde{\Delta}^+)$ — его границу. Иногда мы не будем указывать систему корней в этих обозначениях, что не должно привести к двусмысленности.

Утверждение 2.4 Пусть $ww_0\chi$ — такой вес, что $0 = ww_0\chi + \sum\limits_{\alpha_i \in \Delta^+} c_i \alpha_i$, где $c_i \geqslant 0$. Тогда любой луч из $(-C)$ с началом в нуле пересекает границу $\delta H_{ww_0\chi}(\Delta^+)$, причем пересечение лежит внутри многогранника Pd_χ весов представления $V(\chi)$.

Доказательство. Пусть $l(t) = -t \sum b_i \pi_i$, где $b_i \geqslant 0$ — луч, лежащий в $(-C)$ с началом в нуле. Конус $H_{ww_0\chi}$ задается неравенствами $(\pi_j, x) \geqslant (\pi_j, ww_0\chi)$. Пусть $l(t_j)$ — точка пересечения прямой, на которой лежит луч, с j-ой гиперплоскостью, если такая есть. (Прямая может быть параллельна гиперплоскости. Однако, она не может быть параллельна всем гиперплоскостям, так как конус $H_{ww_0\chi}$ телесный. Тем самым хотя бы одна точка пересечения прямой и гиперплоскости есть.) Для доказательства первого утверждения достаточно показать, что все $t_j \geqslant 0$. Уравнение пересечения прямой с j-ой гранью записывается в виде $(\pi_j, l(t_j)) - (\pi_j, ww_0\chi) = -t_j \sum\limits_i b_i(\pi_i, \pi_j) + \sum\limits_i c_i(\alpha_i, \pi_j) = 0$. Отсюда $t_j = \frac{\sum\limits_i c_i(\alpha_i, \pi_j)}{\sum\limits_i b_i(\pi_i, \pi_j)} \geqslant 0$, так как $(\alpha_i, \pi_j) \geqslant 0$, $(\pi_i, \pi_j) \geqslant 0$, $b_i, c_i \geqslant 0$. Минимальное из t_j даст точку пересечения $l(t)$ и $\delta H_{ww_0\chi}$.

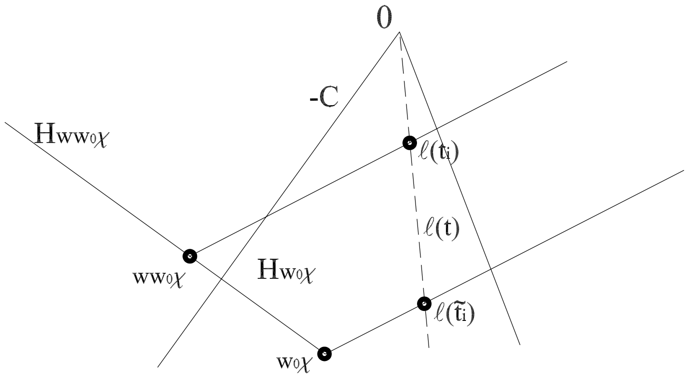

рис.3

Докажем теперь, что пересечение лежит в многограннике Pd_χ весов представления. Для этого надо показать, что это пересечение принадлежит конусу $H_{w_0\chi}$ (так как $P_\chi \cap (-C) = H_{w_0\chi} \cap (-C)$). Рассмотрим решения $\tilde{t}_j$ уравнений $(\pi_j, l(\tilde{t}_j)) = (\pi_j, w_0\chi)$ (уравнения граней конуса $H_{w_0\chi}$). Так как грани конуса $H_{w_0\chi}$ параллельны соответствующим граням конуса $H_{ww_0\chi}$, то достаточно показать, что $\tilde{t}_j \geqslant t_j$. Мы знаем, что $ww_0\chi = w_0\chi + \sum\limits_i d_i\alpha_i$, где $d_i \geqslant 0$, тем самым $\tilde{t}_j = \frac{\sum\limits_i d_i(\pi_j, \alpha_i) - \sum\limits_i (\pi_j, ww_0\chi)}{\sum\limits_i b_i(\pi_i, \pi_j)} \geqslant \frac{-\sum\limits_i (\pi_j, ww_0\chi)}{\sum\limits_i b_i(\pi_i, \pi_j)} = t_j$, так как $(\pi_j, \alpha_i) \geqslant 0$ и $d_i \geqslant 0$.$\square$

Докажем следующую лемму.

Лемма 2.5 Пусть $ww_0 \in W^{st}_\chi$, α_0 — старший корень насыщенной подсистемы $\widetilde{\Delta}$, для которой $ww_0\chi = -\sum\limits_{\alpha_i \in \widetilde{\Delta}^+} c_i\alpha_i$, где $c_i \geqslant 0$. Тогда $\alpha_0 \in \widetilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+$.

Доказательство. Вес $w_0\chi$ строго антидоминантен, поэтому некоторый корень α положителен $\Leftrightarrow$ когда $\langle w_0\chi;\alpha\rangle \leqslant 0$. Так как $ww_0\chi = -\sum\limits_{\alpha_i \in \widetilde{\Delta}^+} c_i\alpha_i$, где $c_i \geqslant 0$, то $\langle ww_0\chi;\lambda\rangle \leqslant 0$, для $\forall\lambda \in C_{\widetilde{\Delta}}$. Так как α_0 — старший корень системы $\widetilde{\Delta}$, то он принадлежит замыканию камеры Вейля $C_{\widetilde{\Delta}}$ и его можно взять в качестве λ. Таким образом, $\langle ww_0\chi;\alpha_0\rangle = \langle w_0\chi; w^{-1}\alpha_0\rangle \leqslant 0$, то есть корень $w^{-1}\alpha_0$ положителен. ■

Построим кусочно-линейный путь из точки ноль в точку $ww_0\chi$. Будем строить его по индукции. Опишем базу, а затем шаг индукции.

Пусть, как и в предыдущей лемме, α_0 — старший корень насыщенной подсистемы $\widetilde{\Delta}$. К тому же $ww_0\chi = -\sum\limits_{\alpha_i \in \widetilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+} c_i\alpha_i$, где $c_i \geqslant 0$.

Рассмотрим луч, проходящий через корень $-\alpha_0$ с началом в точке 0. Так как α_0 — старший корень, этот луч принадлежит антидоминантной камере Вейля $C_{\widetilde{\Delta}}$. По утверждению 2.4 он пересечет $\delta H_{ww_0\chi}(\widetilde{\Delta}^+) \cap (-C_{\widetilde{\Delta}})$ в некоторой точке M_1. Таким образом, M_1 принадлежит грани конуса $H_{ww_0\chi}(\widetilde{\Delta}^+)$. Эта грань, очевидно, является конусом $H_{ww_0\chi}(\widetilde{\Delta}^+_1)$, для некоторой насыщенной подсистемы корней $\widetilde{\Delta}_1 \subset \widetilde{\Delta}$. Так как M_1 лежит в антидоминантной камере Вейля, то она также лежит и в камере $-C_{\widetilde{\Delta}_1}$. Также можно утверждать, что $M_1 = -k_0\alpha_0$, для $k_0 \in \mathbb{Q}_+$.

Опишем шаг индукции. На i-ом шаге дана последовательность насыщенных подсистем корней $\Delta^+ \supseteq \widetilde{\Delta}^+_1 \supseteq \ldots \supseteq \widetilde{\Delta}^+_{i-1} \supseteq \widetilde{\Delta}^+_i$, а также последовательность корней $\{\alpha_0, \beta_1, \ldots, \beta_i\}$, где β_j — старший корень подсистемы $\widetilde{\Delta}_j$. И уже построена последовательность весов $\{0, M_1, M_2, \ldots, M_i\}$, такая что $M_j \in H_{ww_0\chi}(\widetilde{\Delta}^+_j) \cap (-C_{\widetilde{\Delta}_j})$, а также $M_j = M_{j-1} - k_{j-1}\alpha_{j-1}$, где $k_{j-1} \in \mathbb{Q}_+$.

Построим вес M_{i+1} и систему корней $\widetilde{\Delta}^+_{i+1}$. Вес M_i лежит в пересечении $H_{ww_0\chi}(\widetilde{\Delta}^+_i) \cap (-C_{\widetilde{\Delta}_i})$. Так как старший корень β_i принадлежит камере Вейля $C_{\widetilde{\Delta}_i}$, то точка пересечения луча $M_i - t\beta_i$ (где $t \in \mathbb{Q}_+$) с началом в M_i, и границы $H_{ww_0\chi}(\widetilde{\Delta}^+_i) \cap (-C_{\widetilde{\Delta}_i})$ лежит на $\delta H_{ww_0\chi}(\widetilde{\Delta}^+_i)$. Пусть грани конуса $H_{ww_0\chi}(\widetilde{\Delta}^+_i)$, которой принадлежит M_i, соответствует насыщенная подсистема корней $\widetilde{\Delta}^+_{i+1} \subset \widetilde{\Delta}^+_i$. Заметим, что

$M_{i+1} \in (-C_{\widetilde{\Delta}_{i+1}})$, а также число k_{i+1} рационально, так как M_i рационален и конус $H_{ww_0\chi}(\widetilde{\Delta}_i^+)$ рационален. Тем самым все условия выполнены.

Наше построение закончится, когда $M_i = ww_0\chi$ для некоторого i. Все веса M_i рациональны, значит найдется такое N, что все NM_i — целые, а также Nk_i — целые. Если вместо веса $ww_0\chi$ мы возьмем вес $Nww_0\chi$ (это заменит вложение $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$ на $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(N\chi))$, что не повлияет на утверждение теоремы), то путь, построенный выше, будет проходить через целые веса NM_i. Также эти веса удовлетворяют равенствам $NM_{i+1} = NM_i - \tilde{k}_i\beta_i$, где $\tilde{k}_i$ — целые. В дальнейшем мы можем считать, что M_i удовлетворяют описанным выше условиям.

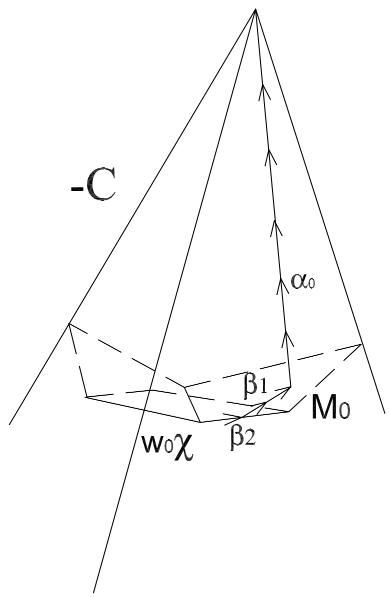

рис.4

Покажем теперь, что все веса M_i принадлежат весам орбиты $Tuww_0B/B$. Отсюда, в частности, будет следовать, что ноль принадлежит носителю орбиты $Tuww_0B/B$. Для этого воспользуемся индукцией. Заметим, что $ww_0\chi$ принадлежит весам орбиты $Pd_\chi(Tuww_0B/B)$. Пусть теперь вес $M_{i+1} + l\beta_i \in Pd_\chi(Tuww_0B/B)$ для некоторого l, $0 \leqslant l < k_i$, покажем, что и $M_{i+1} + (l+1)\beta_i \in Pd_\chi(Tuww_0B/B)$.

Для этого к весу $M_{i+1} + l\beta_i$, корню β_i и насыщенной системе корней $\widetilde{\Delta}_i$ применим усиленный вариант леммы 2.2 (замечание 2.3). Но для этого надо проверить, что условия леммы выполнены, а именно: $(M_{i+1} +$

$l\beta_i, \beta_i) < 0$ для всех $0 \leqslant l < k_i$ $(*)$, а также то, что корень β_i входит в экспоненциальное представление u, то есть $\beta_i \in \widetilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+$ $(**)$. Также в случае, когда $\widetilde{\Delta}_i \subsetneq \Delta$ для применения леммы к весу $M_{i+1} + l\beta_i$ и системе $\widetilde{\Delta}_i$ необходимо, чтобы в формуле для $v_{M_{i+1}+l\beta_i}$ из леммы 2.2 встречались только e_{α_j}, для которых $\alpha_j \in \widetilde{\Delta}_i^+$. Но это условие выполнено, так как $M_{i+1} + l\beta_i \in ww_0\chi + \sum\limits_{\alpha_j \in \widetilde{\Delta}_i^+} \mathbb{Q}_+\alpha_j$, и конус $H_{ww_0\chi}(\widetilde{\Delta}_i^+)$ является гранью конуса $H_{ww_0\chi}(\widetilde{\Delta})$.

Итак, по построению $M_{i+1} = -(k_i\beta_i + \ldots + k_1\beta_1 + k_0\alpha_0)$, где β_j — старший корень системы $\widetilde{\Delta}_j^+$. Пусть β_j — старший корень системы $\widetilde{\Delta}_j^+ \supseteq \widetilde{\Delta}_{j+1}^+ \supseteq \ldots \supseteq \widetilde{\Delta}_i^+$. Отсюда $(\beta_j, \gamma) \geqslant 0$ для любого $\gamma \in \widetilde{\Delta}_j^+$, в частности $(\beta_j, \beta_m) \geqslant 0$ для всех $m \geqslant j$. Откуда следует, что $(\beta_j, \beta_i) \geqslant 0$ для любого j, а также $(\alpha_0, \beta_i) \geqslant 0$, так как $\beta_i \in \widetilde{\Delta}^+$, а α_0 — старший корень системы $\widetilde{\Delta}^+$.

Из вышесказанного следует $(M_{i+1} + l\beta_i, \beta_i) = -((k_i - l)(\beta_i, \beta_i) + \ldots + k_1(\beta_1, \beta_i) + k_0(\alpha_0, \beta_i)) < 0$, что доказывает $(*)$.

Теперь проверим $(**)$. По построению $-ww_0\chi = (k_l\beta_l + \ldots + k_1\beta_1 + k_0\alpha_0)$ для некоторого l. Заметим, что $(-w_0\chi, w^{-1}\beta_i) = (-ww_0\chi, \beta_i) = k_i(\beta_l, \beta_i) + \ldots + k_1(\beta_1, \beta_i) + k_0(\alpha_0, \beta_i) \geqslant 0$, так как $(\beta_j, \beta_i) \geqslant 0$ и $(\alpha_0, \beta_i) \geqslant 0$. Из неравенства $(-w_0\chi, w^{-1}\beta_i) \geqslant 0$ и из того, что вес $-w_0\chi$ строго доминантен, следует, что корень $w^{-1}\beta_i$ положителен, что и требовалось. ■

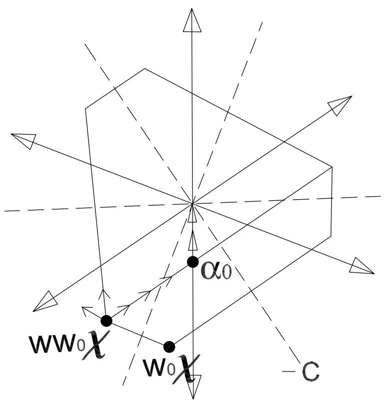

рис.5

Следствие 2.6 Пусть для строго доминантного веса χ и элемента группы Вейля $w \in W$ выполнено условие $0 \in ww_0\chi + \sum\limits_{\alpha_i \in \Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha_i$. Тогда это условие эквивалентно $0 \in ww_0\chi + \sum\limits_{\alpha_i \in \Delta^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha_i$, и носитель клетки Шуберта Bww_0B/B содержит ноль.

Доказательство. В доказательстве предыдущей теоремы был построен кусочно-линейный путь из $ww_0\chi$ в 0. При этом корни, которые входят в этот путь, удовлетворяют условию $\alpha_i \in \Delta^+ \cap w\Delta^+$. Заметим, что для построения этого пути было использовано лишь то, что $0 \in ww_0\chi + \sum\limits_{\alpha_i \in \Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha_i$. Из существования такого пути следует, что $0 \in ww_0\chi + \sum\limits_{\alpha_i \in \Delta^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha_i$.

Теперь мы можем воспользоваться предыдущей теоремой, откуда имеем $0 \in Supp(Tuww_0B/B) \subset Supp(Bww_0B/B)$ для почти всех значений c_i (где c_i — коэффициенты из экспоненциального разложения u при e_{α_i}, соответствующих корням $\alpha_i \in \Delta^+ \cap w\Delta^+$).$\blacksquare$

С помощью этого утверждения можно описать линейные оболочки носителей всех полустабильных орбит.

Утверждение 2.7 Рассмотрим полустабильную орбиту $Tuww_0B/B$ из клетки Bww_0B/B. Тогда найдется полустабильная орбита $T\tilde{u}ww_0B/B$ из той же клетки, такая что для $\tilde{u}$ имеет место экспоненциальное разложение $\tilde{u} = \exp(\sum\limits_{\alpha_i \in \widetilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+} c_ie_i)$, где подсистема $\widetilde{\Delta}$ насыщена, а ее линейная оболочка такая же, как у носителя орбиты $Tuww_0B/B$.

Доказательство. Рассмотрим экспоненциальное разложение $u = \exp(\sum\limits_{\alpha_i \in \widetilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+} c_ie_i)$ (сейчас мы не предполагаем, что $c_i \neq 0$), считая что элемент u выбран в нормальной форме, то есть $u \in U \cap wU$. Рассмотрим конус с вершиной в $ww_0\chi$, порожденный корнями $\alpha_i \in \widetilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+$ для которых $c_i \neq 0$. Пусть β_i — ребра этого конуса. Покажем, что в весовое разложение вектора из $V(\chi)$, соответствующего точке орбиты $Tuww_0B/B \subset \mathbb{P}(V(\chi))$, входят векторы $e_{\beta_i}v_{ww_0\chi} \neq 0$.

Применим к орбите элемент w^{-1}. Так как это элемент $N_G(T)$, то мы получим T-орбиту $Tu'w_0B/B$ (где $u' = w^{-1}uw$), только уже из открытой клетки (так как $w_0\chi \in supp(w^{-1}Tuww_0B/B)$ по лемме 1.1). К тому же, $\gamma \in \widetilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+$ — корень из экспоненциального представления u, тогда и только тогда, когда корень $w^{-1}\gamma \in \Delta^+ \cap w^{-1}\widetilde{\Delta}^+$ входит в экспоненциальное представление u'. Тем самым надо доказать, что $e_{w^{-1}\beta_i}v_{w_0\chi} \neq 0$.

Действительно, $w^{-1}\beta_i \in \Delta^+$, $w_0\chi$ — строго антидоминантен, тем самым $v_{w_0\chi}$ не может быть старшим вектором порожденного им представления $\mathfrak{sl}_2$ тройки $\langle e_{w^{-1}\beta_i}, f_{w^{-1}\beta_i}, h_{w^{-1}\beta_i}\rangle$. Что влечет нужное утверждение.

Так как β_i — ребра конуса, веса $ww_0\chi + \beta_i$ принадлежат носителю орбиты; действительно, в весовом разложении им отвечают вектора $e_{\beta_i}v_{ww_0\chi} \neq 0$ и только они (это весовое разложение получается при раскрытии скобок в экспоненциальном представлении). А так как носитель орбиты содержит ноль (орбита полустабильна), линейная оболочка носителя совпадает с линейной оболочкой корней $\langle\beta_1 \dots \beta_k\rangle_{lin}$. Рассмотрим подсистему корней $\widetilde{\Delta} = \Delta \cap \langle\beta_1 \dots \beta_k\rangle_{lin}$. Применяя предыдущую теорему к $\widetilde{\Delta}$, получаем орбиту специального вида, с такой же линейной оболочкой носителя, что и у исходной орбиты.■

Тем самым, для описания линейных оболочек носителей полустабильных орбит из клетки Bww_0B/B достаточно описать лишь насыщенные подсистемы $\widetilde{\Delta}$, для которых $0 \in (ww_0\chi + \sum\limits_{\alpha_i \in \widetilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha_i)$.

3. Вычисление ранга $\mathrm{Pic}(X^{ss}/\!\!/T)$ в случае группы G свободной от компонент типа A_n.

Согласно следствию 1.13, $\mathrm{Pic}_T(X^{ss}_{L_\chi}) = \mathrm{Pic}_T(G/B) \cong \mathrm{Pic}(G/B) \times \Xi(T)$ (последнее равенство следует из того, что любое линейное расслоение T-линеаризуемо, и любые две T-линеаризации линейного расслоения отличаются на характер тора).

Известно, что $\mathrm{Pic}(G/B) \cong \Xi(B) = \Xi(T)$ [4],[11]. Изоморфизм строится следующим образом: расслоению можно сопоставить характер действия B на слое над B-неподвижной точкой eB/B. Обратно, характеру χ можно сопоставить однородное расслоение $G *_B k_\chi$ (где k_χ-линейное пространство, на котором B действует характером χ), полученное как факторизация $G \times k_\chi$ по действию B: $b(g,t) = (gb^{-1}, \chi(b)t)$. При этом изоморфизме конус обильных расслоений совпадает с внутренностью камеры Вейля.

T-линеаризованные расслоения будут представлены в виде $G *_B k_{\chi_0} \otimes k_{\chi_1}$. Как расслоение оно изоморфно $G *_B k_{\chi_0}$, однако действие тора на каждом слое "подкручивается"на характер χ_1.

Пусть $\pi : X^{ss}_{L_\chi} \longrightarrow X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T$ — отображение факторизации. Известно, что $\mathrm{Pic}(X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T)$ вкладывается в $\mathrm{Pic}_T X^{ss}_{L_\chi}$ с помощью отображения π^*

[11]. В следующей теореме мы сформулируем условие принадлежности расслоения $M \in \mathrm{Pic}_T X^{ss}_{L_\chi}$ подгруппе $\pi^*\mathrm{Pic}(X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T)$.

Теорема 3.1 Пусть χ — строго доминантный вес, которому отвечает вложение $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$. Пусть $\{\widetilde{\Delta}^w_j\}$ — всевозможные насыщенные подсистемы корней в Δ такие, что $0 \in ww_0\chi + \sum\limits_{\alpha_i \in (\widetilde{\Delta}^w_j)^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha_i$. Тогда элемент $\mu = (\mu_0; \mu_1) \in (\mathrm{Pic}(G/B) \times \Xi(T)) \otimes \mathbb{Q}$ принадлежит $\pi^*\mathrm{Pic}(X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T) \otimes \mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда

$$ww_0\mu_0 + \mu_1 \in \bigcap_j \langle \widetilde{\Delta}^w_j \rangle,$$

для всех $ww_0 \in W^{st}_\chi$. Ранг группы Пикара $\mathrm{Pic}(X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T)$ равен размерности линейного пространства, натянутого на точки μ, удовлетворяющие условиям, описанным выше.

Замечание. Для открытой клетки соответствующее условие упрощается и выглядит следующим образом: пусть $\{\widetilde{\Delta}_j\}$ — всевозможные насыщенные подсистемы корней, такие что $w_0\chi \in \langle \widetilde{\Delta}_j \rangle$. Тогда орбиты из открытой клетки накладывают следующие условия

$$w_0\mu_0 + \mu_1 \in \bigcap_j \langle \widetilde{\Delta}_j \rangle,$$

Доказательство. Рассмотрим следующую точную последовательность из работы [11]:

$$1 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X^{ss}/\!\!/T) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Pic}_T X^{ss} \xrightarrow{\delta} \prod_{Tx \subset X^{ss}} \Xi(T_x)$$

В ней в последнем члене стоит произведение по всем орбитам из X^{ss} групп характеров стабилизаторов точек этих орбит (в произведении можно ограничиться только замкнутыми в X^{ss} орбитами). Отображение δ устроено следующим образом: возьмем некоторое расслоение $L \in \mathrm{Pic}_T X^{ss}$ и ограничим его на орбиту Tx. Тогда стабилизатор точки орбиты T_x будет действовать линейно на слое над x, а именно некоторым характером; этот характер и есть образ L в компоненте $\Xi(T_x)$ (обозначим это отображение $Pr_{\Xi(T_x)} : \mathrm{Pic}_T X^{ss} \longrightarrow \Xi(T_x)$, тем самым $\delta = \prod\limits_{Tx \subset X^{ss}} Pr_{\Xi(T_x)}$).

Далее пусть $\mu = \mu_0 + \mu_1 \in \mathrm{Pic}(G/B) \times \Xi(T)$ — характер, задающий линейное расслоение L_μ из $\mathrm{Pic}_T X^{ss}$.

Пусть мы знаем $\mathrm{Ker}(Pr_{\Xi(T_x)})$. Тогда $\mathrm{Pic}(X^{ss}/\!\!/T) \cong \mathrm{Ker}\,\delta = \bigcap\limits_{Tx \subset X^{ss}} \mathrm{Ker}(Pr_{\Xi(T_x)})$.

Так как мы вычисляем только ранг группы Пикара, достаточно ограничиться действием однопараметрических подгрупп $\lambda : k^\times \to T_x$. Пусть $v_x = v_{\tau_1} + \ldots + v_{\tau_l}$ — весовое разложение вектора v_x для вложения $x = tuwB/B \in G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$, $\tau_i \in \Xi(T)$.

Рассмотрим действие однопараметрической подгруппы λ на v_x: $\lambda(t)v_x = t^{\langle\lambda;\tau_0\rangle}v_x = t^{\langle\lambda;\tau_1\rangle}v_{\tau_1} + \ldots + t^{\langle\lambda;\tau_l\rangle}v_{\tau_l}$. Отсюда $\lambda(k^\times) \subset T_x$ тогда и только тогда, когда $\langle\lambda;\tau_0\rangle = \langle\lambda;\tau_1\rangle = \ldots = \langle\lambda;\tau_l\rangle$. Или, что то же самое, $\langle\lambda;\chi_i - \chi_j\rangle = 0$ для $\forall\chi_i, \chi_j \in supp(Tx \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi)))$. Так как $0 \in supp(Tx \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi)))$, то эта система эквивалентна $\langle\lambda;\chi_i\rangle = 0$ для $\forall\chi_i \in supp(Tx)$.

Как и в доказательстве утверждения 2.7 имеем $ww_0\chi \in supp(Tx)$, а также $ww_0\chi + \alpha_i \in supp(Tx)$, где α_i — корни, входящие с ненулевым коэффициентом в экспоненциальное разложение элемента u, который можно считать записанным в нормальной форме. Тем самым имеем $\langle\lambda;\alpha_i\rangle = 0$, что означает, что T_x^0 стабилизирует u.

Посчитаем характер действия T_x^0 на слое над точкой x расслоения $G *_B k_{\mu_0} \otimes k_{\mu_1}$. Так как T_x^0 стабилизирует u, то характер действия T_x^0 на слое над точкой uww_0B/B равен характеру действия T_x^0 на слое над точкой ww_0B/B, то есть $ww_0\mu_0 + \mu_1$.

Из вышесказанного следует, что характер действия T_x^0 на слое будет тривиален тогда и только тогда, когда $\langle\lambda, ww_0\mu_0 + \mu_1\rangle = 0$ для любой однопараметрической подгруппы из стабилизатора. Тем самым условие принадлежности $\mathrm{Ker}(Pr_{\Xi(T_x)}) \otimes \mathbb{Q}$ расслоения L_μ записывается в виде $ww_0\mu_0 + \mu_1 \in \langle supp(Tx \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi)))\rangle$.

Теперь воспользуемся теоремой о линейных оболочках носителей полустабильных орбит. Орбитам из $X^{ss} \cap Bww_0B/B$ соответствуют подсистемы положительных корней $\{\widetilde{\Delta}_j^{w+}\}$, удовлетворяющие условию: $0 \in (ww_0\chi + \sum\limits_{\alpha_i \in (\widetilde{\Delta}_j^w)^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha_i)$.

Перепишем условия принадлежности веса $\mu \in \mathrm{Ker}(\delta)$ в терминах веса χ:

$$ww_0\mu_0+\mu_1\in\bigcap_j\langle\widetilde{\Delta}_j^w\rangle,$$

Что и требовалось. ■

Пример 3.2 Разберем случай общего положения, а именно, когда характер $w_0\chi$ не принадлежит линейным оболочкам подсистем корней в Δ, размерность которых меньше чем ранг системы Δ. В этом случае на μ_0 и на μ_1 не накладывается никаких условий, тем самым имеем $\mathrm{rk}(\mathrm{Pic}(X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T))=\mathrm{rk}(\mathrm{Pic}_T(X^{ss}_{L_\chi}))=2\mathrm{rk}G$ (в случае отсутствия компонент типа A_n).

Пример 3.3 Рассмотрим систему корней B_4. Выпишем простые корни и двойственные им фундаментальные веса: $\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\alpha_2=\varepsilon_2-\varepsilon_3,\alpha_3=\varepsilon_3-\varepsilon_4,\alpha_4=\varepsilon_4$, а также $\pi_1=\varepsilon_1,\pi_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2,\pi_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\pi_4=\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)$. Рассмотрим строго доминантный вес $\chi=(\varepsilon_4-\varepsilon_3)+10(2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)=10\pi_1+\pi_2+8\pi_3+2\pi_4$. Можно проверить, что он принадлежит пространствам, натянутым на следующие подсистемы корней Δ_1 и Δ_2, описанные ниже, и только им. Первая подсистема корней Δ_1 типа A_3 порождена корнями $\varepsilon_2-\varepsilon_3,\varepsilon_3-\varepsilon_4,\varepsilon_1+\varepsilon_4$, которые являются простыми корнями этой системы (также она содержит корни $\varepsilon_2-\varepsilon_4,\varepsilon_1+\varepsilon_3,\varepsilon_1+\varepsilon_2$ в качестве положительных корней), а вторая Δ_2 типа $A_1\oplus A_2$ порождена $\varepsilon_1,\varepsilon_2+\varepsilon_4,\varepsilon_3-\varepsilon_4$, которые являются простыми в этой системе (и содержит корень $\varepsilon_2+\varepsilon_3$ в качестве положительного). Пересечение — двумерное подпространство, порожденное корнем $\varepsilon_3-\varepsilon_4$ и доминантным весом $2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\pi_1+\pi_3$.

Мы покажем, что ранг группы Пикара $X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T$ равен двум.

Запишем условия теоремы 3.1 для части χ-полустабильных элементов группы Вейля $w_0,s_{\alpha_1}w_0,s_{\alpha_2}w_0,s_{\alpha_3}w_0,s_{\alpha_4}w_0$:

$$w_0\mu_0+\mu_1\in\langle\Delta_1\rangle\cap\langle\Delta_2\rangle$$

$$w_0\mu_0+s_{\alpha_1}\mu_1\in\langle\Delta_1\rangle\cap\langle\Delta_2\rangle$$

$$w_0\mu_0+s_{\alpha_2}\mu_1\in\langle\Delta_1\rangle\cap\langle\Delta_2\rangle$$

$$w_0\mu_0+s_{\alpha_3}\mu_1\in\langle\Delta_1\rangle\cap\langle\Delta_2\rangle$$

$$w_0\mu_0+s_{\alpha_4}\mu_1\in\langle\Delta_1\rangle\cap\langle\Delta_2\rangle$$

Для доказательства последних четырех принадлежностей надо проверить, что ($s_{\alpha_i}\chi\in\sum\limits_{\beta_j\in(s_{\alpha_i}\Delta_1)^+\cap s_{\alpha_i}\Delta^+}\mathbb{Q}_+\beta_j$) и то же самое для системы

Δ_2. Но $(s_{\alpha_i}\Delta_1)^+ \cap s_\alpha\Delta^+ = s_{\alpha_i}\Delta_1 \cap s_{\alpha_i}\Delta^+ \cap \Delta^+$, так что если применить s_{α_i} к предыдущим двум выражениям, получим $(\chi \in \sum\limits_{\beta_j \in \Delta_1^+ \setminus \{\alpha_i\}} \mathbb{Q}_+\beta_j)$. Действительно, если s_α — простое отражение, то $\Delta^+ \cap s_\alpha\Delta^+ = \Delta^+ \setminus \{\alpha\}$, и тем самым, $s_{\alpha_i}(s_{\alpha_i}\Delta_1 \cap s_{\alpha_i}\Delta^+ \cap \Delta^+) = (\Delta_1^+ \setminus \{\alpha_i\})$

Заметим, что в случае $i = 1, 4$ это условие выполнено автоматически, так как корни α_1, α_4 не лежат в системах Δ_1 и Δ_2. В случае $i = 2$ второе условие выполнено, так как $\alpha_2 \notin \Delta_2$, для первой системы условие выполнено так как $\chi = 10(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+9(\varepsilon_1+\varepsilon_3)+(\varepsilon_1+\varepsilon_4)$. В случае s_{α_3} эти условия выполнены, так как для Δ_1: $\chi = (\varepsilon_1+\varepsilon_4)+10(\varepsilon_2-\varepsilon_3)+19(\varepsilon_1+\varepsilon_3)$, а для системы Δ_2: $\chi = 20\varepsilon_1 + 9(\varepsilon_2+\varepsilon_3)+(\varepsilon_2+\varepsilon_4)$

Вычтем из первого выражения аналогичное выражение для s_{α_i}, получим $(w_0\mu_0 + \mu_1) - (w_0\mu_0 + s_{\alpha_i}\mu_1) = \frac{2(\alpha_i,\mu_1)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i \in \langle\Delta_1\rangle \cap \langle\Delta_2\rangle$ для $i = 1,2,3,4$. Так как $\alpha_i \notin \langle\Delta_1\rangle \cap \langle\Delta_2\rangle$ для $i = 1,2,4$, выполнены следующие равенства $(\alpha_i,\mu_1) = 0$. Отсюда $\mu_1 = t\pi_3$. Аналогичное выражение для элемента s_{α_3} не накладывают дополнительных условий так как $\alpha_3 \in \langle\Delta_1\rangle \cap \langle\Delta_2\rangle$. Покажем, что $\mu_1 = 0$. Отсюда будет следовать, что все условия, которые накладываются полустабильными орбитами, являются следствиями условия, накладываемого орбитами открытой клетки, то есть $w_0\mu_0 \in \langle\Delta_1\rangle \cap \langle\Delta_2\rangle$. Действительно, так как $\mu_1 = 0$, условия для $w \in W_\chi^{st}$ перепишутся в виде $w_0\mu_0 \in \bigcap\langle\Delta_i\rangle$, где $\chi \in \Delta_i$, но все эти условия являются следствием условия для открытой клетки, для которой это пересечение минимально. Тем самым мы получим, что $\mathrm{rk}(\mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}/\!\!/T)) = 2$.

Для доказательства равенства $\mu_1 = 0$ рассмотрим элемент $w = s_{\alpha_3}s_{\alpha_4}$. Сначала покажем, что ww_0 χ-полустабилен, а также он накладывает на μ условие $ww_0\mu_0+\mu_1 \in \langle w\Delta_1\rangle \cap \langle w\Delta_2\rangle$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $w\chi \in \sum\limits_{\alpha_j \in (w\Delta_1 \cap w\Delta^+ \cap \Delta^+)} \mathbb{Q}_+\alpha_j$ и аналогичное условие для подсистемы корней Δ_2. Применим к этому равенству w^{-1}. Учитывая, что элемент w переводит корни $(\varepsilon_3+\varepsilon_4)$ и ε_4 в отрицательные, мы получаем $\chi \in \sum\limits_{\alpha_j \in (\Delta_1 \cap \Delta^+ \cap s_{\alpha_4}s_{\alpha_3}\Delta^+)} \mathbb{Q}_+\alpha_j = \sum\limits_{\alpha_j \in (\Delta_1^+ \setminus \{\alpha_4, \varepsilon_3+\varepsilon_4\})} \mathbb{Q}_+\alpha_j$ и аналогичное условие для системы Δ_2. Но оба условия очевидно выполнены, так как ε_4 и $\varepsilon_3+\varepsilon_4$ не принадлежат ни одной из систем Δ_i. Итак, условия, накладываемые орбитами из клетки Bww_0B/B записываются в виде $w_0\mu_0 + w^{-1}\mu_1 \in \langle\Delta_1\rangle \cap \langle\Delta_2\rangle$. Учитывая что $\mu_1 = t\pi_3$, получаем $w_0\mu_0 + w^{-1}\mu_1 = w_0\mu_0 + ts_{\alpha_4}(\pi_3 - \alpha_3) = w_0\mu_0 + t\pi_3 - t(\varepsilon_3+\varepsilon_4) \in$

$\langle\Delta_1\rangle\cap\langle\Delta_2\rangle$. Вычтем отсюда $w_0\mu_0+t\pi_3\in\langle\Delta_1\rangle\cap\langle\Delta_2\rangle$ и получим, что $t(\varepsilon_3+\varepsilon_4)\in\langle\Delta_1\rangle\cap\langle\Delta_2\rangle$, что возможно только при $t=0$. Отсюда $\mu_1=0$.

Список литературы

[1] И.Н.Берштейн, И.М.Гельфанд, С.И.Гельфанд, Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P, УМН **37:3** (171) (1973), 3–26.

[2] Э.Б.Винберг, А.Л.Онищик, Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. Москва, УРСС, 1995.

[3] Ж.Дьедонне, Дж.Керрол, Д.Мамфорд, Геометрическая теория инвариантов. Москва, Мир, 1965.

[4] В.Л.Попов Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения. Изв. АН СССР. Сер. мат. **38:2** (1974), 292–322.

[5] Дж.Хамфри, Линейные алгебраические группы. Москва, Наука, 1980.

[6] Р.Хартсхорн, Алгебраическая геометрия. Москва, Мир, 1981.

[7] J.B.Carrell and A.Kurth, Normality of torus orbit closures in G/P, J. Algebra **233** (2000), 122–134.

[8] R.Dabrowski, On normality of the closure of a generic torus orbit in G/P. Pacific Journal of Mathematics. **172:2** (1996), 321–330.

[9] I.V.Dolgachev, Introduction to Geometric Invariant Theory, Lect. Notes Series, **25**, Seoul Nat. Univ., 1994.

[10] I.V.Dolgachev, Y. Hu, Variation of geometric invariant theory quotients. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **87** (1998).

[11] F.Knop, H.Kraft, T.Vust, The Picard group of a G-variety. Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie (H. Kraft, P. Slodowy, T. Springer eds.) DMV-Seminar **13**, Birkhauser Verlag (Basel-Boston) (1989), 77–88.