Изучение областей равномерной сходимости аппроксимаций Паде для последней промежуточной строки таблицы Паде *

Н.Н.Неряхин

Аннотация

В работе описано множество предельных точек полюсов аппроксимаций Паде последней промежуточной строки таблицы Паде для одного ранее неизвестного случая. Таким образом, области равномерной сходимости аппроксимаций Паде для этого случая полностью изучены.

Содержание

*Работа выполнена при поддержке правительства Челябинской области, грант №014.01.06-06.АХ

1 Введение

Пусть задан степенной ряд

$$a(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j, \tag{1}$$

представляющий функцию $a(z)$. Представление (1) является исходным пунктом любого анализа, использующего аппроксимации Паде.

Классической аппроксимацией Паде (по Фробениусу) типа (n, m) для $a(z)$ называется рациональная функция $\pi_{n,m}(z) = P_{n,m}(z)Q_{n,m}^{-1}(z)$ такая, что многочлены $P_{n,m}(z)$ и $Q_{n,m}(z)$ удовлетворяют следующим условиям: $Q_{n,m}(z) \neq 0, \deg Q_{n,m}(z) \leq m, \deg P_{n,m}(z) \leq n$ и

$$a(z)Q_{n,m}(z) - P_{n,m}(z) = z^{n+m+1}\mathcal{O}_{n,m}(z),$$

где $\mathcal{O}_{n,m}(z)$ — формальный степенной ряд.

Аппроксимации Паде типа (n, m) принято располагать в виде таблицы, где n означает номер столбца, m — строки. Эта таблица называется таблицей Паде для функции $a(z)$.

Пусть $a(z)$ — мероморфная в круге $D_R = \{z| \mid z \mid < R\}$ и аналитическая в окрестности $z = 0$ функция, которая имеет в точках $z_1, \ldots, z_l$ полюсы кратностей $s_1, \ldots, s_l$ соответственно, и $\lambda = s_1 + \ldots + s_l$ — число её полюсов в круге D_R. Мы считаем, что полюсы $a(z)$ пронумерованы таким образом, что $\mid z_1 \mid = \ \ldots\ = \mid z_\mu \mid > \mid z_{\mu+1} \mid \geq\ \ldots\ \geq \mid z_l \mid$. Кроме того, полюсы $z_1, \ldots, z_\mu$, имеющие максимальный модуль, упорядочим так, чтобы для их кратностей выполнялись условия $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_\mu$.

Пусть $s_1 = \ldots = s_\nu > s_{\nu+1} \geq \ldots \geq s_\mu$, $1 \leq \nu \leq \mu, \mid z_1 \mid = \rho$ и $z_1 = \rho e^{2\pi i\Theta_1}, \ldots, z_\nu = \rho e^{2\pi i\Theta_\nu}$. Полюсы $z_1, \ldots, z_\nu$, максимальные по модулю и имеющие максимальную кратность, мы будем называть доминирующими.

При изучении равномерной сходимости $(\lambda-1)$-й строки таблицы Паде для функции $a(z)$ основную трудность представляет исследование асимптотического поведения знаменателей аппроксимаций Паде. Оказывается, что это поведение определяется предельным поведением вектора $\xi = (e^{2\pi i\Theta_1}, \ldots, e^{2\pi i\Theta_\nu}) \in \mathbb{T}^\nu$, поэтому требуется замыкание в $\mathbb{T}^\nu$ полугруппы $\{\xi^n\}_{n\geq 0}$. В работе [1] показано, что это замыкание $\mathbb{F}$ совпадает с замыканием циклической группы $\{\xi^n\}_{n\in\,\mathbb{Z}}$, то есть является монотетической подгруппой тора $\mathbb{T}^\nu$. Важность группы $\mathbb{F}$ заключается в том, что она параметризует семейство многочленов, являющихся пределами подпоследовательностей $Q_n(z)$. Опишем процедуру вычисления группы $\mathbb{F}$.

Пусть $r+1$ — ранг над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ системы $\Theta_0 = 1, \Theta_1, \ldots, \Theta_\nu$. Если $r=\nu$, то $\mathbb{F} = \mathbb{T}^\nu$.

Пусть $0 \le r < \nu$. Расположим полюсы $z_1, \ldots, z_\nu$ в таком порядке, чтобы $\Theta_0 = 1, \Theta_1, \ldots, \Theta_r$ составляли максимальную линейно независимую над $\mathbb{Q}$ подсистему системы $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_\nu$, и $\Theta_j = \sum_{k=0}^r q_{kj}\Theta_k$, $q_{kj} \in \mathbb{Q}$, $j = r+1, \ldots, \nu$.

Пусть α_{kk} — наименьшее общее кратное знаменателей рациональных дробей q_{kj} и $\alpha_{kj} = \alpha_{kk}q_{kj}$ для $k = 0, \ldots, r, j = r+1, \ldots, \nu$. Составим целочисленную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \ldots & 0 & \alpha_{0,\,r+1} & \ldots & \alpha_{0,\,\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,\,r+1} & \ldots & \alpha_{r,\,\nu} \end{pmatrix}$$

и приведём её к форме Смита над кольцом $\mathbb{Z}$:

$$A = S_1 \Delta S_2^{-1}.$$

Здесь S_1, S_2 — обратимые над $\mathbb{Z}$ целочисленные матрицы. Обозначим через S матрицу, полученную из S_2 вычёркиванием первой строки и первых $r+1$ столбцов. Приведём S к форме Смита :

$$S = T_1 \triangle_0 T_2^{-1}.$$

Обозначим через Q_j строку матрицы T_1^{-1} с номером $\nu - r + j, j = 0, \ldots, r$. Тогда группа $\mathbb{F}$ состоит из точек $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_\nu) \in \mathbb{T}^\nu$, имеющих вид

$$\tau = \xi_n^{Q_0} t_1^{Q_1} \ldots t_r^{Q_r}.$$

Здесь

$$\xi_n = e^{\frac{2\pi i n}{\sigma}}, n = 0, \ldots, \sigma - 1, \sigma = \frac{\alpha_{00}\overline{\delta_r}}{\delta_{r+1}} \ ,$$

где δ_{r+1} — наибольший общий делитель миноров порядка $r+1$ матрицы A, $\overline{\delta_r}$ — наибольший общий делитель миноров порядка r матрицы $\overline{A}$, получающейся из A вычёркиванием первой строки и первого столбца [2], $(t_1, \ldots, t_r)$ — произвольная точка тора $\mathbb{T}^r$, и мы употребили обозначение $t^Q = (t^{q_1}, \ldots, t^{q_\nu})$, где $Q = (q_1, \ldots, q_\nu)$.

Для изучения равномерной сходимости подпоследовательностей аппроксимаций Паде $\pi_{n,m}(z)$, $m = \lambda - 1$ при $n \to \infty$ необходимо знать асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде.

Пусть A_j — коэффициент при $(z - z_j)^{-s_j}$ в разложении мероморфной функции $a(z)$ в ряд Лорана в окрестности полюса $z = z_j$.

Определим

$$C_j = \frac{1}{(s_j - 1)! z_j^{s_j - 1} D_j^2(z_j) A_j},$$

где $D_j(z) = \frac{D(z)}{(z-z_j)^{s_j}}$, $1 \le j \le l$, $D(z) = (z-z_1)^{s_1} \dots (z-z_l)^{s_l}$. Обозначим $S_j(\tau) = \sum_{k=1}^{\nu} C_k z_k^j \tau_k$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_\nu) \in \mathbb{F}$.

Будем называть целое неотрицательное число $\delta_+(\tau)(\delta_-(\tau))$ плюс-дефектом (минус-дефектом) точки $\tau \in \mathbb{F}$, если $\delta_+(\tau)(\delta_-(\tau))$ — наименьшее число такое, что $S_{\delta_+(\tau)}(\tau) \neq 0$ $(S_{-\delta_-(\tau)-1}(\tau) \neq 0)$. Нетрудно показать, что $0 \le \delta_+(\tau) \le \nu - 1$, $0 \le \delta_-(\tau) \le \nu - 1$. Многочлен будем называть s-нормированным, если его коэффициент при z^s равен 1.

Следующая теорема является основным результатом работы [1].

Теорема 1.1 *Пусть τ — произвольная точка группы $\mathbb{F}$ и Λ_τ — соответствующая ей последовательность номеров. Тогда для всех достаточно больших $n \in \Lambda_\tau - \lambda$ знаменатель $Q_n(z)$ аппроксимации Паде типа $(n, \lambda - 1)$ может быть $(\lambda - \delta_+ - 1)$-нормирован и для нормированных знаменателей существует $\lim_{n\to\infty} Q_n(z) = W(z,\tau), n + \lambda \in \Lambda_\tau, \tau \in \mathbb{F}$. Здесь $W(z,\tau)$ — многочлен степени $(\lambda - \delta_+ - 1)$, который имеет $z = 0$ нулём кратности δ_- и вычисляется по следующей формуле:*

$$W(z,\tau) = S_{\delta_+(\tau)}^{-1}(\tau)\omega(z,\tau)(z-z_1)^{s_1-1} \dots (z-z_\nu)^{s_\nu-1}(z-z_{\nu+1})^{s_{\nu+1}} \dots (z-z_l)^{s_l},$$

$$\omega(z,\tau) = \sum_{j=1}^{\nu} C_j \Delta_j(z) \tau_j, \ \Delta_j = \frac{\Delta(z)}{z - z_j}, \ \Delta(z) = (z - z_1) \dots (z - z_\nu).$$

Многочленами $W(z,\tau)$ исчерпываются все возможные пределы подпоследовательностей каким-либо образом нормированных $Q_n(z)$.

Следовательно, множество предельных точек полюсов последовательности $\{\pi_{n,\lambda-1}(z)\}, n \to \infty$ состоит из полюсов $a(z)$, возможно, точек $z = 0$ и $z = \infty$, а также из множества нулей многочленов семейства $\omega(z,\tau)$, $\tau \in \mathbb{F}$. Последнее множество мы будем называть множеством дополнительных предельных точек и обозначать $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$.

Обозначим через $\mathcal{N}_j,\ 1 \leq j \leq \nu$ множество точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяющих неравенству

$$2 \mid C_j \Delta_j(z) \mid \leq \sum_{k=1}^{\nu} \mid C_k \Delta_k(z) \mid,\ j = 1, \ldots, \nu,$$

и положим $\mathcal{N} = \bigcap_{j=1}^{\nu} \mathcal{N}_j$. Легко видеть, что всегда $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} \subseteq \mathcal{N}$.

В работе [1] показано, что в случае $\nu = 2$ множество $\mathcal{N}$ есть окружность Аполлония (или прямая). При $\nu > 2$ множество $\mathcal{N}$ уже не вырождается в линию. Оно имеет границу $L = \bigcup_{j=1}^{\nu} L_j$, где L_j определяется уравнением

$$2 \mid C_j \Delta_j(z) \mid = \sum_{k=1}^{\nu} \mid C_k \Delta_k(z) \mid,\ j = 1, \ldots, \nu.$$

Основной задачей работы является нахождение случаев, для которых $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$ при $r = \nu - 1$.

2 Основная часть

Основным результатом работы является

Теорема 2.1 *Пусть* $r = \nu - 1, \Theta_0 = 1, \Theta_1, \ldots, \Theta_{\nu-1}$ *- максимальная линейно независимая над* $\mathbb{Q}$ *подсистема системы* $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_\nu$, *и*

$$\Theta_\nu = \frac{p_0}{q_0}\Theta_0 + \frac{p_1}{q_1}\Theta_1 + \ldots + \frac{p_{\nu-1}}{q_{\nu-1}}\Theta_{\nu-1}, \quad p_j \in \mathbb{Z},\ q_j \in \mathbb{N}$$

(дроби берутся несократимыми) .

Тогда если

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \ldots + \frac{p_{\nu-1}}{q_{\nu-1}} \neq 1,$$

то $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$.

Доказательство теоремы разобьём на два этапа:

1). Явное вычисление группы $\mathbb{F}$ для случая $r = \nu - 1$ в общей ситуации (Лемма 1).

2). Нахождение необходимых и достаточных условий, при которых уравнение

$$\alpha_1\tau_1 + \ldots + \alpha_\nu\tau_\nu = 0$$

с комплексными коэффициентами имеет решение $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_\nu)$, принадлежащее группе $\mathbb{F}$ для случая $r = \nu - 1$ (Лемма 2).

Лемма 2.1 *Пусть* $r = \nu - 1, \Theta_0 = 1, \Theta_1, \ldots, \Theta_{\nu-1}$ *- максимальная линейно независимая над* $\mathbb{Q}$ *подсистема системы* $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_\nu$, *и*

$$\Theta_\nu = \frac{p_0}{q_0}\Theta_0 + \frac{p_1}{q_1}\Theta_1 + \ldots + \frac{p_{\nu-1}}{q_{\nu-1}}\Theta_{\nu-1}, \quad p_j \in \mathbb{Z},\ q_j \in \mathbb{N}$$

(дроби берутся несократимыми) .

Тогда группа $\mathbb{F}$ *состоит из точек*

$$\tau = (\xi_n^{-v_{\nu-2}} t_1^{\beta_1}, \xi_n^{-u_{\nu-2}v_{\nu-3}} t_1^{-\gamma_1 v_{\nu-3}} t_2^{\beta_2}, \ldots, \xi_n^{-u_{\nu-2}\ldots u_1 v_0} t_1^{-\gamma_1 u_{\nu-3}\ldots u_1 v_0}$$

$$t_2^{-\gamma_2 u_{\nu-4}\ldots u_1 v_0} \ldots t_{\nu-2}^{-\gamma_{\nu-2} v_0} t_{\nu-1}^{\beta_{\nu-1}}, \xi_n^{u_{\nu-2}\ldots u_0} t_1^{\gamma_1 u_{\nu-3}\ldots u_0} t_2^{\gamma_2 u_{\nu-4}\ldots u_0} \ldots t_{\nu-2}^{\gamma_{\nu-2} u_0} t_{\nu-1}^{\gamma_{\nu-1}}),$$

где $(t_1, \ldots, t_{\nu-1}) \in \mathbb{T}^{\nu-1}, \xi_n = e^{\frac{2\pi i n}{\sigma}}, n = 0, \ldots, \sigma - 1, \sigma = \frac{\alpha_{00}\overline{\delta_{\nu-1}}}{\delta_\nu}, \delta_\nu$ *– наибольший общий делитель миноров порядка* ν *матрицы* A, $\overline{\delta_{\nu-1}}$ *–*

наибольший общий делитель миноров порядка $\nu-1$ *матрицы* $\overline{A}$*, получающейся из* A *вычёркиванием первой строки и первого столбца.*

Здесь $\beta_j = \frac{q_j}{d_{\nu-j-1}}, \gamma_j = \frac{p_j q_{j+1} \dots q_{\nu-1}}{d_0 \dots d_{\nu-j-1}}, d_j = \text{НОД}(q_{\nu-j-1}, \frac{p_{\nu-j-1} q_{\nu-j} \dots q_{\nu-1}}{d_0 \dots d_{j-1}})$, $d_0 = 1, j = 0 \dots \nu-1$, *причём* β_j *и* γ_j *взаимно просты, а* u_j, v_j *определяются из соотношений*

$$\beta_{\nu-j-1} u_j + \gamma_{\nu-j-1} v_j = 1, j = 0, \dots, \nu-1.$$

Доказательство. Согласно теореме 2.1 из [1] группа $\mathbb{F}$ в нашем случае может быть вычислена следующим образом.

Приведём матрицу A к форме Смита над кольцом $\mathbb{Z}$:

$$A = S_1 \Delta S_2^{-1}.$$

Здесь S_1, S_2 – обратимые над $\mathbb{Z}$ целочисленные матрицы. Обозначим через S матрицу, полученную из S_2 вычёркиванием первой строки и первых ν столбцов. Приведём теперь S к форме Смита :

$$S = T_1 \triangle_0 T_2^{-1}.$$

Обозначим через Q_j строку матрицы T_1^{-1} с номером $1+j, j = 0, \dots, \nu-1$. Тогда группа $\mathbb{F}$ состоит из точек $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_\nu) \in \mathbb{T}^\nu$, имеющих вид

$$\tau = \xi_n^{Q_0} t_1^{Q_1} \dots t_{\nu-1}^{Q_{\nu-1}}.$$

Здесь

$$\xi_n = e^{\frac{2\pi i n}{\sigma}}, n = 0, \dots, \sigma-1, \sigma = \frac{\alpha_{00} \overline{\delta_{\nu-1}}}{\delta_\nu} \ ,$$

где δ_ν – наибольший общий делитель миноров порядка ν матрицы A, $\overline{\delta_{\nu-1}}$ – наибольший общий делитель миноров порядка $\nu-1$ матрицы $\overline{A}$, получающейся из A вычёркиванием первой строки и первого столбца [2], $(t_1, \dots, t_{\nu-1})$ – произвольная точка тора $\mathbb{T}^{\nu-1}$, и мы употребили обозначение $t^Q = (t^{q_1}, \dots, t^{q_\nu})$, где $Q = (q_1, \dots, q_\nu)$. Приступим к реализации этой процедуры.

Матрица A в данном случае имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} q_0 & 0 & \dots & 0 & p_0 \\ 0 & q_1 & \dots & 0 & p_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_{\nu-1} & p_{\nu-1} \end{pmatrix}.$$

Приведём её к форме Смита. Так как $q_{\nu-1}, p_{\nu-1}$ – взаимно простые, то существуют целые u_0, v_0, для которых

$$q_{\nu-1}u_0 + p_{\nu-1}v_0 = 1.$$

Пусть $d_1 = \text{НОД}(q_{\nu-2}, p_{\nu-2}q_{\nu-1})$. Тогда существуют целые u_1, v_1, для которых

$$q_{\nu-2}u_1 + p_{\nu-2}q_{\nu-1}v_1 = d_1.$$

Обозначим $\beta_{\nu-2} = \frac{q_{\nu-2}}{d_1}, \gamma_{\nu-2} = \frac{p_{\nu-2}q_{\nu-1}}{d_1}$. Положим также для единообразия $\beta_{\nu-1} = q_{\nu-1}, \gamma_{\nu-1} = p_{\nu-1}, d_0 = 1$. Тогда, разделив последнее соотношение на d_1, получим

$$\beta_{\nu-2}u_1 + \gamma_{\nu-2}v_1 = 1.$$

Пусть $d_2 = \text{НОД}(q_{\nu-3}, p_{\nu-3}\beta_{\nu-2}\beta_{\nu-1})$. Тогда существуют целые u_2, v_2, для которых

$$q_{\nu-3}u_2 + p_{\nu-3}\beta_{\nu-2}\beta_{\nu-1}v_2 = d_2.$$

Обозначим $\beta_{\nu-3} = \frac{q_{\nu-3}}{d_2}, \gamma_{\nu-3} = \frac{p_{\nu-3}\beta_{\nu-2}\beta_{\nu-1}}{d_2}$. Разделив последнее соотношение на d_2, будем иметь

$$\beta_{\nu-3}u_2 + \gamma_{\nu-3}v_2 = 1.$$

Пусть вообще $d_j = \text{НОД}(q_{\nu-j-1}, p_{\nu-j-1}\beta_{\nu-j}\dots\beta_{\nu-1}), j = 0, \dots, \nu-1, \beta_k = \frac{q_k}{d_{\nu-k-1}}, k = \nu-j, \dots, \nu-1$. Тогда существуют целые u_j, v_j, для которых

$$q_{\nu-j-1}u_j + p_{\nu-j-1}\beta_{\nu-j}\dots\beta_{\nu-1}v_j = d_j.$$

Обозначим $\beta_{\nu-j-1} = \frac{q_{\nu-j-1}}{d_j}, \gamma_{\nu-j-1} = \frac{p_{\nu-j-1}\beta_{\nu-j}\dots\beta_{\nu-1}}{d_j}$. Разделив последнее соотношение на d_j, будем иметь

$$\beta_{\nu-j-1}u_j + \gamma_{\nu-j-1}v_j = 1, j = 0, \dots, \nu-1.$$

Составим теперь матрицу $E =$

$$\begin{pmatrix} u_{\nu-1} & 0 & \dots & -\gamma_0 \\ -\gamma_1 v_{\nu-1} & u_{\nu-2} & \dots & -\gamma_1\beta_0 \\ -\gamma_2\beta_1 v_{\nu-1} & -\gamma_2 v_{\nu-2} & \dots & -\gamma_2\beta_0\beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\gamma_{\nu-1}\beta_1\dots\beta_{\nu-2}v_{\nu-1} & -\gamma_{\nu-1}\beta_2\dots\beta_{\nu-2}v_{\nu-2} & \dots & -\gamma_{\nu-1}\beta_0\dots\beta_{\nu-2} \\ \beta_1\dots\beta_{\nu-1}v_{\nu-1} & \beta_2\dots\beta_{\nu-1}v_{\nu-2} & \dots & \beta_0\dots\beta_{\nu-1} \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что E унимодулярна и

$$AE = \begin{pmatrix} d_{\nu-1} & p_0\beta_2\dots\beta_{\nu-1}v_{\nu-2} & p_0\beta_3\dots\beta_{\nu-1}v_{\nu-3} & \dots & p_0v_0 & 0 \\ 0 & d_{\nu-2} & p_1\beta_3\dots\beta_{\nu-1}v_{\nu-3} & \dots & p_1v_0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{\nu-3} & \dots & p_2v_0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{\nu-2}v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} d_{\nu-1} & d_{\nu-2}p_0\frac{\beta_2\dots\beta_{\nu-1}}{d_{\nu-2}}v_{\nu-2} & d_{\nu-3}p_0\frac{\beta_3\dots\beta_{\nu-1}}{d_{\nu-3}}v_{\nu-3} & \dots & p_0v_0 & 0 \\ 0 & d_{\nu-2} & d_{\nu-3}p_1\frac{\beta_3\dots\beta_{\nu-1}}{d_{\nu-3}}v_{\nu-3} & \dots & p_1v_0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{\nu-3} & \dots & p_2v_0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{\nu-2}v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дроби, фигурирующие в последней матрице, в действительности являются целыми числами, так как

$$d_j = \text{НОД}(q_{\nu-j-1}, \frac{p_{\nu-j-1}q_{\nu-j}\dots q_{\nu-1}}{d_0\dots d_{j-1}}) =$$

$$\text{НОД}(q_{\nu-j-1}, p_{\nu-j-1}\frac{q_{\nu-j}}{d_{j-1}}\dots\frac{q_{\nu-1}}{d_0}) = \text{НОД}(q_{\nu-j-1}, p_{\nu-j-1}\beta_{\nu-j}\dots\beta_{\nu-1}) =$$

$$\text{НОД}(q_{\nu-j-1}, \beta_{\nu-j}\dots\beta_{\nu-1})$$

в силу того, что $q_{\nu-j-1}, p_{\nu-j-1}$ взаимно простые. Выполнив теперь необходимые операции над строками, получим форму Смита Δ. Так как матрицы, соответствующие операциям над строками, не дают вклада в матрицу S_2 (они дают вклад в матрицу S_1), то $S_2 = E$.

Согласно теореме 2.1 из [1] матрица S получается из S_2 вычёркиванием первой строки и первых ν столбцов. Таким образом,

$$S = \begin{pmatrix} -\gamma_1\beta_0 \\ -\gamma_2\beta_0\beta_1 \\ \vdots \\ -\gamma_{\nu-1}\beta_0\dots\beta_{\nu-2} \\ \beta_0\dots\beta_{\nu-1} \end{pmatrix}.$$

Приведём теперь S к форме Смита. Составим матрицу

$$F=\begin{pmatrix} -v_{\nu-2} & -u_{\nu-2}v_{\nu-3} & \ldots & -u_{\nu-2}\ldots u_1v_0 & u_{\nu-2}\ldots u_0\\ \beta_1 & -\gamma_1 v_{\nu-3} & \ldots & -\gamma_1 u_{\nu-3}\ldots u_1v_0 & \gamma_1 u_{\nu-3}\ldots u_0\\ 0 & \beta_2 & \ldots & -\gamma_2 u_{\nu-4}\ldots u_1v_0 & \gamma_2 u_{\nu-4}\ldots u_0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & -\gamma_{\nu-2}v_0 & \gamma_{\nu-2}u_0\\ 0 & 0 & \ldots & \beta_{\nu-1} & \gamma_{\nu-1}\end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что F унимодулярна и

$$FS=\begin{pmatrix}\beta_0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\Delta_0.$$

Следовательно, $T_1^{-1}=F$, поэтому

$$\begin{array}{lccccc} Q_0=(-v_{\nu-2}, & -u_{\nu-2}v_{\nu-3} & ,\ldots, & -u_{\nu-2}\ldots u_1v_0, & u_{\nu-2}\ldots u_0),\\ Q_1=(\beta_1 \quad , & -\gamma_1 v_{\nu-3} & ,\ldots, & -\gamma_1 u_{\nu-3}\ldots u_1v_0, & \gamma_1 u_{\nu-3}\ldots u_0),\\ Q_2=(0 \quad , & \beta_2 & ,\ldots, & -\gamma_2 u_{\nu-4}\ldots u_1v_0, & \gamma_2 u_{\nu-4}\ldots u_0),\\ & & \vdots & & \\ Q_{\nu-2}=(0 \quad , & 0 & ,\ldots, & -\gamma_{\nu-2}v_0, & \gamma_{\nu-2}u_0),\\ Q_{\nu-1}=(0 \quad , & 0 & ,\ldots, & \beta_{\nu-1}, & \gamma_{\nu-1}).\end{array}$$

Итак, группа $\mathbb{F}$ состоит из точек

$$\tau=(\xi_n^{-v_{\nu-2}}t_1^{\beta_1},\xi_n^{-u_{\nu-2}v_{\nu-3}}t_1^{-\gamma_1v_{\nu-3}}t_2^{\beta_2},\ldots,\xi_n^{-u_{\nu-2}\ldots u_1v_0}t_1^{-\gamma_1u_{\nu-3}\ldots u_1v_0}$$

$$t_2^{-\gamma_2u_{\nu-4}\ldots u_1v_0}\ldots t_{\nu-2}^{-\gamma_{\nu-2}v_0}t_{\nu-1}^{\beta_{\nu-1}},\xi_n^{u_{\nu-2}\ldots u_0}t_1^{\gamma_1u_{\nu-3}\ldots u_0}t_2^{\gamma_2u_{\nu-4}\ldots u_0}\ldots t_{\nu-2}^{\gamma_{\nu-2}u_0}t_{\nu-1}^{\gamma_{\nu-1}}),$$

где $(t_1,\ldots,t_{\nu-1})\in\mathbb{T}^{\nu-1},\xi_n=e^{\frac{2\pi in}{\sigma}},n=0,\ldots,\sigma-1$. Лемма доказана.

Докажем теперь вторую лемму.

Лемма 2.2 *Пусть*

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\ldots+\frac{p_{\nu-1}}{q_{\nu-1}}\neq 1.$$

Тогда для того, чтобы уравнение

$$\alpha_1\tau_1 + \ldots + \alpha_\nu\tau_\nu = 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{C} \tag{2}$$

имело решение $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_\nu)$, принадлежащее группе $\mathbb{F}$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$2 \mid \alpha_j \mid \leq \mid \alpha_1 \mid + \ldots + \mid \alpha_\nu \mid, \quad j = 1, \ldots, \nu. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость условий (3) очевидна. Докажем их достаточность.

В силу леммы 9.1 [1] из условий (3) следует, что уравнение (2) имеет решение $(\tau_1^0, \ldots, \tau_\nu^0)$, принадлежащее тору $\mathbb{T}^\nu$, поэтому достаточно доказать, что существует $\lambda \in \mathbb{T}$ такое, что $(\lambda\tau_1^0, \ldots, \lambda\tau_\nu^0)$ принадлежит группе $\mathbb{F}$.

Согласно предыдущей лемме группа $\mathbb{F}$ состоит из точек

$$\tau = (\xi_n^{-v_{\nu-2}} t_1^{\beta_1}, \xi_n^{-v_{\nu-3}u_{\nu-2}} t_1^{-\gamma_1 v_{\nu-3}} t_2^{\beta_2}, \ldots, \xi_n^{-v_0 u_1 \ldots u_{\nu-2}} t_1^{-\gamma_1 v_0 u_1 \ldots u_{\nu-3}}$$

$$t_2^{-\gamma_2 v_0 u_1 \ldots u_{\nu-4}} \ldots t_{\nu-2}^{-\gamma_{\nu-2} v_0} t_{\nu-1}^{\beta_{\nu-1}}, \xi_n^{u_0 \ldots u_{\nu-2}} t_1^{\gamma_1 u_0 \ldots u_{\nu-3}} t_2^{\gamma_2 u_0 \ldots u_{\nu-4}} \ldots t_{\nu-2}^{\gamma_{\nu-2} u_0} t_{\nu-1}^{\gamma_{\nu-1}}),$$

где $(t_1, \ldots, t_{\nu-1}) \in \mathbb{T}^{\nu-1}, \xi_n = e^{\frac{2\pi i n}{\sigma}}, n = 0, \ldots, \sigma - 1$. Таким образом, нам нужно доказать, что при выполнении условий леммы система уравнений относительно $t_1, \ldots, t_{\nu-1}, \lambda$

$$(\tau_1, \ldots, \tau_\nu) = (\lambda\tau_1^0, \ldots, \lambda\tau_\nu^0)$$

имеет решение. Докажем, что на самом деле существует решение этой системы при $n = 0$. В этом случае система имеет вид

$$\begin{cases} t_1^{\beta_1} = \lambda\tau_1^0 \\ t_1^{-\gamma_1 v_{\nu-3}} t_2^{\beta_2} = \lambda\tau_2^0 \\ \vdots \\ t_1^{-\gamma_1 u_{\nu-3} \ldots u_2 v_1} t_2^{-\gamma_2 u_{\nu-4} \ldots u_2 v_1} \ldots t_{\nu-3}^{-\gamma_{\nu-3} v_1} t_{\nu-2}^{\beta_{\nu-2}} = \lambda\tau_{\nu-2}^0 \\ t_1^{-\gamma_1 u_{\nu-3} \ldots u_1 v_0} t_2^{-\gamma_2 u_{\nu-4} \ldots u_1 v_0} \ldots t_{\nu-3}^{-\gamma_{\nu-3} u_1 v_0} t_{\nu-2}^{-\gamma_{\nu-2} v_0} t_{\nu-1}^{\beta_{\nu-1}} = \lambda\tau_{\nu-1}^0 \\ t_1^{\gamma_1 u_{\nu-3} \ldots u_0} t_2^{\gamma_2 u_{\nu-4} \ldots u_0} \ldots t_{\nu-3}^{\gamma_{\nu-3} u_1 u_0} t_{\nu-2}^{\gamma_{\nu-2} u_0} t_{\nu-1}^{\gamma_{\nu-1}} = \lambda\tau_\nu^0. \end{cases} \tag{4}$$

Возведём последнее уравнение в степень $-\beta_{\nu-1}$, предпоследнее в степень $\gamma_{\nu-1}$, и перемножим полученные уравнения. Система примет вид

$$\begin{cases} t_1^{\beta_1} = \lambda\tau_1^0 \\ t_1^{-\gamma_1 v_{\nu-3}} t_2^{\beta_2} = \lambda\tau_2^0 \\ \vdots \\ t_1^{-\gamma_1 u_{\nu-3}\dots u_2 v_1} t_2^{-\gamma_2 u_{\nu-4}\dots u_2 v_1} \dots t_{\nu-3}^{-\gamma_{\nu-3} v_1} t_{\nu-2}^{\beta_{\nu-2}} = \lambda\tau_{\nu-2}^0 \\ t_1^{-\gamma_1 u_{\nu-3}\dots u_1} t_2^{-\gamma_2 u_{\nu-4}\dots u_1} \dots t_{\nu-2}^{-\gamma_{\nu-2}} = \lambda^{\gamma_{\nu-1}-\beta_{\nu-1}} \big(\tau_{\nu-1}^0\big)^{\gamma_{\nu-1}} \big(\tau_\nu^0\big)^{-\beta_{\nu-1}}. \end{cases}$$

Возведём последнее уравнение в степень $\beta_{\nu-2}$, предпоследнее в степень $\gamma_{\nu-2}$, и перемножим полученные уравнения. Система примет вид

$$\begin{cases} t_1^{\beta_1} = \lambda\tau_1^0 \\ t_1^{-\gamma_1 v_{\nu-3}} t_2^{\beta_2} = \lambda\tau_2^0 \\ \vdots \\ t_1^{-\gamma_1 u_{\nu-3}\dots u_2 v_1} t_2^{-\gamma_2 u_{\nu-4}\dots u_2 v_1} \dots t_{\nu-3}^{-\gamma_{\nu-3} v_1} t_{\nu-2}^{\beta_{\nu-2}} = \\ \lambda^{\gamma_{\nu-2}+\beta_{\nu-2}(\gamma_{\nu-1}-\beta_{\nu-1})} \big(\tau_{\nu-2}^0\big)^{\gamma_{\nu-2}} \big(\tau_{\nu-1}^0\big)^{\beta_{\nu-2}\gamma_{\nu-1}} \big(\tau_\nu^0\big)^{-\beta_{\nu-2}\beta_{\nu-1}}. \end{cases}$$

Продолжая этот процесс, после $\nu-2$ шагов получим

$$\begin{cases} t_1^{\beta_1} = \lambda\tau_1^0 \\ t_1^{-\gamma_1} = \lambda^{\gamma_2+\beta_2(\dots(\gamma_{\nu-2}+\beta_{\nu-2}(\gamma_{\nu-1}-\beta_{\nu-1}))\dots)} \\ \big(\tau_2^0\big)^{\gamma_2} \big(\tau_3^0\big)^{\beta_2\gamma_3} \dots \big(\tau_{\nu-1}^0\big)^{\beta_2\dots\beta_{\nu-2}\gamma_{\nu-1}} \big(\tau_\nu^0\big)^{-\beta_2\dots\beta_{\nu-1}}. \end{cases}$$

Подставляя выражение для λ из первого уравнения во второе, будем иметь

$$t_1^{\gamma_1+\beta_1(\dots(\gamma_{\nu-2}+\beta_{\nu-2}(\gamma_{\nu-1}-\beta_{\nu-1}))\dots)} = \big(\tau_1^0\big)^{\gamma_2+\beta_2(\dots(\gamma_{\nu-2}+\beta_{\nu-2}(\gamma_{\nu-1}-\beta_{\nu-1}))\dots)} \big(\tau_2^0\big)^{-\gamma_2}$$
$$\big(\tau_3^0\big)^{-\beta_2\gamma_3} \dots \big(\tau_{\nu-1}^0\big)^{-\beta_2\dots\beta_{\nu-2}\gamma_{\nu-1}} \big(\tau_\nu^0\big)^{\beta_2\dots\beta_{\nu-1}}. \qquad (5)$$

По условию леммы

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \dots + \frac{p_{\nu-1}}{q_{\nu-1}} \neq 1.$$

Отсюда получаем, что

$$p_1 q_2 q_3 \dots q_{\nu-1} + q_1 p_2 q_3 \dots q_{\nu-1} + \dots + q_1 q_2 q_3 \dots q_{\nu-2} p_{\nu-1} - q_1 q_2 q_3 \dots q_{\nu-1} \neq 0.$$

Следовательно,

$$\Gamma = \gamma_1 + \beta_1(\dots(\gamma_{\nu-2} + \beta_{\nu-2}(\gamma_{\nu-1} - \beta_{\nu-1}))\dots) = \frac{1}{d_1 \dots d_{\nu-2}}(p_1 q_2 q_3 \dots q_{\nu-1} +$$

$$q_1 p_2 q_3 \dots q_{\nu-1} + \dots + q_1 q_2 q_3 \dots q_{\nu-2} p_{\nu-1} - q_1 q_2 q_3 \dots q_{\nu-1}) \neq 0,$$

поэтому из соотношения (5) будем иметь

$$t_1 = (\tau_1^0)^{\frac{\gamma_2 + \beta_2(\dots(\gamma_{\nu-2} + \beta_{\nu-2}(\gamma_{\nu-1} - \beta_{\nu-1}))\dots)}{\Gamma}} (\tau_2^0)^{\frac{-\gamma_2}{\Gamma}} (\tau_3^0)^{\frac{-\beta_2 \gamma_3}{\Gamma}} \dots (\tau_{\nu-1}^0)^{\frac{-\beta_2 \cdots \beta_{\nu-2} \gamma_{\nu-1}}{\Gamma}}$$

$(\tau_\nu^0)^{\frac{\beta_2 \cdots \beta_{\nu-1}}{\Gamma}}$ (можно взять любые значения корней). Из первого уравнения системы (4) находим λ, из i-го уравнения находим t_i ($i = 2, \dots, \nu - 1$). Непосредственная проверка показывает, что найденные $t_1, \dots, t_{\nu-1}, \lambda$ действительно являются решением системы (4). Лемма доказана.

Теорема 2.2 является непосредственным следствием леммы 2.4.

Доказательство теоремы 2.2. Осталось доказать только включение $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_{\mathbb{F}}$.

Если $z \in \mathcal{N}$, то есть

$$2 \mid C_j \Delta_j(z) \mid \leq \sum_{k=1}^{\nu} \mid C_k \Delta_k(z) \mid, \ j = 1, \dots, \nu,$$

то, по лемме 2.4, многочлен $\omega(z, \tau) = \sum_{j=1}^{\nu} C_j \Delta_j(z) \tau_j$ имеет корень, принадлежащий группе $\mathbb{F}$. Поэтому $z \in \mathcal{N}_{\mathbb{F}}$, следовательно, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_{\mathbb{F}}$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Adukov V.M. The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Pade table //J.Approx.Theory – 2003 – 122 – C.160 - 207.

[2] Неряхин Н.Н. Замечание о монотетических подгруппах тора //Вестник ЮУрГУ – 2005 – №6 – С.40 - 42.