ВЫЧИСЛЕНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ ИНВАРИАНТОВ G-МНОГООБРАЗИЙ

И.В. ЛОСЕВ

Аннотация. Мы строим алгоритмы вычисления групп Вейля и решеток весов для однородных пространств и аффинных однородных векторных расслоений, а также наборов цветных векторов для сферических аффинных однородных пространств и сферических однородных векторных расслоений. Эти алгоритмы, в принципе, позволяют решить проблему классификации всех вложений данного сферического однородного пространства. Для некоторых специальных классов G-многообразий мы приводим относительно явное вычисление. Наиболее существенным ингредиентом для получения алгоритмов является теория гамильтоновых действий редуктивных групп.

Оглавление

1. Введение

1.1. **Определение инвариантов.** Целью настоящей работы является построение алгоритмов для вычисления некоторых бирациональных инвариантов неприводимых G-многообразий. Основным полем является поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Ниже в этом пункте через G обозначена связная редуктивная алгебраическая группа, а через X – неприводимое G-многообразие.

Определим сначала весовую решетку G-многообразия X. Именно, характер $\lambda \in \mathfrak{X}(B) \cong \mathfrak{X}(T)$ назовем *весом* G-многообразия X, если пространство $\mathbb{C}(X)^{(B)}_\lambda = \{f \in \mathbb{C}(X) | b.f = \lambda(b)f\}$ отлично от нуля. Множество всех весов G-многообразия X образует подрешетку в решетке $\mathfrak{X}(T)$. Эту подрешетку мы будем называть *решеткой весов* (или *весовой решеткой*) G-многообразия X и обозначать через $\mathfrak{X}_{G,X}$. Ранг решетки $\mathfrak{X}_{G,X}$ называется *рангом* многообразия X и обозначается через $\mathrm{rk}_G(X)$. Пространство $\mathfrak{a}_{G,X} := \mathfrak{X}_{G,X} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}$ мы будем называть *картановским пространством* многообразия X. Пространство $\mathfrak{a}_{G,X}$ естественным образом вкладывается в $\mathfrak{t}^* \cong \mathfrak{X}(T) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}$. Все интересующие нас инварианты, первым из которых является решетка весов, будут "жить" в $\mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{R}) := X_{G,X} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ или в $\mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{R})^*$.

Следующим после решетки весов инвариантом является набор векторов в $\mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{R})^*$, называемых *цветными*.

Пусть v – $\mathbb{R}$-значное нормирование поля $\mathbb{C}(X)$, обращающееся в 0 на $\mathbb{C}(X)^B$. Существует естественный способ сопоставить нормированию v элемент из $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathfrak{X}_{G,X}, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{R})^*$. Именно, пусть $\lambda \in \mathfrak{X}_{G,X}$. Положим $\varphi_{v,\lambda} := v(f_\lambda)$ для произвольной ненулевой функции $f \in \mathbb{C}(X)^{(B)}_\lambda$. Поскольку нормирование v обращается в 0 на $\mathbb{C}(X)^B$, то число $\varphi_{v,\lambda}$ корректно определено. Очевидно, что отображение $\varphi_v : \lambda \mapsto \varphi_{v,\lambda}$ лежит в $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathfrak{X}_{G,X}, \mathbb{R})$.

Пусть теперь D – простой B-дивизор Вейля на X. Если соответствующее нормирование v_D обращается в 0 на $\mathbb{C}(X)^B$ (в этом случае мы будем говорить, что дивизор D *централен*), то дивизору D сопоставляется элемент $\varphi_D \in \mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{R})^*$ (отметим, что $\varphi_D \in \mathfrak{X}^*_{G,X} \hookrightarrow \mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{R})^*$). Если дивизор D не является G-инвариантным, то соответствующий вектор φ_D мы называем *цветным*. Несложно видеть, что набор цветных векторов является бирациональным инвариантом G-многообразия.

Следующим инвариантном, который нас интересует, является *конус центральных нормирований*.

Определение 1.1.1. Под G-нормированием мы понимаем дискретное $\mathbb{R}$-значное G-инвариантное нормирование поля $\mathbb{C}(X)$. G-нормирование называется *центральным*, если оно обращается в 0 на подполе $\mathbb{C}(X)^B \subset \mathbb{C}(X)$.

Множество всех центральных G-нормирований мы обозначим через $\mathcal{V}_{G,X}$.

Имеем отображение $v \mapsto \varphi_v : \mathcal{V}_{G,X} \to \mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{R})^*$. Опишем его свойства. Для начала, снабдим вещественное векторное пространство $\mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{R}) = \mathfrak{X}_{G,X} \otimes \mathbb{R}$ скалярным произведением. Выберем в $\mathfrak{t}(\mathbb{R})^* := \mathfrak{X}(T) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ скалярное произведение инвариантное относительно группы Вейля $W(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$. В качестве скалярного произведения на $\mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{R})$ возьмем ограничение скалярного произведения с $\mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$.

Теорема 1.1.2. (1) *Отображение $v \mapsto \varphi_v$ является инъекцией. Его образ является рациональным конечно-порожденным выпуклым конусом в $\mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{R})^*$ (называемым конусом центральных нормирований).*

(2) *Конус центральных нормирований симплициален (последнее означает, что найдутся линейно независимые функционалы $\beta_1, \ldots, \beta_r$, для которых конус задается неравенствами $\beta_i \geqslant 0$). Отражения относительно стенок этого конуса порождают конечную группу $W_{G,X}$ в $\mathrm{O}(\mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{R})^*)$.*
(3) *Группа $W_{G,X}$ сохраняет решетку $\mathfrak{X}_{G,X}$.*

Доказательство первой части относительно несложно. Доказательства её утверждений содержатся, например, (в значительно большей общности) в [Kn3], Korollare 3.6, 4.2, 5.2, 6.5. Второе утверждение значительно более сложно. Общее доказательство содержится в работах [Kn3], Abschnitt 9, и [Kn4]. Третья часть легко выводится из самого определения группы $W_{G,X}$, данного в [Kn4].

Первая часть теоремы позволяет нам отождествить $\mathcal{V}_{G,X}$ с конусом в $\mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{R})^*$, который мы и называем конусом центральных нормирований. Для конуса мы также используем обозначение $\mathcal{V}_{G,X}$.

Определение 1.1.3. Линейная группа $W_{G,X} \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{R}))$, введенная в теореме 1.1.2, называется *группой Вейля* G-многообразия X.

Определение группы Вейля имеет долгую историю, которой мы сейчас коснемся. Группа Вейля редуктивной алгебраической группы была, по сути, введена в работе Германа Вейля [We]. Чуть позже Э. Картан в работе [Ca] обобщает понятие группы Вейля на *симметрические пространства* (т.н. *малая группа Вейля*). С алгебраической точки зрения, симметрическое пространство – это однородное пространство G/H, где H – такая алгебраическая подгруппа в G, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\sigma$ для инволютивного автоморфизма σ алгебры $\mathfrak{g}$.

Для того, чтобы идти дальше введем следующее

Определение 1.1.4. *Сложностью* G-многообразия X (обозначается $c_G(X)$) называется коразмерность B-орбиты общего положения в X. Нормальное G-многообразие X называется *сферическим*, если $c_G(X) = 0$.

Любое симметрическое пространство является сферическим, [Vu1]. В работе [Bri3], М. Брион построил группу Вейля для сферического однородного пространства G/H, где подгруппа $H \subset G$ имеет конечный индекс в своем нормализаторе. Эта группа обобщает малую группу Вейля симметрического пространства. В работе [Kn1] Ф. Кноп нашел альтернативный способ связать группу Вейля с произвольным неприводимым G-многообразием, так же обобщающую имеющуюся для симметрических пространств. Он же в работе [Kn3] распространил конструкцию Бриона на общие G-многообразия. Соответствующее определение и приведено выше. Наконец, в работе [Kn4] приведено ещё одно определение группы Вейля и доказана эквивалентность всех трех определений.

Оказывается, что вычислять конус центральных нормирований удобнее всего через вычисление группы Вейля. Может показаться, что группа Вейля содержит меньше информации, чем конус: у одной группы, порожденной отражениями, имеется несколько камер Вейля. Однако это не так, конус однозначным образом восстанавливается по группе, см. [Kn3], Abschnitt 9, Bemerkung 2. Именно, конус нормирований является единственной камерой Вейля группы $W_{G,X}$, содержащей образ антидоминантной камеры Вейля всей группы $W(\mathfrak{g})$ при проекции $\mathfrak{t}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{R})^*$. Таким образом, знание группы Вейля эквивалентно знанию конуса нормирований.

Замечание 1.1.5. В определении группы Вейля использовалось некоторое $W(\mathfrak{g})$-инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$. Однако, сама подгруппа $W_{G,X} \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{a}_{G,X})$

не зависят от этого скалярного произведения. В самом деле, подмножество $W(\mathfrak{g})$-инвариантных скалярных произведений выпукло в пространстве симметрических билинейных форм на $\mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$. Группа Вейля имеет дискретную природу и не меняется при малых шевелениях скалярного произведения.

Ниже мы встретимся и с другими комбинаторными бирациональными инвариантами многообразия X, которые не сводятся к определенным выше, а именно решеткой и системой корней. Они, впрочем, представляют для нас вспомогательный интерес.

1.2. **Постановка задачи и основные результаты.** Целью данной работы нахождение способов вычисления решетки весов, группы Вейля (как линейной группы, действующей в пространстве $\mathfrak{a}_{G,X}$) и цветных векторов неприводимого G-многообразия X, точнее, нахождение алгоритма вычисления. Здесь, однако, встает вопрос о том, как *задано* многообразие X. Например, многообразие может быть задано, как подмногообразие в проективизации некоторого G-модуля. В этом случае исходными данными для алгоритма должен являться набор однородных многочленов, нулями которых является данное многообразие. Однако, существование алгоритма с хоть сколько-нибудь разумными шагами, который бы по такой системе многочленов вычислял указанные инварианты кажется крайне мало вероятным.

Мы будем иметь дело с многообразиями X, заданными в одной из следующих двух форм:

(1) X является однородным пространством G/H, где H – некоторая алгебраическая подгруппа в G.
(2) X является однородным векторным расслоением над аффинным однородным пространством (=аффинным однородным векторным расслоением), т.е. имеет вид $X = G *_H V$, где H – редуктивная подгруппа в G, а V – H-модуль.

Такой выбор можно оправдать тремя причинами. Во-первых, эти классы G-многообразий достаточно интересны сами по себе. Во вторых, в некотором смысле, вычисление, скажем, группы Вейля для произвольного G-многообразия сводится к вычислению групп Вейля для однородных пространств. Для этого достаточно указать достаточно общую орбиту для действия $G : X$ (пункт 3 предложения 2.3.1). В случае же, когда исходное многообразие X гладко и аффинно, то вопрос о вычислении группы Вейля сводится к случаю, когда многообразие X имеет форму (2). Для этого достаточно знать стабилизатор точки с какой-нибудь замкнутой G-орбиты и слайс-модуль в этой точке (лемма 2.3.3). Наконец, в-третьих, в рассматриваемых нами случаях, алгоритмы вычисления с "разумными" шагами действительно существуют. При этом отметим, что алгоритмы в случае (2) оказываются существенно более простыми.

Итак, основной результат данной работы – это алгоритмы, вычисляющие картановские пространства, группы Вейля, решетки весов для многообразий типа (1) и (2), а также цветные векторы для сферических однородных пространств и все векторы вида φ_D, где D пробегает все множество простых B-дивизоров, для сферических аффинных однородных расслоений. Ограничение сферичности в последнем случае введено из-за того, что, во-первых, оно действительно упрощает задачу, и, во-вторых, роль цветных векторов в общем случае не вполне понятна. Из-за технической сложности этих алгоритмов мы не приводим их здесь, они будут приведены в разделе 11. Кроме того, мы приведем вычисление групп Вейля для произвольных аффинных однородных пространств G/H (предложение 7.6.2) и для аффинных однородных расслоений $G *_H V$ с простой группой G и условием $\mathrm{rk}_G(G *_H V) = \mathrm{rk}\, G$ в настолько явном виде, насколько это, по-видимому, вообще возможно. Далее, мы приведем более или менее явное вычисление решеток весов для аффинных однородных пространств G/H с $\mathrm{rk}_G(G/H) = \mathrm{rk}\, G$.

Теперь представляется разумным обсудить вопрос о том, что же представляют собой шаги наших алгоритмов. Говоря коротко, это вычисления "структурных характеристик" пар (группа/алгебра, подгруппа/подалгебра), (редуктивная группа/алгебра, модуль над этой группой/алгеброй). В первую группу входит, скажем вычисление нормализатора подгруппы в группе, или же нахождение унипотентного радикала и подгруппы Леви в некоторой алгебраической группе. Ко второй группе, относится, скажем, разложение ограничения неприводимого представления с заданным старшим вектором на подгруппу Леви с указанием соответствующих старших векторов. При этом, при вычислении, скажем, группы Вейля $W_{G,G/H}$, которая зависит лишь от пары касательных алгебр, мы работаем на уровне алгебр Ли. Для вычисления же решетки $\mathfrak{X}_{G,G/H}$, которая этим свойством не обладает, нам приходится работать на уровне групп (что существенно сложнее).

Безусловно, практическая реализация подобных шагов сталкивается со значительными трудностями. Например, указанный шаг второго типа в случае группы $G = \mathrm{GL}_n$ и подгруппы Леви $L = \mathrm{GL}_k \times \mathrm{GL}_{n-k}$ требует вычисления коэффициентов Литтлвуда-Ричардсона, что является исключительно сложной комбинаторной задачей. Кроме того, мы обходим стороной способы *задания* подгрупп в G, G-модулей, и т.д. Таким образом, эффективность практической (скажем, компьютерной) реализации наших алгоритмов кажется спорной, и они представляют скорее теоретический интерес.

Напоследок, впрочем, сделаем обнадеживающее спекулятивное замечание. Можно модифицировать алгоритм таким образом (что, однако, не обсуждается в данной работе), что разложение ограничений представлений на подгруппы Леви будет применяться только к некоторым, достаточно "маленьким" представлениям. Возможно, алгоритмы допускает и другие упрощения.

1.3. **Мотивации.** Основная мотивация для вычисления указанных инвариантов приходит из теории вложений сферических однородных пространств.

Подобно тому, как алгебраическая геометрия занимается изучением категории алгебраических многообразий, теория алгебраических групп преобразований имеет дело с категорией G-многообразий, т.е. алгебраических многообразий, снабженных действием некоторой алгебраической группы G. Как правило, рассматривается случай, когда группа связна и редуктивна, а многообразие нормально. Первой проблемой при изучении некоторой категории является классификация её объектов. В нашем случае, классификационную задачу можно разделить на две части: бирациональную и бирегулярную. Первая часть заключается в классификации G-многообразий с точностью до G-эквивариантной бирациональной эквивалентности, или, на алгебраическом языке, классификация всех конечно порожденных полей, снабженных действием группы G автоморфизмами. Важным частным случаем здесь является случай квазиоднородных многообразий, т.е. тех, которые обладают открытой G-орбитой. Вторая часть заключается в классификации G-многообразий в заданном бирациональном классе. Для квазиоднородного случая эта задача заключается в классификации всех открытых вложений данного однородного пространства в нормальное многообразие (в дальнейшем, мы будем говорить просто о вложениях однородных пространств).

Программа для выполнения бирегулярной части классификации была выдвинута Луной и Вюстом ([LV]). Отметим, что в этой работе рассматривался лишь вопрос классификации вложений однородных пространств. Однако, теория Луны-Вюста годится и в общем случае, см. [Ти]. С помощью теории Луны-Вюста получено комбинаторное (в некотором смысле) описание G-многообразий сложности не превосходящей 1. Случай сложности 0 был разобран уже в [LV], замкнутое и более элементарное изложение дано, например, в [Kn2], см. также [Bri4]. Случай сложности 1 был рассмотрен в [Ти]. Общая классификация многообразий сложности большей единицы признается дикой.

Объясним, в общих чертах, как устроена классификация сферических G-многообразий. Очевидно, что любое такое G-многообразие содержит открытую G-орбиту. Поэтому бирациональная часть классификации эквивалентна классификации всех сферических однородных пространств. Далее, для описания всех вложений данного однородного пространства X надо знать рациональное векторное пространство $\mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{Q}) := \mathfrak{X}_{G,X} \otimes \mathbb{Q}$, конус нормирований $\mathcal{V}_{G,X}$ и набор цветных векторов. Имеется теорема о том, что нормальные вложения однородного пространства X находятся во взаимно-однозначном соответствии с множеством, элементами которого является некоторый "допустимый" набор конусов в $\mathfrak{a}^*_{G,X}$. Каждый конус натянут на конечное число рациональных векторов, лежащих в $\mathcal{V}_{G,X}$ или цветных. Допустимые наборы конусов характеризуются тем, что каждый из конусов в наборе, а также весь набор, удовлетворяют некоторым наглядным геометрическим условиям ([Kn2], Theorem 3.1). Таким образом, решение бирегулярной части задачи классификации сферических многообразий состоит в том, чтобы по данному сферическому пространству восстановить описанный набор данных (пространство, конус, набор цветных векторов).

Кроме того, зная этот набор данных можно описать доминантные морфизмы со связным общим слоем между сферическими многообразиями ([Kn2]), а зная дополнительно решетку весов, можно определить G-модульную структуру пространства сечений линейного расслоения ([Bri1]). По поводу других приложений комбинаторных инвариантов к геометрии сферических многообразий, см. [Bri4],[Ti3].

1.4. **Известные результаты.** Основные результаты, касающиеся вычисления весовых решеток, принадлежат Панюшеву [Pa1], см. также [Па2], раздел 2. Они заключаются в редукции вычисления к случаю аффинных однородных пространств. Мы изложим эти результаты с незначительными модификациями в пункте 2.6.

Теперь мы перейдем к описанию полученных результатов, касающихся вычисления групп Вейля. Эти результаты формулируются одним из следующих трех способов:

1) Собственно указание группы Вейля.

2) Указание конуса центральных нормирований.

3) Указание примитивных линейно-независимых элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ в $\mathfrak{X}_{G,X}$, для которых конус центральных нормирований задается системой неравенств $\langle \alpha_i, x\rangle \leqslant 0, i = \overline{1,r}$. Мы будем называть такие элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ называются *сферическими корнями* многообразия X.

Известен критерий того, что группа $W_{G,X}$ единична. Это так тогда и только тогда, когда многообразие X является орисферическим, т.е. когда стабилизатор каждой точки содержит максимальную унипотентную подгруппу. В общем случае это утверждение доказано в [Kn1].

Все прочие результаты о группах Вейля касаются сферических многообразий. Здесь имеется два концептуальных подхода к вычислению конуса. Хронологически первый – метод формальных кривых, разработан в [LV]. Второй приведен в [Bri3], 2.3-2.4. Он вычисляет конус нормирований сферического однородного пространства по достаточно общей точке.

Теперь мы упомянем некоторые обсчитаные примеры. Как уже упоминалось выше, группа Вейля симметрического пространства совпадает с классической малой группой

Вейля, см. [Bri3],[Kn1],[Vu2]. В работе [Vu2] вычислены также наборы цветных векторов и решетки весов. Вычислены указанные инварианты и для сферических G-модулей, см. [Kn8] по поводу (наиболее нетривиального) вычисления групп Вейля. Отметим, что в этой работе обозначение W_V используется для группы Вейля G-многообразия V^*.

Имеются также результаты по комбинаторных инвариантов для специальных классов однородных сферических многообразий. Для т.н. замечательных многообразий ранга 2, см. пункт 2.8, вычисление проведено в [Wa]. Оно опирается на некоторые факты из структурной теории замечательных многообразий. Вычисления для другого интересного класса однородных пространств содержится в [См].

Из всех упомянутых выше результатов мы будем пользоваться лишь принадлежащими Вассерману, [Wa]. См., впрочем, замечание 9.1.1.

Напоследок уместно сделать замечание, касающееся классификации сферических многообразий. Первый, бирациональный, этап классификации заключается в описании всех сферических однородных пространств. На сегодняшний день имеется единственный подход к решению этой задачи в общем случае, принадлежащий Д. Луне, и реализованный им для групп типа A (т.е. связных редуктивных групп G с $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cong\bigoplus_{i=1}^k\mathfrak{sl}_{n_k}$) в работе [Lu5]. Используя эту методику была получена полная классификация сферических однородных пространств для групп типа A-D, [Bra], и частичная для групп типа A-C, [Pe]. Подход Луны состоит в том, чтобы классифицировать сферические однородные пространства по заданной системе комбинаторных данных, которые более или менее эквивалентны указанной выше тройке. Таким образом, вычислять комбинаторные инварианты для сферических пространств, заданных таким образом, ненужно. Следует, впрочем, отметить, что уже для групп типа $A-C$ подход Луны не работает в полной мере. Кроме того, *получение* примеров (в том числе, весьма сложных) сферических однородных пространств не представляет большой сложности. Отметим также, что эти работы существенно используют вычисление интересующих нас инвариантов в специальных случаях.

1.5. **Основные идеи и структура работы.** В этом пункте мы даем краткое описание разделов работы, параллельно описывая основные идеи, использованные при построении алгоритмов. Более подробное описание каждого из разделов работы дано в его первом пункте. Предупредим читателя, что здесь мы не претендуем на строгость формулировок.

В разделе 2 мы приводим, в основном, известные результаты и конструкции. Наиболее важными для дальнейшего являются пункты 2.3, в котором приводятся свойства групп Вейля, и 2.5, в котором определяется некоторая подрешетка $\Lambda_{G,X}$ в решетке весов, т.н. *решетка корней* G-многообразия, и приводятся её свойства. Важность решетки корней для нас состоит в том, что она порождена некоторой системой корней, группа Вейля которой совпадает с группой Вейля G-многообразия.

Раздел 3 посвящен изложению основных конструкций, связанных с гамильтоновыми действиями. Гамильтоново действие, интересующее нас больше всего, это действие на кокасательном расслоении, подробно изученное Ф. Кнопом. Наш интерес к этому действию обусловлен, в основном, тем, что группа Вейля, картановское пространство и решетки весов могут быть определены в его терминах. В пункте 3.6 мы приведем варианты этих конструкций, а также конструкцию решеток корней, для произвольного гамильтонова действия. Новой является лишь последняя, остальные, по сути, позаимствованы из работ [Kn4],[Vi].

Вычисление групп Вейля векторных расслоений над аффинными однородными пространствами (раздел 7) и решеток корней аффинных однородных пространств (раздел

8) существенным образом опирается на теорию гамильтоновых действий на аффинных многообразиях. Эта теория, представляющяя и самостоятельный интерес, разрабатывается в разделе 4.

Раздел 5 играет первостепенно важную роль в этой работе. Во-первых, в нем доказывается эквивалентность "алгебро-геометрических" (приведенных в разделах 1, 2) и "симплекто-геометрических" (раздел 3) определений группы Вейля, весовых и корневых решеток. Новым результатом является только эквивалентность определений решеток корней. Далее, в этом разделе доказан один из основных результатов, лежащих в основе алгоритмов вычисления групп Вейля и решеток корней, теорема редукции. Мы не будем формулировать его сейчас, но объясним вкратце, в чем его суть.

Определим две подгруппы в G следующим образом:

$$L_{G,X} = Z_G(\mathfrak{a}_{G,X}). \tag{1.1}$$

$$L_{0\,G,X} = \{g \in L | \chi(g) = 1, \forall \chi \in \mathfrak{X}_{G,X}\}. \tag{1.2}$$

Окажется, что если группа $L_0 := L^\circ_{0\,G,X}$ нетривиальна, то вычисление группы Вейля для действия $G : X$ сводится к вычислению группы Вейля для действия $\underline{G} : \underline{X}$, где $\underline{G}$ является подфактором в G, а $\underline{X}$ – подмногообразием в X. Точнее, мы берем в качестве $\underline{X}$ некоторую *выделенную* компоненту в X^{L_0} и полагаем $\underline{G} = N_G(L_0, \underline{X})/L_0$. Применение этой теоремы позволяет сводить вычисление группы Вейля и решетки весов к случаю $\mathrm{rk}_G(X) = \mathrm{rk}\, G$. Это удобно, потому что картановское пространство становится фиксированным. Кроме того, в этом случае можно несложно свести вычисление групп Вейля к случаю, когда группа G является простой. Вычисление групп Вейля для аффинных однородных векторных расслоений не требует ещё одного применения теоремы редукции. То же имеет место для произвольных однородных пространств для групп G типа A, D, E, G. Для оставшихся простых групп теорему редукции нужно будет применить ещё раз.

Раздел 6 посвящен вопросу вычисления выделенных компонент многообразий $X^{L^\circ_{0\,G,X}}$. Результаты этого раздела и работы [Lo2] позволяют вычислять картановские пространства для всех интересующих нас многообразий. Кроме того, они позволяют вычислять группу $\underline{G}$ и многообразие $\underline{X}$, которые фигурируют в теореме редукции.

Раздел 7 посвящен вычислению групп Вейля для аффинных однородных векторных расслоений. Основная идея состоит в том, чтобы увязать отличие группы $W_{G,X}$ от всей группы $W(\mathfrak{g})$ со структурой действия $G : T^*X$. Это делается на языке $\mathfrak{g}$-*стратов*.

Определение 1.5.1. Пара $(\mathfrak{h}, V)$, состоящая из редуктивной подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$-модуля V называется $\mathfrak{g}$-*стратом*. Два $\mathfrak{g}$-страта $(\mathfrak{h}_1, V_1), (\mathfrak{h}_2, V_2)$ называются *эквивалентными*, если существуют элемент $g \in G$ и линейный изоморфизм $\varphi : V_1/V_1^{\mathfrak{h}_1} \to V_2/V_2^{\mathfrak{h}_2}$, для которых $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$ и $\rho_2(\mathrm{Ad}(g)\xi) = \varphi\rho_1(\xi)\varphi^{-1}$ для всех $\xi \in \mathfrak{h}_1$. Здесь через ρ_i обозначено представление алгебры $\mathfrak{h}_i$ в $V_i/V_i^{\mathfrak{h}_i}, i = 1, 2$.

Определение 1.5.2. Пусть Y – гладкое аффинное G-многообразие, и $y \in Y$ – точка с замкнутой G-орбитой. Мы называем пару $(\mathfrak{g}_y, T_yY/\mathfrak{g}_*y)$ $\mathfrak{g}$-стратом точки y. Мы говорим, что $\mathfrak{g}$-страт $(\mathfrak{h}, V)$ является $\mathfrak{g}$-стратом многообразия Y, если существует точка $y \in Y$ с замкнутой G-орбитой, $\mathfrak{g}$-страт которой эквивалентен $\mathfrak{g}$-страту $(\mathfrak{h}, V)$. В этом случае мы пишем $(\mathfrak{h}, V) \rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} Y$.

Замечание 1.5.3. Объясним использованную терминологию. Пара $(\mathfrak{h}, V)$ действительно определяет некоторую стратификацию, только не многообразия X, а категорного фактора $X//G$. Кроме того, термин "страт" по отношению к подобным объектам уже применялся в [Sch2], откуда он, собственно, и позаимствован.

Общий принцип заключается в том, что чем меньше группа Вейля $W_{G,X}$, тем более специальные страты имеет G-многообразие T^*X. Таким образом, задача сводится к описанию всех аффинных однородных векторных расслоения, кокасательное расслоение к которым обладает этими стратами, с последующим вычислением Вейля для них.

В разделе 8 мы вычислим решетки корней для аффинных однородных пространств ранга $\mathrm{rk}\, G$. При этом используется та же идея со стратами, что и в предыдущем разделе: чем меньше (относительно включения) решетка корней $\Lambda_{G,X}$, тем более специальными стратами обладает многообразие T^*X. Зная решетки корней, мы сможем вычислить решетки весов.

Результаты предшествующих разделов позволяют свести вычисление групп Вейля для однородного пространства X к случаю, когда группа G проста, и $\mathfrak{a}_{G,X} = \mathfrak{t}$ (а в случае $G = B_l, C_l, F_4$ дополнительно $\mathfrak{t}^{W_{G,X}} = \{0\}$). Эта задача решается в разделе 9.

В разделе 10 мы занимаемся проблемой вычисления набора цветных векторов сферического однородного пространства. Основная идея, грубо говоря, заключается в последовательных редукциях от однородных пространств к аффинным однородным векторным расслоениям и обратно. Для нередуцируемых многообразий (которые все будут факториальными аффинными однородными пространствами) вычисление делается более или менее явно.

В разделе 11 мы приводим собираем воедино полученные алгоритмы. Наконец, в раздел 12 содержит соглашения, которые мы используем в работе, и список основных обозначений.

Каждый раздел данной работы разбит на пункты. Теоремы, леммы, определения, замечания и т.д. нумеруются в пределах пункта, а формулы и таблицы – в пределах раздела.

В заключение, мне бы хотелось выразить свою признательность Э.Б. Винбергу, который заинтересовал меня гамильтоновыми действиями на алгебраических многообразиях и группами Вейля. Кроме того, я благодарю Д.А. Тимашева за полезные обсуждения.

2. Известные результаты и конструкции

В этом разделе G – редуктивная алгебраическая группа, а X – G-многообразие. Мы фиксируем борелевскую подгруппу $B \subset G$ и максимальный тор $T \subset B$. Мы полагаем также $U = \mathrm{R}_u(B)$.

2.1. **Введение.** В основном, в этом разделе приведены результаты, относящиеся к интересующим нас объектам (весовым решеткам, картановским пространствам, группам Вейля, решеткам и системам корней), полученные в предшествующих работах. Также мы приводим здесь с доказательствами некоторые довольно стандартные результаты, дать ссылку на которые затруднительно, и незначительные модификации и следствия известных конструкций. Отметим, что здесь приведены не все ранее полученные результаты, излагаемые в работе. Первый пункт раздела 3 стандартен, части последующих трех могут быть найдены в [Lo1]. Непосредственные следствия из результатов [Wa] приведены в пункте 9.3. Результаты Луны, касающиеся структуры набора цветных векторов для сферических многообразий, приведены в пункте 10.2.

Пункт 2.2 посвящен теореме о локальной структуре. Эта теорема сводит изучение действия подходящих параболических групп на G-многообразии к изучению действия соответствующей подгруппы Леви на некотором сечении данного многообразия. В дальнейшем мы используем не столько саму теорему о локальной структуре, сколько родственную конструкцию, основанную на понятии тройки, *факторизующих* действие параболической подгруппы на X (определение 2.2.5), приведенную в конце пункта. Теорема о локальной структуре доставляет примеры троек, факторизующих действия параболических подгрупп, однако наша конструкция применима к более широкому классу параболических подгрупп.

Следующие три пункта представляют сводку определений и результатов, принадлежащих Ф. Кнопу, [Kn1],[Kn3],[Kn4],[Kn6], а также их несложных следствий и некоторых довольно стандартных утверждений. В пункте 2.3 мы приводим свойства групп Вейля $W_{G,X}$. В пункте 2.4 вводится понятие *центрального автоморфизма* G-многообразия. В пункте 2.5 вводится решетка корней G-многообразия и формулируются её свойства, важнейшим и наиболее нетривиальным из которых является предложение 2.5.7.

Основной целью пункта 2.6 является представление результатов, касающихся вычисления решеток весов. В начале пункта приводится важная для дальнейшего конструкция правильного вложения алгебраической подгруппы группы G в параболическую подгруппу. Затем мы приводим результаты, касающиеся сведения вычисления весовых решеток к случаю аффинного однородного пространства, принадлежащие Д.И. Панюшеву. В конце пункта мы рассматриваем поведение картановских пространств, групп Вейля и т.д. при подкручивании действия $G : X$ на некоторый автоморфизм группы G.

В пункте 2.7 мы частично приводим результаты работы [Lo2], касающиеся вычисления картановских пространств аффинных однородных пространств.

Наконец, в пункте 2.8, мы рассматриваем важный класс сферических G-многообразий, замечательные многообразия. Структурная теория замечательных многообразий доставит нам ограничения на группы Вейля, которые играют ключевую роль в разделе 9.

2.2. **Теорема о локальной структуре.** Первоначальные варианты теоремы о локальной структуре были доказаны в работе Бриона, Луны и Вюста, [BLV], и, независимо, в работе [Gr]. Мы приведем вариант, принадлежащий Ф. Кнопу, [Kn4]. В этом пункте многообразие X предполагается гладким. В частности, любой дивизор Вейля на X является дивизором Картье.

Пусть D – $N_G(B)$-дивизор Картье на X. Заменив дивизор D на некоторое кратное, можем считать, см. [Su], что пучок $\mathcal{O}(D)$ G-линеаризуем. Заменив дивизор D на кратное ещё раз, мы можем найти такое сечение σ пучка $\mathcal{O}(D)$ с дивизором нулей D, что в некоторой линеаризации (определенной однозначно с точностью до характера группы G) сечение σ будет $N_G(B)$-полуинвариантно. Для этого достаточно фиксировать некоторое сечение σ с дивизором нулей D (автоматически B-полуинвариантное), а затем заменить его на $\prod_{g_i} g_i\sigma_0$, где элементы $g_i \in N_G(B)$ пробегают все связные компоненты группы $N_G(B)$.

Пусть ξ_D – вес сечения σ (относительно группы B). Обозначим через P_D стабилизатор дивизора D в группе G°. Очевидно, что это параболическая подгруппа в G. Дивизор D называется *регулярным*, если $L_D := G^\circ_{\xi_D}$ является подгруппой Леви в P_D. Любой эффективный дивизор является регулярным ([Kn4], Lemma 2.1).

Предложение 2.2.1. *Пусть D – регулярный $N_G(B)$-дивизор. Тогда существует замкнутое $N_G(L_D)$-подмногообразие $S \subset X \setminus D$, для которого морфизм $N_G(P_D) *_{N_G(L_D)} S \to X \setminus D, (p, s) \mapsto ps$, является изоморфизмом.*

Доказательство. Доказательство в случае связной группы G приведено в [Kn4], Theorem 2.3. Доказательство в общем случае дословно его повторяет. □

Пример 2.2.2. Этот пример будет широко применяться в дальнейшем. Предположим, что группа G связна. Пусть Q – антистандартная параболическая подгруппа в G, H – подгруппа в Q, и V – H-модуль. Имеет место естественная проекция $G *_H V \to G/Q$. Обозначим через D_0 дополнение к открытой орбите $B(eQ) \subset G/Q$ и положим $D := \pi^{-1}(D_0)$. В качестве подмногообразия $S \subset G *_H V$ можно взять $Q *_H V$.

Замечание 2.2.3. Предположим, что группа G связна. Пусть Q – стандартная параболическая подгруппа в G, содержащая B, а M – её стандартная подгруппа Леви, содержащая T. Тогда из наличия открытого вложения $Q *_M S \hookrightarrow X$, где S – M-многообразие, следует равенство $\mathfrak{X}_{G,X} = \mathfrak{X}_{L_D,S}$. Это следует из того, что ограничение функций на S индуцирует T-эквивариантное отождествление $\mathbb{C}(X)^{(B)} \cong \mathbb{C}(S)^{B\cap M}$.

Если X – квазиаффинное многообразие, то пространство $\mathfrak{a}_{G,X}$ натянуто на доминантные веса. Отсюда следует, что группа $L_{G^\circ,X}$ является стандартной подгруппой Леви в G. Положим $P_{G,X} = L_{G,X}B$, это стандартная параболическая подгруппа в G. Ниже в этом пункте мы полагаем для краткости $L = L_{G^\circ,X}, P = P_{G^\circ,X}, L_0 = L_{0\,G^\circ,X}$.

Предложение 2.2.4. *Пусть группа G связна, а многообразие X гладко и квазиаффинно. Тогда подгруппа $P_{G,X}$ совпадает со стабилизатором B-орбиты общего положения в X. Существует P-инвариантное открытое подмножество $X^0 \subset X$ и замкнутое L-подмногообразие $S \subset X^0$, для которых морфизм $P *_L S \to X^0, [p,x] \mapsto px, p \in P, x \in S$, является изоморфизмом. Для любого такого подмногообразия S группа L_0 является ядром неэффективности для действия $L : S$.*

Доказательство. Утверждение о стабилизаторе общей B-орбиты доказано, например, в [Ви2], гл.2, §3, предложение 7. Утверждение о существовании X^0, S следует из [Kn4], Proposition 2.4, Lemma 3.1. В доказательстве Proposition 2.4. показано, что группа (L,L) тривиально действует на S. Из замечания 2.2.3 следует, что $\mathfrak{X}_{G,X} = \mathfrak{X}_{L,S}$. Таким образом, $L_{0\,L,S} = L_0$. Обозначим через $\widetilde{L}_0$ ядро неэффективности действия $L : S$. Имеем равенство $\mathfrak{X}_{L,S} = \mathfrak{X}_{L/\widetilde{L}_0,S}$ подгрупп в $\mathfrak{X}(L)$. Но $L/\widetilde{L}_0$ – тор, эффективно действующий на S. Поэтому $\mathfrak{X}_{L/\widetilde{L}_0,S} = \mathfrak{X}(L/\widetilde{L}_0)$. Непосредственно из определения группы $L_{0\,L,S}$ следует равенство $\widetilde{L}_0 = L_{0\,L,S}$. Поэтому L_0 является ядром неэффективности для действия $L : S$. □

Нам понадобится некоторая модификация конструкции предложения 2.2.1. Цель заключается в том, чтобы научиться сводить изучение G-многообразия X к изучению многообразия с действием некоторой собственной подгруппы Леви $M \subset G$. Предложение 2.2.1 позволяет это делать, но лишь для некоторых специальных подгрупп Леви.

Ниже в этом пункте G – произвольная редуктивная алгебраическая группа, X – квазиаффинное G-многообразие, Q – некоторая параболическая подгруппа в G, содержащая P, а M – стандартная подгруппа Леви в Q (содержащая, таким образом, L). Положим $\widetilde{M} = N_G(Q) \cap N_G(M)$. Ясно, что $\widetilde{M}^\circ = M$, $N_G(Q) = \mathrm{R}_u(Q) \leftthreetimes \widetilde{M}$.

Определение 2.2.5. Мы говорим, что тройка (X^0, Z, π), состоящее из открытого $N_G(\mathrm{R}_u(Q)) = N_G(Q)$-подмножества $X^0 \subset X$, $\widetilde{M}$-многообразия Z и $N_G(Q)$-морфизма $\pi : X^0 \to Z$ (мы рассматриваем Z как $N_G(Q)$-многообразие, полагая действие $\mathrm{R}_u(Q) : Z$ тривиальным) *факторизует* действие $Q : X$, если выполняются следующие условия

(a) $X^0 \subset X^{reg}$.
(b) Действие $\mathrm{R}_u(Q) : X^0$ свободно.
(c) Морфизм π является гладким, а каждый его слой состоит из одной $\mathrm{R}_u(Q)$-орбиты.

(d) Z – гладкое квазиаффинное M-многообразие.

Замечание 2.2.6. Пусть (X^0, Z, π) – тройка, факторизующая действие $Q : X$. Пусть X^0_1 – открытое $N_G(Q)$-подмножество в X^0. Тогда тройка $(X^0_1, \pi(X^0_1), \pi|_{X^0_1})$ также факторизует действие $Q : X$.

Следующая лемма довольно стандартна.

Лемма 2.2.7. *Пусть X, Q, M удовлетворяют предшествующему обсуждению. Тогда существует тройка (X^0, π, Z), факторизующая действие $Q : X$.*

Перед тем, как преступить к доказательству, дадим одно определение.

Определение 2.2.8. Пусть H – алгебраическая группа, действующая на многообразии X, H_0 – нормальная подгруппа в H, Z – H/H_0-многообразие и $\pi : X \dashrightarrow Z$ – доминантное рациональное H-отображение. Мы говорим, что Z является *рациональным H/H_0-фактором* для действия $H_0 : X$, а π – отображением рациональной факторизации, если $\pi^*(\mathbb{C}(Z)) = \mathbb{C}(X)^{H_0}$. Такая пара (Z, π) всегда существует и единственна с точностью до бирационального рационального H/H_0-отображения ([ВП], глава 2). Когда нас не интересует, какое именно многообразие Z берется, мы обозначаем рациональный H/H_0-фактор через X/H_0.

Доказательство леммы 2.2.7. Положим $X^1 = \{x \in X \,|\, \dim \mathrm{R}_u(Q)x = \dim \mathrm{R}_u(Q)\}$. Это открытое $N_G(Q)$-подмногообразие в X. Поскольку $P \subset Q$, то $\mathrm{R}_u(Q) \subset \mathrm{R}_u(P)$. Из предложения 2.2.4 следует, что действие $\mathrm{R}_u(P) : X$ свободно на подходящем открытом подмножестве в X. Поэтому $X^1 \neq \varnothing$. Действие $\mathrm{R}_u(Q) : X^1$ свободно, поскольку группа $\mathrm{R}_u(Q)$ унипотентна.

Пусть $\widetilde{Z}$ – некоторый гладкий рациональный $\widetilde{M}$-фактор для действия $\mathrm{R}_u(Q) : X$, и π – соответствующее отображение рациональной факторизации. Так как группа $\mathrm{R}_u(Q)$ унипотентна, видим, что $\mathbb{C}(X)^{\mathrm{R}_u(Q)} = \mathrm{Quot}(\mathbb{C}[X]^{\mathrm{R}_u(Q)})$ ([ВП], теорема 3.3). Существует конечно порожденная $\widetilde{M}$-устойчивая подалгебра $A \subset \mathbb{C}[X]^{\mathrm{R}_u(Q)}$, для которой $\mathrm{Quot}(A) = \mathbb{C}(X)^{\mathrm{R}_u(Q)}$. Положим $\widetilde{Z} = \mathrm{Spec}(A)$, и обозначим через π естественный морфизм $X \to \mathrm{Spec}(A)$.

Обозначим через X^2 область определения рационального отображения $\pi : X^1 \dashrightarrow \widetilde{Z}^{reg}$. Это открытое $N_G(Q)$-подмногообразие в X. Обозначим через X^3 множество гладких точек морфизма $\pi : X^2 \to Z$. Опять же, X^3 – это открытое $N_G(Q)$-подмногообразие в X.

Поскольку морфизм $\pi : X^3 \to \widetilde{Z}$ является гладким, то он равноразмерен, и любой его (схемный) слой является гладким. Поскольку действие $\mathrm{R}_u(Q) : X$ свободно, то отсюда следует, что любой слой морфизма $\pi|_{X^3}$ состоит из конечного числа орбит. Но π является морфизмом рациональной факторизации для действия $\mathrm{R}_u(Q) : X^3$. Поэтому общий слой морфизма $\pi|_{X^3}$ состоит из одной $\mathrm{R}_u(Q)$-орбиты. Отсюда следует, что найдется открытое подмножество $Z' \subset \widetilde{Z}$, для которого $\pi^{-1}(z)$ является одной $\mathrm{R}_u(Q)$-орбитой при всех $z \in Z'$. Заменив Z' на $\widetilde{M}Z'$, можем считать, что Z' – $\widetilde{M}$-подмногообразие. Теперь достаточно положить $X^0 = \pi|_{X^3}^{-1}(Z')$.

Так как $\pi|_{X^0} : X^0 \to \widetilde{Z}$ – гладкий морфизм, то $Z := \pi(X^0)$ является открытым подмногообразием в $\widetilde{Z}$. □

2.3. **Результаты о группах Вейля.** В этом пункте через G обозначена связная группа. Определения картановского пространства $\mathfrak{a}_{G,X}$ и группы Вейля $W_{G,X}$ согласованы с данными в [Kn1] и [Kn3] (см. теорему 7.4 и следствие 7.5 из [Kn3]). В частности, группа $W_{G,X}$ всегда является подфактором в $W(\mathfrak{g})$. Это означает, что найдутся подгруппы $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset W(\mathfrak{g})$, для которых $\mathfrak{a}_{G,X_1}$ – Γ_1-устойчивое подпространство в $\mathfrak{t}$, Γ_2 – ядро неэффективности действия $\Gamma_1 : \mathfrak{a}_{G,X_1}$, и $W_{G,X_1} = \Gamma_1/\Gamma_2$.

Следующее предложение описывает функториальные свойства пары $(\mathfrak{a}_{G,X}, W_{G,X})$.

Предложение 2.3.1 ([Kn1], Satz 6.5). *Пусть X_1, X_2 – неприводимые G-многообразия и $\varphi : X_1 \to X_2$ – G-морфизм.*

(1) *Предположим, что морфизм φ доминантен. Тогда $\mathfrak{a}_{G,X_2} \subset \mathfrak{a}_{G,X_1}$, и W_{G,X_2} является подфактором в W_{G,X_1}.*
(2) *Предположим, что морфизм φ конечен в общей точке. Тогда $\mathfrak{a}_{G,X_1} \subset \mathfrak{a}_{G,X_2}$, и W_{G,X_1} является подфактором в W_{G,X_2}.*
(3) *Если морфизм φ доминантен и конечен в общей точке (например, этален), то $\mathfrak{a}_{G,X_1} = \mathfrak{a}_{G,X_2}$, $W_{G,X_1} = W_{G,X_2}$.*
(4) *Пусть X – неприводимое G-многообразие. Существует такое открытое подмножество $X^0 \subset X$, что $\mathfrak{a}_{G,Gx} = \mathfrak{a}_{G,X}, W_{G,Gx} = W_{G,X}$ для всех $x \in X^0$.*

Следствие 2.3.2. *Пусть $H_1 \subset H_2$ – подгруппы в G. Тогда $\mathfrak{a}_{G,G/H_2} \subset \mathfrak{a}_{G,G/H_1}$, и группа $W_{G,G/H_2}$ является подфактором в $W_{G,G/H_1}$. В случае, когда $H_1^\circ = H_2^\circ$, имеют место равенства $\mathfrak{a}_{G,G/H_1} = \mathfrak{a}_{G,G/H_2}$ и $W_{G,G/H_1} = W_{G,G/H_2}$.*

Доказательство. Следует из наличия доминантного морфизма $G/H_1 \to G/H_2$, который является этальным при $H_1^\circ = H_2^\circ$. □

В дальнейшем мы пишем $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ вместо $\mathfrak{a}_{G,G/H}$ и $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ вместо $W_{G,G/H}$.

Следствие 2.3.3. *Пусть X – гладкое аффинное G-многообразие и $x \in X$ – точка с замкнутой G-орбитой. Положим $H = G_x, V = T_xX/\mathfrak{g}_*x$, $X' = G *_H V$. Тогда $\mathfrak{a}_{G,X} = \mathfrak{a}_{G,X'}$, $W_{G,X} = W_{G,X'}$.*

Доказательство. Это прямое следствие теоремы Луны о слайсах для гладких точек (см. [ВП], п. 6.5) и пункта 3 предложения 2.3.1. □

Следствие 2.3.4. *Пусть H – редуктивная подгруппа в G, и V – H-модуль. Тогда*

(1) *$\mathfrak{a}_{G,G*_HV} \subset \mathfrak{a}_{G,G*_{H_0}V}$, а в случае равенства $W_{G,G*_HV} \subset W_{G,G*_{H_0}V}$, для любой нормальной подгруппы $H_0 \subset H$. Если $H^\circ \subset H_0$, то $\mathfrak{a}_{G,G*_HV} = \mathfrak{a}_{G,G*_{H_0}V}$, $W_{G,G*_HV} = W_{G,G*_{H_0}V}$.*
(2) *$\mathfrak{a}_{G,G*_H(V/V^H)} = \mathfrak{a}_{G,G*_HV}$, $W_{G,G*_HV} = W_{G,G*_H(V/V^H)}$.*

Доказательство. Утверждения в пункте 1 следуют из пунктов 1,3 предложения 2.3.1 (естественный морфизм $G *_{H_0} V \to G *_H V$ удовлетворяет требованиям соответствующих пунктов предложения). Перейдем ко второму пункту. Заметим, что $G *_H V \cong G *_H (V/V^H) \times V^H$ (как G-многообразия, мы считаем здесь, что группа G действует на множителе V^H тривиально). Теперь требуемое следует, скажем, из пункта 4 предложения 2.3.1. □

В дальнейшем мы пишем $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V), W(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ вместо $\mathfrak{a}_{G,G*_HV}, W_{G,G*_HV}$, соответственно.

Пусть теперь $\pi : \widetilde{X} \to X$ – главное T_0-расслоение, где группа T_0 является тором. В частности, группа T_0 свободно действует на $\widetilde{X}$, X является геометрическим фактором для действия $T_0 : \widetilde{X}$, и π является морфизмом факторизации для этого действия. Пусть теперь H – некоторая группа, действующая на X. Расслоение $\pi : \widetilde{X} \to X$ называется *H-эквивариантным*, если задано действие $H : \widetilde{X}$, коммутирующее с действием группы T_0 и такое, что π является H-эквивариантным морфизмом. Мы можем рассмотреть

$\widetilde{X}, X$ как $H\times T_0$-многообразия (T_0 действует на X тривиально). Морфизм π становится $H \times T_0$-эквивариантным.

Предложение 2.3.5 ([Kn4], Theorem 5.1)**.** *Пусть X – неприводимое G-многообразие, $\pi : \widetilde{X} \to X$ – G-эквивариантное локально-тривиальное главное T_0-расслоение. Положим $\widetilde{G} = G \times T_0$. Тогда $\mathfrak{a}_{\widetilde{G},\widetilde{X}} = \mathfrak{a}_{G,X} \oplus \mathfrak{t}_0$, подгруппа $W_{\widetilde{G},\widetilde{X}} \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{a}_{\widetilde{G},\widetilde{X}})$ оставляет $\mathfrak{t}_0, \mathfrak{a}_{G,X}$ на месте, действуя тривиально на $\mathfrak{t}_0$ и как $W_{G,X}$ на $\mathfrak{a}_{G,X}$.*

До конца пункта мы будем предполагать, что многообразие X нормально. Мы рассмотрим вопрос о соотношении между конусами центральных нормирований многообразия X и некоторых простых G-дивизоров $D \subset X$.

Для начала охарактеризуем множество G-нормирований, ограничение которых на $\mathbb{C}(X)^B$ является неотрицательным кратным некоторого фиксированного $\mathbb{R}$-значного нормирования поля $\mathbb{C}(X)^B$.

Именно, пусть v_0 – некоторое ненулевое $\mathbb{R}$-значное геометрическое нормирование поля $\mathbb{C}(X)^B$. Напомним, что нормирование конечно-порожденного поля называется *геометрическим*, если оно пропорционально с положительным коэффициентом нормированию, индуцированному некоторым дивизором на некоторой модели данного поля. Обозначим через $\mathcal{V}_{v_0}$ множество всех геометрических G-нормирований v поля $\mathbb{C}(X)$, удовлетворяющих условию $v|_{\mathbb{C}(X)^B} = kv_0$ для $k \geqslant 0$.

Сейчас мы укажем отображение из $\mathcal{V}_{v_0}$ в конечномерное векторное пространство подобно тому, как это было сделано в пункте 1.1. Именно, точная последовательность абелевых групп

$$1 \to \mathbb{C}(X)^{B\times} \to \mathbb{C}(X)^{(B)} \setminus \{0\} \to \mathfrak{X}_{G,X} \to \{0\}$$

расщепляется, ибо абелева группа $\mathfrak{X}_{G,X}$ свободна. Зафиксируем некоторое расщепление $\lambda \mapsto f_\lambda$ этой точной последовательности. Элементу $v \in \mathcal{V}_{v_0}$ мы сопоставим элемент $(\varphi_v, k_v) \in \mathfrak{a}^*_{G,X} \times \mathbb{R}_+$ (где $\mathbb{R}_+ = \{x \in R | x \geqslant 0\}$) по следующему правилу:

$$\langle \varphi_v, \lambda\rangle = v(f_\lambda), v|_{\mathbb{C}(X)^B} = k_v v_0.$$

Имеет место утверждение, подобное теореме 1.1.2:

Предложение 2.3.6. (1) *Отображение $v \mapsto (\varphi_v, k_v) : \mathcal{V}_{v_0} \to \mathfrak{a}^*_{G,X} \times \mathbb{R}_+$ является инъекцией.*

(2) *Образ этого отображения является симплициальным конусом, одной из граней которого является конус центральных нормирований, рассматриваемый как подмножество в $\mathfrak{a}^*_{G,X} \times \{0\}$. В частности, найдется единственный экстремальный луч конуса $\mathcal{V}_{v_0} \subset \mathfrak{a}^*_{G,X} \times \mathbb{R}_+$, содержащий нецентральное нормирование.*

Первая часть этого предложения следует из [Kn3], Korollar 3.6, Korollar 4.2. Вторая является переформулировкой второй части Satz 9.2 из [Kn3].

Следующее утверждение является частным случаем Satz 7.5 из [Kn3].

Предложение 2.3.7. *Пусть v_0 – некоторое ненулевое геометрическое $\mathbb{R}$-значное нормирование поля $\mathbb{C}(X)^B$. Пусть D – G-дивизор в X, для которого соответствующее нормирование не центрально и лежит на экстремальном луча конуса $\mathcal{V}_{v_0}$. Тогда $\mathfrak{a}_{G,D} = \mathfrak{a}_{G,X}, W_{G,D} = W_{G,X}$.*

Следующее следствие будет использовано в разделе 9 для получения ограничений на возможные группы Вейля однородных пространств.

Следствие 2.3.8. *Пусть X – неприводимое G-многообразие. Тогда существует сферическое G-многообразие X', для которого $\mathfrak{a}_{G,X} = \mathfrak{a}_{G,X'}, W_{G,X} = W_{G,X'}$.*

Доказательство. Заменив G-многообразие X на бирационально эквивалентное, можем считать, что многообразие X нормально, и что найдется дивизор $D \subset X$, удовлетворяющий условию предыдущего предложения. Поскольку нормирование, соответствующее дивизору D, не является центральным, то $c_G(D) = c_G(X) - 1$ (см. [Kn3], Satz 7.3). Теперь остается применить индукцию по сложности. □

2.4. **Центральные автоморфизмы.** В этом пункте через G обозначена связная редуктивная группа.

Следующее определение было дано в [Kn6].

Определение 2.4.1. G-автоморфизм φ G-многообразия X называется *центральным*, если φ действует на $\mathbb{C}(X)^{(B)}_\lambda$ умножением на константу для любого веса $\lambda \in \mathfrak{X}_{G,X}$. Центральные автоморфизмы многообразия X образуют группу, которую мы обозначим через $\mathfrak{A}_G(X)$.

Оказывается, однако, что группа $\mathfrak{A}_G(X)$ в общем случае не является правильным объектом. Например, она не является бирациональным инвариантом многообразия X. Ситуация исправляется следующим образом. Оказывается, что если X^0 – открытое G-подмножество в X, то группа $\mathfrak{A}_G(X)$ оставляет X^0 на месте и имеет место вложение $\mathfrak{A}_G(X) \hookrightarrow \mathfrak{A}_G(X^0)$ ([Kn6], Theorem 5.1). Оказывается, что существует наибольшая среди всех групп $\mathfrak{A}_G(X^0)$ ([Kn6], Corollary 5.4). Мы обозначаем эту группу через $\mathfrak{A}_{G,X}$.

Впрочем, как показывает следующая очевидная лемма, для квазиаффинных многообразий разницы между $\mathfrak{A}_{G,X}$ и $\mathfrak{A}_G(X)$ нет:

Лемма 2.4.2. *Предположим, что многообразие X квазиаффинно. Пусть γ – G-автоморфизм поля $\mathbb{C}(X)$, который действует на пространстве $\mathbb{C}(X)^{(B)}_\lambda$ умножением на константу для любого веса $\lambda \in \mathfrak{X}_{G,X}$. Тогда γ является регулярным центральным автоморфизмом многообразия X.*

Доказательство. Автоморфизм γ оставляет на месте подмножество $A^{(B)} \subset \mathbb{C}(X)$ для любой рациональной G-подалгебры $A \subset \mathbb{C}(X)$, а потому и саму алгебру A. Выберем G-эквивариантное открытое вложение $X \hookrightarrow \overline{X}$, где X – аффинное G-многообразие. Такое вложение существует согласно теореме 1.6 из [ВП]. Тогда γ оставляет на месте подалгебру $\mathbb{C}[\overline{X}] \subset \mathbb{C}(X)$. Далее, γ оставляет на месте любой G-инвариантный идеал $I \subset \mathbb{C}[\overline{X}]$, поскольку $I = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(GI^{(B)})$. Применив это к идеалу функций, обращающихся в 0 на подмногообразии $\overline{X} \setminus X$, получаем требуемое. □

Обозначим через $A_{G,X}$ алгебраический тор с решеткой характеров $\mathfrak{X}_{G,X}$. Группа $\mathfrak{A}_{G,X}$ вкладывается в $A_{G,X}$ следующим образом. Мы сопоставляем число $a_{\varphi,\lambda}$ элементам $\varphi \in \mathfrak{A}_{G,X}, \lambda \in \mathfrak{X}_{G,X}$ по формуле $\varphi f_\lambda = a_{\varphi,\lambda} f_\lambda$, $f \in \mathbb{C}(X)^{(B)}_\lambda$. Отображение $\iota_{G,X} : \mathfrak{A}_{G,X} \to A_{G,X}$ задано посредством равенства $\lambda(\iota_{G,X}(\varphi)) = a_{\varphi,\lambda}$. Понятно, что $\iota_{G,X}$ является корректно определенным гомоморфизмом.

Предложение 2.4.3 ([Kn6], Theorem 5.5)**.** *Отображение $\iota_{G,X}$ инъективно и его образ замкнут.*

Следующая лемма оправдывает термин "центральный":

Лемма 2.4.4 ([Kn6], Corollary 5.6)**.** *$\mathfrak{A}_G(X)$ содержится в центре группы* $\mathrm{Aut}^G(X)$.

Лемма 2.4.5 ([Kn6], Theorem 5.9)**.** *Для точки x общего положения любой элемент $\varphi \in \mathfrak{A}_{G,X}$ оставляет Gx на месте, причем $\varphi|_{Gx} \in \mathfrak{A}_{G,Gx}$. Соответствующий гомоморфизм $\mathfrak{A}_{G,X} \to \mathfrak{A}_{G,Gx}$ является изоморфизмом.*

Следующая техническая лемма будет использована в пункте 5.3.

Лемма 2.4.6. *Пусть X – гладкое квазиаффинное алгебраическое G-многообразие, а (X', π, Z') – тройка, факторизующая действие $P_{G,X} : X$. Далее, пусть φ – G-автоморфизм многообразия X, оставляющий на месте X^0, и φ_0 – $L_{G,X}$-автоморфизм многообразия Z, удовлетворяющий условию $\varphi_0 \circ \pi = \pi \circ \varphi$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\varphi \in \mathfrak{A}_{G,X}$.
(2) $\varphi_0 \in \mathfrak{A}_{L_{G,X},Z}$.

При выполнении этих эквивалентных условий, $\iota_{G,X}(\varphi) = \iota_{L_{G,X},Z}(\varphi_0)$, и φ_0 действует на Z сдвигом на $\iota_{G,X}(\varphi)$.

Доказательство. Положим для краткости $P = P_{G,X}, L = L_{G,X}, L_0 = L_{0\,G,X}$. Отметим, что последнее утверждение предложения имеет смысл, ибо $A_{G,X} \cong A_{L,Z}$. В самом деле, π индуцирует T-эквивариантный изоморфизм $\mathbb{C}(X)^{(B)} \cong \mathbb{C}(Z)^{(L\cap B)}$. Отсюда мы также видим, что (1) и (2) эквивалентны, и что $\iota_{G,X}(\varphi) = \iota_{L_{G,X},Z}(\varphi_0)$. По предложению 2.2.4, L_0 является ядром неэффективности для действия $L : Z$, поэтому $A_{G,X} \cong L/L_0$. Из определения элемента $\iota_{L,Z}(\varphi_0)$ следует, что автоморфизм $(\varphi_0\iota_{L,Z}(\varphi_0)^{-1})^*$ поля $\mathbb{C}(Z)$ действует тривиально на $\mathbb{C}(Z)^{(L/L_0)}$. Но поле $\mathbb{C}(Z)$ порождается подмножеством $\mathbb{C}(Z)^{(L/L_0)}$, поэтому $\varphi_0 = \iota_{L,Z}(\varphi_0)$. □

2.5. **Решетка и система корней G-многообразия.** В этом пункте группа G предполагается связной, а многообразие X нормальным.

Определение 2.5.1. Подрешетка $\Lambda_{G,X} \subset \mathfrak{X}_{G,X} = \mathfrak{X}(A_{G,X})$, состоящая из всех характеров, обращающихся в 1 на $\iota_{G,X}(\mathfrak{A}_{G,X})$, называется *решеткой корней* многообразия X.

Отметим, что поскольку $Z(G) \subset \mathfrak{A}_{G,X}$, то $\Lambda_{G,X} \subset \Lambda(\mathfrak{g})$.

Предложение 2.5.2 ([Kn6], Theorem 6.3)**.** *Пусть X_1, X_2 – неприводимые G-многообразия и $\varphi : X_1 \to X_2$ – доминантный, конечный в общей точке морфизм. Тогда $\Lambda_{G,X_1} = \Lambda_{G,X_2}$.*

В частности, решетка $\Lambda_{G,G/H}$ зависит лишь от пары $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, поэтому мы будем писать $\Lambda(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ вместо $\Lambda_{G,G/H}$.

Предложение 2.5.3. *Для точки $x \in X$ общего положения имеет место равенство $\Lambda_{G,X} = \Lambda_{G,Gx}$.*

Доказательство. Это непосредственное следствие из леммы 2.4.5. □

Лемма 2.5.4. *Пусть X_1, X_2 – G-многообразия, а $\varphi : X_1 \to X_2$ – доминантный G-морфизм. Тогда $\mathfrak{X}_{G,X_2} \subset \mathfrak{X}_{G,X_1}$. Если же многообразия X_1, X_2 квазиаффинны, то $\Lambda_{G,X_2} \subset \Lambda_{G,X_1}$. Более того, существует единственный гомоморфизм $\mathfrak{A}_{G,X_1} \to \mathrm{Aut}^G(X_2)$, для которого морфизм φ становится $\mathfrak{A}_{G,X_1}$-эквивариантным. Образ этого гомоморфизма содержится в $\mathfrak{A}_{G,X_2}$, и двойственным к соответствующему гомоморфизму $\mathfrak{A}_{G,X_1} \to \mathfrak{A}_{G,X_2}$ является гомоморфизм $\mathfrak{X}_{G,X_2}/\Lambda_{G,X_2} \to \mathfrak{X}_{G,X_1}/\Lambda_{G,X_1}$, индуцированный включениями решеток.*

Доказательство. Утверждение о включении весовых решеток очевидно.

Напомним, что группа $\mathfrak{A}_{G,X_1}$ действует на X_1 центральными G-автоморфизмами (лемма 2.4.2). Подалгебра $\mathbb{C}[X_2] \subset \mathbb{C}[X_1]$ порождается как G-подалгебра $\mathfrak{A}_{G,X_1}$-подмножеством, а потому устойчива относительно $\mathfrak{A}_{G,X_1}$. Отсюда следует единственность и существование гомоморфизма.

Из наличия T-вложения $\mathbb{C}(X_2)^{(B)} \hookrightarrow \mathbb{C}(X_1)^{(B)}$ следует, что $\mathfrak{A}_{G,X_1}$ действует на X_2 центральными автоморфизмами. Имеются естественный гомоморфизм $\mathfrak{A}_{G,X_1} \to \mathfrak{A}_{G,X_2}$ и эпиморфизм $A_{G,X_1} \twoheadrightarrow A_{G,X_2}$. Понятно, что следующая диаграмма коммутативна.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}_{G,X_1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{A}_{G,X_2} \arrow[d] \\
A_{G,X_1} \arrow[r] & A_{G,X_2}
\end{tikzcd}$$

Отсюда следует, что элементы подгруппы $\Lambda_{G,X_2} \subset \mathfrak{X}_{G,X_2} \subset \mathfrak{X}_{G,X_1}$ аннулируются на $\mathfrak{A}_{G,X_1}$, откуда следует включение корневых решеток. Построенный гомоморфизм $\mathfrak{A}_{G,X_1} \to \mathfrak{A}_{G,X_2}$ обладает требуемыми свойствами. $\square$

Теперь мы дадим определение системы корней G-многообразия. Для этого нам нужна следующая общая конструкция.

Определение 2.5.5. Пусть V – конечномерное евклидово векторное пространство, Λ – решетка в V, Γ – конечная подгруппа в $\mathrm{O}(V)$, порожденная отражениями, сохраняющая решетку Λ. *Минимальной системой корней*, ассоциированной с Γ, Λ называется подмножество $\Delta \subset \Lambda$, состоящее из всех примитивных элементов $v \in \Lambda$, отражения относительно которых содержатся в Γ.

Несложно видеть, что минимальная система корней действительно является (приведенной) системой корней.

Определение 2.5.6. *Системой корней* G-многообразия X называется минимальная система корней, ассоциированная с $W_{G,X}, \Lambda_{G,X}$ (см. определение 2.5.5). Обозначать систему корней G-многообразия X мы будем через $\Delta_{G,X}$.

Система корней многообразия X удовлетворяет свойствам, аналогичным имеющимся у системы корней редуктивной группы:

Предложение 2.5.7 ([Kn6], Corollary 6.5)**.** *Система корней $\Delta_{G,X}$ порождает решетку $\Lambda_{G,X}$, а её группа Вейля совпадает с $W_{G,X}$.*

2.6. **Вычисление весовых решеток.** В этом пункте группа G предполагается связной. Мы рассматриваем вопрос о редукции вычисления весовых решеток к случаю аффинного однородного пространства.

Сначала мы покажем как сводить вычисление от случая произвольного однородного пространства к случаю аффинного однородного векторного расслоения. Прежде всего, мы напомним одну структурную теорему об алгебраических подгруппах, принадлежащую Вейсфеллеру [Be].

Предложение 2.6.1. *Пусть H – алгебраическая подгруппа в G. Тогда существует параболическая подгруппа $Q \subset G$, для которой $\mathrm{R}_u(H) \subset \mathrm{R}_u(Q)$.*

Определение 2.6.2. Вложение $H \hookrightarrow Q$, удовлетворяющее условию предыдущего предложения, называется *правильным*.

Имеется способ построения правильного вложения, мы приведем его в пункте 11.1.

Зафиксируем разложение Леви $Q = \mathrm{R}_u(Q) \leftthreetimes M$. Сопрягая подгруппу $H \subset Q$ элементом из $\mathrm{R}_u(Q)$, мы можем считать, что $H \cap M$ является подгруппой Леви в H.

Замечание 2.6.3. Пусть Q, M, H, S удовлетворяют предыдущему обсуждению и V – H-модуль. Построим изоморфизм M-многообразия $Q*_H V$ с однородным расслоением $M*_S(\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})\oplus V)$. Рассмотрим цепочку идеалов $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})=\mathfrak{q}^{(1)}\supset\mathfrak{q}^{(2)}\supset\ldots\supset\mathfrak{q}^{(m)}=\{0\}$, где $\mathfrak{q}^{(i+1)}=[\mathrm{R}_u(\mathfrak{q}),\mathfrak{q}^{(i)}]$. Выберем в $\mathfrak{q}^{(i)}, i=\overline{1,m-1}$, S-подмодуль V_i, дополняющий $\mathfrak{q}^{(i+1)}+(\mathfrak{q}^{(i)}\cap\mathfrak{h})$. Отображение $M*_S(V_1\oplus\ldots V_{m-1}\oplus V)\to Q*_H V, [m,(v_1,\ldots,v_{m-1},v)]\mapsto [m\exp(v_1)\ldots\exp(v_{m-1}),v]$ является корректно определенным M-изоморфизмом.

Следствием предыдущей конструкции является следующее предложение, которое является непосредственным обобщением части теоремы 2.5.20 из [Па2] и доказывается, по сути, также.

Предложение 2.6.4. *Пусть Q – антистандартная параболическая подгруппа в G, M – её стандартная подгруппа Леви, и H – алгебраическая подгруппа в G, правильно вложенная в Q так, что $M\cap H$ является подгруппой Леви в H. Имеет место равенство $\mathfrak{X}_{G,G*_HV}=\mathfrak{X}_{M,M*_{M\cap H}(\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})\oplus V)}$.*

Доказательство. Это следует из замечаний 2.2.3,2.6.3 и примера 2.2.2. □

Теперь мы сведем вопрос о вычислении весовых решеток для аффинных однородных векторных расслоений к вычислению для аффинных однородных пространств. Для формулировки основного результата (предложения 2.6.8) нам потребуются некоторые определения и вспомогательные результаты.

Определение 2.6.5. Редуктивная алгебраическая группа $\widetilde{G}$ называется *почти связной*, если группа $\mathrm{Ad}(\widetilde{G})$ связна, а группа $\widetilde{G}/\widetilde{G}^\circ$ коммутативна.

Пусть $\widetilde{G}$ – почти связная группа с $\widetilde{G}^\circ=G$. Положим $\widetilde{B}=N_{\widetilde{G}}(B),\widetilde{T}=Z_{\widetilde{G}}(T)$. Поскольку группа $\widetilde{G}$ почти связна, то $\widetilde{T}\subset\widetilde{B}$, и $\widetilde{B}=\widetilde{T}\leftthreetimes U$. Поэтому группы $\mathfrak{X}(\widetilde{B})$ и $\mathfrak{X}(\widetilde{T})$ отождествляются.

Для неприводимого $\widetilde{G}$-многообразия X положим

$$\mathfrak{X}_{\widetilde{G},X}=\{\chi\in\mathfrak{X}(\widetilde{B})|\exists f\in\mathbb{C}(X),\ \text{такая что } b.f=\chi(b)f,\forall b\in\widetilde{B}\}. \tag{2.1}$$

По определению, считаем, что $\mathfrak{a}_{\widetilde{G},X}=\mathfrak{a}_{G,X}$. Подгруппы $L_{\widetilde{G},X},L_{0\,\widetilde{G},X}\subset G$ определяются по формулам (1.1),(1.2), соответственно, с заменой G на $\widetilde{G}$. Непосредственно из определения видно, что группа $L_{0\,\widetilde{G},X}$ почти связна.

Ниже в этом пункте мы для краткости полагаем $P:=P_{G,X},L:=L_{G,X},L_0:=L^\circ_{0\,G,X}$.

Предложение 2.6.6. *Мы используем обозначения и соглашения предложения 2.2.4. Пусть L_1 – нормальная подгруппа в $L_{0\,G,X}$. Существует единственная неприводимая компонента $\underline{X}\subset X^{L_1}$, для которой $\overline{U\underline{X}}=X$. Эта компонента совпадает с $\overline{FS}$, где $F=(\mathrm{R}_u(P))^{L_1}$.*

Доказательство. Пусть Z – компонента в X^{L_1}. Если $Z\cap PS=\varnothing$, то $\overline{UZ}\subset X\setminus PS$. Отметим, что многообразие S неприводимо, поскольку имеется открытое вложение $\mathrm{R}_u(P)\times S\cong P*_L S\hookrightarrow X$. В силу предложения 2.2.4, $S\subset X^{L_1}$. Рассмотрим компоненту $\underline{X}\subset X^{L_1}$, содержащую S. Заметим, что $X=\overline{P*_L S}=\overline{\mathrm{R}_u(P)S}\subset\overline{US}\subset\overline{U\underline{X}}$. Поэтому остается доказать, что в X^{L_1} имеется единственная компонента, пересекающая PS и что эта компонента совпадает с $\overline{FS}$. L_1-многообразие $PS\cong P*_L S$ изоморфно произведению $\mathrm{R}_u(P)\times S$, где группа L_1 действует тривиально на S и сопряжениями P_u. Отсюда следует, что $(PS)^{L_1}=FS$. Последнее многообразие неприводимо. В самом деле, группа F связна, ибо унипотентна, и многообразие S неприводимо. □

Определение 2.6.7. Компоненту $\underline{X} \subset X^{L_1}$, удовлетворяющую условиям предложения 2.6.6, назовем *выделенной.*

Выделенные компоненты для группы $L_{0\,G,X}$ вместо $L^{\circ}_{0\,G,X}$ впервые были рассмотрены Панюшевым в работе [Pa2].

Предложение 2.6.8. *Пусть H – редуктивная подгруппа в G, а V – H-модуль, и $\pi : G*_H V \to G/H$ – естественная проекция. Положим $L_1 = L_{0\,G,G/H}$. Пусть x – точка из выделенной компоненты многообразия $(G/H)^{L_1}$. Тогда $L_{0\,G,G*_H V} = L_{0\,L_1,\pi^{-1}(x)}$.*

Доказательство. Пусть x_1 – каноническая точка общего положения в G/H в смысле определения 5 из [Па2], п.1.2. Это означает, что $B_{x_1} = B \cap L_1$. В теореме 2.5.20 из [Па2] показано, что $L_{0\,G,G*_H V} \cap B = L_{0\,L_1,\pi^{-1}(x_1)} \cap B$. Отсюда следует, что $L_{0\,G,G*_H V} = L_{0\,L_1,\pi^{-1}(x)}$. Заметим, что L_1-модуль $\pi^{-1}(x)$ не зависит от выбора точки x с выделенной компоненты. Теперь остается заметить, что на выделенной компоненте содержится каноническая точка общего положения. Действительно, применим предложение 2.2.4 к G-многообразию G/H и пусть S – $L_{G,G/H}$-многообразие, фигурировавшее в этом предложении. Из предложения 2.2.4 следует, что любая точка из S является канонической точкой общего положения. $\square$

Отметим, что L_1 является почти связной группой. Существует алгоритм вычисляющий подгруппы $L_{0\,\widetilde{G},V} \subset \widetilde{G}$, где $\widetilde{G}$ является почти связной группой, а V – $\widetilde{G}$-модулем. Он приведен, например, в [Па2] для случая связной группы $\widetilde{G}$, однако и сам алгоритм, и его обоснование немедленно переносятся на общий случай. Для этого достаточно заменить вариант теоремы о локальной структуре, приведенный в [Па2] на предложение 2.2.1. Мы приведем этот алгоритм в пункте 11.1.

Таким образом, для вычисления решеток $\mathfrak{X}_{G,X}$, где X – однородное пространство или аффинное однородное векторное расслоение, достаточно вычислить следующие данные:

1. Решетки $\mathfrak{X}_{G,G/H}$, где H – редуктивная подгруппа в G.
2. Точку с выделенной компоненты многообразия $(G/H)^{L_1}$, где $L_1 = L^{\circ}_{0\,G,G/H}$, для редуктивной подгруппы $H \subset G$.

В заключении этого пункта рассмотрим поведение групп Вейля, решеток весов и корней и выделенных компонент при подкручивании действия $G : X$ на некоторый автоморфизм группы G.

Пусть τ – автоморфизм группы G. Через ${}^{\tau}X$ мы обозначим G-многообразие, совпадающее с X, как алгебраическое многообразие, и с действием $(g,x) \mapsto \tau^{-1}(g)x, g \in G, x \in X$. Имеется естественный изоморфизм G-многообразий ${}^{\sigma\tau}X \cong {}^{\sigma}({}^{\tau}X)$ для $\sigma, \tau \in \operatorname{Aut}(G)$. Если τ – внутренний автоморфизм, $\tau(g) = hgh^{-1}, h \in G$, то $x \mapsto hx : {}^{\tau}X \to X$ есть G-изоморфизм. Поэтому G-многообразие ${}^{\tau}X$ определяется однозначно с точностью до изоморфизма образом τ в $\operatorname{Aut}(G)/\operatorname{Int}(G)$. В частности, при рассмотрении G-многообразий вида ${}^{\tau}X$ мы всегда можем считать, что $\tau(B) = B, \tau(T) = T$.

Лемма 2.6.9. *Пусть $\tau \in \operatorname{Aut}(G), \tau(B) = B, \tau(T) = T$. Тогда $\mathfrak{X}_{G,{}^{\tau}X} = \tau(\mathfrak{X}_{G,X}), \mathfrak{a}_{G,{}^{\tau}X} = \tau(\mathfrak{a}_{G,{}^{\tau}X}), L_{G,{}^{\tau}X} = \tau(L_{G,X}), L_{0\,G,{}^{\tau}X} = \tau(L_{0\,G,X}), W_{G,{}^{\tau}X} = \tau W_{G,X}\tau^{-1}, \Lambda_{G,{}^{\tau}X} = \tau(\Lambda_{G,X})$. Далее, выделенные компоненты из X^{L_0} и $({}^{\tau}X)^{\tau(L_0)}$ совпадают (как подмногообразия в X).*

Доказательство. Если $f \in \mathbb{C}(X)$ – B-полуинвариантная функция веса χ, то та же функция в $\mathbb{C}({}^{\tau}X)$ B-полуинвариантна и имеет вес $\tau(\chi)$. Отсюда следуют утверждения о равенствах между для $\mathfrak{a}_{G,\bullet}$, $\mathfrak{X}_{G,\bullet}, L_{G,\bullet}, L_{0\,G,\bullet}$. U-орбиты обоих действий $G : X, G :{}^{\tau} X$

совпадают, откуда следует равенство для выделенных компонент. Пусть v – центральное G-нормирование на X. Поскольку $\mathbb{C}(X)^{(B)} = \mathbb{C}({}^{\tau}X)^{(B)}$, то v является центральным G-нормированием многообразия ${}^{\tau}X$. Пусть $\varphi_v, {}^{\tau}\varphi_v$ – соответствующие элементы в $\mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{R})^*, \mathfrak{a}_{G,{}^{\tau}X}(\mathbb{R})^*$. Тогда $\langle\varphi_v, \lambda\rangle = v(f) = \langle{}^{\tau}\varphi_v, \tau(\lambda)\rangle$, где $f \in \mathbb{C}(X)^{(B)}_{\lambda}$. Отсюда следует требуемое равенство для групп Вейля. Равенство для корневых решеток доказывается аналогично. □

Лемма 2.6.10. *Пусть $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$.*

(1) *Если H – алгебраическая подгруппа в G, то ${}^{\tau}(G/H) \cong G/\tau(H)$.*
(2) *Пусть H – редуктивная подгруппа в G и V – H-модуль. Тогда ${}^{\tau}(G *_H V) = G *_{\tau(H)} V$, где группа $\tau(H)$ действует на пространстве V посредством гомоморфизма $\tau^{-1} : \tau(H) \to H$.*

Доказательство. Требуемые изоморфизмы задаются формулами $gH \mapsto \tau(g)\tau(H)$ и $[g, v] \mapsto [\tau(g), v]$. □

2.7. **Вычисление картановских пространств для аффинных однородных пространств.** В этом пункте через H обозначена редуктивная подгруппа в G. Целью этого пункта является краткое изложение результатов работы [Lo2].

Следствие 2.3.2 дает, что $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1)$ для любого идеала $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$.

Для того, чтобы сформулировать основные результаты вычисления нам потребуются некоторые определения. Сначала достаточно стандартное.

Определение 2.7.1. Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *неразложимой*, если для любой пары идеалов $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}$, дополняющих друг друга, включение $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1) \oplus (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_2) \subset \mathfrak{h}$ является строгим.

Поскольку $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2) = \mathfrak{a}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1) \oplus \mathfrak{a}(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$, то вычисление картановских пространств легко сводится к случаю, когда подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ неразложима.

Наиболее существенную роль в вычислении играет следующий класс подалгебр.

Определение 2.7.2. Редуктивная подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется $\mathfrak{a}$-*существенной*, если для любого собственного идеала $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$ включение $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1)$ является строгим.

Наконец, для удобства записи ответа полезно ввести следующее понятие.

Определение 2.7.3. $\mathfrak{a}$-существенная подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *насыщенной*, если $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \widetilde{\mathfrak{h}})$, где $\widetilde{\mathfrak{h}}$ – это подалгебра в $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, которая является прообразом подалгебры $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h})$ при естественном эпиморфизме $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \to \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$.

Наконец, отметим, что леммы 2.6.9,2.6.10 позволяют проводить вычисления пространства $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ лишь для одной подалгебры $\mathfrak{h}$ в данном классе $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-сопряженности.

Следующее предложение является частью теоремы 1.3 из [Lo2].

Предложение 2.7.4. (1) *Существует единственный идеал $\mathfrak{h}^{ess} \subset \mathfrak{h}$, которой является существенной подалгеброй в $\mathfrak{g}$, с $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^{ess})$. Идеал $\mathfrak{h}^{ess}$ является максимальным (по включению) среди всех идеалов в $\mathfrak{h}$, являющихся существенными подалгебрами в $\mathfrak{g}$.*
(2) *Все полупростые неразложимые $\mathfrak{a}$-существенные подалгебры в $\mathfrak{g}$ с точностью до сопряженности в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ приведены в таблице 2.1.*
(3) *Все неполупростые насыщенные $\mathfrak{a}$-существенные неразложимые подалгебры в $\mathfrak{g}$ с точностью до сопряженности в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ приведены в таблице 2.2. Во всех случаях $\mathfrak{h} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]))$ и $\dim \mathfrak{h}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 1$.*

В теореме 1.3 из [Lo2] классифицированы все существенные подалгебры и приведен способ вычисления картановских пространств для них. Отметим, что, как только это сделано, пункт 1 предложения 2.7.4 доставляет эффективный способ вычисления идеала $\mathfrak{h}^{ess} \subset \mathfrak{h}$.

Таблица 2.1: Полупростые неразложимые $\mathfrak{a}$-существенные подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$

N	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$
1	$\mathfrak{sl}_n, n \geqslant 2$	$\mathfrak{sl}_k, \frac{n+2}{2} \leqslant k \leqslant n$	$\langle \pi_i, \pi_{n-i}; i \leqslant n-k \rangle$
2	$\mathfrak{sl}_n, n \geqslant 4$	$\mathfrak{sl}_k \times \mathfrak{sl}_{n-k}, \frac{n}{2} \leqslant k \leqslant n-2$	$\langle \pi_i + \pi_{n-i}, \pi_k, \pi_{n-k}; i < n-k \rangle$
3	$\mathfrak{sl}_{2n}, n \geqslant 2$	$\mathfrak{sp}_{2n}$	$\langle \pi_{2i}; i \leqslant n-1 \rangle$
4	$\mathfrak{sp}_{2n}, n \geqslant 2$	$\mathfrak{sp}_{2k}, \frac{n+1}{2} \leqslant k \leqslant n$	$\langle \pi_i; i \leqslant 2(n-k) \rangle$
5	$\mathfrak{sp}_{2n}, n \geqslant 2$	$\mathfrak{sp}_{2k} \times \mathfrak{sp}_{2(n-k)}, \frac{n}{2} \leqslant k < n$	$\langle \pi_{2i}; i \leqslant n-k \rangle$
6	$\mathfrak{sp}_{2n}, n \geqslant 4$	$\mathfrak{sp}_{2n-4} \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$	$\langle \pi_2, \pi_4, \pi_1 + \pi_3 \rangle$
7	$\mathfrak{sp}_6$	$\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$	$\langle \pi_2, \pi_1 + \pi_3 \rangle$
8	$\mathfrak{so}_n, n \geqslant 7$	$\mathfrak{so}_k, \frac{n+2}{2} \leqslant k \leqslant n$	$\langle \pi_i, i \leqslant n-k \rangle$
9	$\mathfrak{so}_{4n}, n \geqslant 2$	$\mathfrak{sl}_{2n}$	$\langle \pi_{2i}; i \leqslant n \rangle$
10	$\mathfrak{so}_{4n+2}, n \geqslant 2$	$\mathfrak{sl}_{2n+1}$	$\langle \pi_{2i}, \pi_{2n+1}; i \leqslant n \rangle$
11	$\mathfrak{so}_9$	$\mathfrak{spin}_7$	$\langle \pi_1, \pi_4 \rangle$
12	$\mathfrak{so}_{10}$	$\mathfrak{spin}_7$	$\langle \pi_1, \pi_2, \pi_4, \pi_5 \rangle$
13	$\mathfrak{so}_7$	G_2	$\langle \pi_3 \rangle$
14	$\mathfrak{so}_8$	G_2	$\langle \pi_1, \pi_3, \pi_4 \rangle$
15	G_2	A_2	$\langle \pi_1 \rangle$
16	F_4	B_4	$\langle \pi_1 \rangle$
17	F_4	D_4	$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$
18	E_6	F_4	$\langle \pi_1, \pi_5 \rangle$
19	E_6	D_5	$\langle \pi_1, \pi_5, \pi_6 \rangle$
20	E_6	B_4	$\langle \pi_1, \pi_2, \pi_4, \pi_5, \pi_6 \rangle$
21	E_6	A_5	$\langle \pi_1 + \pi_5, \pi_2 + \pi_4, \pi_3, \pi_6 \rangle$
22	E_7	E_6	$\langle \pi_1, \pi_2, \pi_6 \rangle$
23	E_7	D_6	$\langle \pi_2, \pi_4, \pi_5, \pi_6 \rangle$
24	E_8	E_7	$\langle \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_7 \rangle$
25	$\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$	$\mathfrak{h}$	$\langle \pi_i^* + \pi_i'; i \leqslant \mathrm{rk}\,\mathfrak{h} \rangle$
26	$\mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sp}_{2m}, m > n > 1$	$\mathfrak{sp}_{2n-2} \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sp}_{2m-2}$	$\langle \pi_2, \pi_2', \pi_1 + \pi_1' \rangle$
27	$\mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sl}_2, n > 1$	$\mathfrak{sp}_{2n-2} \times \mathfrak{sl}_2$	$\langle \pi_2, \pi_1 + \pi_1' \rangle$

Если алгебра $\mathfrak{g}$ имеет два простых идеала (строки 25-27), то через π_i обозначены фундаментальные веса первого идеала, а через π_j' – второго.

Таблица 2.2: Неполупростые насыщенные $\mathfrak{a}$-существенные неразложимые подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$

$(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])$	$\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$
$(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_k), k > \frac{n}{2}$	$\{\sum_{i=1}^{n-k}(x_i\pi_i + x_{n-i}\pi_{n-i}); \sum_{i=1}^{n-k} i(x_i - x_{n-i}) = 0\}$
$(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_k \times \mathfrak{sl}_{n-k}), k > \frac{n}{2}$	$\langle \pi_i + \pi_{n-i}; i \leqslant n-k \rangle$
$(\mathfrak{sl}_{2n+1}, \mathfrak{sp}_{2n})$	$\{\sum_{i=1}^{2n} x_i\pi_i; \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)x_{2i+1} - \sum_{i=1}^{n} ix_{2i} = 0\}$
$(\mathfrak{so}_{4n+2}, \mathfrak{sl}_{2n+1})$	$\langle \pi_{2i}, \pi_{2n} + \pi_{2n+1}; i \leqslant n-1 \rangle$

(E_6, D_5)	$\langle \pi_1+\pi_5, \pi_6\rangle$

Замечание 2.7.5. Отметим, что для всех подалгебр из таблиц 2.1,2.2 кроме NN8 ($n = 8, k = 7$), 9, 25 класс $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-сопряженности подалгебры $\mathfrak{h}$ совпадает с классом $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$-сопряженности. В случае 8 (соотв., 9,24) класс $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-сопряженности является объединением 3 (соотв., 2,$\#\mathrm{Aut}(\mathfrak{h})/\mathrm{Int}(\mathfrak{h})$) классов $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$-сопряженности.

2.8. **Замечательные G-многообразия.**

Определение 2.8.1. Неприводимое G-многообразие X называется *замечательным*, если выполняются следующие свойства:

(1) Многообразие X гладко и проективно.
(2) Существует открытая G-орбита $\mathcal{O} \subset X$.
(3) $X \setminus \mathcal{O}$ – дивизор с простыми нормальными пересечениями, т.е. его компоненты $D_1, \ldots, D_r$ гладкие и пересекаются трансверсально.
(4) Для всех наборов $i_1, \ldots, i_k$ с $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant r$ многообразие $(\bigcap_{j=1}^k D_{i_j}) \setminus \bigcup_{i\neq i_1,\ldots,i_k} D_i$ непусто и является одной G-орбитой.

Из определения непосредственно следует, что для любого набора индексов $i_1, \ldots, i_k$ пересечение $\bigcap_{j=1}^k D_{i_j}$ снова является замечательным G-многообразием.

Луна в [Lu3] показал, что любое замечательное многообразие является сферическим. При этом число r неприводимых компонент многообразия $X \setminus \mathcal{O}$ совпадает с рангом многообразия X. Обратно, широкий класс сферических однородных пространств допускает вложение, являющееся замечательным многообразием.

Предложение 2.8.2 ([Kn6], Corollary 7.2)**.** *Если H – сферическая подгруппа в G, для которой $N_G(H) = H$, то однородное пространство G/H допускает замечательное вложение.*

Напомним, что сферическими корнями многообразия X называются неделимые линейно независимые элементы $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathfrak{X}_{G,X}$, для которых конус нормирований совпадает с $\{x \in \mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{R}) | (\beta_i, x) \leqslant 0, i = \overline{1,r}\}$. Множество сферических корней многообразия X мы будем обозначать через $\Pi_{G,X}$.

В случае, когда многообразие X является замечательным, имеется взаимно-однозначное соответствие между сферическими корнями многообразия X и дивизорами D_i. При этом, если соответствующие корни и дивизоры занумерованы одинаково, то $\{\beta_j, j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}\}$ является системой сферических корней G-многообразия $D_{i_1} \cap \ldots \cap D_{i_k}$, см., скажем, [Lu5], 3.2.

Существует способ получать новые замечательные многообразия из уже имеющихся, называемый *параболической индукцией.* Именно, если Q – параболическая подгруппа в G, и X_0 – замечательное $Q/\mathrm{R}(Q)$-многообразие, то G-многообразие $X = G *_Q X_0$ является замечательным. Говорят, что многообразие X получено из X_0 применением параболической индукции. При параболической индукции система сферических корней не меняется (мы отождествляем $\Delta(\mathfrak{q}/R(\mathfrak{q}))$ с подмножеством в $\Delta(\mathfrak{g})$), см. [Lu5], 3.4.

Таким образом, имеет место

Предложение 2.8.3. *Любая набор из k сферических корней некоторого замечательного G-многообразия является системой сферических корней некоторого замечательного $Q/\mathrm{R}(Q)$-многообразия X_0 ранга k, где Q – стандартная параболическая подгруппа в G. При этом можем считать, что $Q/\mathrm{R}(Q)$-многообразие X_0 не может быть получено посредством нетривиальной параболической индукции.*

Замечательные многообразия ранга 1 вместе с их корнями были найдены в [A],[Bri2]. Все замечательные многообразия ранга 2 и их системы сферических корней были найдены в [Wa], Tables A-G.

3. Гамильтоновы действия

3.1. **Введение.** В этом разделе через G обозначена редуктивная группа и через X гладкое алгебраическое G-многообразие, снабженное G-инвариантной регулярной симплектической формой ω.

Этот раздел посвящен изучению общих гамильтоновых действий. В пункте 3.2 мы вводим определение симплектического гамильтонова G-многообразия и приводим несколько примеров. Так же в этом пункте мы определим важные численные инварианты гамильтоновых многообразий: ранг, коранг и дефект, а также некоторые морфизмы и многообразия, естественным образом появляющиеся при изучении отображения моментов. Пункт 3.3 посвящен специальному классу гамильтоновых многообразий, введенному в [Lo1], так называемым *коническим* многообразиям. В пункте 3.4 мы излагаем теорию локальных сечений для гамильтоновых действий. Эта теория была первоначально разработана Гийемином и Стернбергом ([GS]) для гамильтоновых действий групп Ли на вещественных гладких многообразиях. Алгебраический случай был рассмотрен в [Kn7], а затем в [Lo1].

Пункт 3.5 посвящен гамильтоновым морфизмам между гамильтоновыми многообразиями, и, в частности, гамильтоновым автоморфизмам. Здесь мы вводим понятие *центрального* гамильтонова автоморфизма (определение 3.5.5) и изучаем свойства таких автоморфизмов.

В пункте 3.6 мы введем определения, играющие первостепенно важную роль в данной работе, а именно определения *картановского пространства* $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}$, *группы Вейля* $W_{G,X}^{(X_L)}$, *решеток весов* $\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}$ и *корней* $\Lambda_{G,X}^{(X_L)}$ гамильтонова G-многообразия X. Первые два объекта были введены в [Lo1]. Картановское пространство $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}$ будет аффинным подпространством в центре подходящей подалгебры Леви $\mathfrak{l}\subset\mathfrak{g}$, $W_{G,X}^{(X_L)}$ – подгруппой в $N_G(\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)})/Z_G(\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)})$, а $\Lambda_{G,X}^{(X_L)}\subset\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}$ – подрешетками в решетке характеров подгруппы Леви $L\subset G$. Фактор $\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}/\Lambda_{G,X}^{(X_L)}$ будет отождествляться с группой характеров группы центральных автоморфизмов гамильтонова G-многообразия X. Картановское пространство, группа Вейля и обе решетки будут построены по некоторому локальному сечению X_L многообразия X, на что указывает верхний индекс в соответствующих обозначениях. В пункте 3.7 мы приведем примеры вычисления введенных объектов для некоторых гамильтоновых SL_2-многообразий.

Оставшиеся два пункта посвящены свойствам объектов введенных в пункте 3.6. В пункте 3.8 приводятся свойства, более или менее непосредственно следующие из определений. В пункте 3.9 мы изучаем специальный класс гамильтоновых многообразий, к которому, в частности, принадлежат все кокасательные расслоения над гладкими аффинными многообразиями.

3.2. **Базовые определения.** Пусть U – открытое подмножество в X и $f\in\mathbb{C}[U]$. Зададим регулярное векторное поле $v(f)$ на U (называемое *косым градиентом* функции f) формулой

$$\omega_x(v(f)_x,\eta)=\langle d_xf,\eta\rangle,\forall x\in U,\eta\in T_xX. \tag{3.1}$$

Для $f,g\in\mathbb{C}[U]$ определим их *скобку Пуассона* $\{f,g\}\in\mathbb{C}[U]$ по формуле

$$\{f,g\}=\omega(v(f),v(g)). \tag{3.2}$$

Понятно, что $\{f,g\}=L_{v(f)}g$, где L обозначает производную Ли.

Для любого элемента $\xi\in\mathfrak{g}$ определено векторное *поле скоростей* ξ_* на X. Предположим, что задано линейное отображение $\mathfrak{g}\to\mathbb{C}[X],\xi\mapsto H_\xi$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

(H1) Отображение $\xi\mapsto H_\xi$ является G-эквивариантным.
(H2) $v(H_\xi)=\xi_*$.

Определение 3.2.1. Действие группы G симплектоморфизмами на симплектическом многообразии X вместе с отображением $\xi\mapsto H_\xi$, удовлетворяющим условиям (H1),(H2), называется *гамильтоновым.* В этом случае говорят ещё, что X – *гамильтоново G-многообразие.* Функции H_ξ называются *гамильтонианами* действия.

Замечание 3.2.2. Очень часто определение гамильтонова действия дается несколько по-другому. Именно, для связной группы G условие (H1) заменяется на условие $\{H_\xi,H_\eta\}=H_{[\xi,\eta]}$. Однако, эти два условия эквиваленты, если выполнено (H2). Отметим также, что данное выше определение гамильтонова действия является частным случаем того, которое было введено в [Lo1].

Для гамильтонова действия $G:X$ определим отображение $\mu_{G,X}:X\to\mathfrak{g}^*$ по формуле

$$\langle\mu_{G,X}(x),\xi\rangle=H_\xi(x),\xi\in\mathfrak{g},x\in X. \tag{3.3}$$

Это морфизм алгебраических многообразий, называемый *отображением моментов* гамильтонова G-многообразия X.

Условия (H1),(H2) эквивалентны, соответственно, следующим

(M1) Морфизм $\mu_{G,X}$ является G-эквивариантным.
(M2) $\langle d_x\mu_{G,X}(v),\xi\rangle=\omega_x(\xi_*x,v)$ для всех $x\in X,v\in T_xX,\xi\in\mathfrak{g}$.

Замечание 3.2.3. Любые два морфизма $\mu_{G,X}:X\to\mathfrak{g}^*$ удовлетворяющие условиям (M1),(M2) отличаются на элемент из $\mathfrak{g}^{*G}$. Более того, $H_{[\xi,\eta]}=\{H_\xi,H_\eta\}=\omega(\xi_*,\eta_*)$ (см., к примеру, [Ви2]). Обратно, если прибавить к $\mu_{G,X}$ элемент $\eta\in\mathfrak{g}^{*G}$ мы снова получим отображение, удовлетворяющее условиям (M1),(M2). Соответствующее гамильтоново многообразие мы будем обозначать через X_η и говорить, что оно получено из X *сдвигом* на η.

Напомним, что $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ отождествлены. Поэтому мы будем рассматривать $\mu_{G,X}$ как морфизм из X в $\mathfrak{g}$.

Приведем несколько примеров гамильтоновых G-многообразий.

Пример 3.2.4 (Кокасательные расслоения)**.** Пусть Y –гладкое G-многообразие, а $X=T^*Y$ – кокасательное расслоение на Y. Многообразие X снабжается естественной симплектической структурой (описанной, к примеру, в [Ви2]). Действие $G:X$ гамильтоново. Отображение моментов задается формулой $\langle\mu_{G,X}((y,\alpha)),\xi\rangle=\langle\alpha,\xi_*y\rangle$. Здесь $y\in Y,\alpha\in T^*_yY,\xi\in\mathfrak{g}$.

Пример 3.2.5 (Симплектические векторные пространства)**.** Пусть V – векторное пространство, снабженное невырожденной кососимметрической билинейной формой ω. Тогда ω является симплектической формой на V. Пусть G – редуктивная группа, действующая на V линейными симплектоморфизмами. Тогда действие $G:V$ гамильтоново с отображением моментов $\mu_{G,V}$, заданным равенством $\langle\mu_{G,V}(v),\xi\rangle=\frac{1}{2}\omega(\xi v,v),\xi\in\mathfrak{g},v\in V$.

Пример 3.2.6 (Модельные многообразия)**.** Этот пример обобщает предыдущий. Пусть H – редуктивная подгруппа в G, $\eta \in \mathfrak{g}^H$, V –симплектический H-модуль. Положим $U = (\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta)/\mathfrak{h})^*$. Сперва, мы снабдим однородное расслоение $X = G *_H (U \oplus V)$ некоторой замкнутой 2-формой. Если $\eta_n \neq 0$, то выберем $\mathfrak{sl}_2$-тройку (η_n, h, f) в $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta_s)^H$ (здесь и далее подразумевается, что второй элемент в записи $\mathfrak{sl}_2$-тройки полупрост, а первый и третий нильпотентны). В противном случае положим $h = f = 0$. H-модуль U может быть отождествлен с $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{h}^\perp$. Фиксируем точку $x = [1, (u, v)] \in X$. Касательное пространство T_xX отождествляется с $\mathfrak{h}^\perp \oplus U \oplus V$, где $U \oplus V$ – это касательное пространство к слою проекции $G *_H (U \oplus V) \to G/H$, а вложение $\mathfrak{h}^\perp \hookrightarrow T_xX$ задано отображением $\xi \mapsto \xi_* x$. Положим

$$\begin{aligned}
&\omega_x(u_1 + v_1 + \xi_1, u_2 + v_2 + \xi_2) = \\
&= \omega_V(v_1, v_2) + (\xi_1, u_2) - (\xi_2, u_1) + (\mu_G(x), [\xi_1, \xi_2]), \qquad (3.4)\\
&u_1, u_2 \in U, v_1, v_2 \in V, \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{h}^\perp.
\end{aligned}$$

Соответствующее сечение $\omega \in \Gamma(U \oplus V, \bigwedge^2(\mathfrak{h}^\perp \oplus U \oplus V)^*)$ регулярно и H-инвариантно. Поэтому ω продолжается до единственной G-инвариантной 2-формы на X, которую мы также обозначим через ω. Оказывается, что форма ω замкнута на X и невырождена в точках вида $[g, (0, 0)], g \in G$ ([Л2], часть 1 предложения 1). Если η – нильпотентный элемент, то форма ω невырождена на всем многообразии X ([Л2], часть 2 предложения 1). В общем случае подмножество $X_r = \{x \in G *_H (U \oplus V) | \omega_x$ невырождена в $x\}$ аффинно. Действие $G : X_r$ является гамильтоновым. Отображение моментов определяется так ([Л2], часть 3 предложения 1):

$$\mu_{G,X_r}([g, (u, v)]) = \mathrm{Ad}(g)(\eta + u + \mu_{H,V}(v)). \qquad (3.5)$$

Мы обозначаем гамильтоново многообразие X_r через $M_G(H, \eta, V)$ и называем его *модельным многообразием.*

Замечание 3.2.7. Структура гамильтонова многообразия на $M_G(H, \eta, V)$ зависит от выбора $\mathfrak{sl}_2$-тройки (η_n, h, f) в $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta_s)^H$ (если $\eta_n \neq 0$). Однако, гамильтоновы многообразия, отвечающие различным выборам h, f, изоморфны (см. замечание 1 из [Л2]). В дальнейшем мы будем говорить, что (η_n, h, f) – $\mathfrak{sl}_2$-тройка, *порождающая* гамильтоново G-многообразие $M_G(H, \eta, V)$.

Замечание 3.2.8. Отметим, что для $\eta_0 \in \mathfrak{g}^G$ имеет место естественное отождествление $M_G(H, \eta, V)_{\eta_0} = M_G(H, \eta + \eta_0, V)$ (эти два многообразия даже совпадают как подмножества в $G *_H (U \oplus V)$).

Вот две конструкции с гамильтоновыми многообразиями.

Пример 3.2.9 (ограничение на подгруппу)**.** Пусть H – редуктивная подгруппа в G и X – гамильтоново G-многообразие. Тогда X является гамильтоновым H-многообразием с отображением моментов $\mu_{H,X} = p \circ \mu_{G,X}$, где через p обозначено отображение ограничения $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$.

Пример 3.2.10 (произведения)**.** Пусть X_1, X_2 – гамильтоновы G-многообразия. Будучи произведением симплектических многообразий, многообразие $X_1 \times X_2$ само наделяется естественной симплектической структурой. Действие $G : X_1 \times X_2$ является гамильтоновым. Соответствующее отображение моментов задается следующей формулой: $\mu_{G,X_1 \times X_2}(x_1, x_2) = \mu_{G,X_1}(x_1) + \mu_{G,X_2}(x_2)$ для $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.

Замечание 3.2.11. Если тройка (H, η, V) такова как в примере 3.2.6 и V_0 – симплектический H-модуль с тривиальным действием H, то гамильтоновы G-многообразия

$M_G(H,\eta,V\oplus V_0), M_G(H,\eta,V)\times V_0$ естественным образом изоморфны (предполагается, что действие $G:V_0$ тривиально).

Положим $\psi_{G,X}=\pi_{G,\mathfrak{g}}\circ\mu_{G,X}$. Обозначим через A целое замыкание подалгебры $\psi^*_{G,X}(\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G)\subset\mathbb{C}[X]^G$ в $\mathbb{C}(X)^G$. По стандартным результатам коммутативной алгебры, алгебра A конечно порождена. Положим $C_{G,X}=\operatorname{Spec}(A)$. Поскольку многообразие X нормально, $A\subset\mathbb{C}[X]^G$, и многообразие $C_{G,X}$ нормально. Морфизм $\psi_{G,X}$ представляется в виде композиции доминантного G-инвариантного морфизма $\widetilde{\psi}_{G,X}$, индуцированного вложением $A\hookrightarrow\mathbb{C}[X]$, и конечного морфизма $\tau_{G,X}:C_{G,X}\to\mathfrak{g}/\!/G$. Общие слои морфизма $\widetilde{\psi}_{G,X}$ связны, если группа G связна.

Теперь мы определим несколько важных численных инвариантов неприводимого гамильтонова G-многообразия X. Для действия группы G на алгебраическом многообразие Y мы обозначим через $m_G(Y)$ максимальную размерность G-орбиты на Y. Число $m_G(X)-m_G(\overline{\operatorname{im}\mu_{G,X}})$ называется *дефектом* многообразия X и обозначается через $\operatorname{def}_G(X)$. Наконец, число $\dim X-\operatorname{def}_G(X)-m_G(X)$ называется *корангом* многообразия X и обозначается через $\operatorname{cork}_G(X)$. По определению, $\operatorname{cork}_G(X)=\operatorname{tr.deg}\mathbb{C}(X)^G-\operatorname{def}_G(X)$. Неприводимое гамильтоново G-многообразие X коранга 0 называется *коизотропным.*

Из стандартных свойств отображения моментов (см., к примеру, [Ви2], гл.2, §2) следует, что ранг, коранг и дефект гамильтонова G-многообразия X совпадают с, соответственно, рангом, корангом и дефектом ограничения симплектической формы ω на G-орбиту общего положения. Далее, верна

Лемма 3.2.12. $\dim C_{G,X}=\dim\overline{\operatorname{im}\psi_{G,X}}=\operatorname{def}_G(X)$.

Доказательство. Первое равенство следует непосредственно из определения многообразия $C_{G,X}$. Второе доказано, например, в [Ви2], глава 2, предложение 4, или в [Lo1], Proposition 3.7. □

Замечание 3.2.13. Аналогичным образом можно определить гамильтоновы действия на комплексно аналитических многообразиях. Определения (ко)ранга и дефекта переносятся на этот случай без сколько-нибудь ощутимой модификации.

3.3. **Конические гамильтоновы многообразия.** Коническими называются те гамильтоновы многообразия, которые имеют "хорошее" действие группы $\mathbb{C}^\times$.

Определение 3.3.1. Гамильтоново G-многообразие X, снабженное действием группы $\mathbb{C}^\times$, коммутирующим с действием группы G, называется *коническим*, если выполнены следующие два условия:

(Con1) Морфизм $\mathbb{C}^\times\times X\to X, (t,x)\mapsto tx$, может быть продолжен до морфизма $\mathbb{C}\times X\to X$.

(Con2) Существует натуральное число k, для которого элементы $\mu_{G,X}(tx)$ и $t^k\mu_{G,X}(x)$ из $\mathfrak{g}$ G-сопряжены для всех $t\in\mathbb{C}^\times, x\in X$.

Число k из второго условия называется *степенью* гамильтонова многообразия.

Пример 3.3.2 (Кокасательные расслоения)**.** Пусть Y – гладкое G-многообразие и $X=T^*Y$. Многообразие X является векторным расслоением над Y, что дает действие $\mathbb{C}^\times:X$ послойным умножением на константы. Гамильтоново G-многообразие X, снабженное таким действием группы $\mathbb{C}^\times$, является коническим степени 1.

Пример 3.3.3 (Симплектические векторные пространства)**.** Пусть $G:V$ – линейное гамильтоново действие. Гамильтоново G-многообразие V вместе с действием $\mathbb{C}^\times:V$, $(t,v)\mapsto tv$, является коническим степени 2.

Пример 3.3.4 (Модельные многообразия)**.** Этот пример обобщает предыдущий. Пусть H, η, V таковы как в примере 3.2.6, и $X = M_G(H, \eta, V)$. Предположим, что элемент η является нильпотентным. Сейчас мы определим действие $\mathbb{C}^\times : X$, превращающее X в коническое гамильтоново многообразие степени 2. Пусть (η, h, f) – $\mathfrak{sl}_2$-тройка в $\mathfrak{g}^H$, порождающая X. Как G-многообразие, $X = G*_H(U \oplus V)$, где $U = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{h}^\perp$. Собственные значения оператора $\mathrm{ad}(h)$ в $\mathfrak{g}$ являются целыми, поэтому для $t \in \mathbb{C}^\times$ определен такой линейный автоморфизм t^{-h} пространства $\mathfrak{g}$, что $t^{-h}\xi = t^i \xi$, для всех $\xi \in \mathfrak{g}$, для которых $[h, \xi] = -i\xi, i \in \mathbb{Z}$. На самом деле, $t \mapsto t^{-h}$ является однопараметрической группой внутренних H-эквивариантных автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Поэтому $t^{-h}(\mathfrak{h}^\perp) = \mathfrak{h}^\perp$. Поскольку $[h, f] = 0$, мы видим, что $t^{-h}(U) = U$. Определим морфизм $\mathbb{C}^\times \times X \to X$ по формуле

$$(t, [g, (u, v)]) \mapsto [g, t^2 t^{-h} u, tv], t \in \mathbb{C}^\times, g \in G, u \in U, v \in V. \tag{3.6}$$

Непосредственно проверяется, что этот морфизм корректно определен и задает действие группы $\mathbb{C}^\times$ на X, перестановочное с действием группы G. Проверим, что X вместе с этим действием становится коническим гамильтоновым многообразием. Условие (Con1) выполняется, поскольку собственные значения оператора $\mathrm{ad}(h)$ на $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(f)$ неположительны. Далее,

$$\mu_{G,X}(t[g, (u, v)]) = \mathrm{Ad}(g)(\eta + t^2 t^{-h} u + \mu_{H,V}(tv)) = t^2 \,\mathrm{Ad}(g) t^{-h}(\eta + u + \mu_{H,V}(v))$$

Поэтому X – коническое гамильтоново G-многообразие степени 2.

Замечание 3.3.5. Пусть многообразие X таково, как в предыдущем примере. Действие $\mathbb{C}^\times : X$ индуцирует G-инвариантную градуировку на $\mathbb{C}[X]$, и, стало быть, градуировку на $\mathbb{C}[X]^G$. В обозначениях предыдущего примера, $\mathbb{C}[X]^G \cong \mathbb{C}[U \oplus V]^H$. Градуировка на $\mathbb{C}[U \oplus V]^H$ получается ограничением следующей градуировки алгебры $\mathbb{C}[U \oplus V]$:

элементы из $V^* \subset \mathbb{C}[U \oplus V]$ имеют степень 1. H-модуль U^* естественным образом отождествляется с $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta) \cap \mathfrak{h}^\perp$. Положим $\mathfrak{g}_i = \{\xi \in \mathfrak{g} | [h, \xi] = i\xi\}$. Элемент из $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta) \cap \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{g}_i$ имеет степень $i + 2$.

Лемма 3.3.6 ([Lo1], Lemma 3.27)**.** *Пусть X – коническое гамильтоново G-многообразие степени k. Тогда*

1. $0 \in \mathrm{im}\, \psi_{G,X}$.
2. *Предположим, что многообразие X неприводимо и нормально. Тогда подалгебра $K[C_{G,X}] \subset K[X]^G$ инвариантна относительно $\mathbb{C}^\times$. Морфизмы $\widetilde{\psi}_{G,X} : X \to C_{G,X}, \tau_{G,X} : C_{G,X} \to \mathfrak{g}/\!/G$ являются $\mathbb{C}^\times$-эквивариантными, где действие $\mathbb{C}^\times : \mathfrak{g}/\!/G$ индуцировано с действия $\mathbb{C}^\times : \mathfrak{g}, (t, x) \mapsto t^k x, t \in \mathbb{C}^\times, x \in \mathfrak{g}$.*
3. *В предположениях предыдущей части, существует единственная точка $\lambda_0 \in C_{G,X}$, для которой $\tau_{G,X}(\lambda_0) = 0$. Для любой точки $\lambda \in C_{G,X}$ предел $\lim_{t \to 0} t\lambda$ существует и равен λ_0.*

3.4. **Локальные сечения.** В этом пункте X является квазипроективным гамильтоновым G-многообразием, ω симплектической G-формой на X.

Теорема о локальном сечении сводит изучение гамильтонова G-многообразия X в этальной окрестности некоторой точки $x \in X$ к случаю, когда $\mu_{G,X}(x)_s \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Пусть L – подгруппа Леви в G. Положим $\mathfrak{l}^{pr} = \{\xi \in \mathfrak{l} | \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\xi_s) \subset \mathfrak{l}\}$. Это подмножество в $\mathfrak{l}$ является дополнением к множеству нулей некоторого элемента из $\mathbb{C}[\mathfrak{l}]^{N_G(\mathfrak{l})}$, см., к примеру, [Lo1], Subsection 5.1.

Положим $Y = \mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{l}^{pr})$. Очевидно, что это локально замкнутое $N_G(L)$-подмногообразие в X. Отметим, что Y является главным открытым подмножеством в замкнутом подмножестве в X, а потому является аффинным (квазиаффинным) многообразием, если таково X.

Предложение 3.4.1 ([Kn7], Theorem 5.4, и [Lo1], Corollary 5.3 и Propositions 5.2, 5.4). *Во введенных обозначениях*

(1) $\mathfrak{g}_y \subset \mathfrak{l}$ *и* $\mathfrak{l}_*^{\perp}y \oplus T_yY$ *– косоортогональная прямая сумма для любой точки* $y \in Y$. *В частности,* Y *– гладкое подмногообразие в* X, *и ограничение формы* ω *на* Y *невырождено. Таким образом,* Y *снабжается симплектической структурой.*

(2) *Действие* $N_G(L) : Y$ *гамильтоново с отображением моментов* $\mu_{G,X}|_Y$.

(3) *Естественный морфизм* $G *_{N_G(L)} Y \to X$ *этален (однородное расслоение в левой части существует, поскольку* X, *а значит и* Y, *– квазипроективное многообразие). Его образ является насыщенным.*

Напомним, что подмножество Z^0 G-многообразия Z называется *насыщенным*, если существует G-инвариантный морфизм $\varphi : Z \to Z_0$ и подмножество $Z_0^0 \subset Z_0$, для которых $Z^0 = \varphi^{-1}(Z_0^0)$.

Определение 3.4.2. Неприводимая (=связная) компонента многообразия $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{l}^{pr})$, снабженная структурой гамильтонова L-многообразия, полученной ограничением гамильтоновой структуры с $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{l}^{pr})$, называется *$L$-сечением* гамильтонова G- многообразия X.

При специальном выборе подгруппы L предложение 3.4.1 может быть усилено.

Определение 3.4.3. Подгруппа Леви $L \subset G^\circ$, которая является централизатором в G° элемента $\mu_{G,X}(x)_s \in \mathfrak{g}$ для точки $x \in X$ общего положения, называется *главным централизатором* гамильтонова G-многообразия X.

Главный централизатор определен однозначно с точностью до сопряженности действием группы G° (см. [Lo1], Subsection 5.2).

Предложение 3.4.4 ([Lo1], Proposition 5.7). *Пусть L – главный централизатор многообразия X. Естественный морфизм $G *_{N_G(L)} \mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{l}^{pr}) \to X$ является открытым вложением, а группа $N_G(L)$ действует транзитивно на множестве неприводимых компонент многообразия $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{l}^{pr})$.*

Открытое подмногообразие $G\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{l}^{pr}) \subset X$ в дальнейшем будем обозначать через X^{pr}.

Лемма 3.4.5. *Пусть L – главный централизатор, а X_L – L-сечение гамильтонова G-многообразия X. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $m_G(X) = \dim G$.

(2) $\operatorname{def}_G(X) = \operatorname{rk} G$.

(3) $\overline{\operatorname{im} \mu_{G,X}} = \mathfrak{g}$.

(4) L *– максимальный тор в* G *и* $m_L(X_L) = \operatorname{def}_L(X_L) = \operatorname{rk} G$.

При выполнении этих условий $\operatorname{cork}_G(X) = \dim X - \dim \mathfrak{g} - \operatorname{rk} \mathfrak{g}$.

Доказательство. Эквивалентность первых трех утверждений довольно стандартна, см., например, [Lo1], Proposition 3.7, Corollary 3.10. Докажем теперь эквивалентность условия (4) с условиями (1)-(3). То, что L является максимальным тором следует из условия (3). Если L – максимальный тор, то эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (4) следует из предложения 3.4.4. Равенство для коранга вытекает из (1) и (2). $\square$

Замечание 3.4.6. Конструкции этого пункта переносятся без изменений на случай комплексно-аналитических гамильтоновых многообразий. Все перечисленные выше в этом пункте результаты остаются верными.

Теперь мы обсудим поведение главного централизатора и соответствующих сечений при переходе от многообразия X к связанным с ним гамильтоновым многообразиям.

Лемма 3.4.7. *Пусть X – гамильтоново G-многообразие, L – его главный централизатор, а X_L – L-сечение.*

(1) *Пусть M – подгруппа Леви в G, и X_M – (единственное) M-сечение многообразия X, содержащее X_L. Тогда L является главным централизатором, а X_L – L-сечением гамильтонова M-многообразия X_M. Обратно, каждое L-сечение многообразия X_M является L-сечением многообразия X.*

(2) *Пусть X' – гамильтоново G-многообразие, а $\varphi : X \dashrightarrow X'$ конечное в общей точке доминантное рациональное G-отображение, удовлетворяющее условию $\mu_{G,X'} \circ \varphi = \mu_{G,X}$. Тогда L является главным централизатором гамильтонова G-многообразия X', отображение φ определено в X_L, и существует единственное L-сечение X'_L многообразия X', для которого $\overline{X'_L} = \overline{\varphi(X_L)}$.*

(3) *Пусть G – связная группа, а G^0 – связная подгруппа в G, содержащая (G,G). Тогда $L^0 := L \cap G^0$ является главным централизатором, а X_L – L^0-сечением гамильтонова G^0-многообразия X.*

(4) *Предположим, что группа G связна, а гамильтоново G-многообразие X удовлетворяет эквивалентным условиям леммы 3.4.5. Пусть $G = Z(G)^\circ G_1 \dots G_k$ – разложение в локально прямое произведение центра и простых нормальных подгрупп. Тогда гамильтоново G_i-многообразие X удовлетворяет эквивалентным условиям леммы 3.4.5. Положим $G^{(i)} = Z(G)^\circ \prod_{j \neq i} G_j$. Существует единственное $L_i := L \cap G_i$-сечение X_{L_i} гамильтонова G_i-многообразия X, содержащее $G^{(i)} X_L$. При этом, подмножество $G^{(i)} X_L$ является открытым подмногообразием X_{L_i}.*

Доказательство. Пункт 1. Отметим, что, поскольку $\mathfrak{l}^{pr} \subset \mathfrak{m}^{pr}$, то сечение X_M определено корректно. Из того, что $\mathfrak{z}_{\mathfrak{m}}(\mu_{G,X}(x)_s) = \mathfrak{l}$ для всех $x \in X_L$, следует, что L содержит главный централизатор многообразия X_M. Из части 3 предложения 3.4.1, мы выводим, что подмножество $G \operatorname{im} \mu_{M,X_M} \subset \mathfrak{g}$ плотно $\overline{\operatorname{im} \mu_{G,X}}$. Поэтому главные централизаторы X_M и X сопряжены в G. Отсюда L – главный централизатор многообразия X_M. Поскольку $\mathfrak{l}^{pr} \subset \mathfrak{m}^{pr}$, X_L – это L-сечение многообразия X_M. Так как все L-сечения многообразия X_M $N_M(L)$-сопряжены, то любое из них является L-сечением многообразия X.

Пункт 2. Отметим, что $\overline{\operatorname{im} \mu_{G,X}} = \overline{\operatorname{im} \mu_{G,X'}}$. Поэтому L является главным централизатором многообразия X'. Поскольку подмножество GX_L плотно в X, то рациональное отображение φ определено в X_L. Выберем в качестве X'_L единственное L-сечение многообразия X', содержащее точку из $\varphi|_{X_L}$. Единственность следует из гладкости многообразия $\mu_{G,X'}^{-1}(\mathfrak{l}^{pr})$. По той же причине, $\overline{\varphi(X_L)} \subset \overline{X'_L}$. Для доказательства равенства осталось сравнить размерности, используя часть 3 предложения 3.4.1.

Пункт 3. Отметим, что если $L = Z_G(\xi)$ для $\xi \in \mathfrak{g}$, то $L^0 = Z_{G^0}(\xi^0)$, где ξ^0 – ортогональная проекция ξ на $\mathfrak{g}^0$. Отсюда следует, что L^0 – главный централизатор. Далее, $\mathfrak{l}^{0\,pr}$ совпадает с ортогональной проекцией $\mathfrak{l}^{pr}$ на $\mathfrak{g}^0$. Поэтому X_L является L^0-сечением многообразия X.

Пункт 4. Можем заменить группу G на накрытие и считать, что $G = Z(G)^\circ \times G_1 \times \dots \times G_k$.

То, что L_i является главным централизатором гамильтонова G_i-многообразия X следует из леммы 3.4.5. Отметим, что $\mu_{G_i,X}$ является $G^{(i)}$-морфизмом, и что $X_L \subset \mu_{G_i,X}^{-1}(\mathfrak{l}_i^{pr})$. Мы видим, что $G^{(i)}X_L \subset \mu_{G_i,X}^{-1}(\mathfrak{l}_i^{pr})$. Поскольку многообразие $\mu_{G_i,X}^{-1}(\mathfrak{l}_i^{pr})$ гладко, а $G^{(i)}, X_L$ неприводимы, $G^{(i)}X_L$ содержится в единственном L_i-сечении X^{L_i} многообразия X. Напомним, что естественный морфизм $G*_L X_L \to X$ является открытым вложением (см. предложение 3.4.4). Поэтому $G^{(i)}X_L$ – это локально замкнутое подмногообразие в X_{L_i}, и $\dim G^{(i)}X_L = \dim G^{(i)} - \operatorname{rk} G + \operatorname{rk} G_i + \dim X_L = \dim X - \dim G_i + \operatorname{rk} G_i = \dim X_{L_i}$. □

3.5. **Гамильтоновы морфизмы.** В этом пункте X – квазипроективное гамильтоново G-многообразие.

Определение 3.5.1. Пусть X, Y – гамильтоновы G- многообразия. Этальный G-морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *гамильтоновым*, если он удовлетворяет условиям 1,2 ниже:

(1) $\varphi^*\omega^Y = \omega^X$. Здесь ω^X, ω^Y – симплектические формы на X и Y.
(2) $\mu_{G,Y} \circ \varphi = \mu_{G,X}$.

Вот примеры гамильтоновых морфизмов.

Пример 3.5.2. Пусть X – гамильтоново G-многообразие, и конечная группа Γ действует на X свободно гамильтоновыми автоморфизмами. Многообразие X/Γ гладко, а морфизм $\pi_{\Gamma,X}$ эталeн и конечен. Форма ω спускается на X/Γ, так что многообразие X снабжается симплектической структурой. Существует единственный морфизм $\mu_{G,X/\Gamma}$, удовлетворяющий равенству $\mu_{G,X} = \mu_{G,X/\Gamma} \circ \pi_{\Gamma,X}$. Это задает на X/Γ единственную структуру гамильтонова G-многообразия, для которой $\pi_{\Gamma,X}$ является гамильтоновым морфизмом.

В частности, пусть H, η, V таковы как в примере 3.2.6, H_0 – нормальная подгруппа в H, содержащая H°. Предположим для простоты, что элемент η нильпотентен. Группа H/H_0 действует на многообразии $M_G(H_0, \eta, V) \cong G*_{H_0}(U \oplus V)$, посредством $(\overline{h}, [g,(u,v)]) \mapsto [gh^{-1}, (hu, hv)], \overline{h} \in H/H_0$, где h – элемент из H, отображающийся в $\overline{h}$ при каноническом эпиморфизме $H \twoheadrightarrow H/H_0$. Это действие свободно. Непосредственно из определения соответствующих гамильтоновых структур в примере 3.2.6 следует, что группа H/H_0 действует на $M_G(H_0, \eta, V)$ гамильтоновыми автоморфизмами. Таким образом, морфизм $\pi_{H/H_0, M_G(H_0,\eta,V)} : M_G(H_0, \eta, V) \to M_G(H, \eta, V)$ является гамильтоновым.

Пример 3.5.3. Пусть X_0 – гладкое -многообразие, и φ – автоморфизм многообразия X_0. Автоморфизм φ индуцирует автоморфизм φ_* многообразия $X := T^*X_0$, $(x, \alpha) \mapsto (\varphi(x), d_x\varphi^{-1}\alpha), x \in X_0, \alpha \in T_x^*X$. Этот автоморфизм сохраняет симплектическую структуру на X. Отметим, что отображение $\varphi \mapsto \varphi^*$ является мономорфизмом соответствующих групп автоморфизмов. Пусть теперь X – G-многообразие, а φ – G-автоморфизм. Из определения гамильтоновой структуры на X (см. пример 3.2.5) следует, что φ_* является гамильтоновым автоморфизмом.

В пункте 5.3 нам нужна будет характеризация автоморфизмов из предыдущего примера среди всех гамильтоновых G-автоморфизмов многообразия T^*X_0.

Лемма 3.5.4. *Пусть X_0 – гладкое неприводимое G-многообразие, а ψ – гамильтонов G-автоморфизм многообразия $X := T^*X_0$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *Автоморфизм ψ $\mathbb{C}^\times$-эквивариантен (где действие $\mathbb{C}^\times : X$ задано как в примере 3.2.4).*

(2) *Для некоторого G-автоморфизма φ многообразия X_0 имеет место равенство $\psi=\varphi_*$. В этом случае $\varphi=\psi|_{X_0}$.*

Доказательство. То, что автоморфизм вида φ_* является $\mathbb{C}^\times$-эквивариантным следует непосредственно из определения. Обратно, пусть ψ – $\mathbb{C}^\times$-эквивариантный гамильтонов автоморфизм многообразия T^*X. Из $\mathbb{C}^\times$-эквивариантности следует, что ψ оставляет на месте $X_0=(T^*X_0)^{\mathbb{C}^\times}$. Пусть $\varphi=\psi|_{X_0}$. Заменив ψ на $\psi\varphi_*^{-1}$, можем считать, что автоморфизм ψ тождественен на X_0. Фиксируем точку $x\in X_0$ и положим $B=d_x\psi$. Отображение B $\mathbb{C}^\times$-эквивариантно, поэтому оставляет на месте $T_xX_0\cong(T_xX)^{\mathbb{C}^\times}$ и $T^*_xX_0\subset T_xX$ (как единственное $\mathbb{C}^\times$-инвариантное дополнение к $T_xX_0\subset T_xX$). Кроме того, отображение B тождественно на T_xX_0 и симплектично. Отсюда следует, что B тождественно на T_xX, ибо подпространства $T_xX_0, T_x^*X_0\subset T_xX$ лагранжевы. Поскольку автоморфизм ψ $\mathbb{C}^\times$-эквивариантен, то из равенства $d_x\psi=id$ для всех $x\in X_0$ следует, что $\psi=id$. □

Пусть L – главный централизатор, а X_L – L-сечение гамильтонова G-многообразия X. Имеется выделенный класс гамильтоновых автоморфизмов.

Определение 3.5.5. Гамильтонов автоморфизм многообразия X называется *центральным*, если он оставляет на месте X_L и действует на X_L, как некоторый элемент из $Z(L)^\circ$. Группу центральных автоморфизмов гамильтонова многообразия X будем обозначать через $\mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G,X}$.

Замечание 3.5.6. Отметим, что данное определение корректно, т.е. не зависит от выбора L и X_L. В самом деле, возьмем другую пару $L', X_{L'}$. Найдется элемент $g\in G$ с $gLg^{-1}=L'$. Из предложения 3.4.4 теперь следует, что $gLg^{-1}=L', gX_L=X_{L'}$ для некоторого элемента $g\in G$. Отметим, что g определен однозначно с точностью до правого сдвига на элемент из $N_G(L,X_L)$. Если гамильтонов автоморфизм действует на X_L сдвигом на $t\in Z(L)^\circ$, то на $X_{L'}$ он действует сдвигом на gtg^{-1}.

Замечание 3.5.7. Пусть X_0 – гладкое квазиаффинное G-многообразие. В пункте 5.3 мы увидим, что отображение $\varphi\mapsto\varphi_*$ (см. пример 3.5.3) задает изоморфизм групп $\mathfrak{A}_{G,X_0}$ и $\mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G,T^*X_0}$.

Вот ещё одно оправдание термина "центральный автоморфизм".

Лемма 3.5.8. *Предположим, что G-эквивариантный автоморфизм ψ многообразия X оставляет на месте X_L. Тогда $\psi\varphi=\varphi\psi$ для всех $\varphi\in\mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G,X}$.*

Доказательство. Поскольку автоморфизмы ψ,φ G-эквивариантны, а подмножество GX_L плотно в X, достаточно показать, что $\psi|_{X_L}\varphi|_{X_L}=\varphi|_{X_L}\psi|_{X_L}$. Для этого достаточно заметить, что ограничение ψ на X_L $Z(L)^\circ$-эквивариантно. □

Обозначим через $A^{(X_L)}_{G,X}$ фактор группы $Z(L)^\circ$ по ядру неэффективности действия $Z(L)^\circ : X_L$. Действие группы $N_G(L,X_L)$ на $Z(L)^\circ$ спускается до действия $N_G(L,X_L) : A^{(X_L)}_{G,X}$ автоморфизмами.

Ограничение центрального автоморфизма на X_L задает гомоморфизм $\iota^{(X_L)}_{G,X}:\mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G,X}\to A^{(X_L)}_{G,X}$. Поскольку $\overline{GX_L}=X$ (из пункта 3 предложения 3.4.1), то этот гомоморфизм инъективен. Поскольку ограничение центрального автоморфизма на X_L является $N_G(L,X_L)$-эквивариантным, то $\operatorname{im}\iota^{(X_L)}_{G,X}\subset(A^{(X_L)}_{G,X})^{N_G(L,X_L)}$. Этот образ мы будем обозначать через $\mathfrak{A}^{(X_L)}_{G,X}$.

Дадим более удобную характеризацию подгруппы $\mathfrak{A}_{G,X}^{(X_L)} \subset (A_{G,X}^{(X_L)})^{N_G(L,X_L)}$. Любой элемент $l \in (A_{G,X}^{(X_L)})^{N_G(L,X_L)}$ корректно определяет автоморфизм l_* многообразия X^{pr} по формуле $l_*[g,y] = [g,ly], g \in G, y \in X_L$.

Лемма 3.5.9. *Пусть* $l \in (A_{G,X}^{(X_L)})^{N_G(L,X_L)}$. *Тогда*

(1) *Автоморфизм* $l_* : X^{pr} \to X^{pr}$ *является гамильтоновым. Иными словами, имеет место равенство* $(A_{G,X}^{(X_L)})^{N_G(L,X_L)} = \mathfrak{A}_{G,X^{pr}}^{(X_L)}$.

(2) $l \in \mathfrak{A}_{G,X}^{(X_L)}$ *тогда и только тогда, когда* l_* *продолжается до морфизма* $X \to X$.

Доказательство. Равенство $\mu_{G,X^0} \circ l_* = \mu_{G,X^0}$ следует из $\mu_{G,X}|_{X_L} = \mu_{L,X_L}$. В пункте 1 остается доказать, что l_* сохраняет форму ω. Достаточно проверить это в точках из X_L. Воспользуемся пунктом 1 предложения 3.4.1. Для любой точки $y \in X_L$ имеет место разложение $T_yX = T_yX_L \oplus \mathfrak{l}_*^{\perp}y$ в косоортогональную прямую сумму. Очевидно, что $d_y(l_*)T_yX_L = T_{ly}X_L, d_y(l_*)\mathfrak{l}_*^{\perp}y = \mathfrak{l}_*^{\perp}(ly)$. Отображение $d_y(l_*)^*$ переводит $\omega_{ly}|_{T_yX_L}$ в $\omega_y|_{T_yX_L}$, поскольку $y \mapsto ly$ – симплектоморфизм многообразия X_L. С другой стороны, для $\xi,\eta \in \mathfrak{l}^{\perp}$ имеет место равенство $\omega_y(\xi_*y,\eta_*y) = (\mu_{L,X_L}(y),[\xi,\eta])$ (см. замечание 3.2.3). Поскольку $y \mapsto ly$ является гамильтоновым автоморфизмом многообразия X_L, то $(d_yl_*)^*(\omega_{ly}|_{\mathfrak{l}_*^{\perp}(ly)}) = \omega_y|_{\mathfrak{l}_*^{\perp}y}$. Это завершает доказательство пункта 1.

Перейдем к пункту 2. Если $l \in \mathfrak{A}_{G,X}^{(X_L)}$, то доказывать нечего. Обратно, пусть $l \in (A_{G,X}^{(X_L)})^{N_G(L,X_L)}$ – такой элемент, что l_* продолжается до некоторого морфизма $\varphi : X \to X$. По пункту 1, $\varphi^*\omega = \omega$. Поскольку форма ω невырождена, морфизм φ является этальным. Будучи бирациональным этальным морфизмом, φ является открытым вложением. Но любое открытое вложение $X \to X$ является изоморфизмом, см., например, [I], Proposition 4. □

Следствие 3.5.10. *Если многообразие* X *является квазиаффинным, то подгруппа* $\mathfrak{A}_{G,X}^{(X_L)} \subset A_{G,X}^{(X_L)}$ *замкнута.*

Доказательство. Подгруппа $\mathfrak{A}_{G,X^{pr}}^{(X_L)} = (A_{G,X}^{(X_L)})^{N_G(L,X_L)} \subset A_{G,X}^{(X_L)}$ является замкнутой. Достаточно доказать, что подгруппа $\mathfrak{A}_{G,X}^{(X_L)} \subset \mathfrak{A}_{G,X^{pr}}^{(X_L)}$ замкнута. Воспользовавшись пунктом 2 леммы 3.5.9, мы сводим дело к доказательству следующей леммы:

Лемма 3.5.11. *Пусть* G *– алгебраическая подгруппа, действующая на открытом подмножестве* X^0 *квазиаффинного многообразия* X. *Тогда подгруппа* $G_0 \subset G$, *состоящая из элементов, продолжающихся до автоморфизма многообразия* X, *замкнута.*

Доказательство леммы 3.5.11. Алгебра $\mathbb{C}[X^0]$ является рациональной G-алгеброй ([ВП], лемма 1.4), а $\mathbb{C}[X]$ – G-подмодуль в $\mathbb{C}[X^0]$. Множество элементов $g \in G$, удовлетворяющих условию $g\mathbb{C}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ задается обращением в ноль некоторых матричных элементов, поэтому замкнуто. Таким образом, подмножество $\{g \in G | g\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[X]\} = \{g \in G, g\mathbb{C}[X] \subset \mathbb{C}[X], g^{-1}\mathbb{C}[X] \subset \mathbb{C}[X]\}$ является замкнутой подгруппой в G. Поэтому мы можем считать, что $g\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[X]$ для всех $g \in G$.

Найдется такая конечно-порожденная подалгебра $A \subset \mathbb{C}[X]$, что отображение $X \to \overline{X} := \mathrm{Spec}(A)$ является открытым вложением. Поскольку G-алгебра $\mathbb{C}[X]$ рациональна, мы можем, заменив A на подалгебру, порожденную GA, и считать, что подалгебра $A \subset \mathbb{C}[X]$ G-инвариантна. Элемент $g \in G$ задает регулярный автоморфизм многообразия X тогда и только тогда, когда $g(\overline{X} \setminus X) = \overline{X} \setminus X$. Подгруппа элементов $g \in G$, оставляющих на месте замкнутое подмногообразие в $\overline{X}$ всегда замкнута. □

□

3.6. $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}$, $W_{G,X}^{(X_L)}$, $\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}, \Lambda_{G,X}^{(X_L)}$. **Определения.** Здесь X является неприводимым квазипроективным гамильтоновым G-многообразием. Обозначим через L главный централизатор многообразия X.

Выберем L-сечение X_L многообразия X. Из замечания 3.5.6 следует, что тройка $(L, X_L, N_G(L, X_L))$ определена однозначно с точностью до сопряженности группой G. Обозначим через T_0 ядро неэффективности для действия $Z(L)^\circ : X_L$ и положим $\mathfrak{l}_0 := \mathfrak{t}_0 \oplus [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$.

Напомним теперь некоторые результаты из [Lo1], Section 5.2. Положим $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} = \overline{\operatorname{im} \mu_{Z(L)^\circ, X_L}}$. Подпространство $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{l}^L$ вкладывается в $\mathfrak{l}/\!/L$ морфизмом $\pi_{L,\mathfrak{l}}$. При этом вложении $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}$ отождествляется с $\overline{\operatorname{im} \psi_{L,X_L}}$. Оказывается, что $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}$ является аффинным подпространством в $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ размерности $\operatorname{def}_G(X)$, пересекающим $\mathfrak{t}_0$ в единственной точке ξ_0. Приняв точку ξ_0 за 0 в аффинном пространстве $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}$, мы можем рассматривать $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}$ как векторное пространство.

Определение 3.6.1. Векторное пространство $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}$ называется *картановским пространством* гамильтонова G-многообразия X, ассоциированным с X_L.

Аффинное подпространство $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ инвариантно относительно действия $N_G(L, X_L) : \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$. Точка ξ_0 неподвижна относительно группы $N_G(L, X_L)$. Обозначим образ группы $N_G(L, X_L)$ в $\mathrm{GL}(\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)})$ через $W_{G,X}^{(X_L)}$. Отметим, что это определение группы $W_{G,X}^{(X_L)}$ немного отличается от данного в [Lo1]. В случае связной группы G, определения совпадают и $W_{G,X}^{(X_L)} \cong N_G(L, X_L)/L$.

Определение 3.6.2. Линейная группа $W_{G,X}^{(X_L)}$ называется *группой Вейля* гамильтонова G-многообразия X, ассоциированной с X_L.

Замечание 3.6.3. Аффинное отображение $\xi \mapsto \xi - \xi_0 : \mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} \to \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ индуцирует изоморфизм $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} \cong \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) \cap \mathfrak{t}_0^\perp \cong \mathfrak{z}(\mathfrak{l})/\mathfrak{t}_0$. Это отождествление $N_G(L, X_L)/L$-эквивариантно. Таким образом, $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}$ естественным образом отождествляется с алгеброй Ли группы $A_{G,X}^{(X_L)}$. Отметим, что если $0 \in \overline{\operatorname{im} \psi_{G,X}}$ (это так, к примеру, если X коническое гамильтоново многообразие), то $0 \in \mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}$ или, эквивалентно, $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} = \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) \cap \mathfrak{l}_0^\perp$.

Теперь мы напомним определения некоторых морфизмов, введенных в [Lo1], Subsection 5.2, которые естественным образом связаны с $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}, W_{G,X}^{(X_L)}$. Имеем естественное вложение $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}/W_{G,X}^{(X_L)} \hookrightarrow \mathfrak{l}/\!/N_G(L, X_L)$. При этом, $\operatorname{im} \psi_{N_G(L,X_L),X_L} \subset \mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}/W_{G,X}^{(X_L)}$. Обозначим через $\widehat{\psi}_{N_G(L,X_L),X_L}$ морфизм $\psi_{N_G(L,X_L),X_L}$, рассмотренный как отображение в $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}/W_{G,X}^{(X_L)}$, и через $\tau_{G,X}^{1\,(X_L)}$ морфизм $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}/W_{G,X}^{(X_L)} \to \mathfrak{g}/\!/G$, индуцированный ограничением функций с $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}$. Морфизм $\tau_{G,X}^{1\,(X_L)}$ конечен.

Существует единственный G-инвариантный морфизм $\widehat{\psi}_{G,X}^{(X_L)} : X \to \mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}/W_{G,X}^{(X_L)}$, который совпадает на X_L с $\widehat{\psi}_{N_G(L,X_L),X_L}$. Выполняется равенство $\psi_{G,X} = \tau_{G,X}^{1(X_L)} \circ \widehat{\psi}_{G,X}^{(X_L)}$. Существует единственный конечный морфизм $\tau_{G,X}^{2(X_L)} : C_{G,X} \to \mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}/W_{G,X}^{(X_L)}$, для которого $\widehat{\psi}_{G,X} = \tau_{G,X}^2 \circ \widetilde{\psi}_{G,X}$, $\tau_{G,X} = \tau_{G,X}^1 \circ \tau_{G,X}^2$.

Определение 3.6.4. Решетка $\mathfrak{X}(A_{G,X}^{(X_L)}) \subset (\mathfrak{z}(\mathfrak{l})/\mathfrak{t}_0)^* \cong \mathfrak{z}(\mathfrak{l})/\mathfrak{t}_0 \cong \mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}$ называется *решеткой весов* гамильтонова G-многообразия X, ассоциированной с X_L, и обозначается через $\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}$.

Определение 3.6.5. Подрешетка в $\mathfrak{X}(A_{G,X}^{(X_L)})=\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}$ состоящая из всех характеров, обращающихся в 1 на $\mathfrak{A}_{G,X}^{(X_L)}$ (соотв., на $(A_{G,X}^{(X_L)})^{W_{G,X}^{(X_L)}}$) называется *корневой решеткой* гамильтонова G-многообразия X, ассоциированной с X_L, и обозначается через $\Lambda_{G,X}^{(X_L)}$.

Замечание 3.6.6. Пусть X_0 – гладкое квазиаффинное G-многообразие. В разделе 5 мы увидим, что при подходящем выборе главного централизатора L и L-сечения X_L будут иметь место равенства $\mathfrak{a}_{G,X_0}=\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}, W_{G,X_0}=W_{G,X}^{(X_L)}, \mathfrak{X}_{G,X_0}=\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}, \Lambda_{G,X_0}=\Lambda_{G,X}^{(X_L)}$.

Следующие три замечания говорят, что четверка $(\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}, W_{G,X}^{(X_L)}, \mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}, \Lambda_{G,X}^{(X_L)})$ ведет себя "правильным образом" при простейших модификациях группы G и многообразия X.

Замечание 3.6.7. Пусть $\widetilde{G}$ – связная редуктивная алгебраическая группа с заданным накрытием $\rho:\widetilde{G}\to G$. Положим $\widetilde{L}=\rho^{-1}(L)$. Тогда $\widetilde{L}$ является главным централизатором гамильтонова $\widetilde{G}$-многообразия X, а X_L – $\widetilde{L}$-сечением. Имеют место равенства $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}=\mathfrak{a}_{\widetilde{G},X}^{(X_L)}, W_{G,X}^{(X_L)}=W_{\widetilde{G},X}^{(X_L)}, \mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}=\mathfrak{X}_{\widetilde{G},X}^{(X_L)}$, $\Lambda_{G,X}^{(X_L)}=\Lambda_{\widetilde{G},X}^{(X_L)}$.

Замечание 3.6.8. Пусть X_0 – неприводимое симплектическое многообразие, снабженное тривиальным действием группы G и нулевым отображением моментов. Тогда L является главным централизатором для действия $X\times X_0$, $X_L\times X_0$ – L-сечение многообразия $X\times X_0$. Далее, $\mathfrak{a}_{G,X\times X_0}^{(X_L\times X_0)}=\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}$, $W_{G,X\times X_0}^{(X_L\times X_0)}=W_{G,X}^{(X_L)}$, $\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}=\mathfrak{X}_{G,X\times X_0}^{(X_L\times X_0)}$, $\Lambda_{G,X}^{(X_L)}=\Lambda_{G,X\times X_0}^{(X_L\times X_0)}$.

Замечание 3.6.9. Пусть G,X,L,X_L таковы, как выше, и $\eta\in\mathfrak{g}^G$. Гамильтоново многообразие X_η (сдвиг X на η) определено в замечании 3.2.3 . Группа L является главным централизатором многообразия X_η, а X_L L-сечением. Имеем равенство $\mathfrak{a}_{G,X_\eta}^{(X_L)}=\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}-\eta$ аффинных подпространств в $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$. С другой стороны, $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}, \mathfrak{a}_{G,X_\eta}^{(X_L)}$ отождествляются с $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})/\mathfrak{t}_0$ (замечание 3.6.3). При этом отождествлении, $W_{G,X}^{(X_L)}=W_{G,X_\eta}^{(X_L)}, \mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}=\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}, \Lambda_{G,X}^{(X_L)}=\Lambda_{G,X_\eta}^{(X_L)}$.

Замечание 3.6.10. Отметим, что четверка $(\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}, W_{G,X}^{(X_L)}, \mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}, \Lambda_{G,X}^{(X_L)}$, состоящая из аффинного подпространства в $\mathfrak{g}$, группы его аффинных преобразований и двух решеток в нем, определяется выбором L и X_L (на самом деле, L однозначно восстанавливается по X_L). Если не фиксировать X_L, то эта пятерка определена однозначно лишь с точностью до сопряженности в группе G. Именно, пусть L_1,L_2 – главные централизаторы многообразия X, и X_{L_1},X_{L_2} – L_1- и L_2-сечения. Существует элемент $g\in G$, для которого $gL_1g^{-1}=L_2, gX_{L_1}=X_{L_2}$, причем класс $gN_G(L_1,X_{L_1})$ определен однозначно. Получаем линейное отображение $g_*:\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_{L_1})}\to\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_{L_2})}, \xi\mapsto \mathrm{Ad}(g)\xi$. При различных выборах элемента $g\in G$ соответствующие изоморфизмы g_* получаются друг из друга умножением справа на элемент из $W_{G,X}^{(X_{L_1})}$. Непосредственно из определений 3.6.2,3.6.4,3.6.5 видно, что

$$\begin{aligned}
&W_{G,X}^{(X_{L_2})}=g_*W_{G,X}^{(X_{L_1})}g_*^{-1},\\
&\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_{L_2})}=g_*\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_{L_1})},\\
&\Lambda_{G,X}^{(X_{L_2})}=g_*\Lambda_{G,X}^{(X_{L_1})}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Кроме того, изоморфизм g_* индуцирует отождествление $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_{L_1})}/W_{G,X}^{(X_{L_1})} \cong \mathfrak{a}_{G,X}^{(X_{L_2})}/W_{G,X}^{(X_{L_2})}$, уже не зависящее от выбора элемента g, что позволяет нам отождествить эти два фактора. При этом отождествлении, имеет место равенство морфизмов

$$\widehat{\psi}_{G,X}^{(X_{L_1})} = \widehat{\psi}_{G,X}^{(X_{L_2})}, \tau_{G,X}^{1\,(X_{L_1})} = \tau_{G,X}^{1\,(X_{L_2})}, \tau_{G,X}^{2\,(X_{L_1})} = \tau_{G,X}^{2\,(X_{L_2})}.$$

Равенства (3.7) позволяют также сказать, что четверка $(\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}, W_{G,X}^{(X_L)}, \mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}, \Lambda_{G,X}^{(X_L)}$ не зависит от X_L, если рассматривать её безотносительно *вложения* в $\mathfrak{g}$. Под вложением четверки здесь понимается набор вложений $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}, \mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}, \Lambda_{G,X}^{(X_L)} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, $W_{G,X}^{(X_L)} \hookrightarrow N_G(\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)})/Z_G(\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)})$. Выбор L, X_L, таким образом, определяет не саму четверку, а лишь её вложение в $\mathfrak{g}$. Значит, мы можем говорить о картановском пространстве, группе Вейля и т.д. гамильтонова G-многообразия X. При обозначении соответствующих объектов мы будем заменять в верхнем индексе (X_L) на $(\cdot)$. Верхний индекс оставлен, поскольку обозначения $\mathfrak{a}_{G,X}, W_{G,X}$ и т.д. уже использованы (см. п. 1.1). Кроме того, мы будем писать $\widehat{\psi}_{G,X}, \tau_{G,X}^1, \tau_{G,X}^2$ вместо $\widehat{\psi}_{G,X}^{(X_L)}, \tau_{G,X}^{1\,(X_L)}, \tau_{G,X}^{2\,(X_L)}$.

3.7. $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}$, $W_{G,X}^{(X_L)}$, $\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}, \Lambda_{G,X}^{(X_L)}$. **Примеры вычисления.** В этом пункте $G = \mathrm{SL}_2$. Во всех приведенных ниже примерах X является гамильтоновым G-многообразием, для которого, как мы проверим, $m_G(X) = \dim G$. Стало быть, X удовлетворяет эквивалентным условиям леммы 3.4.5. Через X_T мы обозначаем T-сечение многообразия X. Отметим, что $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_T)} = \mathfrak{t}$.

Пример 3.7.1. Пусть $X = M_G(\{1\}, e, \{0\})$, где $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Как G-многообразие, $X = G\times\mathbb{C}$, с отображением моментов $(g,x) \mapsto \mathrm{Ad}(g)(e+xf)$, где $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Стабилизатор общего положения для действия $G : X$ равен $\{1\}$. Имеем равенство

$$\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{t}^{pr}) = \{(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, x) | a^2 = xb^2, c^2 = xd^2, xdb \neq ac, ad - bc = 1\}. \tag{3.8}$$

После несложных преобразований (3.8) переписывается в виде

$$\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{t}^{pr}) = \{(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, x) | ad = -bc = \frac{1}{2}, x = \frac{b^2}{a^2}\}.$$

Отсюда видно, что многообразие $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{t}^{pr})$ неприводимо, иными словами, что $W_{G,X}^{(X_T)} = W(\mathfrak{g})$. Далее, действие $T : Y$ свободно, и, значит, $\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_T)} = \mathfrak{X}_G$. Единственным элементом из T, умножение на который – $N_G(T)$-автоморфизм многообразия X_T, является $-E$, где через E обозначена единичная матрица. Автоморфизм многообразия X_T, индуцированный умножением на E, продолжается до автоморфизма $(g,x) \mapsto (-g,x)$ многообразия X. Очевидно, что центр группы G всегда действует на любом гамильтоновом многообразии гамильтоновыми автоморфизмами. Поэтому $\Lambda_{G,X}^{(X_T)} = \Lambda(\mathfrak{g})$.

Пример 3.7.2. Пусть $X = M_G(T, 0, \{0\})$. Как G-многообразие, $X \cong G*_T(\mathbb{C}e+\mathbb{C}f)$, где e, f такие же, как в предыдущем примере. Отображение моментов задается формулой $[g, xe+yf] \to \mathrm{Ad}(g)(xe+yf)$. Как и выше, $m_G(X) = \dim G$. Аналогично предыдущему примеру, имеем равенство

$$\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{t}^{pr}) = \{[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}] | ad = -bc = \frac{1}{2}, ya^2 = xb^2\}.$$

Поэтому $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{t}^{pr})$ – неприводимое многообразие, и $W_{G,X}^{(X_T)} = W(\mathfrak{g})$. Элемент $-E$ действует на X тривиально. Действие группы $T/\{\pm E\}$ на X_T эффективно, поэтому $\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_T)} = \Lambda(\mathfrak{g})$. Положим $n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Поскольку $nh = -hn$, то умножение на h является $N_G(T)$-эквивариантным автоморфизмом многообразия X_T. Непосредственно проверяется, что автоморфизм $y \mapsto hy : X_T \to X_T$ является ограничением автоморфизма $[g, v] \mapsto [gn^{-1}, nv] : X \to X$. Последний автоморфизм является гамильтоновым, см. пример 3.5.2 (или лемму 3.5.9). Поэтому $\Lambda_{G,X}^{(X_T)} = 2\Lambda(\mathfrak{g})$.

Пример 3.7.3. В этом примере $X = V$ – четырехмерный неприводимый модуль. Введем в X базис e_1, e_2, e_3, e_4, соответствующий базису x^3, x^2y, xy^2, y^3 при изоморфизме между V и пространством однородных многочленов от x, y степени 3. В качестве симплектической формы на X можно взять билинейную кососимметрическую форму ω, которая задается равенствами:

$$\omega(e_1, e_4) = 6, \omega(e_2, e_3) = 2, \omega(e_i, e_j) = 0 \text{ для } i + j \neq 5.$$

Имеем равенство $m_G(X) = \dim G$. Отображение моментов задается формулой

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \mapsto \begin{pmatrix} 3xt + yz & -2y^2 \\ 2z^2 & -3xt - yz \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{t}^{pr}) = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 | y = z = 0, x, t \neq 0\}$. Отсюда мы видим, что $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{t}^{pr})$ – неприводимое многообразие, или, эквивалентно, что $W_{G,X}^{(X_T)} = W(\mathfrak{g})$. Ядро неэффективности для действия $T : X_T$ является циклической группой порядка 3. Таким образом, $\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_T)} = 3\mathfrak{X}_G$. Для $t \in T$ изоморфизм $y \mapsto ty$ является $N_G(T)$-эквивариантным тогда и только тогда, когда t или $-t$ лежит в ядре неэффективности действия. Автоморфизм $v \mapsto -v$ является гамильтоновым. Поэтому $\Lambda_{G,X}^{(X_T)} = 3\Lambda(\mathfrak{g})$.

Пример 3.7.4. Пусть $X = V_1 \oplus V_2$, где V_1, V_2 – двумерные неприводимые SL_2-модули. Выберем в V_i базис e_{i1}, e_{i2}. В качестве симплектической формы на V мы выберем единственную билинейную симплектическую форму ω, для которой V_1, V_2 изотропны и $\omega(xe_{11} + ye_{12}, ze_{21} + te_{22}) = 2 \det \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$. Легко видеть, что $m_G(X) = \dim G$. Отображение моментов будет задаваться формулой

$$\mu_{G,X}(xe_{11} + ye_{12} + ze_{21} + te_{22}) = \begin{pmatrix} xt + yz & 2yt \\ -2zx & -xt - yz \end{pmatrix}$$

Отсюда имеем

$$\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{t}^{pr}) = \{xe_{11} + ye_{12} + ze_{21} + te_{22} | yt = zx = 0, xt + yz \neq 0\}.$$

Заметим, что многообразие $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{t}^{pr})$ имеет две неприводимые компоненты $\{xe_{11} + ye_{12} + ze_{21} + te_{22} | y = z = 0, xt \neq 0\}$ и $\{xe_{11} + ye_{12} + ze_{21} + te_{22} | x = t = 0, yz \neq 0\}$. В качестве X_T возьмем, скажем, первую. Имеем равенства $W_{G,X}^{(X_T)} = \{1\}, \mathfrak{X}_{G,X}^{(X_T)} = \mathfrak{X}_G$. Автоморфизм $(v_1, v_2) \mapsto (tv_1, t^{-1}v_2), v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, t \in \mathbb{C}^\times$ является центральным для любого $t \in \mathbb{C}^\times$. Таким образом, $\Lambda_{G,X}^{(X_T)} = \{0\}$.

3.8. $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}$, $W_{G,X}^{(X_L)}$, $\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}$, $\Lambda_{G,X}^{(X_L)}$. **Простейшие свойства.** В этом пункте G, X, L, X_L, T_0 обозначают то же, что и в пункте 3.6. Через ω мы обозначаем симплектическую форму на X.

Обсудим элементарные свойства решеток $\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}, \Lambda_{G,X}^{(X_L)}$. Отметим, что L является главным централизатором для действия $G^\circ : X$, и X_L – L-сечением гамильтонова G°-многообразия X.

Лемма 3.8.1. (1) $\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)} = \mathfrak{X}_{G^\circ,X}^{(X_L)}$.

(2) *Для всех* $w \in W_{G,X}^{(X_L)}, \xi \in \mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}$ *имеет место включение* $w\xi - \xi \in \Lambda_{G,X}^{(X_L)}$.

(3) *Решетки* $\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}, \Lambda_{G,X}^{(X_L)} \subset \Xi_{G,X}^{(X_L)}$ *инвариантны относительно группы* $W_{G,X}^{(X_L)}$.

Доказательство. Утверждение пункта 1 следует непосредственно из определения.

Перейдем к пункту 2. Элемент $t \in A_{G,X}^{(X_L)}$ $N_G(L, X_L)$-инвариантен тогда и только тогда, когда для всех $\xi \in \mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}, w \in W_{G,X}^{(X_L)}$ верно равенство $\langle \xi, t\rangle = \langle \xi, wt\rangle$ или, что эквивалентно, когда $\langle w^{-1}\xi - \xi, t\rangle = 0$. Утверждение пункта 2 следует теперь из включения $\mathfrak{A}_{G,X}^{(X_L)} \subset (A_{G,X}^{(X_L)})^{N_G(L,X_L)}$.

Инвариантность решеток следует из замечания 3.6.10. □

Теперь мы покажем, что $\mathfrak{a}_{G,X}^{(\cdot)}, W_{G,X}^{(\cdot)}, \mathfrak{X}_{G,X}^{(\cdot)}$ являются бирациональными инвариантами многообразия X.

Лемма 3.8.2. *Пусть X, X' – гамильтоновы G-многообразия, и φ – рациональное G-отображение, для которого $\mu_{G,X} \circ \varphi = \mu_{G,X'}$. Обозначим через L главный централизатор многообразия X. Предположим, что рациональное отображение φ бирационально. Выберем L-сечения X_L, X'_L многообразий X, X' как в пункте 2 леммы 3.4.7. Тогда* $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} = \mathfrak{a}_{G,X'}^{(X'_L)}, W_{G,X}^{(X_L)} = W_{G,X'}^{(X'_L)}, \mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)} = \mathfrak{X}_{G,X'}^{(X'_L)}$.

Доказательство. Непосредственно из соответствующих определений. □

Следующая лемма сравнивает четверки $(\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}, W_{G,X}^{(X_L)}, \mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}, \Lambda_{G,X}^{(X_L)})$ и $(\mathfrak{a}_{M,X_M}^{(X_L)}, W_{M,X_M}^{(X_L)}, \mathfrak{X}_{M,X_M}^{(X_L)}, \Lambda_{M,X_M}^{(X_L)})$, где M – подгруппа Леви в G, содержащая L, а X_M – M-сечение многообразия X, содержащее X_L.

Лемма 3.8.3. *Предположим, что группа G связна. Пусть M – подгруппа Леви в G, содержащая L, и X_M –M-сечение многообразия X, содержащее X_L. Тогда*

(1) $\mathfrak{a}_{M,X_M}^{(X_L)} = \mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}, \mathfrak{X}_{M,X_M}^{(X_L)} = \mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}, A_{M,X_M}^{(X_L)} = A_{G,X}^{(X_L)}$.

(2) $N_M(L, Y) = N_G(L, Y) \cap M$. *Эквивалентно,* $W_{M,X_M}^{(X_L)} = W_{G,X}^{(X_L)} \cap M/L$.

(3) *Следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd}
X_M \arrow[r, "\widehat{\psi}_{M,X_M}"] \arrow[d] & \mathfrak{a}_{M,X_M}^{(\cdot)}/W_{M,X_M}^{(\cdot)} \arrow[r, "\tau^1_{M,X_M}"] \arrow[d] & \mathfrak{m}/\!/M \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\widehat{\psi}_{G,X}"] & \mathfrak{a}_{G,X}^{(\cdot)}/W_{G,X}^{(\cdot)} \arrow[r, "\tau^1_{G,X}"] & \mathfrak{g}/\!/G
\end{tikzcd}$$

Здесь морфизм $X_M \to X$ – это вложение, морфизм $\mathfrak{a}_{M,X_M}^{(\cdot)}/W_{M,X_M}^{(\cdot)} \to \mathfrak{a}_{G,X}^{(\cdot)}/W_{G,X}^{(\cdot)}$ задан формулой $W_{M,X_M}^{(X_L)}\xi \mapsto W_{G,X}^{(X_L)}\xi$, а морфизм $\mathfrak{m}/\!/M \to \mathfrak{g}/\!/G$ индуцирован ограничением функций с $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{m}$.

(4) *Имеет место включение* $\Lambda_{M,X_M}^{(X_L)} \subset \Lambda_{G,X}^{(X_L)}$.

Доказательство. Утверждения пунктов 1,2 и коммутативность правого квадрата диаграммы теперь следует непосредственно из определений.

Для доказательства коммутативности левого квадрата диаграммы достаточно заметить, что оба морфизма $X_M \to \mathfrak{a}^{(\cdot)}_{G,X}/W^{(\cdot)}_{G,X}$ диаграммы M-инвариантны и совпадают на X_L с $\widehat{\psi}_{N_G(L,X_L),X_L}$.

Перейдем к пункту 4. Подмногообразие X_M является единственной компонентой многообразия $\mu^{-1}_{G,X}(\mathfrak{m}^{pr})$, содержащей X_L. Поэтому группа $\mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G,X}$ оставляет X_M на месте. Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G,X}$. Из определения гамильтоновой структуры на X_M (предложение 3.4.1) следует, что $\varphi|_{X_M}$ является гамильтоновым автоморфизмом многообразия X_M. Из пункта 1 леммы 3.4.7 следует, что $\varphi|_{X_M} \in \mathfrak{A}^{(\cdot)}_{M,X_M}$. Таким образом, отображение $\varphi \mapsto \varphi|_{X_M}$ задает гомоморфизм $\mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G,X} \to \mathfrak{A}^{(\cdot)}_{M,X_M}$. Непосредственно видно, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G,X} \arrow[rr] \arrow[dr, "\iota^{(X_L)}_{G,X}"'] & & \mathfrak{A}^{(\cdot)}_{M,X_M} \arrow[dl, "\iota^{(X_L)}_{M,X_M}"] \\
& A^{(X_L)}_{G,X} \cong A^{(X_L)}_{M,X_M} &
\end{tikzcd}$$

Это завершает доказательство. □

Следующая лемма посвящена функториальным свойствам четверки $(\mathfrak{a}^{(X_L)}_{G,X}, W^{(X_L)}_{G,X}, \mathfrak{X}^{(X_L)}_{G,X}, \Lambda^{(X_L)}_{G,X})$.

Лемма 3.8.4. *Пусть группа G связна, а X, X' – гамильтоновы G-многообразия и $\varphi : X \to X'$ –гамильтонов морфизм. Пусть L –главный централизатор, а X_L – L-сечение гамильтонова многообразия X. Выберем L-сечение X'_L многообразия X' как в лемме 3.4.7. Тогда*

(1) $\mathfrak{a}^{(X_L)}_{G,X} = \mathfrak{a}^{(X'_L)}_{G,X'}, W^{(X_L)}_{G,X} \subset W^{(X'_L)}_{G,X'}, \mathfrak{X}^{(X_L)}_{G,X} \subset \mathfrak{X}^{(X'_L)}_{G,X'}$.
(2) *Следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\
\mathfrak{a}^{(\cdot)}_{G,X}/W^{(\cdot)}_{G,X} \arrow[r] & \mathfrak{a}^{(\cdot)}_{G,X'}/W^{(\cdot)}_{G,X'}
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Равенство $\mathfrak{a}^{(X_L)}_{G,X} = \mathfrak{a}^{(X'_L)}_{G,X'}$ следует из определения 3.6.1 и определения компоненты X'_L. Для доказательства включения между группами Вейля достаточно заметить, что $N_G(L, X_L) \subset N_G(L, X'_L)$. Ядро неэффективности действия $Z(L)^\circ : X_L$ действует тривиально на X'_L, откуда включение весовых решеток.

Коммутативность диаграммы следует из того, что оба отображения $X \to \mathfrak{a}^{(\cdot)}_{G,X'}/W^{(\cdot)}_{G,X'}$ G-эквивариантны и совпадают на X_L с $\mu_{Z(L)^\circ,X_L}/N_G(L, X'_L)$. □

Покажем теперь, что группа Вейля и решетка корней гамильтонова G-многообразия X зависят, в некотором смысле, лишь от коммутанта группы G.

Лемма 3.8.5. *Пусть G – связная редуктивная группа, X – такое гамильтоново G-многообразие, что $0 \in \overline{\operatorname{im}\psi_{G,X}}$, G^0 – связная алгебраическая подгруппа в G, содержащая (G, G). Пусть L – главный централизатор, а X_L – L-сечение многообразия*

X. Положим $L^0 = L \cap G^0$. Напомним (лемма 3.4.7), что L^0 является главным централизатором, а X_L – L^0-сечением гамильтонова G^0-многообразия X. Имеют место следующие утверждения.

1. *Выполняется равенство $N_G(L, X_L) \cap G^0 = N_{G^0}(L^0, X_L)$. Включение $N_{G^0}(L^0, X_L) \hookrightarrow N_G(L, X_L)$ индуцирует изоморфизм $W_{G,X}^{(X_L)} = N_G(L, X_L)/L \cong N_{G^0}(L^0, X_L)/L \cong W_{G^0,X}^{(X_L)}$, посредством которого мы отождествим $W_{G,X}^{X_L}$ и $W_{G^0,X}^{(X_L)}$.*
2. *$\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} \cap \mathfrak{g}^0 \subset \mathfrak{a}_{G^0,X}^{(X_L)}$. Включения $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} \cap \mathfrak{g}^0 \hookrightarrow \mathfrak{a}_{G^0,X}^{(X_L)}, \mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}$ $W_{G,X}^{(X_L)}$-эквивариантнты.*
3. *Группа $W_{G,X}^{(X_L)}$ действует тривиально на $\mathfrak{a}_{G^0,X}^{(X_L)}/(\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} \cap \mathfrak{g}^0)$, $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}/(\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} \cap \mathfrak{g}^0)$.*
4. *$\Lambda_{G,X}^{(X_L)}, \Lambda_{G^0,X}^{(X_L)} \subset \mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} \cap \mathfrak{g}^0$, и $\Lambda_{G,X}^{(X_L)} = \Lambda_{G^0,X}^{(X_L)}$ (равенство решеток в $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} \cap \mathfrak{g}^0$).*
5. *Ортогональная проекция $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^0$ индуцирует проекцию $p : \mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} \to \mathfrak{a}_{G^0,X}^{(X_L)}$. При этом, $p(\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_L)}) = \mathfrak{X}_{G^0,X}^{(X_L)}$. Проекция p $W_{G,X}^{(X_L)}$-эквивариантна. Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathfrak{a}^{(\cdot)}_{G,X}/W^{(\cdot)}_{G,X} \arrow[rr] & & \mathfrak{a}^{(\cdot)}_{G^0,X}/W^{(\cdot)}_{G^0,X} \end{tikzcd}$$

Здесь горизонтальная стрелка индуцирована проекцией p.

Доказательство. Утверждения пункта 1 следуют непосредственно из равенства $N_G(L) \cap G^0 = N_{G^0}(L^0)$.

При доказательстве последующих утверждений мы можем заменить G на накрытие (см. замечание 3.6.7) и считать, что $G = Z \times G^0$, где Z – центральная подгруппа в G с касательной алгеброй $\mathfrak{g}^{0\perp}$.

Пусть T_0, T_0^0 обозначают ядра неэффективности для действий $Z(L)^\circ, Z(L^0)^\circ : X_L$. Непосредственно проверяется, что $\mathfrak{t}_0^0 = \mathfrak{t}_0 \cap \mathfrak{g}^0$. Заметим, что $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} = \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) \cap \mathfrak{t}_0^\perp, \mathfrak{a}_{G^0,X}^{(X_L)} = \mathfrak{z}(\mathfrak{l}^0) \cap \mathfrak{t}_0^{0\perp}$, поскольку $0 \in \overline{\operatorname{im} \psi_{G,X}}, 0 \in \overline{\operatorname{im} \psi_{G^0,X}}$ (см. замечание 3.6.3). Для доказательства утверждения пункта 2 отметим, что $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} \cap \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) \cap \mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{t}_0^\perp, \mathfrak{a}_{G^0,X}^{(X_L)} = \mathfrak{z}(\mathfrak{l}^0) \cap \mathfrak{t}_0^{0\perp} = \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) \cap \mathfrak{g}^0 \cap (\mathfrak{t}_0 \cap \mathfrak{g}^0)^\perp$.

Перейдем к пункту 3. По определению, группа $W_{G,X}^{(X_L)}$ (соотв., $W_{G^0,X}^{(X_L)}$) действует на $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}$ (соотв., $\mathfrak{a}_{G^0,X}^{(X_L)}$) как $N_G(L, X_L)/L$ (соотв., как $N_{G^0}(L^0, X_L)/L^0$). Остается заметить, что группы $N_G(L, X_L), N_{G^0}(L^0, X_L)$ сохраняют $\mathfrak{g}^0$ и действуют тривиально на $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^0$.

Докажем утверждение пункта 4. Для начала, опишем связь между группами $\mathfrak{A}_{G,X}^{(X_L)}$ и $\mathfrak{A}_{G^0,X}^{(X_L)}$. Именно, пусть $l \in Z(L)^\circ = Z \times Z(L^0)^\circ$, $l = (z, l^0)$. Покажем, что следующие утверждения эквивалентны

(a) Сдвиг на l в X_L является ограничением G-эквивариантного автоморфизма многообразия X.

(b) Сдвиг на l^0 в X_L является ограничением G^0-эквивариантного автоморфизма многообразия X.

Для доказательства импликации $(a) \Rightarrow (b)$ достаточно заметить, что сдвиг на элемент из Z в X является G-эквивариантным автоморфизмом. Обратно, пусть выполняется условие пункта (b) и φ – соответствующий G^0-эквивариантный автоморфизм. Автоморфизм φ является гамильтоновым и центральным (лемма 3.5.9). Группа Z действует на X G^0-эквивариантными автоморфизмами, оставляя на месте X_L. Поэтому автоморфизм φ является Z-эквивариантным (лемма 3.5.8), и, стало быть, G-эквивариантным.

Решетка $\Lambda_{G,X}^{(X_L)}$ (соотв. $\Lambda_{G^0,X}^{(X_L)}$) является аннулятором в $\mathfrak{X}(Z(L)^\circ)$ (соотв., в $\mathfrak{X}(Z(L^0)^\circ)$) всех элементов $l \in Z(L)^\circ$ (соотв., $l^0 \in Z(L^0)^\circ$), удовлетворяющих условию (a) (соотв., (b)). В свою очередь, $\mathfrak{X}(Z(L^0)^\circ)$ естественным образом отождествляется с аннулятором подгруппы $Z \subset Z(L)^\circ$ в $\mathfrak{X}(Z(L)^\circ)$. Эквивалентность условий (a),(b) дает равенство $\Lambda_{G,X}^{(X_L)} = \Lambda_{G^0,X}^{(X_L)}$ подрешеток в $\mathfrak{X}(Z(L)^\circ)$. Заметим, что элемент из группы ZT_0 заведомо удовлетворяет условию (a). Отсюда следует $\Lambda_{G,X}^{(X_L)}$ и $\Lambda_{G^0,X}^{(X_L)}$, рассматриваемые как решетки в $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)}, \mathfrak{a}_{G^0,X}^{(X_L)}$, соответственно, содержатся в ортогональном дополнении к $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}_0$ в $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$. Это ортогональное дополнение совпадает с $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} \cap \mathfrak{g}^0$. Поскольку $\Lambda_{G,X}^{(X_L)}, \Lambda_{G^0,X}^{(X_L)}$ совпадали как подгруппы в $\mathfrak{X}(Z(L)^\circ)$, то они будут совпадать и как решетки в $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} \cap \mathfrak{g}^0$.

Перейдем к доказательству утверждения пункта 5. Из определений соответствующих отображений моментов, имеем $\mu_{L^0,X_L} = p \circ \mu_{L,X_L}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{a}_{G^0,X}^{(X_L)} = p(\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)})$. Равенство для решеток весов следует из их определения и того, что $T_0 \cap G^0$ является ядром неэффективности для действия $Z(L^0)^\circ : X_L$. Эквивариантность отображения $p : \mathfrak{a}_{G,X}^{(X_L)} \to \mathfrak{a}_{G^0,X}^{(X_L)}$ следует из пункта 1. Наконец, оба отображения из X в $\mathfrak{a}_{G,X}^{(\cdot)}/W_{G,X}^{(\cdot)}$ в коммутативной диаграмме G-инвариантны и совпадают на X_L с $\psi_{N_{G^0}(L^0,X_L),X_L}$. $\square$

Замечание 3.8.6. Ограничение $0 \in \overline{\operatorname{im}\psi_{G,X}}$ в предыдущей лемме не является существенным. Оно было введено для упрощения формулировки.

Теперь предположим, что группа G связна, а X – гамильтоново G-многообразие, удовлетворяющее эквивалентным условиям леммы 3.4.5. Пусть T – максимальный тор в группе G, и X_T – T-сечение многообразия X. Таким образом, $\mathfrak{a}_{G,X}^{(X_T)} = \mathfrak{t}$ и $W_{G,X}^{(X_T)}$ является подгруппой в $W(\mathfrak{g})$.

Пусть $G_1, \ldots, G_k$ – все нормальные простые подгруппы группы G, так что $G = Z(G)^\circ G_1 \ldots G_k$. Возникает вопрос: как связана группа Вейля $W_{G,X}^{(X_T)}$ с группами Вейля $W_{G_i,X}^{(T_i)}$, где сечения X_{T_i} построены в пункте 4 леммы 3.4.7.

Лемма 3.8.7. *Пусть $G_1, \ldots, G_k$ – все простые нормальные подгруппы в связной редуктивной группе G и X – гамильтоново G-многообразие, удовлетворяет эквивалентным условиям леммы 3.4.5. Пусть $T_i = G_i \cap T$.*

(1) *Имеет место включение $W_{G,X}^{(X_T)} \subset \prod_{i=1}^k W_{G_i,X}^{(X_{T_i})}$ (подгрупп в $W(\mathfrak{g})$), причем образ группы $W_{G,X}^{(X_T)}$ в $\mathrm{GL}(\mathfrak{t}_i)$ совпадает с $W_{G_i,X}^{(X_{T_i})}$.*

(2) *Предположим, что линейная группа $W_{G,X}^{(X_L)} \in \mathrm{GL}(\mathfrak{t})$ порождена отражениями. Тогда $W_{G,X}^{(X_T)} \subset \prod_{i=1}^k W_{G_i,X}^{(X_{T_i})}$.*

Доказательство. При доказательстве можем считать, что $G = Z(G)^\circ \times \prod G_i$. Обозначим через $G^{(i)}$ произведение подгрупп $Z(G)^\circ$ и $G_j, j \neq i$.

Проверим сначала, что $N_G(T, X_T) \subset Z(G)^\circ \times \prod_{i=1}^k N_{G_i}(T_i, X_{T_i})$. Выберем элемент $n \in N_G(T, X_T)$. Мы должны показать, что проекция n_i элемента n на G_i лежит в $N_{G_i}(T_i, X_{T_i})$. Поскольку $X_T \subset X_{T_i}$, мы видим, что $nX_{T_i} \cap X_{T_i} \neq \varnothing$. Принимая во внимание то, что X_{T_i} является $G^{(i)}$-подмногообразием в X, мы получаем, что $n_i X_{T_i} \cap X_{T_i} \neq \varnothing$. Но многообразие $\mu_{G_i,X}^{-1}(\mathfrak{t}_i^{pr})$ гладко и $n_i X_{T_i}, X_{T_i}$ – неприводимые компоненты этого многообразия. Поэтому $n_i \in N_{G_i}(T_i, X_{T_i})$.

Покажем, что проекция $N_G(T, X_T) \to N_{G_i}(T_i, X_{T_i})$ сюръективна, или, эквивалентно, что для любого элемента $g \in N_{G_i}(T_i, X_{T_i})$ существует такой элемент $h \in G^{(i)}$, для которого $gh \in N_G(T, X_T)$. Напомним, что подмножество $G^{(i)}X_T$ плотно в X_{T_i}. Поэтому для $y_1 \in X_T, h_1 \in G^{(i)}$ общего положения существуют элементы $y_2 \in X_T, h_2 \in G^{(i)}$, для которых $gh_1y_1 = h_2y_2$, или, иными словами, $ghy_1 = y_2$, где $h = h_2^{-1}h_1$ ($gh_2 = h_2g$, поскольку $g \in G_i, h_2 \in G^{(i)}$). Так как $\mu_{G,X}(y_1), \mu_{G,X}(y_2) \in \mathfrak{t}^{pr}$, то $gh \in N_G(\mathfrak{t})$. Поэтому X_T, ghX_T – это две компоненты многообразия $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{t}^{pr})$, имеющие непустое пересечение. Отсюда следует, что $ghX_T = X_T$. Это завершает доказательство утверждения пункта 1.

Перейдем к утверждению пункта 2. Пусть $s \in W_{G,X}^{(X_L)}$ является отражением. Поскольку подпространство $\mathfrak{t}_i \subset \mathfrak{t}, i = \overline{1,k}$, устойчиво относительно s, существует индекс $j \in \{1, \ldots, k\}$, для которого s действует тривиально на $\mathfrak{t}_i, i \neq j$. Поэтому мы можем выбрать элемент $g \in G_j \cap N_G(T, X_T)$, для которого g отображается в s при каноническом эпиморфизме $N_G(T, X_T) \twoheadrightarrow W_{G,X}^{(X_T)}$. Иными словами, $s \in W_{G_j,X}^{X_{T_j}}$. Поскольку группа $W_{G,X}^{(X_T)}$ порождена отражениями, то $W_{G,X}^{(X_T)} = \prod_{i=1}^k \Gamma_i$, где Γ_i – некоторая подгруппа в $W_{G_i,X}^{(X_{T_i})}$. Поскольку проекция $W_{G,X}^{(X_T)} \to W_{G_i,X}^{(X_{T_i})}$ сюръективна, $\Gamma_i = W_{G_i,X}^{(T_i)}$. □

3.9. **Правильные гамильтоновы многообразия.** Мы используем обозначения пункта 3.6. Кроме того, в этом пункте группа G предполагается связной.

Определение 3.9.1. Гамильтоново G-многообразие X называется *правильным*, если X неприводимо и выполняются следующие три условия:

(a) Группа $W_{G,X}^{(\cdot)}$ порождена отражениями (эквивалентно многообразие $\mathfrak{a}_{G,X}^{(\cdot)}/W_{G,X}^{(\cdot)}$ является аффинным пространством).

(b) Морфизм $\widehat{\psi}_{G,X} : X \to \mathfrak{a}_{G,X}^{(\cdot)}/W_{G,X}^{(\cdot)}$ является гладким в коразмерности 1.

(c) Морфизм $\widehat{\psi}_{G,X}$ равноразмерен.

Напомним, что морфизм $\varphi : X \to Y$ неприводимых многообразий называется *гладким в коразмерности 1*, если существует такое открытое подмножество $X^0 \subset X$, что $\operatorname{codim}_X X \setminus X^0 > 1$, и морфизм $\varphi|_{X^0}$ – гладкий. Если многообразия X, Y гладкие, то морфизм φ гладкий в коразмерности 1, если и только если $\operatorname{codim}_X X \setminus X^0 \geqslant 2$, где $X^0 = \{x \in X | d_x\varphi(T_xX) = T_{\varphi(x)}Y\}$. Аналогичное определение может быть дано и для морфизмов комплексно-аналитических многообразий.

Оказывается, что условие (c) всегда выполняется для аффинных многообразий. Мы докажем это в пункте 4.4 при условии, что многообразие X удовлетворяет эквивалентным условиям леммы 3.4.5. Кроме того, имеет место следующее

Предложение 3.9.2. *Пусть группа G связна, а X_0 – гладкое аффинное G-многообразие. Тогда T^*X_0 является правильным аффинным многообразием.*

Доказательство. Свойства (a),(c) были доказаны в [Kn1], Abschnitt 6, а (b) в [Kn7], Corollary 7.6. □

Кроме того, ожидается, что многие из модельных многообразий являются правильными.

Гипотеза 3.9.3. Пусть G – связная алгебраически односвязная редуктивная группа (т.е. прямое произведение тора и односвязной полупростой группы), H – связная подгруппа в G, η – нильпотентный элемент в $\mathfrak{g}^H$, V – симплектический H-модуль. Тогда $M_G(H, \eta, V)$ – правильное гамильтоново G-многообразие.

С другой стороны, существуют примеры модельных многообразий, которые не являются правильными. Пример модельного многообразия, не удовлетворяющего условию (a) определения 3.9.1, был приведен в [Lo1], Subsection 5.11. Можно также построить пример модельного многообразия, которое удовлетворяет условию (a), а (b) нет. Этот пример строится аналогично упомянутому выше, только надо взять одну копию группы SL_2 вместо двух. Детали оставляются читателю.

Обсудим теперь некоторые свойства правильных многообразий.

Лемма 3.9.4. *Пусть X – правильное гамильтоново G-многообразие. Тогда X является правильным гамильтоновым G^0-многообразием для любой связной подгруппы $G^0 \subset G$, содержащей (G,G).*

Доказательство. То, что группа $W^{(\cdot)}_{G^0,X}$ порождена отражениями следует из пунктов 1 и 3 леммы 3.8.5. Согласно коммутативной диаграмме из пункта 5 той же леммы, морфизм $\widehat{\psi}_{G^0,X}$ является композицией морфизма $\widehat{\psi}_{G,X}$ и некоторого гладкого морфизма. Это доказывает гладкость морфизма $\widehat{\psi}_{G^0,X}$ в коразмерности 1 и его равноразмерность. $\square$

Лемма 3.9.5. *Пусть $x \in X$, $M = Z_G(\mu_{G,X}(x)_s)$, X_M – единственное M-сечение многообразия X, содержащее точку x. Пусть L – главный централизатор, а X_L – L-сечение многообразия X_M. Предположим, что точка $\xi \in \mathfrak{a}^{(X_L)}_{G,X}$ такова, что $\widehat{\psi}_{G,X}(x) = \pi_{W^{(X_L)}_{G,X},\mathfrak{a}^{(X_L)}_{G,X}}(\xi)$. Тогда*

1. *Подгруппы $W^{(X_L)}_{M,X_M}$ и $(W^{(X_L)}_{G,X})_\xi$ сопряжены в $W^{(X_L)}_{G,X}$.*
2. *X_M является правильным гамильтоновым M-многообразием.*

Доказательство. Обозначим через φ морфизм $G *_M X_M \to X$, заданный равенством $\varphi([g,z]) = gz$, через ψ единственный G-инвариантный морфизм $G*_M X_M \to \mathfrak{a}^{(\cdot)}_{M,X_M}/W^{(\cdot)}_{M,X_M}$, совпадающий с $\widehat{\psi}_{M,X_M}$ на X_M, и через τ морфизм факторов $\mathfrak{a}^{(\cdot)}_{M,X_M}/W^{(\cdot)}_{M,X_M} \to \mathfrak{a}^{(\cdot)}_{G,X}/W^{(\cdot)}_{G,X}$ (см. лемму 3.8.3). Из коммутативности диаграммы из пункта (4) леммы 3.8.3 следует, что следующая диаграмма также коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} G *_M X_M & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{\psi}_{G,X}} \\ \mathfrak{a}^{(\cdot)}_{M,X_M}/W^{(\cdot)}_{M,X_M} & \xrightarrow{\tau} & \mathfrak{a}^{(\cdot)}_{G,X}/W^{(\cdot)}_{G,X} \end{array}$$

Из этой диаграммы сразу следует, что морфизм ψ, а значит и морфизм $\widehat{\psi}_{M,X_M}$, равноразмерен. Поскольку морфизм φ эталeн, то морфизм $\tau \circ \psi = \widehat{\psi}_{G,X} \circ \varphi$ гладкий в коразмерности 1. Отсюда следует, что морфизм $\tau|_{\mathrm{im}\,\psi}$ является гладким в коразмерности 1. Proposition 3.33 из [Lo1] показывает, что морфизм $\tau|_{\mathrm{im}\,\psi}$ является этальным. Этальность морфизма τ в точке $\widehat{\psi}_{M,X_M}(x)$ эквивалентна утверждению пункта 1 (см., например, [Lu2]). Из пункта 1 следует выполнение условия (a) для гамильтонова M-многообразия X_M. Поскольку $\mathrm{im}\,\psi$ – гладкое многообразие, а морфизмы $\tau|_{\mathrm{im}\,\psi}, \varphi$ этален, то для $g \in G, z \in X_M$ следующие условия эквивалентны

1. морфизм $\widehat{\psi}_{G,X}$ гладкий в точке gz,
2. морфизм $\tau \circ \psi = \widehat{\psi}_{G,X} \circ \varphi$ является гладким в точке $[g,z]$,
3. морфизм ψ является гладким в точке $[g,z]$,
4. морфизм ψ_{M,X_M} является гладким в точке z.

Отсюда следует, что морфизм $\widehat{\psi}_{M,X_M}$ является гладким в коразмерности 1. Значит, X_M является правильным M-многообразием. $\square$

4. Аффинные гамильтоновы G-многообразия

В этом разделе G – связная редуктивная алгебраическая группа, а X – аффинное гамильтоново G-многообразие.

4.1. **Введение.** Цель этого раздела – разработать структурную теорию аффинных гамильтоновых многообразий. Эта теория будет применена в разделах 7,8.

В пункте 4.2 мы приведем утверждение, лежащее в основе всех результатов данного раздела, а именно теорему о симплектическом слайсе, доказанную в [Л2]. Эта теорема утверждает, грубо говоря, что любое аффинное гамильтоново многообразие локально устроено как модельное. В пункте 4.3 рассматривается стратификация слоя морфизма $\psi_{G,X}//G : X//G \to \mathfrak{g}//G$. Страт состоит из образов всех точек с замкнутыми G-орбитами и фиксированной *определяющей тройкой* (см. пункт 4.2). Основной результат этого пункта состоит в доказательстве гладкости всех стратов и вычислении их размерностей (предложение 4.3.2).

В последующих трех пунктах мы предполагаем, что многообразие X удовлетворяет эквивалентным условиям леммы 3.4.5.

Основные результаты раздела содержатся в пунктах 4.4, 4.5. Пункт 4.4 посвящен доказательству следующего результата:

Теорема 4.1.1. *Пусть X удовлетворяет эквивалентным условиям леммы 3.4.5. Тогда морфизм $\psi_{G,X}$ (или, эквивалентно, $\widetilde{\psi}_{G,X}$,$\widehat{\psi}_{G,X}$) является равноразмерным, морфизм $\widehat{\psi}_{G,X}$ открытым, и для любого замкнутого неприводимого подмногообразия $Y \subset \operatorname{im}\widehat{\psi}_{G,X}$ и любой неприводимой компоненты $\widetilde{Y} \subset \widehat{\psi}_{G,X}^{-1}(Y)$ подмногообразие $\pi_{G,X}(\widetilde{Y}) \subset X//G$ является неприводимой компонентой в $\widehat{\psi}_{G,X}//G^{-1}(Y)$.*

Доказательство теоремы использует стратификацию, введенную в пункте 4.3, и оценку на размерность слоев морфизма $\pi_{G,X}$, полученную в предложении 4.4.1.

Пункт 4.5 посвящен двум важным техническим результатам, предложениям 4.5.1, 4.5.3. Эти предложения играют очень важную роль в вычислении групп Вейля в разделе 5 и решеток корней в разделе 8 (см. в особенности пункты 7.2 и 8.3).

Наконец, в пункте 4.6 вычисление корневых решеток редуцируется к случаю, когда группа G проста.

В заключении сделаем замечание по поводу ограничения на многообразие X. Оно введено лишь для сокращения объема и упрощения изложения. Объясним какие модификации должны быть сделаны в общем случае. Доказательство теоремы 4.1.1 проходит по модулю предложения 4.4.1. Доказательство же аналога предложения 4.4.1 в общем случае требует привлечения некоторой новой техники. В предложениях 4.5.1, 4.5.3 требуется некоторая модификация формулировок.

4.2. **Симплектические слайсы.** Пусть X – аффинное гамильтоново G-многообразие и x – точка из X с замкнутой орбитой Gx. Естественно поставить следующий вопрос: как описать структуру многообразия X в некоторой инвариантной окрестности (в топологии Зарисского, этальной или комплексной топологии) точки x. Этот пункт дает ответ на этот вопрос для окрестности в комплексной топологии (в дальнейшем мы называем такие окрестности *аналитическими*).

Для начала, мы определим некоторые инварианты тройки (G, X, x). Положим $H = G_x, \eta = \mu_{G,X}(x)$. Подгруппа $H \subset G$ редуктивна, а $\eta \in \mathfrak{g}^H$. Положим $V = (\mathfrak{g}_* x)^{\angle}/(\mathfrak{g}_* x \cap$

$\mathfrak{g}_* x^\angle$). Это симплектический H-модуль. Мы называем (H, η, V) *определяющей тройкой* многообразия X в точке x. К примеру, определяющей тройкой многообразия $X = M_G(H, \eta, V)$ (пример 3.2.6) в точке $x = [1, (0, 0)]$ является (H, e, V), см. [Л2], пункт 4 предложения 1.

Как показывает название, определяющая тройка должна определять структуру гамильтонова G-многообразия на X вблизи точки x. На самом деле, имеет место немного более сильное утверждение. Напомним, что подмножество в X называется *насыщенным*, если оно является объединением слоев морфизма факторизации $\pi_{G,X}$.

Определение 4.2.1. Пусть X_1, X_2 – аффинные гамильтоновы G-многообразия, $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ точки с замкнутыми G-орбитами. Пары $(X_1, x_1), (X_2, x_2)$ называются *аналитически эквивалентными*, если найдутся насыщенные открытые аналитические окрестности O_1, O_2 точек $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$, соответственно, которые изоморфны как комплексно-аналитические гамильтоновы G-многообразия.

Замечание 4.2.2. Открытая насыщенная аналитическая окрестность в X является прообразом при морфизме $\pi_{G,X}$ *открытой* аналитической окрестности в $X//G$. Это доказано, например, в работе [Л2], лемма 5.

Предложение 4.2.3 (теорема о симплектическом слайсе, [Л2])**.** *Пусть X – аффинное гамильтоново G-многообразие, и $x \in X$ – точка с замкнутой G-орбитой. Пусть (H, η, V) – определяющая тройка многообразия X в точке x. Тогда пара (X, x) аналитически эквивалентна паре $(M_G(H, \eta, V), [1, (0, 0)])$.*

Теперь мы докажем две леммы, которые будут использованы в пункте 4.6.

У нас есть две техники для локального исследования аффинных гамильтоновых многообразий: локальные сечения (пункт 3.4) и симплектические слайсы. Сейчас мы установим связь между ними.

Лемма 4.2.4. *Пусть $x \in X$ – точка с замкнутой G-орбитой, и (H, η, V) – определяющая тройка многообразия X в точке x. Положим $M = Z_G(\eta_s)$. Обозначим через X_M единственное M-сечение многообразия X, содержащее x. Тогда выполняются следующие утверждения*

1. *Орбита Mx замкнута в X_M, а (H, η, V) является определяющей тройкой гамильтонова M-многообразия X_M в точке x.*
2. *Существует аффинная насыщенная открытая (в топологии Зарисского) окрестность $X_M^0 \subset X_M$ точки x, для которой морфизм $X_M^0//M \to X//G, \pi_{M,X_M}(z) \mapsto \pi_{G,X}(z)$ этален, и для всех $z \in X_M^0$ орбита Mz замкнута в X_M^0 (или, что эквивалентно, в X_M) тогда и только тогда, когда орбита Gz замкнута в X.*

Доказательство. Естественный морфизм $\varphi : G *_M X_M \to X, [g, x] \mapsto gx$ этален (пункт 3 предложения 3.4.1). Поскольку орбита Gx замкнута в X, то орбита $G[1, x]$ замкнута в $G *_M X_M$. Эквивалентно, орбита Mx замкнута в X_M. Докажем, что для $x \in X_M$ стабилизаторы G_x, M_x совпадают. Достаточно показать, что $G_x \subset M$. Это следует из включений $G_x \subset Z_G(\mu_{G,X}(x)) \subset Z_G(\mu_{G,X}(x)_s) = M$. По построению морфизма μ_{M,X_M} (пункт 3.4), $\mu_{M,X_M}(x) = \mu_{G,X}(x)$. Для доказательства пункта 1 остается проверить, что M_x-модули $\mathfrak{g}_* x^\angle/(\mathfrak{g}_* x^\angle \cap \mathfrak{g}_* x)$ и $\mathfrak{m}_* x^\angle/(\mathfrak{m}_* x^\angle \cap \mathfrak{m}_* x)$ изоморфны (кососоортогональное дополнение к $\mathfrak{g}_* x$ (соотв., к $\mathfrak{m}_* x$) берется в $T_x X$ (соотв., в $T_x X_M$)). Это следует из равенства $\mathfrak{g}_* x = \mathfrak{m}_*^\perp x \oplus \mathfrak{m}_* x$ и пункта 1 предложения 3.4.1.

По доказанному выше, орбиты $G[1, x], Gx$ замкнуты, а морфизм φ индуцирует их изоморфизм. Из основной леммы Д.Луны (см., например, [ВП], Лемма 6.2) следует что для некоторой аффинной окрестности U точки $\pi_{M,X_M}(x)=\pi_{G,G*_MX_M}([1,x])$ в $X_M//M\cong (G*_M X_M)//G$ морфизм $\varphi//G: U\to X//G$ этален и

$$\pi^{-1}_{G,G*_MX_M}(U)\cong U\times_{X//G} X. \tag{4.1}$$

Очевидно, что $\pi^{-1}_{G,G*_MX_M}(U)\cong G*_M\pi^{-1}_{M,X_M}(U)$. Принимая во внимание (4.1), мы видим, что замкнутость орбит $G[1,z]\subset G*_M\pi^{-1}_{M,X_M}(U)$ и $Gz\subset X$ эквивалентна для всех $z\in\pi^{-1}_{M,X_M}(U)$. Остается положить $X_M^0=\pi^{-1}_{M,X_M}(U)$. □

Теперь посмотрим, что происходит с определяющими тройками при переходе от группы G к её коммутанту.

Лемма 4.2.5. *Пусть $x\in X$ точка с замкнутой G-орбитой, и (H,η,V) – определяющая тройка гамильтонова G-многообразия X в точке x. Тогда орбита $(G,G)x$ замкнута в X и определяющей тройкой гамильтонова (G,G)-многообразия X в точке x является $(H\cap(G,G),\eta_0,V\oplus V_0)$, где V_0 – некоторый тривиальный $H\cap(G,G)$-модуль, а η_0 – проекция η на $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.*

Доказательство. Все (G,G)-орбиты в Gx имеют одинаковую размерность, поскольку подгруппа (G,G) нормальна в G, а потому замкнуты. Очевидным образом, $(G,G)_x=(G,G)\cap H, \mu_{(G,G),X}(x)=\eta_0$. Понятно, что $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_*x\subset\mathfrak{g}_*x$, и $\mathfrak{g}_*x^\angle\subset\mathfrak{g}_*x^\angle$. Отсюда имеем вложение $\mathfrak{g}_*x^\angle/(\mathfrak{g}_*x^\angle\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_*x)\hookrightarrow[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_*x^\angle/([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_*x^\angle\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_*x)$ и проекцию $\mathfrak{g}_*x^\angle/(\mathfrak{g}_*x^\angle\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_*x)\twoheadrightarrow\mathfrak{g}_*x^\angle/(\mathfrak{g}_*x^\angle\cap\mathfrak{g}_*x)$. Коядро первого является фактором тривиального $H\cap(G,G)$-модуля $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_*x^\angle/\mathfrak{g}_*x^\angle\cong(\mathfrak{g}_*x/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_*x)^*$, а ядро второй – подмодулем в $\mathfrak{g}_*x/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_*x$. Отсюда следует утверждение про модули в определяюших тройках. □

4.3. **Стратификация слоя морфизма $\psi_{G,X}//G$.** Этот пункт посвящен введению некоторой естественной стратификации слоя морфизма $\psi_{G,X}//G: X//G\to\mathfrak{g}//G$ (слой мы рассматриваем как алгебраическое многообразие).

Именно, пусть $\lambda\in\mathfrak{g}//G$, $\eta\in\pi^{-1}_{G,\mathfrak{g}}(\lambda)$, H – редуктивная подгруппа в G_η, а V – симплектический H-модуль. Мы обозначим через $S_{G,X}(H,\eta,V)$ подмножество в $X//G$, состоящее из всех точек $\pi_{G,X}(x)$, для которых орбита Gx замкнута, и (H,η,V)– определяющая тройка многообразия X в x. Понятно, что $S_{G,X}(H_1,\eta_1,V_1)=S_{G,X}(H_2,\eta_2,V_2)$, если и только если тройки (H_1,η_1,V_1), (H_2,η_2,V_2) сопряжены в G. Последнее означает что существует элемент $g\in G$ и изоморфизм $\iota: V_1\to V_2$, для которых $\mathrm{Ad}(g)\eta_1=\eta_2$, $gH_1g^{-1}=H_2$, и если ρ_i – представление H_i в V_i, то $\rho_2(ghg^{-1})\iota=\iota\rho_1(h)$ для всех $h\in H_1$.

Лемма 4.3.1. *Все компоненты многообразия $\psi_{G,X}//G^{-1}(\lambda)$ имеют размерность $\dim X//G-\operatorname{def}_G(X)$. В частности, для любого замкнутого подмногообразия $Y\subset\overline{\operatorname{im}\psi_{G,X}}$ и любой компоненты Z многообразия $\psi_{G,X}//G^{-1}(Y)$ подмножество $\psi_{G,X}//G(Z)$ плотно в Y.*

Доказательство. Стандартный результат из алгебраической геометрии гласит, что размерность любой компоненты не меньше, чем $\dim X//G-\dim\overline{\operatorname{im}\psi_{G,X}//G}=\dim X//G-\operatorname{def}_G(X)$. Обратное неравенство следует из [Lo1], Theorem 1.3. Последнее утверждение является легким следствием из равноразмерности. □

Вот основной результат этого пункта:

Предложение 4.3.2. *Пусть λ,H,η,V – такие как выше. Подмножество $S_{G,X}(H,\eta,V)\subset\psi_{G,X}//G^{-1}(\lambda)$ является локально замкнутым гладким подмногообразием чистой коразмерности $\operatorname{cork}_G(X)-\dim V^H$.*

Доказательство. Покажем сначала, что $S_{G,X}(H,\eta,V)$ является локально замкнутым подмногообразием в $X/\!/G$. Обозначим через Y множество всех точек $x\in X$ с замкнутой G-орбитой, $G_x=H$ и $T_xX/\mathfrak{g}_*x\cong V\oplus(\mathfrak{g}_\eta/\mathfrak{h})^*$. Применив теорему Луны о слайсах к любой точке из Y, мы видим, что Y является локально замкнутым подмногообразием в X. Поэтому $Y_\eta:=Y\cap\mu_{G,X}^{-1}(\mathrm{Ad}(G)\eta)$ является локально замкнутым подмногообразием в X. Поскольку все орбиты из Y_η замкнуты в X, Y_η является насыщенным открытым подмногообразием в $\overline{Y_\eta}$. Значит, $S_{G,X}(H,\eta,V)=\pi_{G,X}(Y_\eta)$ – открытое подмногообразие в $\overline{Y_\eta}/\!/G$.

Перейдем к утверждениям о гладкости и размерности.

Применив предложение 4.2.3 к любой точке $x\in Y_\eta$, мы сводим доказательство к случаю $X=M_G(H,\eta,V)$. Пусть $\mathfrak{m}=\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta_s)$, а (η_n,h,f) – $\mathfrak{sl}_2$-тройка, порождающая модельное многообразие $M_G(H,\eta,V)$ (см. замечание 3.2.7).

Лемма 4.3.3. *Во введенных обозначениях, η является изолированной точкой в $(\eta+\mathfrak{z}_\mathfrak{m}(f))\cap\overline{\mathrm{Ad}(G)\eta}$.*

Доказательство леммы 4.3.3. Заметим, что $T_\eta(\eta+\mathfrak{z}_\mathfrak{m}(f))=\mathfrak{z}_\mathfrak{m}(f), T_\eta\overline{\mathrm{Ad}(G)\eta}=[\mathfrak{g},\eta]$. Достаточно показать, что $\mathfrak{z}_\mathfrak{m}(f)\cap[\mathfrak{g},\eta]=\{0\}$. Из равенства $\mathfrak{m}=\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta_s)$ следует, что $[\mathfrak{g},\eta]=[\mathfrak{m}^\perp,\eta]+[\mathfrak{m},\eta]=\mathfrak{m}^\perp\oplus[\mathfrak{m},\eta_n]$. Из теории представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2$ выводится, что $[\mathfrak{m},\eta_n]\cap\mathfrak{z}_\mathfrak{m}(f)=0$, откуда следует желаемое равенство. $\square$

Согласно замечанию 3.2.11, достаточно рассмотреть случай $V^H=\{0\}$. В этом случае достаточно показать, что для $x=[1,(0,0)]$ точка $\pi_{G,X}(x)$ изолирована в $S_{G,X}(H,\eta,V)$. В самом деле, $\mathrm{cork}_G(X)=\dim X/\!/G-\mathrm{def}_G(X)=\dim_{\pi_{G,X}(x)}\psi_{G,X}/\!/G^{-1}(\lambda)$ (см. лемму 4.3.1).

Существует такая окрестность O' точки η в $\eta+\mathfrak{z}_\mathfrak{m}(f)$, что $O'\cap\overline{\mathrm{Ad}(G)\eta}=\eta$ (лемма 4.3.3). Заменяя O' на HO', если необходимо, можем предположить, что окрестность O' H-инвариантна. Положим $O=\{[g,(u,v)]\in M_G(H,\eta,V)|\eta+u+\mu_{H,V}(v)\in O'\}$. По определению, O является G-инвариантной открытой окрестностью точки x в многообразии X, а значит $\pi_{G,X}(O)$ содержит открытую окрестностью точки $\pi_{G,X}(x)$ в $X/\!/G$. Достаточно доказать, что для любая точка $x_1\in O$, орбита которой замкнута в X, а определяющая тройка многообразия X в x_1 совпадает с (H,η,V), имеет вид $[g,(0,0)]$. Предположим противное.

Пусть $x_1=[g,(u,v)]$, $u\in U:=\mathfrak{h}^\perp\cap\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(f), v\in V,(u,v)\neq 0$. По определению отображения моментов для модельных многообразий, $\mu_{G,X}(x_1)=\mathrm{Ad}(g)(\eta+u+\mu_{H,V}(v))$. Поскольку $\mu_{G,X}(x_1)=\eta$, из выбора окрестности O следует равенство $u+\mu_{H,V}(v)=0$. Так как $U\cap\mathfrak{h}=\{0\}$, то $u=0$. Подгруппа $H_v\subset H$ сопряжена с H в G. Поэтому $v\in V^H=\{0\}$. Противоречие. $\square$

4.4. **Доказательство теоремы 4.1.1.** Напомним, что в этом пункте многообразие X удовлетворяет эквивалентным условиям леммы 3.4.5. В частности, $\mathrm{cork}_G(X)=\dim X-\dim G-\mathrm{rk}\,G$.

Предложение 4.4.1. *Размерность любого слоя морфизма $\pi_{G,X}:X\to X/\!/G$ не превосходит* $\dim X-\mathrm{def}_G(X)-\frac{\mathrm{cork}_G(X)}{2}=\frac{\dim X-\dim G-\mathrm{rk}\,G}{2}$.

Доказательство. Пусть $y\in X/\!/G$, x – точка с единственной замкнутой G-орбиты в $\pi_{G,X}^{-1}(y)$, $H=G_x$, $\eta=\mu_{G,X}(x)$, $U=(\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta)/\mathfrak{h})^*, V=(\mathfrak{g}_*x)^\angle/(\mathfrak{g}_*x\cap(\mathfrak{g}_*x)^\angle)$. H-модуль $U\oplus V$ является слайс-модулем в точке x.

Воспользовавшись теоремой Луны о слайсе, видим, что достаточно доказать неравенство

$$\dim\pi_{H,U\oplus V}^{-1}(0)\leqslant\dim U+\dim V-\frac{\dim X-\dim G+\mathrm{rk}\,G}{2}\tag{4.2}$$

Лемма 4.4.2 ([Sch1], Proposition 2.10)**.** *Пусть G – редуктивная группа, V – G-модуль, изоморфный своему двойственному. Тогда*

$$\dim \pi_{G,V}^{-1}(\pi_{G,V}(0)) \leqslant \frac{1}{2}(\dim V - \dim V^T + \dim G - \dim T),$$

где T – максимальный тор в группе G.

Лемма 4.4.3. *Имеет место изоморфизм H-модулей $U \oplus V \cong (U \oplus V)^*$.*

Доказательство леммы 4.4.3. Заменяя $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta_s)$, если нужно, можем считать, что $\eta_s \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Доказательство теперь легко сводится к случаю, когда элемент η нильпотентен. H-модуль V – симплектический, в частности, $V \cong V^*$. Остается доказать, что $U \cong U^*$. Выберем $\mathfrak{sl}_2$-тройку $(\eta, h, f) \subset \mathfrak{g}^H$ и рассмотрим градуировку $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$, где $\mathfrak{g}_i = \{\xi \in \mathfrak{g} | [h,\xi] = i\xi\}$. Положим $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta)_i = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta) \cap \mathfrak{g}_i$. Хорошо известно, см., к примеру, [McG], что $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta) = \bigoplus_{i\geqslant 0} \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta)_i$ и что $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta)_0$ – редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Последнее показывает, что H-подмодуль $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta)_0/\mathfrak{h} \subset U$ ортогонален. Теперь достаточно доказать изоморфизм $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta)_i \cong \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta)_i^*$.

Пусть $\varphi : \mathrm{SL}_2 \to Z_G(H)$ – гомоморфизм, индуцированный вложением $\langle \eta, h, f\rangle \hookrightarrow \mathfrak{g}^H$. Для $x, y \in \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta)_i$ положим $(x,y)_w = (x, wy)$, где $w = \varphi(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$. Так как $w \in Z_G(H)$, то форма $(\cdot,\cdot)_w$ H-инвариантна. Из теории представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2$ вытекают равенства

$$\begin{aligned} &[\mathfrak{g}, \eta] \oplus \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{g}, \\ &w(e) = f, \\ &w(\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta)_i) = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{g}_{-i}. \end{aligned}$$

Поскольку $[\mathfrak{g}, \eta] = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta)^\perp$ и $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) = 0$ для $i + j \neq 0$, то форма $(\cdot,\cdot)$ спаривает пространства $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta)_i$ и $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{g}_{-i}$ невырождено. Эквивалентно, форма $(\cdot,\cdot)_w$ невырождена на $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta)_i$. □

Итак, мы видим, что H-модуль $U \oplus V$ удовлетворяет условиям леммы 4.4.2. Пусть T_0 – максимальный тор в H. Покажем, что $\dim U^{T_0} \geqslant \mathrm{rk}\,\mathfrak{g} - \mathrm{rk}\,\mathfrak{h}$. Поскольку $\dim \mathfrak{h}^{T_0} = \mathrm{rk}\,\mathfrak{h}$, достаточно проверить, что для любого элемента $\xi \in \mathfrak{g}^H$ выполняется неравенство $\dim \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\xi)^{T_0} \geqslant \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$. Последнее достаточно проверить для элементов $\xi \in \mathfrak{g}^H$ общего положения. Но такие элементы полупросты. Значит, $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\xi)$ – это подалгебра Леви в $\mathfrak{g}$, и $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\xi)^{T_0} \geqslant \mathrm{rk}\,\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\xi) = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$.

Согласно лемме 4.4.2, имеем следующие неравенства

$$\begin{aligned} \dim \pi_{H,V}^{-1}(0) &\leqslant \frac{1}{2}(\dim U + \dim V - \dim U^{T_0} - \dim V^{T_0} + \dim \mathfrak{h} - \mathrm{rk}\,\mathfrak{h}) \\ &\leqslant \frac{1}{2}(\dim U + \dim V - (\mathrm{rk}\,\mathfrak{g} - \mathrm{rk}\,\mathfrak{h}) + \dim \mathfrak{h} - \mathrm{rk}\,\mathfrak{h}). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Правые части неравенств (4.3) и (4.2) совпадают, поскольку $\dim X = \dim G - \dim H + \dim U + \dim V$. □

Доказательство теоремы 4.1.1. Отметим, что если морфизм $\widehat{\psi}_{G,X}$ равноразмерен, то он открыт, ибо является равноразмерным морфизмом в нормальное многообразие (см. [Ch]).

Для доказательства теоремы теперь достаточно проверить, что для всех $\lambda \in \mathfrak{g}/\!/G$ и всех неприводимых компонент Z многообразия $\psi_{G,X}^{-1}(\lambda)$ мы имеем $\dim Z \leqslant \dim X -$

$\operatorname{def}_G(X)$ (противоположенное неравенство выполняется автоматически, ибо $\operatorname{def}_G(X) = \dim \overline{\operatorname{im}\psi_{G,X}}$) и что $\dim \pi_{G,X}(Z) = \dim X//G - \operatorname{def}_G(X)$. Последнее повлечет равенство

$$\dim \pi_{G,X}(Z) = \dim X//G - \operatorname{def}_G(X) + \dim Y \tag{4.4}$$

для компоненты Z многообразия $\widehat{\psi}_{G,X}^{-1}(Y)$, где $Y \subset \operatorname{im}\widehat{\psi}_{G,X}$ – произвольное неприводимое замкнутое подмногообразие (напомним, что, по лемме 4.3.1, $\operatorname{im}\widehat{\psi}_{G,X} = \operatorname{im}\widehat{\psi}_{G,X}//G$ является открытым подмножеством в $\mathfrak{a}_{G,X}^{(\cdot)}/W_{G,X}^{(\cdot)}$). Ввиду леммы 4.3.1, равенство (4.4) эквивалентно тому, что $\pi_{G,X}(Z)$ является неприводимой компонентой в $\widehat{\psi}_{G,X}^{-1}//G(Y)$.

Выберем подмногообразие $S_{G,X}(H,\eta,V) \subset \psi_{G,X}//G^{-1}(\lambda)$ (см. пункт 4.3), для которого пересечение $\pi_{G,X}(Z) \cap S_{G,X}(H,\eta,V)$ плотно (и потому, в силу предложения 4.3.2, открыто) в $\pi_{G,X}(Z)$ и такую точку $x \in Z$, что её G-орбита замкнута в X, и $\pi_{G,X}(x) \in S_{G,X}(H,\eta,V)$. Применив предложение 4.2.3 к $x \in X$, мы можем заменить X на $M_G(H,\eta,V)$. Пользуясь замечанием 3.2.11, мы можем считать, что $V^H = 0$. Из предложения 4.3.2 следует теперь, что $\pi_{G,X}(Z)$ – точка. По предложению 4.4.1, $\dim Z \leqslant \dim X - \operatorname{def}_G(X) - \frac{1}{2}\operatorname{cork}_G(X)$. Отсюда следует, что $\operatorname{cork}_G(X) = 0, \dim \psi_{G,X}//G^{-1}(\lambda) = 0, \dim Z = \dim X - \operatorname{def}_G(X)$. Это завершает доказательство. □

Мы используем следующее следствие в пункте 4.5.

Следствие 4.4.4. *Для $\lambda \in \operatorname{im}\psi_{G,X}$ и неприводимой компоненты Z многообразия $\psi_{G,X}^{-1}(\lambda)$ существует такое открытое подмножество $Z_0 \subset Z//G$, что $\operatorname{codim}_{Z//G} Z//G \setminus Z_0 \geqslant 2$ и что для любой точки $z \in Z_0$ и любой точки x, лежащей в единственной замкнутой орбите в $\pi_{G,X}^{-1}(z)$, выполняется следующее условие:*

(*) *Многообразие $M_G(H,\eta,V/V^H)$ коизотропно, где (H,η,V) – определяющая тройка многообразия X в точке x.*

Доказательство. Условие (*) эквивалентно тому, что $\operatorname{cork}_G(X) = \operatorname{cork}_G(M_G(H,\eta,V)) = \dim V^H$. Из теоремы 4.1.1 следует, что Z отображается доминантно (и, значит, по свойствам морфизма факторизации, сюръективно) на некоторую неприводимую компоненту многообразия $\psi_{G,X}//G^{-1}(\lambda)$. Требуемое является теперь непосредственным следствием предложения 4.3.2. □

Следствие 4.4.5. *Пусть Y – замкнутое неприводимое подмногообразие в $\overline{\operatorname{im}\widehat{\psi}_{G,X}}$. Тогда для любой компоненты $\widetilde{Y}$ многообразия $\widehat{\psi}_{G,X}^{-1}(Y)$ имеет место равенство $\overline{\widehat{\psi}_{G,X}(\widetilde{Y})} = Y$.*

Доказательство. Согласно теореме 4.1.1, $\pi_{G,X}(\widetilde{Y})$ является неприводимой компонентой подмногообразия $\widehat{\psi}_{G,X}//G^{-1}(Y) \subset X//G$. Требуемое следует из леммы 4.3.1. □

Следствие 4.4.6. *Пусть многообразие X коническое и алгебраически односвязное. Тогда группа $W_{G,X}^{(\cdot)}$ порождается отражениями.*

Напомним, что неприводимое алгебраическое многообразие называется алгебраически односвязным, если любой конечный этальный морфизм в него из неприводимого многообразия является изоморфизмом.

Доказательство. Согласно [Lo1], Theorem 1.8, морфизм $\tau_{G,X}^2 : C_{G,X} \to \mathfrak{a}_{G,X}^{(\cdot)}/W_{G,X}^{(\cdot)}$ является изоморфизмом. По теореме 4.1.1, морфизм $\widetilde{\psi}_{G,X} : X \to C_{G,X}$ равноразмерен. Поскольку группа G связна, то подалгебра $\mathbb{C}[X]^G$ целозамкнута в $\mathbb{C}[X]$. Поэтому подалгебра $\mathbb{C}[C_{G,X}]$ также целозамкнута в $\mathbb{C}[X]$. Иными словами, общий слой морфизма

$\widetilde{\psi}_{G,X}$ связен. Подводя итог, мы видим, что $\widetilde{\psi}_{G,X}$ – равноразмерный морфизм со связным общим слоем и алгебраически односвязного многообразия X в $C_{G,X} \cong \mathfrak{a}_{G,X}/W_{G,X}$. Доказательство следствия теперь базируется на идее из [Па1] и полностью аналогично данному в [Kn10], Theorem 7.2. $\square$

4.5. **Основные технические предложения.** Основным средством для получения информации о группах Вейля и решетках корней аффинных гамильтоновых многообразий, которое мы используем, является сведение общих многообразий к многообразиям очень специального вида. Именно, мы переходим от гамильтонова G-многообразия X к коизотропному модельному гамильтонову (M,M)-многообразию, где M – подгруппа Леви в G. Следующие два предложения объединяют результаты, относящиеся к данной редукции. Предложение 4.5.1 устанавливает возможность требуемого перехода, а предложение 4.5.3 объясняет поведение групп Вейля, весовых и корневых решеток при этом переходе.

Предложение 4.5.1. *Пусть G – связная редуктивная группа, X – аффинное гамильтоново G-многообразие, удовлетворяющая условиям леммы 3.4.5, X_T – T-сечение многообразия X, M – подгруппа Леви в G, содержащая T. Положим $\widehat{G} = (M,M)$. Предположим, что $0 \in \operatorname{im}\psi_{G,X}$. Тогда существует точка $x \in X$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(a) $\widehat{\psi}_{G,X}(x) \in \pi_{W_{G,X}^{(X_T)},\mathfrak{t}}(\mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{m}^{pr})$.
(b) $\mu_{G,X}(x)_s \in \mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{m}^{pr}$.
(c) *Единственное M-сечение X_M многообразия X, содержащее точку x, содержит X_T.*
(d) *G-орбита точки x замкнута в X. В этом случае, автоматически, M- и $\widehat{G}$-орбиты точки x замкнуты в X_M.*
(e) *Пусть (H,η,V) – определяющая тройка многообразия X в точке x (или, что эквивалентно по лемме 4.2.4, многообразия X_M в точке x). Имеет место включение $H^\circ \subset \widehat{G}$, и гамильтоново $\widehat{G}$-многообразие $\widehat{X} := M_{\widehat{G}}(H\cap\widehat{G}, \eta_n, V/V^H)$ удовлетворяет эквивалентным условиям леммы 3.4.5.*
(f) *Гамильтоново $\widehat{G}$-многообразие $\widehat{X}$ коизотропно.*

Доказательство. Морфизм $\widehat{\psi}_{G,X}$ открыт. Его образ содержит 0 (поскольку $0 \in \operatorname{im}\psi_{G,X}$), и, значит, пересекает $\pi_{W_{G,X}^{(X_T)},\mathfrak{t}}(\mathfrak{z}(\mathfrak{m}))$ по открытому подмножеству. Таким образом, подмножество

$$\widehat{\psi}_{G,X}^{-1}(\pi_{W_{G,X}^{(X_T)},\mathfrak{t}}(\mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{m}^{pr})) \subset X \tag{4.5}$$

непусто. Поскольку подмножество (4.5) насыщено, то найдется точка z из этого подмножества с замкнутой G-орбитой.

Покажем, что заменив точку z на G-сопряженную, мы можем добиться того, чтобы точка z удовлетворяла условиям (a)-(c). Заменяя точку z на сопряженную, можем считать, что $\mu_{G,X}(z)_s \subset \mathfrak{t}$. Положим $M_1 = Z_G(\mu_{G,X}(z)_s)$. По выбору точки z, $\pi_{G,\mathfrak{g}}(\mu_{G,X}(z)_s) \in \pi_{G,\mathfrak{g}}(\mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{m}^{pr})$, откуда $M_1 \sim_G M$.

Пусть X_{M_1} – M_1-сечение многообразия X, содержащее точку z, X_T' – T-сечение многообразия X_{M_1}. Выберем элемент $n \in N_G(T)$, для которого $nX_T' = X_T$. Заменив точку z на nz, добьемся того, чтобы $X_T \subset X_{M_1}$. Таким образом, для точки z выполнены условия (a),(c). Сопряжение точки z на элемент из $N_G(T,X_T)$ не нарушит выполнения этих условий. Мы покажем сейчас, что найдется элемент $n \in N_G(T,X_T)$, для которого

$M_1 = nMn^{-1}$. После этого для обеспечения условия (b) останется лишь заменить z на $n^{-1}z$.

Согласно лемме 3.8.3, имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} X_{M_1} \arrow[r, "\widehat{\psi}_{M_1,X_{M_1}}"] \arrow[d] & \mathfrak{a}^{(\cdot)}_{M_1,X_{M_1}}/W^{(\cdot)}_{M_1,X_{M_1}} \arrow[r, "\tau^1_{M_1,X_{M_1}}"] \arrow[d] & \mathfrak{m}_1/\!/M_1 \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\widehat{\psi}_{G,X}"] & \mathfrak{a}^{(\cdot)}_{G,X}/W^{(\cdot)}_{G,X} \arrow[r, "\tau^1_{G,X}"] & \mathfrak{g}/\!/G \end{tikzcd}$$

Пусть ξ – такой элемент в $\mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{m}^{pr}$, для которого $\widehat{\psi}_{G,X}(z) = \pi_{W^{(X_T)}_{G,X},\mathfrak{t}}(\xi)$. Найдется элемент $n \in N_G(T, X_T)$, для которого

$$\widehat{\psi}_{M_1,X_{M_1}}(z) = \pi_{W^{(X_T)}_{M_1,X_{M_1}},\mathfrak{t}}(n\xi). \tag{4.6}$$

Отметим, что $\psi_{M_1,X_{M_1}}(z) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{m}_1) \hookrightarrow \mathfrak{m}_1/\!/M_1$. Из (4.6) следует, что $\pi_{M_1,\mathfrak{m}_1}(n\xi) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{m}_1) \hookrightarrow \mathfrak{m}_1/\!/M_1$, откуда $n\xi \in \mathfrak{z}(\mathfrak{m}_1)$. С другой стороны, $n\xi \in \mathfrak{z}(\mathrm{Ad}(n)\mathfrak{m}) \cap (\mathrm{Ad}(n)\mathfrak{m})^{pr}$, откуда $\mathfrak{m}_1 \subset \mathrm{Ad}(n)\mathfrak{m}$. Выше мы видели, что подгруппы $M_1, M \subset G$ сопряжены, откуда $M_1 = nMn^{-1}$. Точка $n^{-1}z$ удовлетворяет условиям (a)-(c), а её G-орбита замкнута.

Итак, пусть z – точка с замкнутой G-орбитой, удовлетворяющая условиям (a)-(c), и X_M – единственное M-сечение, содержащее z. Согласно лемме 4.2.4, найдется насыщенное открытое аффинное подмножество $X^0_M \subset X_M$, содержащее точку z, для которого следующие условия эквивалентны:

(i) G-орбита точки $x \in X^0_M$ замкнута в X.
(ii) M-орбита точки $x \in X^0_M$ замкнута в X_M.

Далее, по лемме 4.2.5, $\widehat{G}$-орбита точки $x \in X^0_M$ замкнута, коль скоро такова M-орбита этой точки. Таким образом, любая точка $x \in \widehat{\psi}^{-1}_{M,X_M}(\mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{m}^{pr}) \cap X^0_M$ с замкнутой M-орбитой удовлетворяет условиям (a)-(d). Следующая лемма используется для доказательства существования точки, удовлетворяющей дополнительно условиям (e),(f).

Лемма 4.5.2. *Пусть X – аффинное гамильтоново G-многообразие, удовлетворяющее эквивалентным условиям леммы 3.4.5, для которого $\operatorname{im}\psi_{G,X} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \varnothing$. Пусть Y – неприводимая компонента в $\psi_{G,X}/\!/G^{-1}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$. Тогда для точки y общего положения в Y и точки x, лежащей в единственной замкнутой G-орбите в $\pi^{-1}_{G,X}(y)$ имеет место включение $(G_x)^\circ \subset (G,G)$.*

Доказательство леммы 4.5.2. Предположим противное. Выберем компоненту $\widetilde{Y}$ многообразия $\pi^{-1}_{G,X}(Y)$. Согласно теореме 4.1.1, $\pi_{G,X}(\widetilde{Y}) = Y$. Согласно теореме 7.12 из [ВП], существует главная изотропная подгруппа для действия $G : \widetilde{Y}$, т.е. такая редуктивная подгруппа $C \subset G$, что для точки $x \in \widetilde{Y}$ из замкнутой орбиты, лежащей над точкой общего положения из Y, группы G_x и C сопряжены в G. По нашему предположению, $C^\circ \not\subset (G,G)$. Из определения группы C следует, что найдется неприводимая компонента X_1 многообразия X^C, для которой подмножество $\pi_{G,X}(X_1 \cap \widetilde{Y})$ плотно в Y.

Поскольку группа C° действует на X_1 тривиально, то $\xi_* x = 0$ для $\xi \in \mathfrak{c}, x \in X_1$. Таким образом, $d_x H_\xi = 0$ для всех $x \in X, \xi \in \mathfrak{c}$, иными словами, гамильтониан H_ξ постоянен на X_1. Кроме того, из G-эквивариантности отображения моментов следует, что $\mu_{G,X}(X_1) \subset \mathfrak{g}^C$. Таким образом, для точки $\xi \in \mu_{G,X}(X_1)$ имеет место включение

$$\mu_{G,X}(X_1) \subset \mathfrak{g}^C \cap (\xi + \mathfrak{c}^\perp). \tag{4.7}$$

Подмножество в $\mathfrak{g}$ из правой части включения (4.7) зависит лишь от проекции элемента ξ на $\mathfrak{c}$. Поэтому мы можем считать, что в (4.7) элемент ξ лежит в $\mathfrak{c}\cap\mathfrak{g}^C=\mathfrak{c}^C$. Положим для краткости $\mathfrak{s}=\mathfrak{g}^C\cap\mathfrak{c}^\perp$. Это идеал в $\mathfrak{g}^C$.

Выберем $x\in\widetilde{Y}\cap X_1$ и положим $\eta=\mu_{G,X}(x)$. По выбору точки x, имеют место включения $\eta_s\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ и $(\eta_s-\xi)+\eta_n\in\mathfrak{s}$. Имеет место включение $\mathfrak{c}^C\subset\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^C)$. Поэтому $[\eta_s-\xi,\eta_n]=0$ и, как следствие, $\eta_s-\xi\in\mathfrak{s}$. Таким образом, для всех $x\in\widetilde{Y}\cap X_1$ имеет место включение

$$\mu_{G,X}(x)_s\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap(\xi+\mathfrak{c}^\perp). \tag{4.8}$$

Поскольку $\mathfrak{c}\not\subset[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, то правая часть равенства (4.8) является собственным аффинным подпространством в $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Отсюда следует, что подмножество $\psi_{G,X}(\widetilde{Y}\cap X_1)$ не плотно в $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Но, по выбору X_1, $\overline{G(\widetilde{Y}\cap X_1)}=\widetilde{Y}$. Значит подмножество $\psi_{G,X}(\widetilde{Y})$ не плотно в $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Противоречие со следствием 4.4.5. $\square$

Пусть $Y\subset\widehat{\psi}_{M,X_M^0}/\!/M^{-1}(\mathfrak{z}(\mathfrak{m}))$ – неприводимая компонента, содержащая точку $\pi_{M,Z}(z)$. Для точки $z_0\in Y$ общего положения выполняется включение $\psi_{M,X_M}/\!/M(z_0)\in\mathfrak{z}(\mathfrak{m})\cap\mathfrak{m}^{pr}$. Пусть x – точка из единственной замкнутой M-орбиты в $\pi_{M,X_M}^{-1}(z_0)$, а (H,η,V) – определяющая тройка многообразия X_M в точке x. По лемме 4.5.2, $H^\circ\subset\widehat{G}$. Из леммы 3.8.3 следует, что M-многообразие X_M удовлетворяет эквивалентным условиям леммы 3.4.5. Отсюда

$$m_H(\mathfrak{z}_{\mathfrak{m}}(\eta)/\mathfrak{h}\oplus V/V^H)=\dim H. \tag{4.9}$$

Но $H^\circ\subset\widehat{G}$. Таким образом, из (4.9) следует, что

$$m_{H\cap\widehat{G}}(\mathfrak{z}_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\eta_n)/\mathfrak{h}\oplus V/V^H)=\dim H. \tag{4.10}$$

А это эквивалентно равенству $m_{\widehat{G}}(\widehat{X})=\dim\widehat{G}$. Таким образом, для точки x выполняется условие (e).

Осталось проверить выполнение условия (f). Из следствия 4.4.4 следует, что гамильтоново M-многообразие $M_M(H,\eta,V/V^H)$ коизотропно. Таким образом,

$$\dim M_M(H,\eta,V/V^H)=\dim M+\operatorname{rk}M,$$

эквивалентно,

$$\dim\mathfrak{z}_{\mathfrak{m}}(\eta)/\mathfrak{h}+\dim V/V^H=\dim H+\operatorname{rk}\mathfrak{m}. \tag{4.11}$$

Опять же, поскольку $H^\circ\subset\widehat{G}$, то из (4.11) следует

$$\dim\mathfrak{z}_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\eta_n)/\mathfrak{h}+\dim V/V^H=\dim H+\operatorname{rk}\widehat{\mathfrak{g}}. \tag{4.12}$$

Коизотропность многообразия $\widehat{X}$ следует теперь из (4.10) и (4.12). $\square$

Предложение 4.5.3. *Пусть $X,T,X_T,M,X_M,\widehat{G}$ таковы, как в предложении 4.5.1, $\widehat{T}=T\cap\widehat{G}$. Предположим, что точка $x\in X$ удовлетворяет условиям (a)-(e) предложения 4.5.1. Пусть $\widehat{X}$ – модельное многообразие, построенное по x в предложении 4.5.1. Тогда найдется $\widehat{T}$-сечение $\widehat{X}_{\widehat{T}}$ многообразия $\widehat{X}$, для которого верны следующие утверждения.*

(1) *Имеет место включение*

$$W_{\widehat{G},\widehat{X}}^{(\widehat{X}_{\widehat{T}})}\subset(W_{G,X}^{(X_T)})\cap M/T. \tag{4.13}$$

Если многообразие X – правильное, то и $\widehat{X}$ таково, а включение (4.13) обращается в равенство.

(2) *Имеет место равенство*

$$p(\mathfrak{X}_{G,X}^{(X_T)}) = \mathfrak{X}_{\widehat{G},\widehat{X}}^{(\widehat{X}_{\widehat{T}})}. \tag{4.14}$$

Здесь через p обозначена ортогональная проекция $\mathfrak{t} \to \mathfrak{t}_1$.

(3) *Имеет место включение*

$$\Lambda_{\widehat{G},\widehat{X}} \subset \Lambda_{G,X}^{(X_T)} \cap \mathfrak{t}_1. \tag{4.15}$$

Доказательство. Гамильтоново $\widehat{G}$-многообразие X_M удовлетворяет эквивалентным условиям леммы 3.4.5. По пункту 3 леммы 3.4.7, X_T является $\widehat{T}$-сечением гамильтонова $\widehat{G}$-многообразия X_M.

Согласно леммам 4.2.4,4.2.5, определяющей тройкой гамильтонова $\widehat{G}$-многообразия X_M в точке x является $(H\cap\widehat{G}, \eta_n, V/V^H\oplus V_0)$, где V_0 – тривиальный $H\cap\widehat{G}$-модуль. Положим $\widehat{X}' = M_{\widehat{G}}(H\cap\widehat{G}, \eta_n, V/V^H\oplus V_0)\cong \widehat{X}\times V_0$. Любое $\widehat{T}$-сечение $\widehat{X}'_{\widehat{T}}$ многообразия $\widehat{X}'$ имеет вид $\widehat{X}_{\widehat{T}}\times V_0$ для некоторого $\widehat{T}$-сечения $\widehat{X}_{\widehat{T}}$ многообразия $\widehat{X}$. Таким образом, достаточно доказать аналоги утверждений предложения для многообразия $\widehat{X}'$.

Согласно предложению 4.2.3, можно выбрать такую $\widehat{G}$-насыщенную аналитическую окрестность O точки $[1,(0,0)]$ в $\widehat{X}'$, что гамильтоново комплексно-аналитическое $\widehat{G}$-многообразие O изоморфно насыщенной аналитической окрестности точки x в X_M. Можем предположить дополнительно, что окрестность O связна. Далее, согласно примеру 3.3.4, $\widehat{X}'$ является коническим гамильтоновым многообразием. Из леммы 5 из [Л2] следует, что $O_1 := \pi_{\widehat{G},\widehat{X}'}(O)$ является окрестностью точки $\pi_{\widehat{G},\widehat{X}'}([1,(0,0)])$ в $\widehat{X}'/\!/\widehat{G}$. Выберем аналитическую окрестность O_2 точки $\pi_{\widehat{G},\widehat{X}'}([1,(0,0)])$ в O_1, для которой $t.O_2\subset O_2$ для всех действительных чисел t от 0 до 1. Заменив O на $\pi_{\widehat{G},\widehat{X}}^{-1}(O_2)$, добьемся того, чтобы $t.O\subset O$ для $0\leqslant t\leqslant 1$.

Из условия (e) следует, что $\widehat{T}$ – главный централизатор гамильтонова $\widehat{G}$-многообразия $\widehat{X}'$. Поскольку подмножество $\widehat{G}\mu_{\widehat{G},X_M}^{-1}(\mathfrak{t}^{pr})$ открыто и плотно в X_M, то $\mu_{M,O}^{-1}(\mathfrak{t}^{pr})\neq\varnothing$. Из того, что группа $N_{\widehat{G}}(\widehat{T})$ переставляет компоненты многообразия $\mu_{\widehat{G},X_M}^{-1}(\mathfrak{t}^{pr})$ транзитивно, следует, что $X_T\cap O\neq\varnothing$. Выберем $\widehat{T}$-сечение $\widehat{X}'_{\widehat{T}}$ многообразия $\widehat{X}'$ таким образом, чтобы некоторая связная компонента комплексно-аналитического многообразия $X_T\cap O$ содержалась в $\widehat{X}'_T\cap O$.

Лемма 4.5.4. *Комплексно-аналитическое многообразие $\widehat{X}'_{\widehat{T}}\cap O$ связно.*

Доказательство леммы 4.5.4. Пусть (η_n, h, f) – $\mathfrak{sl}_2$-тройка в $\widehat{\mathfrak{g}}^{H\cap\widehat{G}}$, порождающая модельное многообразие $\widehat{X}'$. Отметим, что для $z\in\widehat{X}', t\in\mathbb{C}^\times$ выполняется равенство $\mu_{\widehat{G},\widehat{X}'}(t.y) = t^2 t^{-\operatorname{Ad}(g)h}\mu_{\widehat{G},\widehat{X}'}(y)$ (см. пример 3.3.4). Поэтому

$$\mu_{\widehat{G},\widehat{X}'}(t^{\operatorname{Ad}(g)h}t.y) = t^2\mu_{\widehat{G},\widehat{X}'}(y). \tag{4.16}$$

Таким образом, $\varphi(t)y := t^{\operatorname{Ad}(g)h}t.y\in\widehat{X}'_{\widehat{T}}$ для $y=\in\widehat{X}'_{\widehat{T}}$.

Пусть теперь Y^0, Y^1 – две различные связные компоненты комплексно-аналитического многообразия $\widehat{X}'_{\widehat{T}}\cap O$, $y^i\in Y^i, i=0,1$, и $y^t, 0\leqslant t\leqslant 1$, – непрерывная кривая, соединяющая точки y^0, y^1 в $\widehat{X}'_{\widehat{T}}$. Существует такое действительное число $\tau, 0\leqslant\tau\leqslant 1$, что $\tau.y^t\in O$ для всех $t, 0\leqslant t\leqslant 1$. Поэтому $\varphi(\tau)y^t\in O$, ибо окрестность O $\widehat{G}$-инвариантна. Из (4.16) следует, что $\varphi(t'\tau)y^t\in\mu_{\widehat{G},\widehat{X}'}^{-1}(\mathfrak{t}^{pr})$ для всех $t'\in\mathbb{C}^\times$. Заметим, наконец, что

$\varphi(\tau_1)y^i \in Y^i$ для всех τ_1, удовлетворяющих неравенству $\tau \leqslant \tau_1 \leqslant 1$ и $i = 0,1$. Таким образом $t \mapsto \varphi(\tau_1)y^t$ является кривой в $\widehat{X}'_{\widehat{T}} \cap O$, соединяющей точки из Y^0, Y^1. Противоречие. $\square$

Докажем утверждение пункта 1. Поскольку окрестность $O \subset \widehat{X}'$ инвариантна, а многообразие $\widehat{X}'_{\widehat{T}} \cap O$ связно (лемма 4.5.4), то $N_{\widehat{G}}(\widehat{T}, \widehat{X}'_{\widehat{T}}) = N_{\widehat{G}(\widehat{T}, \widehat{X}'_{\widehat{T}} \cap O)} \subset N_{\widehat{G}}(\widehat{T}, X_T)$ (последнее включение может быть строгим, если пересечение $X_T \cap O$ несвязно). Отсюда следует, что $W^{(\widehat{X}'_{\widehat{T}})}_{\widehat{G},\widehat{X}'} \subset W^{(X_T)}_{\widehat{G},X_M}$. Последняя группа, согласно пункту 1 леммы 3.8.5, естественным образом отождествляется с $W^{(X_T)}_{M,X_M}$. Применяя пункт 2 леммы 3.8.3, убеждаемся в справедливости включения (4.13).

Пусть теперь многообразие X правильное. Согласно лемме 3.9.5, X_M является правильным гамильтоновым многообразием, при этом $W^{(X_T)}_{M,X_M} = W^{(X_T)}_{G,X} \cap M/T$, по лемме 3.8.3. По лемме 3.9.4, X_M – правильное гамильтоново $\widehat{G}$-многообразие. Таким образом, при доказательстве достаточно считать, что $M = G$ – полупростая группа, заменив, при необходимости, пару (G, X) на пару $(\widehat{G}, X^0_M)$.

Из предложения 4.2.3 и определения морфизмов $\widehat{\psi}_{\bullet,\bullet}$ следует, что имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} \widehat{X}' \arrow[d] & \widetilde{O} \arrow[l] \arrow[r] & X \arrow[d] \\ \mathfrak{t}/W^{(\widehat{X}'_{\widehat{T}})}_{G,\widehat{X}'} \arrow[rr, "\tau"] & & \mathfrak{t}/W^{(X_T)}_{G,X} \end{tikzcd} \tag{4.17}$$

Морфизм $\tau : \mathfrak{t}/W^{(\widehat{X}'_{\widehat{T}})}_{G,\widehat{X}'} \to \mathfrak{t}/W^{(X_T)}_{G,X}$, $W^{(\widehat{X}'_{\widehat{T}})}_{G,\widehat{X}'}\xi \to W^{(X_T)}_{G,X}\xi$ корректно определен по (4.13).

Морфизм $\widehat{\psi}_{G,X}|_{\widetilde{O}} = \tau \circ \widehat{\psi}_{G,\widehat{X}'} : \widetilde{O} \to \mathfrak{t}/W^{(X_T)}_{G,X}$ гладкий в коразмерности 1. Морфизм $\tau \circ \widehat{\psi}_{G,\widehat{X}'} : \widehat{X}' \to \mathfrak{t}/W^{(X_T)}_{G,X}$ $\mathbb{C}^\times$-эквивариантен, а потому также является гладким в коразмерности 1. Морфизм $\widehat{\psi}_{G,\widehat{X}'}$ сюръективен, ибо открыт и $\mathbb{C}^\times$-эквивариантен. Поэтому морфизм τ является гладким в коразмерности 1. Применяя теорему Зарисского-Нагаты о чистоте ветвления, убеждаемся, что $W^{\widehat{X}'_{\widehat{T}}}_{G,\widehat{X}'} = W^{(X_T)}_{G,X}$. Отсюда следует, что гамильтоново G-многообразие $\widehat{X}'$ удовлетворяет условиям (a),(b) определения 3.9.1. Условию (c) оно удовлетворяет по теореме 4.1.1.

Докажем утверждение пункта 2. По лемме 3.8.3, $\mathfrak{X}^{(X_T)}_{G,X} = \mathfrak{X}^{(X_T)}_{M,X_M}$. Далее, по пункту 4 леммы 3.8.5, $\mathfrak{X}^{(X_T)}_{\widehat{G},X_M} = p(\mathfrak{X}^{(X_T)}_{M,X_M})$. Остается доказать, что $\mathfrak{X}^{(\widehat{X}'_{\widehat{T}})}_{\widehat{G},\widehat{X}'} = \mathfrak{X}^{(X_T)}_{\widehat{G},X_M}$. Ядра неэффективности для действий $\widehat{T} : X_T, X_T \cap O \cong \widehat{X}_{\widehat{T}} \cap O, \widehat{X}_{\widehat{T}}$ совпадают. Остается воспользоваться определением весовой решетки.

Перейдем к доказательству утверждений пункта 3. По лемме 3.8.3, имеет место включение $\Lambda^{(X_T)}_{M,X_M} \subset \Lambda^{(X_T)}_{G,X}$. Из леммы 3.8.5 следует, что $\Lambda^{(X_T)}_{M,X_M} = \Lambda^{(X_T)}_{\widehat{G},X_M}$. Таким образом, $\Lambda^{(X_T)}_{\widehat{G},X_M} \subset \Lambda^{(X_T)}_{G,X} \cap \widehat{\mathfrak{t}}$. Для доказательства включения (4.15) остается доказать, что

$$\Lambda^{(\widehat{X}'_{\widehat{T}})}_{\widehat{G},\widehat{X}'} \subset \Lambda^{(X_T)}_{\widehat{G},X_M}, \tag{4.18}$$

Выберем $\varphi \in \mathfrak{A}^{(\cdot)}_{\widehat{G},X_M}$. Автоморфизм φ оставляет на месте любую компоненту комплексно-аналитического многообразия $O \cap X_T$, т.к. подмножество $O \cap X_T \subset X_T$ $\widehat{T}$-инвариантно. В частности, φ оставляет на месте O и $\widehat{X}'_{\widehat{T}} \cap O$. Остается доказать, что найдется элемент $\overline{\varphi} \in \mathfrak{A}^{(\cdot)}_{\widehat{G},\widehat{X}'}$ (необходимо единственный), для которого $\overline{\varphi}|_O = \varphi|_O$. В этом случае мы получаем включение $\mathfrak{A}^{(\cdot)}_{\widehat{G},X_M} \hookrightarrow \mathfrak{A}^{(\cdot)}_{\widehat{G},\widehat{X}'}$, которое делает следующую диаграмму коммутативной

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}^{(\cdot)}_{\widehat{G},X_M} \arrow[rr, "\varphi \mapsto \overline{\varphi}"] \arrow[dr, "\iota^{(X_T)}_{\widehat{G},X_M}"'] & & \mathfrak{A}^{(\cdot)}_{\widehat{G},\widehat{X}'} \arrow[dl, "\iota^{(\widehat{X}'_{\widehat{T}})}_{\widehat{G},\widehat{X}'}"] \\
& \widehat{T} &
\end{tikzcd}$$

Включение (4.18) будет следовать автоматически из определения решеток корней.

Положим $t = \iota^{(X_T)}_{\widehat{G},X_M}(\varphi)$. Из включения (4.13) следует, что $t \in \widehat{T}^{N_{\widehat{G}}(\widehat{T},\widehat{X}_{\widehat{T}})}$. Поэтому найдется автоморфизм $\overline{\varphi} \in \mathfrak{A}_{\widehat{G},\widehat{X}'^{pr}}$, который действует на $\widehat{X}'_{\widehat{T}}$ сдвигом на t. Из определения автоморфизма $\overline{\varphi}$ следует, что $\overline{\varphi}|_{O\cap\widehat{X}'^{pr}} = \varphi|_{O\cap\widehat{X}'^{pr}}$. Таким образом, рациональное отображение $\overline{\varphi} : \widehat{X}' \dashrightarrow \widehat{X}'$ определено во всех дивизорах, пересекающих O. Но все компоненты в $\widehat{X}' \setminus \widehat{X}'^{pr}$ инвариантны относительно действия $\mathbb{C}^\times : \widehat{X}'$. Отсюда следуют, что они содержат орбиту точки $[1,(0,0)]$, и, таким образом, пересекаются с O. Поэтому рациональное отображение $\overline{\varphi} : \widehat{X}' \dashrightarrow \widehat{X}'$ определено на всех дивизорах, иными словами, является морфизмом. Из леммы 3.5.9 следует, что $\overline{\varphi} \in \mathfrak{A}^{(\cdot)}_{\widehat{G},\widehat{X}'}$. □

4.6. **Редукция вычисления корневых решеток к случаю простой группы.** В этом пункте X – аффинное гамильтоново G-многообразие, удовлетворяющее эквивалентным условиям леммы 3.4.5, а $G_1, \ldots, G_k$ – все простые нормальные подгруппы в G, так что $G = Z(G)^\circ G_1 \ldots G_k$. Пусть $T_i = T \cap G_i, i = \overline{1,k}$. Тогда T_i – максимальный тор в группе G_i. Согласно лемме 3.4.7, T_i – главный централизатор G_i-многообразия X. Выберем T-сечение X_T многообразия X.

Предложение 4.6.1. *Пусть T_i-сечения X_{T_i} многообразия X построены по X_T как в лемме 3.4.7. Тогда $\Lambda^{(X_T)}_{G,X} = \bigoplus \Lambda^{(X_{T_i})}_{G_i,X}$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.8.5, $\Lambda^{(X_T)}_{G,X} = \Lambda^{(X_T)}_{(G,G),X}$. Поэтому можем считать, что группа G полупроста. Учитывая замечание 3.6.7, можем считать, что $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_k$. Для $i = 1, \ldots k$ положим $G^{(i)} = \prod_{j \neq i} G_i$. Доказательство мы проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Покажем, что $\mathfrak{A}^{(X_{T_i})}_{G_i,X} = T_i \cap \mathfrak{A}^{(X_T)}_{G,X}$, причем для $t \in \mathfrak{A}^{(X_{T_i})}_{G_i,X}$ имеет место равенство

$$\iota^{(X_T)\,-1}_{G,X}(t) = \iota^{(X_{T_i})\,-1}_{G_i,X}(t). \tag{4.19}$$

Пусть, сначала, $t \in \mathfrak{A}^{(X_{T_i})}_{G_i,X}$. Положим $\varphi = \iota^{(X_{T_i})\,-1}_{G_i,X}(t)$. По лемме 3.8.7, $t \in T^{W^{(X_T)}_{G,X}}$. Положим $\widetilde{\varphi} = \iota^{(X_T)\,-1}_{G,X^{pr}}$. Покажем, что $\varphi = \widetilde{\varphi}$ (равенство рациональных отображений многообразия X в себя). Отметим, что и φ, и $\widetilde{\varphi}$ являются рациональными G_i-отображениями, совпадающими на $G^{(i)}X_T$ со сдвигом на t. Для доказательства равенства $\varphi = \widetilde{\varphi}$ остается заметить, что $G_iG^{(i)}X_T = GX_T = X^{pr}$. По пункту 2 леммы 3.5.9, $\widetilde{\varphi} \in \mathfrak{A}^{(X_T)}_{G,X}$, что эквивалентно включению $t \in \mathfrak{A}^{(X_T)}_{G,X}$.

Обратно, пусть $t \in T_i \cap \mathfrak{A}^{(X_T)}_{G,X}$. Положим $\varphi = \iota^{(X_T)\,-1}_{G,X}(t)$. Поскольку φ – G-автоморфизм, то $\varphi(gy) = g\varphi(y) = tgy$ для $g \in G_i, y \in X_T$. Таким образом, ограничение автоморфизма φ на X_{T_i} совпадает со сдвигом на t. Отсюда следует, что $\varphi \in \mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G_i,X}$, и что $t \in \mathfrak{A}^{(X_{T_i})}_{G_i,X}$.

Шаг 2. По доказанному на предыдущем шаге, $\prod_{i=1}^k \mathfrak{A}^{(X_{T_i})}_{G_i,X} \subset \mathfrak{A}^{(X_T)}_{G,X}$. Иными словами, $\Lambda^{(X_T)}_{G,X} \subset \bigoplus_{i=1}^k \Lambda^{(X_{T_i})}_{G_i,X}$. Для доказательства обратного утверждения достаточно доказать, что для $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathfrak{A}^{(X_T)}_{G,X}$ элементы t_i лежат в $\mathfrak{A}^{(X_{T_i})}_{G_i,X}$. Ввиду доказанного на предыдущем шаге, мы должны проверить, что $t_i \in \mathfrak{A}^{(X_T)}_{G,X}$. Поскольку $t_i \in T^{W^{(X_T)}_{G,X}}$, то $t_i \in \mathfrak{A}^{(X_T)}_{G,X^{pr}}$. Положим $\varphi_i = \iota^{(X_T)\,-1}_{G,X^{pr}}(t_i)$. Элементы $\varphi_i \in \mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G,X^{pr}}$ попарно коммутируют, и

$$\prod_{i=1}^{k} \varphi_i = \varphi, \tag{4.20}$$

где $\varphi = \iota^{(X_T)\,-1}_{G,X}(t)$.

Шаг 3. Положим $X_i^{pr} = G_iX_{T_i} \subset X$. Это открытое аффинное G-подмногообразие в X. Имеет место равенство

$$X \setminus X_i^{pr} = \psi^{-1}_{G_i,X}((\mathfrak{t}_i \setminus \mathfrak{t}_i^{pr})/W(\mathfrak{g}_i)) = \psi_{G,X}((\mathfrak{t} \setminus (\mathfrak{t}_i^{pr} \oplus \bigoplus_{j\neq i} \mathfrak{t}_j))/W(\mathfrak{g})), \tag{4.21}$$

Из леммы 3.8.7 следует, что $t_i \in T_i^{W^{(X_{T_i})}_{G_i,X}}$. Применив (4.19) к паре (G, X_i^{pr}), убеждаемся, что $\varphi_i = \iota^{(X_{T_i})-1}_{G_i,X}(t_i)$. Таким образом, рациональные отображения $\varphi_i, \varphi_i^{-1} : X \dashrightarrow X$ определены в точках из X_i. Применяя теорему 4.1.1 и равенство (4.21) мы видим, что дивизоры $X \setminus X_i^{pr}, X \setminus X_j^{pr}$ не имеют общих компонент при $i \neq j$. Отсюда следует, что все рациональные отображения $\varphi_j^{-1}, j \neq i$, определены на дивизоре $X \setminus X_i$. Поэтому и рациональное отображение $\varphi_i = \varphi \prod_{j\neq i} \varphi_j^{-1}$ (см. 4.20) определено на $X \setminus X_i$. Отсюда следует, что φ_i – регулярный автоморфизм многообразия X. Применяя лемму 3.5.9, видим, что $\varphi_i \in \mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G,X}$, или, эквивалентно, что $t_i \in \mathfrak{A}^{(X_T)}_{G,X}$. □

5. Основные свойства группы Вейля и решетки корней G-многообразия

5.1. **Введение.** В этом разделе G – редуктивная группа, а X_0 – гладкое квазиаффинное G-многообразие.

Напомним, что мы определили стандартную подгруппу Леви $L_{G^\circ,X_0} \subset G$, (1.1), её подгруппу $L_{0\,G^\circ,X_0}$, (1.2), и стандартную параболическую подгруппу $P_{G^\circ,X_0} = L_{G^\circ,X_0}B$. Для краткости будем писать $L = L_{G^\circ,X_0}, L_0 = L_{0\,G^\circ,X_0}, P = P_{G^\circ,X_0}$. Положим $X = T^*X_0$. Напомним, что X является гамильтоновым G-многообразием (пример 3.2.4). Кроме того, отметим, что многообразие X является квазиаффинным (оно открыто, например, в варианте кокасательного расслоения над подходящим аффинным многообразием, см. [Lo1], Example 2.10).

В пункте 5.2 для подгруппы Леви M, содержащей L, мы определим некоторое выделенное M-сечение Σ_M многообразия X и изучим его свойства (предложение 5.2.3).

В пункте 5.3 мы докажем первую из двух основных теорем данного пункта:

Теорема 5.1.1 (Теорема сравнения)**.** *Пусть группа G связна, а многообразие X невырождено. Тогда*

(1) *Группа L является главным централизатором гамильтонова G-многообразия X, а группа L_0 ядром неэффективности действия $L:\Sigma$, где $\Sigma=\Sigma_L$ – L-сечение многообразия X, построенное в предложении 5.2.3.*
(2) *Имеют место равенства $\mathfrak{a}_{G,X_0}=\mathfrak{a}^{(\Sigma)}_{G,X}, W_{G,X_0}=W^{(\Sigma)}_{G,X}, \mathfrak{X}_{G,X_0}=\mathfrak{X}^{(\Sigma)}_{G,X}$, $\Lambda_{G,X_0}=\Lambda^{(\Sigma)}_{G,X}$.*

Все утверждения этой теоремы, за исключением того, которое касается решеток корней, по сути, принадлежат Кнопу, [Kn4]. Формулировка результатов Кнопа, использующая L-сечение, принадлежит Винбергу, [Vi].

Теорема 5.1.1 позволяет распространить определение картановских пространств, групп Вейля, решеток корней и весов, на тот случай, когда многообразие X квазиаффинно, но группа G необязательно связна:

Определение 5.1.2. Пусть G – произвольная редуктивная группа, а X_0 – квазиаффинное гладкое G-многообразие. Положим $\mathfrak{a}_{G,X_0}=\mathfrak{a}^{(\Sigma)}_{G,X}, \mathfrak{X}_{G,X_0}=\mathfrak{X}^{(\Sigma)}_{G,X}, W_{G,X_0}=W^{(\Sigma)}_{G,X}$, $\Lambda_{G,X_0}=\Lambda^{(\Sigma)}_{G,X}$.

Равенство для групп Вейля в случае произвольных G-многообразий доказано в работе [Ti2]. Впрочем, вычисление групп Вейля может быть сведено к квазиаффинному случаю с использованием предложения 2.3.5.

В пункте 5.4 мы приведем некоторые свойства группы W_{G,X_0} и решетки Λ_{G,X_0}, которые вытекают из определения 5.1.2. Основными являются предложения 5.4.1, 5.4.2, 5.4.7.

Пункт 5.4 посвящен редукции вычисления группы $W_{G,X_0}, \mathfrak{X}_{G,X_0}$ к случаю меньшей группы. Именно, пусть группа G связна. Пусть $\underline{X}_0$ – выделенная компонента многообразия $X_0^{L_0^\circ}$, см. пункт 2.6. Отметим, что $\underline{X}_0$ является гладким квазиаффинным многообразием. Гладкость будет следовать из леммы 5.5.1. Положим $\underline{G}:=N_G(L_0^\circ,\underline{X}_0)$. Группа $\underline{G}$ редуктивна. Заметим, что её касательная алгебра $\underline{\mathfrak{g}}$ естественным образом отождествляется с подалгеброй $\mathfrak{l}_0^\perp\cap\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0)=\mathfrak{g}^{L_0^\circ}\cap\mathfrak{z}(\mathfrak{l}_0)^\perp\subset\mathfrak{g}$. Заметим, далее, что $\mathfrak{t}\subset\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}_1)$. Поэтому существует выделенный выбор максимального тора $\underline{T}$ и борелевской подгруппы $\underline{B}$ в группе $\underline{G}$, см. раздел 12.

Теорема 5.1.3 ((Теорема редукции))**.** *Пусть группа G связна, а G-многообразие X_0 гладко и квазиаффинно. Тогда $\mathfrak{a}_{G,X_0}=\mathfrak{a}_{\underline{G},\underline{X}_0}=\underline{\mathfrak{t}}$ (равенство подпространств в $\mathfrak{g}$), $W_{G,X_0}=W_{\underline{G},\underline{X}_0}$, $\mathfrak{X}_{G,X_0}=\mathfrak{X}_{\underline{G}^\circ,\underline{X}_0}$. Наконец, выделенная компонента в $\underline{X}^{L_{0\,\underline{G},\underline{X}}}$ совпадает с выделенной компонентой в $X^{L_{0\,G,X}}$.*

5.2. **Конормальные расслоения к $\mathrm{R}_u(Q)$-орбитам.** Обозначим через Q параболическую подгруппу в G, содержащую P, и через M подгруппу Леви в Q, содержащую L. Положим $\widetilde{M}=N_G(M)\cap N_G(Q)$. Выберем тройку (X_0',π,Z_0), факторизующую действие $Q:X$, см. определение 2.2.5. Положим $X'=T^*X_0'$. Это открытое подмножество в X.

Положим

$$\mathcal{N}(Q,X_0')=\{(x,\beta)\in X'|\langle\beta,\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})x\rangle\}=\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{q})\cap X'. \tag{5.1}$$

Мы можем рассматривать $\mathcal{N}(Q,X_0')$ как локально тривиальное векторное подрасслоение в X'. Непосредственно из (5.1) следует, что подмножество $\mathcal{N}(Q,X_0')\subset X'$ инвариантно относительно группы $N_G(Q)$.

Лемма 5.2.1. *Предположим, что группа G связна, а (X_0', π, Z_0) – тройка, факторизующая действие $P : X$. Положим*

$$\mathfrak{a}^{pr} = \mathfrak{a}_{G,X} \cap \mathfrak{l}^{pr}. \tag{5.2}$$

Тогда подмножество $X' \cap \mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{a}^{pr} + \mathrm{R}_u(\mathfrak{p}))$ плотно в $\mathcal{N}(P, X_0')$, а подмножество $G(X' \cap \mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{a}^{pr} + \mathrm{R}_u(\mathfrak{p})))$ плотно в X.

Доказательство. По сути, второе утверждение – это Theorem 3.2 из [Kn4]. Первое доказано при доказательстве этой теоремы. □

Лемма 5.2.2. *Морфизм $\mathrm{R}_u(Q) \times \mathfrak{m}^{pr} \to \mathfrak{q}, (g, \xi) \mapsto \mathrm{Ad}(g)\xi$, является открытым вложением с образом $\mathfrak{m}^{pr} + \mathrm{R}_u(\mathfrak{q})$.*

Доказательство. Это хорошо известно (см., к примеру, [Lo1], доказательство леммы 5.23). □

Следующее предложение является основным результатом этого пункта

Предложение 5.2.3. *Пусть (X_0', π, Z_0) – тройка, факторизующая действие $Q : X$.*

(1) *Векторное расслоение $\mathcal{N}(Q, X_0')$ над X_0' является обратным образом расслоения $Z := T^*Z_0 \to Z_0$ при морфизме π. Это дает естественный морфизм $\widetilde{\pi} : \mathcal{N}(Q, X_0') \to Z$.*
(2) *Существует единственное M-сечение Σ_M гамильтонова G-многообразия X, пересекающее $\mathcal{N}(Q, X_0')$. Пересечение $\Sigma_M \cap \mathcal{N}(Q, X_0')$ плотно в Σ_M, а подмножество $\mathrm{R}_u(Q)(\Sigma_M \cap \mathcal{N}(Q, X_0'))$ – в $\mathcal{N}(Q, X_0')$. Подмногообразие $\Sigma_M \subset X$ инвариантно относительно группы $\widetilde{M}$.*
(3) *Ограничение морфизма $\widetilde{\pi} : \mathcal{N}(Q, X_0') \to Z$ на $\Sigma_M \cap \mathcal{N}(Q, X_0')$ доминантно, инъективно, $\widetilde{M}$-эквивариантно и удовлетворяет равенству*

$$\mu_{M,Z} \circ \widetilde{\pi} = \mu_{M,\Sigma_M}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Утверждение первого пункта легко следует из требования (b) определения 2.2.5.

Докажем утверждение пункта 2. Поскольку $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, то подмножество $N(Q, X_0') \cap \mathcal{N}(P, X_0'')$ плотно в $\mathcal{N}(P, X_0'')$ для любого подмножества $X_0'' \subset X_0$, входящего в тройку, факторизующую действие $P : X$. Из леммы 5.2.1 следует, что найдется такая точка $y \in \mathcal{N}(Q, X_0')$, что $\mu_{G,X}(y) \in \mathfrak{a}^{pr} + \mathrm{R}_u(\mathfrak{p})$. По лемме 5.2.2, существует элемент $g \in \mathrm{R}_u(P) \subset Q$, удовлетворяющий условию $\mu_{G,X}(\mathrm{Ad}(g)y) \subset \mathfrak{l}^{pr} \subset \mathfrak{m}^{pr}$. Последнее включение следует из $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{m}$. В частности, пересечение $\mathcal{N}(Q, X_0') \cap \mathfrak{m}^{pr}$ непусто. Применяя лемму 5.2.2, получаем, что морфизм $\mathrm{R}_u(Q) \times (\mathcal{N}(Q, X_0') \cap \mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{m}^{pr})) \to \mathcal{N}(Q, X_0'), (g, x) \mapsto gx$, является открытым вложением с образом $X' \cap \mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{m}^{pr} + \mathrm{R}_u(\mathfrak{q}))$. В частности, многообразие $\mathcal{N}(Q, X_0') \cap \mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{m}^{pr})$ неприводимо. Это доказывает существование и единственность M-сечения Σ_M, пересекающего $\mathcal{N}(Q, X_0')$. Остается доказать, что сечение Σ_M устойчиво относительно $\widetilde{M}$. Для этого достаточно заметить, что $g\Sigma_M$ является M-сечением многообразия X, пересекающим $\mathcal{N}(Q, X_0')$, для всех $g \in \widetilde{M}$.

Перейдем к пункту 3. Рассматриваемый морфизм $\widetilde{M}$-эквивариантен, поскольку морфизм $\widetilde{\pi}$ таков. Проверим равенство (5.3). Достаточно показать, что проекция элемента $\mu_{G,X}(y) \subset \mathfrak{q}$ на $\mathfrak{m}$ совпадает с $\mu_{M,Z}(\widetilde{\pi}(y))$ для всех $y \in \mathcal{N}(Q, X_0')$. Положим $y = (x, \beta)$, где $x \in X_0', \beta \in (\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})_* x)^0$. Подпространство $(\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})_* x)^0 \subset T_x^* X_0$ естественным образом отождествляется с $T_{\pi(x)}^* Z_0$. По определению морфизма $\widetilde{\pi}$, $\widetilde{\pi}(y) = (\pi(x), \beta)$. Пусть через ξ обозначена проекция элемента $\mu_{G,X}(y) \in \mathfrak{q}$ на $\mathfrak{m}$. Тогда $(\xi, \eta) = \langle \eta_* x, \beta \rangle = \langle \eta_* \pi(x), \beta \rangle = (\mu_{M,Z}(\widetilde{\pi}(y)), \eta)$ для всех $\eta \in \mathfrak{m}$. Равенство (5.3) доказано.

Проверим теперь, что морфизм $\widetilde{\pi}|_{\Sigma_M\cap\mathcal{N}(Q,X_0')}$ инъективен. Следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}(Q,X_0') \arrow[r, "\widetilde{\pi}"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\
X_0' \arrow[r, "\pi"] & Z_0
\end{tikzcd}$$

Напомним, что действие $\mathrm{R}_u(Q):X_0'$ свободно, а морфизм $\widetilde{\pi}:\mathcal{N}(Q,X_0')\to Z$ послойно линеен и является изоморфизмом на слоях. Поскольку любой слой морфизма $\pi=\widetilde{\pi}|_{X_0'}$ состоит из одной $\mathrm{R}_u(Q)$-орбиты, то же верно для морфизма $\widetilde{\pi}:\mathcal{N}(Q,X_0')\to Z$. Выберем теперь точки $y_1,y_2\in\Sigma_M\cap\mathcal{N}(Q,X_0')$, так чтобы $\widetilde{\pi}(y_1)=\widetilde{\pi}(y_2)$. Из последнего равенства следует, что $\mu_{G,X}(y_1)=\mu_{G,X}(y_2)$ и что существует элемент $g\in\mathrm{R}_u(Q)$, для которого $gy_1=y_2$. В частности, $\mathrm{Ad}(g)\mu_{G,X}(y_1)=\mu_{G,X}(y_2)$. Поскольку $\mu_{G,X}(y_i)\in\mathfrak{m}^{pr}$ для $i=1,2$, мы получили противоречие с леммой 5.2.2.

Для доказательства доминантности морфизма $\widetilde{\pi}|_{\Sigma_M\cap\mathcal{N}(Q,X_0')}$ достаточно проверить, что $\dim\Sigma_M=\dim Z$. Но $\dim Z=2\dim Z_0=2(\dim X_0'-\dim\mathrm{R}_u(Q))=\dim X-\dim G+\dim M=\dim\Sigma_M$. Последнее равенство следует из пункта 3 предложения 3.4.1. $\square$

Замечание 5.2.4. Сечение Σ_M из предыдущего предложения не зависит от выбора подмножества X_0'. В самом деле, если X_{01}',X_{02}' – два подмножества в X_0, входящих в тройки, факторизующие (Q,X), то и их пересечение таково. Это легко следует из замечания 2.2.6. Пусть Σ_M – M-сечение многообразия X, соответствующее подмножеству $X_{01}'\cap X_{02}'$. Тогда Σ_M пересекает $\mathcal{N}(Q,X_{01}')$ и $\mathcal{N}(Q,X_{02}')$. В дальнейшем M-сечение Σ_M мы будем называть *выделенным*.

5.3. **Доказательство теоремы сравнения.** В этом пункте (X_0',π,Z_0) – тройка, факторизующая действие $P:X_0$. Положим $\Sigma=\Sigma_L$, где сечение Σ_L построено в предложении 5.2.3 для группы P. Положим $X=T^*X_0, Z=T^*Z_0$. Группа G предполагается связной.

Лемма 5.3.1. *Группа L_0 является ядром неэффективности для действия $L:\Sigma$. В частности, $N_G(L,\Sigma)\subset N_G(L_0)$.*

Доказательство. Из предложения 2.2.4 выводится, что L_0 является ядром неэффективности для действия $L:Z_0$, и, стало быть, для действия $L:Z$. Согласно пункту 3 предложения 5.2.3, существует бирациональное L-эквивариантное рациональное отображение $\Sigma\dashrightarrow Z$. Это завершает доказательство. $\square$

Следствие 5.3.2. *Группа L является главным централизатором гамильтонова G-многообразия X. Если группа G связна, то имеют место равенства $\mathfrak{a}_{G,X}^{(\Sigma)}=\mathfrak{a}_{G,X_0}$, $\mathfrak{X}_{G,X}^{(\Sigma)}=\mathfrak{X}_{G,X_0}$. Торы $A_{G,X}^{(\Sigma)},A_{G,X_0}$ естественным образом отождествляются.*

Доказательство. Поскольку группа (L,L) тривиально действует на Σ, то L является главным централизатором гамильтонова L-многообразия Σ, а стало быть (пункт 1 леммы 3.4.7) и G-многообразия X. Гамильтоново G-многообразие X является коническим. Стало быть, $\mathfrak{a}_{G,X}^{(\Sigma)}=\mathfrak{z}(\mathfrak{l})\cap(\mathfrak{z}(\mathfrak{l})\cap\mathfrak{l}_0)^\perp=\mathfrak{l}\cap\mathfrak{l}_0^\perp=\mathfrak{a}_{G,X_0}$. Поскольку группа (L,L) тривиально действует на Σ, то и $\mathfrak{X}_{G,X}^{(\Sigma)}$ и $\mathfrak{X}_{G,X_0}$ являются аннуляторами подгруппы $Z(L)^\circ\cap L_0\subset Z(L)^\circ$ в $\mathfrak{X}(Z(L)^\circ)$. По той же причине фактор-группы $A_{G,X_0},A_{G,X}^{(\Sigma)}$ группы $Z(L)^\circ$ совпадают. $\square$

Следствие 5.3.3. *Σ является неприводимой компонентой подмногообразия $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{a}^{pr}) \subset X$, где $\mathfrak{a}^{pr} = \mathfrak{a}_{G,X_0} \cap \mathfrak{l}^{pr}$.*

Доказательство. Поскольку Σ – неприводимая компонента подмногообразия $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{l}^{pr}) \subset X$, а $\mathfrak{a}^{pr} \subset \mathfrak{l}^{pr}$, то достаточно доказать включение $\mu_{G,X}(\Sigma) \subset \mathfrak{a}_{G,X_0}$. Но L_0 действует тривиально на Σ. Из пункта 3 предложения 5.2.3 следует, что $0 \in \overline{\mu_{G,X}(\Sigma)}$. Значит, $\mu_{G,X}(\Sigma) \subset \mathfrak{l}_0^{\perp} \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{a}_{G,X_0}$. $\square$

Следствие 5.3.4. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathrm{rk}_G(X_0) = \mathrm{rk}\, G$.

(2) *X удовлетоворяет эквивалентным условиям леммы 3.4.5.*

Теперь мы обсудим связь между центральными автоморфизмами G-многообразия X_0 (определение 2.4.1) и центральными автоморфизмами гамильтонова G-многообразия X (определение 3.5.5). Напомним, что любому G-автоморфизму φ многообразия X_0 сопоставляется гамильтонов автоморфизм φ_* многообразия X (пример 3.5.3). Напомним также, что $\mathfrak{A}_{G,X_0} = \mathfrak{A}_G(X_0)$ (лемма 2.4.2).

Предложение 5.3.5. *Мономорфизм $\varphi \mapsto \varphi_*$ индуцирует изоморфизм групп $\mathfrak{A}_{G,X_0}$ и $\mathfrak{A}_{G,X}^{(\cdot)}$. Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}_{G,X_0} \arrow[rr, "\varphi \mapsto \varphi_*"] \arrow[dr, "\iota_{G,X_0}"'] & & \mathfrak{A}_{G,X}^{(\cdot)} \arrow[dl, "\iota_{G,X}^{(\Sigma)}"] \\
& A_{G,X_0} \cong A_{G,X}^{(\Sigma)} &
\end{tikzcd}$$

Лемма 5.3.6. *Пусть T_0 – квазитор, действующий на X_0 G-автоморфизмами. Тогда верны следующие утверждения:*

(1) *Структура гамильтонова G-многообразия на X получается ограничением из структуры $G \times T_0$-многообразия.*

(2) *Тройка (X_0', π, Z_0), факторизующая действие $P \times T_0^{\circ} : X$ факторизует и действие $P : X$, а $\mathcal{N}(P, X^0) = \mathcal{N}(P \times T_0, X^0)$.*

(3) *Группа $L \times T_0^{\circ}$ является главным централизатором, а Σ – выделенным $L \times T_0^{\circ}$-сечением гамильтонова $G \times T_0$-многообразия X.*

(4) *Группа T_0 оставляет на месте подмногообразие $\Sigma \subset T^*X$, а рациональное отображение $\Sigma \dashrightarrow T^*Z_0$ (см. пункт 3 предложения 5.2.3) является T_0-эквивариантным.*

Доказательство леммы 5.3.6. Утверждение пункта 1 следует непосредственно из конструкции примера 3.2.4. Положим $G_1 = G \times T_0, P_1 = P \times T_0^{\circ}, L_1 = L \times T_0^{\circ}, \widetilde{L}_1 = L \times T_0$. Отметим, что $L_1 = L_{G_1^{\circ},X}, P_1 = P_{G_1^{\circ},X}, \widetilde{L}_1 = N_{G_1}(P_1) \cap N_{G_1}(L_1)$. Утверждение пункта 2 теперь очевидно. При доказательстве остальных пунктов можем считать, что тройка (X_0', π, Z_0) факторизует действие $P_1 : X$. Так как $\mathfrak{l}_1^{pr} = \mathfrak{l}^{pr} \times \mathfrak{t}_0$, то $\mu_{G_1,T^*X}^{-1}(\mathfrak{l}_1^{pr}) = \mu_{G,T^*X}^{-1}(\mathfrak{l}^{pr})$. Поэтому Σ является L_1-сечением гамильтонова G_1-многообразия X. Поскольку $\mathcal{N}(P, X_0') = \mathcal{N}(P_1, X_0')$, этим доказано утверждение пункта 3. По предложению 5.2.3, группа $\widetilde{L}_1$ оставляет Σ на месте, а рациональное отображение $\widetilde{\pi} : \Sigma \dashrightarrow T^*Z$ $\widetilde{L}_1$-эквивариантно. $\square$

Доказательство предложения 5.3.5. Покажем, что $\varphi_* \in \mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G,X}$ для всех $\varphi \in \mathfrak{A}_{G,X_0}$ и что $\iota_{G,X_0}(\varphi) = \iota^{(\Sigma)}_{G,X}(\varphi_*)$. Для этого нужно доказать, что автоморфизм φ_* оставляет на месте Σ и действует на Σ сдвигом на элемент $\iota_{G,X}(\varphi) \in L/L_0$.

Группа $\mathfrak{A}_{G,X_0}$ является замкнутой подгруппой в A_{G,X_0} (предложение 2.4.3), т.е. $\mathfrak{A}_{G,X_0}$ – квазитор. Положим $T_0 = \mathfrak{A}_{G,X_0}$. Можем считать, что тройка (X_0', π, Z_0) факторизует действие $P \times T_0^\circ : X_0$. Из леммы 2.4.6 следует, что элемент $\varphi \in \mathfrak{A}_{G,X}$ действует на Z_0 и, стало быть, на Z сдвигом на элемент $\iota_{G,X_0}(\varphi)$. Применив пункт 4 леммы 5.3.6, получаем включение $\varphi_* \in \mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G,X}$ и равенство $\iota^{(\Sigma)}_{G,X}(\varphi_*) = \iota_{G,X_0}(\varphi)$.

Остается показать, что для любого элемента $\psi \in \mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G,X}$ найдется элемент $\varphi \in \mathfrak{A}_{G,X_0}$ с $\psi = \varphi_*$. Отметим, прежде всего, что автоморфизм $\psi : X \to X$ является $\mathbb{C}^\times$-эквивариантным. Действительно, поскольку $\mu_{G,X}(t.x) = t\mu_{G,X}(x)$ для всех $t \in T, x \in X$, то группа $\mathbb{C}^\times$ сохраняет $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{l}^{pr})$ и, стало быть, Σ. Поскольку автоморфизм ψ является центральным, то его ограничение на Σ является $\mathbb{C}^\times$-эквивариантным. А так как $\overline{G\Sigma} = X$ (пункт 3 предложения 3.4.1), то автоморфизм ψ $\mathbb{C}^\times$-эквивариантен.

Согласно лемме 3.5.4, $\psi = \varphi_*$, где $\varphi = \psi|_{X_0}$. Таким образом, имеем действие группы $\mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G,X}$ на X_0, $(\psi, x) \mapsto \psi|_{X_0}(x)$. По следствию 3.5.10, группа $\mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G,X}$ является замкнутой подгруппой тора. Применим лемму 5.3.6 к $T_0 = \mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G,X}$. Можем считать, что тройка (X_0', π, Z_0) факторизует действие с $P \times T_0^\circ : X$. По пункту 4 леммы 5.3.6, группа $\mathfrak{A}^{(\cdot)}_{G,X}$ действует на Z и, таким образом, на Z_0, сдвигами на элементы из L/L_0. Применяя лемму 2.4.6, убеждаемся, что автоморфизм φ является центральным. □

Доказательство теоремы 5.1.1. В силу следствия 5.3.2 остается доказать равенство для групп Вейля и корневых решеток. Последнее является прямым следствием предложения 5.3.5.

Для доказательства равенства групп Вейля заметим, что $N_G(L, \Sigma) \subset N_G(\mathfrak{a}_{G,X_0})$, ибо $\mathfrak{a}_{G,X_0} = \mathfrak{a}^{(\Sigma)}_{G,X}$. По следствию 5.3.3, $\mu_{G,X}(\Sigma) \subset \mathfrak{a}_{G,X_0}$. В [Ti2], Remark 5, показано, что $W_{G,X_0} = N_G(L, \Sigma^0)/L$, где Σ^0 – единственная компонента многообразия $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{a}^0)$, пересекающая $\mathcal{N}(P, X_0')$, а $\mathfrak{a}^0$ – некоторое $N_G(\mathfrak{a}_{G,X_0})$-инвариантное открытое подмножество в $\mathfrak{a}_{G,X_0} \cap \mathfrak{l}^{pr}$. Отсюда следует, что Σ^0 является открытым подмножеством в Σ и что $N_G(L, \Sigma^0) = N_G(L, \Sigma)$. □

5.4. **Некоторые свойства группы W_{G,X_0} и решетки Λ_{G,X_0}.** В этом пункте через Σ обозначено выделенное L-сечение многообразия X.

Следующее предложение устанавливает связь между группами W_{G,X_0} и W_{G°,X_0}.

Предложение 5.4.1. (1) *Имеет место включение* $N_G(B) \cap N_G(T) \subset N_G(L, \Sigma)$. *В частности,* $N_G(B) \cap N_G(L) \subset N_G(\mathfrak{a}_{G,X_0})$.

(2) *Обозначим через* Γ *образ подгруппы* $N_G(B) \cap N_G(L)$ *в* $\mathrm{GL}(\mathfrak{a}_{G,X_0})$. *Тогда подгруппа* $W_{G^\circ,X_0} \subset W_{G,X_0}$ *нормальна, и* $W_{G,X_0} = W_{G^\circ,X_0}\Gamma$.

(3) *Если* $\mathrm{rk}_G(X_0) = \mathrm{rk}(G)$, *то* $W_{G,X_0} = W_{G^\circ,X_0} \leftthreetimes \Gamma$.

Доказательство. Отметим, что группа $N_G(B) \cap N_G(T)$ оставляет на месте подмножество $\mathbb{C}(X_0)^{(B)} \subset \mathbb{C}(X_0)$ и, стало быть, $\mathfrak{a}_{G,X_0}$. Поэтому $N_G(B) \cap N_G(T) \subset N_G(L) \cap N_G(B) \subset N_G(P) \cap N_G(L)$. По пункту 3 предложения 5.2.3, $N_G(B) \cap N_G(T) \subset N_G(L, \Sigma)$. Этим доказано утверждение пункта 1.

Перейдем к пункту 2. Понятно, что $N_{G^\circ}(L, \Sigma) = N_G(L, \Sigma) \cap G^\circ$ является нормальной подгруппой в $N_G(L, \Sigma)$. Поэтому W_{G°,X_0} – нормальная подгруппа в W_{G,X_0}. Заметим теперь, что $G = G^\circ(N_G(B) \cap N_G(T))$. Поэтому $N_G(L, \Sigma) = (N_G(L, \Sigma) \cap G^\circ)(N_G(B) \cap N_G(T))$, откуда $W_{G,X_0} = W_{G^\circ,X_0}\Gamma$.

Остается проверить, что $W_{G^\circ,X_0}\cap\Gamma=\{1\}$ при условии $\operatorname{rk}_G(X_0)=\operatorname{rk} G$. В этом случае W_{G°,X_0} является подгруппой в $W(\mathfrak{g})$. Но $W(\mathfrak{g})\cap\Gamma=\{1\}$, поскольку положительная камера Вейля в $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$ устойчива относительно Γ. $\square$

С этого момента и до конца пункта мы считаем, что группа G связна.

Следующий результат будет использован для "индуктивного вычисления" групп Вейля. Пусть Q – стандартная параболическая подгруппа в G, содержащая P, и M – стандартная подгруппа Леви в Q. Пусть, далее, Z_0 является рациональным M-фактором для действия $\mathrm{R}_u(Q):X_0$ (см. определение 2.2.8). Будучи бирациональными инвариантами, пространство $\mathfrak{a}_{M,Z_0}$ и группа W_{M,Z_0} не зависят от выбора Z_0. Мы будем использовать обозначения $\mathfrak{a}_{M,X_0/\mathrm{R}_u(Q)}, W_{M,X_0/\mathrm{R}_u(Q)}$ вместо $\mathfrak{a}_{M,Z_0}, W_{M,Z_0}$.

Предложение 5.4.2. *Во введенных обозначениях, имеют место равенства* $\mathfrak{a}_{M,X_0/\mathrm{R}_u(Q)}=\mathfrak{a}_{G,X}$ *и* $W_{M,X_0/\mathrm{R}_u(Q)}=W_{G,X_0}\cap M/T$.

Доказательство. Равенство картановских пространств следует из T-изоморфизма ограничения $\mathbb{C}(X)^{(B)}\cong(\mathbb{C}(X)^{\mathrm{R}_u(Q)})^{(B\cap M)}$.

Выберем тройки (X_0',π,Z_0), (Z_0',π_1,Y_0), факторизующие действия $Q:X$ и $P\cap M:Z_0$, соответственно (из равенства картановских пространств следует, что $P\cap M=P_{M,Z_0}$, поэтому определение второй тройки корректно, лемма 2.2.7). Положим $X_0''=\pi^{-1}(Z_0')$. Проверим, что тройка $(X_0'',\pi_1\circ\pi,Y_0)$ факторизует действие $P:X$. Понятно, что подмножество $X_0''\subset X_0$ устойчиво относительно P. Так как $(\mathrm{R}_u(Q))_x=\{1\},(\mathrm{R}_u(P)\cap M)_{\pi(x)}=\{1\}$ для всех $x\in X_0'$, то действие $\mathrm{R}_u(P):X_0$ свободно. Многообразие Y_0 и морфизм $\pi_1\circ\pi:X_0''\to Y_0$ удовлетворяют условию (c) определения 2.2.5.

Пусть Σ_M – выделенное M-сечение гамильтонова G-многообразия X. Напомним, что имеется естественное открытое вложение $G*_{N_G(L,\Sigma)}\Sigma\hookrightarrow X$. Сравнивая размерности, мы видим, что $M\Sigma\cong M*_{M\cap N_G(L,\Sigma)}\Sigma$ является плотным подмножеством в некотором M-сечении многообразия X. Поскольку $\mathcal{N}(P,X_0'')\subset\mathcal{N}(Q,X_0')$, мы видим, что $M\Sigma\cap\mathcal{N}(Q,X_0')\neq\varnothing$. Поэтому $M\Sigma$ является плотным подмножеством в Σ_M. Иными словами, Σ – L-сечение гамильтонова M-многообразия Σ_M.

Пусть $\widetilde{\pi}:\mathcal{N}(Q,X_0')\to Z:=T^*Z_0$ – естественный морфизм, определенный в пункте 1 предложения 5.2.3. Он индуцирует бирациональное отображение $\Sigma_M\dashrightarrow Z$. Непосредственно видно, что $\widetilde{\pi}(\mathcal{N}(X_0'',P))=\mathcal{N}(Z_0',P\cap M)$. Принимая во внимание пункт 3 предложения 5.2.3, мы получаем, что подмножество $\widetilde{\pi}(\Sigma)$ плотно в выделенном L-сечении Σ^Z многообразия Z. По лемме 3.8.2, $W_{M,Z}^{(\Sigma^Z)}=W_{M,\Sigma_M}^{(\Sigma)}$. Из пункта 3 леммы 3.8.3 следует, что $W_{M,\Sigma_M}^{(\Sigma)}=W_{G,X}^{(\Sigma)}\cap M/L$. $\square$

Сейчас мы выведем из предложения 5.4.2 следствие, которое будет использовано в разделах 7,9.

Следствие 5.4.3. *Пусть H – алгебраическая подгруппа в G, $H=S\leftthreetimes H_u$ – её разложение Леви. Пусть Q – антистандартная параболическая подгруппа в G, содержащая $P_{G,G/H}$, а M – её стандартная подгруппа Леви. Предположим, что $\mathrm{R}_u(H)\subset\mathrm{R}_u(Q), S\subset M$.*

(1) *Если пространство G/H квазиаффинно, то $\mathfrak{a}(\mathfrak{m},\mathfrak{s},\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h}))=\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, и $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cap M/L_{G,G/H}=W(\mathfrak{m},\mathfrak{s},\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h}))$.*
(2) *Предположим, что подгруппа H редуктивна. Пусть V – H-модуль, для которого $\operatorname{rk}_G(G*_H V)=\operatorname{rk} G$. Тогда $\operatorname{rk}_M(M*_H(\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})\oplus V))=\operatorname{rk} M$ и $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)\cap M/T=W_{\mathfrak{m},\mathfrak{h},\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})\oplus V}$.*

Доказательство. Обозначим через Q^- стандартную параболическую подгруппу в G с подгруппой Леви M. Имеются Q^--вложения $Q^-*_M(M*_S(\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})))\hookrightarrow G/H$ (в пункте 1) и $Q*_M(M*_H(V\oplus \mathrm{R}_u(\mathfrak{q})))\hookrightarrow G*_H V$ (в пункте 2) (см. замечания 2.2.3,2.6.3). Требуемые утверждения теперь следуют из предложения 5.4.2. □

Теперь мы приведем интерпретацию леммы 3.8.5 для кокасательных расслоений. Этот результат является вариацией на тему Satz 8.1 из [Kn3] (см. также предложение 2.5.7). Это предложение будет использовано в разделе 7.

Предложение 5.4.4. *Предположим, что тор T_0 действует на X_0 G-автоморфизмами. Положим $\widetilde{G}=G\times T_0$. Тогда $\mathfrak{a}_{\widetilde{G},X_0}\cap\mathfrak{g}\subset\mathfrak{a}_{G,X_0}$ и $\mathfrak{a}_{G,X_0}\cap(\mathfrak{a}_{\widetilde{G},X_0}\cap\mathfrak{g})^\perp\subset\mathfrak{a}_{G,X_0}^{W_{G,X_0}}$.*

Доказательство. Применяя пункт 1 леммы 5.3.6, мы видим, что находимся в условиях применимости леммы 3.8.5 (с G вместо G^0, $G\times T_0$ вместо G). Все утверждения теперь следуют из этой леммы. □

Следущее следствие будет использовано при вычислении групп Вейля в разделе 9.

Следствие 5.4.5. *Пусть H_1,H_2 – такие подгруппы в G, что H_1 – нормальная подгруппа в H_2 и H_2/H_1 – тор. Предположим, что однородное пространство G/H_1 квазиаффинно. Тогда $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_2)\cong W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1)$, вложение $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_2)\hookrightarrow\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1)$ (индуцированное естественным морфизмом $G/H_1\to G/H_2$) $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_2)$-эквивариантно, и действие группы $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_2)$ на ортогональном дополнении к $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_2)$ в $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1)$ тривиально.*

Доказательство. Морфизм $G/H_1\to G/H_2$ является главным G-эквивариантным H_2/H_1-расслоением. Положим $\widetilde{G}=G\times H_2/H_1$. Согласно предложению 2.3.5, имеют место отождествление $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_2)\cong W_{\widetilde{G},G/H_1}$ и $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_2)$-вложение $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_2)\hookrightarrow\mathfrak{a}_{G/H_2}\oplus\mathfrak{t}_0=\mathfrak{a}_{\widetilde{G},G/H_1}$, где действие $W_{\widetilde{G},G/H_1}:\mathfrak{t}_0$ тривиально. Вложение $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1)\hookrightarrow\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_2)$ является композицией вложения $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_2)\hookrightarrow\mathfrak{a}_{\widetilde{G},G/H_1}$ и ортогональной проекции $\mathfrak{a}_{\widetilde{G},G/H_1}\to\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1)$. Требуемое утверждение теперь следует из предложения 5.4.4, примененного к действию $\widetilde{G}:G/H_1$. □

Следующее хорошо известное утверждение описывает поведение группы Вейля при параболической индукции. Нам понадобится только случай квазиаффинных однородных пространств ранга $\operatorname{rk}G$. Мы приводим доказательство для полноты изложения.

Следствие 5.4.6. *Пусть Q – антистандартная параболическая подгруппа в G, а M – стандартная подгруппа Леви в Q. Пусть, далее, $\mathfrak{h}$ – подалгебра в $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})$ и такая, что $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\mathfrak{t}$. Пусть, наконец, однородное пространство G/H квазиаффинно. Тогда $\mathfrak{a}(\mathfrak{m},\mathfrak{m}/\mathfrak{h})=\mathfrak{t}$, $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=W(\mathfrak{m},\mathfrak{h}/\mathrm{R}_u(\mathfrak{q}))$.*

Доказательство. Из замечания 2.2.3 следует, что однородное M-пространство Q/H является рациональным M-фактором для действия $\mathrm{R}_u(Q^-):G/H$, где Q^- – стандартная подгруппа Леви, противоположенная к Q. Применяя предложение 5.4.2, убеждаемся в том, что $\mathfrak{a}(\mathfrak{m},\mathfrak{m}\cap\mathfrak{h})=\mathfrak{t},W(\mathfrak{m},\mathfrak{h}/\mathrm{R}_u(\mathfrak{q}))\subset W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. С другой стороны, группа $Z(M)^\circ$ действует на G/H G-автоморфизмами. Из предложения 2.6.4 следует, что $\mathfrak{a}_{G\times Z(M)^\circ,G/\mathrm{R}_u(Q)}\cap\mathfrak{g}=\mathfrak{t}\cap[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]$. Отсюда $\mathfrak{a}_{G\times Z(M)^\circ,G/H}\cap\mathfrak{g}\subset\mathfrak{t}\cap[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]$. Для доказательства включения $W(\mathfrak{m},\mathfrak{h}/\mathrm{R}_u(\mathfrak{q}))\supset W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ остается применить предложение 5.4.4. □

Пусть теперь $G_1,\ldots,G_k$ – это все простые нормальные подгруппы в G, так что $G=Z(G)^\circ G_1\ldots G_k$. Положим $T_i=T\cap G_i$. Это максимальный тор в G_i.

Предложение 5.4.7. *Предположим, что $\operatorname{rk}_G(X_0)=\operatorname{rk}G$. Тогда $\mathfrak{a}_{G_i,X_0}=\mathfrak{t}_i$, $W_{G,X_0}=\prod_{i=1}^k W_{G_i,X_0}$, и $\Lambda_{G,X_0}=\bigoplus_{i=1}^k\Lambda_{G_i,X_0}$.*

Доказательство. Мы используем обозначения пункта 5.3. Как и в доказательстве леммы 3.8.7, мы можем считать, что $G = Z(G)^\circ \times G_1 \times \ldots \times G_k$. Для $i = \overline{0,k}$ положим $B_i = G_i \cap B, G^{(i)} = \prod_{j\neq i} G_j, B^{(i)} = B \cap G^{(i)}, T^{(i)} = T \cap G^{(i)}$.

Из следствия 5.3.4 и пункта 4 леммы 3.4.7 следует, что $\mathrm{rk}_{G_i}(X) = \mathrm{rk}\, G_i$, $\mathfrak{a}_{G_i,X} = \mathfrak{t}_i$.

Согласно предложению 2.2.4, можем выбрать открытое B-подмножество $X_0' \subset X$ и замкнутое T-подмногообразие $Z_0 \subset X_0'$ так, чтобы $X_0' \cong B *_T Z_0$. Для $i = 1,\ldots,k$ положим $Z_{0i} = B^{(i)} Z_0$. Поскольку $X_0' \cong B *_T Z_0$, то $Z_{0i} \cong B^{(i)} *_{T^{(i)}} Z_0$, $X_0' \cong B_i *_{T_i} Z_{0i}$. Поэтому подмножество $X_0' \subset X_0$ входит в тройку, факторизующую действие $B_i : X$.

Из равенства (5.1) немедленно следует, что

$$\mathcal{N}(B, X_0') = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{N}(B_i, X_0'). \tag{5.4}$$

Обозначим через Σ_i единственное T_i-сечение многообразия X, содержащее $G^{(i)}\Sigma$ (пункт 4 леммы 3.4.7). Принимая во внимание пункт 2 леммы 3.8.7 и предложение 4.6.1, мы видим, что для завершения доказательства достаточно проверить, что $\Sigma_i \cap \mathcal{N}(B_i, X_0') \neq \varnothing$. Это немедленно следует из $\Sigma \cap \mathcal{N}(B, X^0) \neq \varnothing$ и (5.4). □

Предложение 5.4.8. *Мы используем обозначения предложения 5.4.7.*

(1) *Пусть H – алгебраическая подгруппа в G, для которой $\mathrm{rk}_G(G/H) = \mathrm{rk}\, G$, и однородное пространство G/H квазиаффинно. Тогда G_i/H_i – квазиаффинное однородное пространство, и $W_{G_i,G/H} = W(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{h}), \Lambda_{G_i,G/H} = \Lambda(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{h})$.*

(2) *Пусть H – редуктивная подгруппа в G, а V – H-модуль. Предположим, что $\mathrm{rk}_G(G *_H V) = \mathrm{rk}\, G$. Тогда $W_{G_i, G*_H V} = W(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{h}, V)$.*

Доказательство. Для доказательства первого пункта следует заметить, что стабилизатор в группу G_i любой точки из G/H сопряжен с подгруппой $G_i \cap H$ и воспользоваться пунктом 4 предложения 2.3.1, предложением 2.5.4 и предложением 5.4.7.

Перейдем к пункту 2. Все G_i-орбиты в G/H имеют одинакоую размерность, и, следовательно, замкнуты. Выберем точку $x \in G/H$ с $G_{ix} = G_i \cap H$. Заметим, что G_x-модуль $T_x X/\mathfrak{g}_*^{(i)} x$ изоморфен прямой сумме G_x-модуля V и тривиального G_x-модуля V_0. По лемме 2.3.3, $W_{G_i,G*_H V} = W_{G_i, G_i *_{G_i\cap H}(V \oplus V_0)}$. Остается использовать лемму 2.3.4. □

5.5. **Доказательство теоремы редукции.** Для начала заметим, что многообразие $\underline{X}_0$ является гладким. Это следует из следующей стандартной леммы:

Лемма 5.5.1. *Пусть Y – квазиаффинное многообразие с действием редуктивной группы H, и $y \in Y^H \cap Y^{reg}$. Тогда многообразие Y^H гладко в точке y и $T_y(Y^H) = (T_y Y)^H$.*

Доказательство. Заменив Y на аффинное H-многообразие, содержащее Y в качестве открытого G-подмногообразия, мы можем считать, что многообразие Y является аффинным. В этом случае требуемое утверждение является легким следствием теоремы Луны о слайсах, см. [ВП], следствие в п. 6.5. □

Доказательство теоремы 5.1.3. Напомним, что существует открытое P-подмногообразие $X_0' \subset X_0$ и замкнутое L-подмногообразие $Z_0 \subset X_0'$, для которых $X_0' \cong P *_L Z_0$ (предложение 2.2.4). Пусть Σ – выделенное L-сечение гамильтонова G-многообразия X.

Положим $\underline{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cap \underline{\mathfrak{g}}$ и обозначим через $\underline{P}$ соответствующую подгруппу в $\underline{G}$. Это стандартная параболическая подгруппа. Поскольку $Z_0 \subset \underline{X}_0$ (предложение 2.6.6), имеет место морфизм $\varphi : \underline{P} *_{L/L_0^\circ} Z_0 \to X_0' \cap \underline{X}_0, [g,x] \mapsto gx, g \in P_1, x \in Z_0$. Напомним, что

$X_0' \cong P *_L Z_0 \cong \mathrm{R}_u(P) \times Z_0$. Поэтому $\underline{X}_0 \cap X_0' = \mathrm{R}_u(P)^{L_0^\circ} Z_0 \cong \mathrm{R}_u(P)^{L_0^\circ} \times Z_0$. В частности, морфизм φ сюръективен. Поскольку $\underline{P} = \mathrm{R}_u(P)^{L_0^\circ} \rightthreetimes (L/L_0^\circ)$, морфизм φ инъективен. Значит, поскольку многообразие $\underline{X}_0$ гладко, φ – изоморфизм. Из замечания 2.2.3 следует, что $\mathfrak{X}_{G,X_0} = \mathfrak{X}_{L,Z_0} = \mathfrak{X}_{\underline{G}^\circ,\underline{X}_0}, \mathfrak{a}_{G,X_0} = \mathfrak{a}_{L,Z_0} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}_0^\perp = \underline{\mathfrak{t}}$. Мы также видим, что подмножество $\underline{X}_0 \cap X_0'$ вкдючается в тройку, факторизующую действие $\underline{P} : \underline{X}_0$. Утверждение о равенстве выделенных компонент следует из явного вида выделенной компоненты, приведенного в предложении 2.6.6.

Обозначим через p проекцию $X \to X_0$. Для $x \in X_0^{L_0^\circ}$ подпространство $p^{-1}(x)^{L_0^\circ} \subset T_x^* X_0$ естественным образом отождествляется с $T_x^*(X_0^{L_0^\circ})$. Поэтому векторное расслоение $(T^*X_0)^{L_0^\circ} \to X_0^{L_0^\circ}$ совпадает с кокасательным расслоением многообразия $X_0^{L_0^\circ}$. В частности, имеет место вложение $\underline{X} := T^*\underline{X}_0 \hookrightarrow X$. Покажем, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mu_{\underline{G},\underline{X}}"] & X \arrow[d, "\mu_{G,X}"] \\
\underline{\mathfrak{g}} \arrow[r, hook] & \mathfrak{g}
\end{tikzcd} \tag{5.5}$$

Из G-эквивариантности отображения моментов следует, что $\mu_{G,X}(\underline{X}) \subset \mathfrak{g}^{L_0^\circ}$. Поскольку группа L_0° действует на $\underline{X}$ тривиально и $\underline{X} \cap \mu_{G,X}^{-1}(0) \neq \varnothing$, то $\mu_{G,X}(\underline{X}) \subset \mathfrak{l}_0^\perp$. Таким образом, $\mu_{G,X}(\underline{X}) \subset \underline{\mathfrak{g}}$. Коммутативность диаграммы следует теперь непосредственно из определений отображений моментов для действий $\underline{G} : \underline{X}, G : X$ (пример 3.2.4).

Положим $\mathfrak{a}^{pr} = \mathfrak{a}_{G,X_0} \cap \mathfrak{l}^{pr}$. Поскольку $\underline{\mathfrak{p}} = \underline{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{p}$, из коммутативной диаграммы (5.5) следует, что

$$\mathcal{N}(\underline{P}, \underline{X}_0 \cap X_0') \subset \mathcal{N}(P, X_0'). \tag{5.6}$$

Из теоремы 5.1.1 следует, что L/L_0° – главный централизатор гамильтонова $\underline{G}$-многообразия $\underline{X}$. Пусть $\underline{\Sigma}$ – выделенное L/L_0°-сечение многообразия $\underline{X}$. Из следствия 5.3.3 и коммутативной диаграммы (5.5) выводим, что $\underline{\Sigma} \subset \mu_{\underline{G},\underline{X}}^{-1}(\mathfrak{a}^{pr})$. Отсюда и из (5.6) получаем, что $\underline{\Sigma} \subset \Sigma$. Из леммы 5.3.1 следует, что $\Sigma \subset X^{L_0^\circ} = T^*(X_0^{L_0^\circ})$. Так как $\underline{\Sigma} \subset \Sigma$, а многообразие $X_0^{L_0^\circ}$ гладко, то $\Sigma \subset \underline{X}$. Из диаграммы (5.5) и следствия 5.3.3 следует, что $\Sigma \subset \mu_{\underline{G},\underline{X}}^{-1}(\mathfrak{a}^{pr})$. Отсюда $\underline{\Sigma} = \Sigma$.

Для завершения доказательства нам остается проверить равенство для групп Вейля. Мы должны показать, что

$$N_{\underline{G}}(L/L_0^\circ, \Sigma) = N_G(L, \Sigma)/L_0^\circ. \tag{5.7}$$

Мы знаем, что $N_G(L,\Sigma) \subset N_G(L_0^\circ)$. Заметим, что группа $N_G(L,\Sigma)$ оставляет на месте подмногообразие $\underline{X} \subset X$, как единственную компоненту в $X^{L_0^\circ}$, содержащую Σ. Значит, $N_G(L,\Sigma) \subset N_G(L_0^\circ, \underline{X}) = N_G(L_0^\circ, \underline{X}_0)$. Очевидно, что

$$N_{\underline{G}}(L/L_0^\circ, \Sigma) = N_{N_G(L_0^\circ, \underline{X}_0)}(L, \Sigma)/L_0^\circ. \tag{5.8}$$

Из включений $N_G(L,\Sigma) \subset N_G(L_0^\circ, \underline{X}_0) \subset G$ следует, что $N_G(L,\Sigma) \subset N_{N_G(L_0^\circ,\underline{X}_0)}(L,\Sigma) \subset N_G(L,\Sigma)$. А это, с учетом (5.8), дает (5.7). □

6. Нахождение выделенных компонент

6.1. **Введение.** В этом разделе мы укажем алгоритм вычисления выделенных компонент многообразия $X_0^{L^\circ_{0\,G,X}}$ для случая, когда X_0 однородное пространство или аффинное однородное векторное расслоение. Это завершит нахождение алгоритма вычисления пространства $\mathfrak{a}_{G,X_0}$ для указанных классов многообразий, см. пункты 2.6, 2.7. Кроме того, это позволит применять теорему редукции 5.1.3.

Положим $L_0 = L^\circ_{0\,G,G/H}$. Через $\underline{X}_0$ мы обозначаем выделенную компоненту многообразия $X_0^{L_0}$.

Для начала, опишем структуру выделенных компонент, как многообразий с действием группы.

Предложение 6.1.1. *Здесь через L_0 обозначена одна из групп $L_{0,G,X_0}, L^\circ_{0,G,X_0}$, а через $\underline{X}_0$ – выделенная компонента в многообразии $X_0^{L_0}$.*

1. *Пусть $X_0 = G/H$ – квазиаффинное однородное пространство. Тогда действие группы $N_G(L_0)^\circ$ на $\underline{X}_0$ транзитивно. Если $eH \in \underline{X}_0$, то группа $N_G(L_0, \underline{X}_0)$ совпадает с $N_G(L_0)^\circ N_H(L_0)$.*
2. *Пусть H – редуктивная подгруппа в G, а V – H-модуль, а $X_0 = G *_H V$. Выделенная компонента Y_0 многообразия $(G/H)^{L^\circ_{0\,G,G/H}}$ содержится в $\underline{X}_0$. Если $eH \in Y_0$, то $\underline{X}_0 = N_G(L_0)^\circ *_{H\cap N_G(L)^\circ} V^{L_0}$, $N_G(L_0, \underline{X}_0) = N_G(L_0)^\circ N_H(L_0)$.*

Таким образом, в обоих случаях выделенная компонента восстанавливается по произвольной точке лежащей в выделенной компоненте для однородного пространства. Далее мы сведем вычисление выделенных компонент для квазиаффинных однородных пространств к случаю аффинных однородных векторных расслоений. Напомним, что сопрягая подгруппу H, мы можем считать, что H правильно вложена в антистандартную параболическую подгруппу $Q \subset G$, так чтобы для стандартной подгруппы Леви $M \subset Q$ пересечение $M \cap H$ было подгруппой Леви в H. В этом случае M-многообразие Q/H является однородным векторным расслоением над $M/M \cap H$ (замечание 2.6.3).

Предложение 6.1.2. *Пусть $X = G/H$ – квазиаффинное однородное пространство, а Q, M таковы как выше. Выделенная компонента многообразия $(Q/H)^{L^\circ_{0\,M,Q/H}}$ содержится в $\underline{X}_0$.*

Пункт 2 предложения 6.1.1 позволяет сводить вычисление выделенных компонент от случая аффинных однородных векторных расслоений к случаю аффинных однородных пространств. Таким образом, осталось рассмотреть лишь последний случай.

Нам потребуется одно обозначение. Пусть $\mathfrak{h}$ – существенная подалгебра в $\mathfrak{g}$ (определение 2.7.2). Пусть $\widetilde{\mathfrak{h}}$ – прообраз подалгебры $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h})$ при каноническом эпиморфизме $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) \twoheadrightarrow \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$. Положим $\mathfrak{h}^{sat} = \widetilde{\mathfrak{h}}^{ess}$. По свойствам отображения $\mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h}^{ess}$, см. [Lo2], Corollary 2.8, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}^{sat}$. Непосредственно из построения следует, что подалгебра $\mathfrak{h}^{sat}$ является насыщенной в $\mathfrak{g}$ (определение 2.7.3).

Следующее предложение позволяет вычислять выделенные компоненты для аффинных однородных пространств.

Предложение 6.1.3. *Пусть H – редуктивная подгруппа в G, и $X_0 = G/H$. Тогда*

1. *Обозначим через H^{ess} связную подгруппу в G, соответствующую подалгебре $\mathfrak{h}^{ess}$, определенной в пункте 1 предложения 2.7.4. Обозначим через π проекцию $G/H^{ess} \to G/H, gH^{ess} \mapsto gH$, через $\underline{X}'_0$ выделенную компоненту многообразия $(G/H^{ess})^{L^\circ_{0\,G,G/H^{ess}}}$. Тогда $\underline{X}_0 \supset \pi(\underline{X}'_0)$.*

(2) *Предположим, что подалгебра $\mathfrak{h}$ является существенной, а группа H связна. Обозначим через H^{sat} связную подгруппу в G с касательной подалгеброй $\mathfrak{h}^{sat} \subset \mathfrak{g}$, через π проекцию $G/H \to G/H^{sat}, gH \mapsto gH^{sat}$, и через $\underline{X}_0'$ выделенную компоненту многообразия $(G/H^{sat})^{L^\circ_{0\,G,G/H^{sat}}}$. Тогда $\pi^{-1}(\underline{X}_0') \subset \underline{X}_0$.*

(3) *Пусть $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = (\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}_1)\oplus(\mathfrak{g}_2,\mathfrak{h}_2)$. Обозначим через G_1,G_2,H_1,H_2 связные подгруппы в G с касательными алгебрами $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2$, соответственно, через π проекцию $G_1/H_1\times G_2/H_2 \to G/H, (g_1H_1, g_2H_2)\mapsto g_1g_2H$, и через $\underline{X}_{0i}, i=1,2$, выделенную компоненту многообразия $(G_i/H_i)^{L^\circ_{0\,G_i,G_i/H_i}}$. Тогда $\underline{X}_0 = \pi(\underline{X}_{01}\times\underline{X}_{02})$.*

(4) *Пусть $\mathfrak{h}$ – одна из подалгебр, перечисленных в таблицах 2.1,2.2, а группа H связна. Тогда подмногообразие $\underline{X}_0 \subset X_0$ устойчиво относительно действия групп $N_G(L_0)$.*

(5) *Пусть $\mathfrak{h}, H$ таковы, как указано в пункте 6.4. Тогда $eH \in \underline{X}_0$.*

Первые три пункта сводят проблему нахождения точки с выделенной компоненты в $(G/H)^{L_0}$ к случаю, когда подгруппа H связна, а подалгебра $\mathfrak{h}$ насыщена, существенна и неразложима. Все такие подалгебры перечислены в таблицах 2.1,2.2, см. предложение 2.7.4. Пункт 5 решает проблему в этом случае. Пункт 4 имеет вспомогательный характер.

Дадим краткое описание раздела. В пункте 6.2 мы доказываем предложения 6.1.1, 6.1.2. В пункте 6.3 мы доказываем предложение 6.3.5, в котором вводится некоторое необходимое условие, которому удовлетворяют выделенные компоненты. В пункте 6.4 для подалгебр из таблиц 2.1,2.2 предъявляются их вложения $\mathfrak{h}\hookrightarrow\mathfrak{g}$, для которых точки eH удовлетворяют лежат на компонентах многообразия $(G/H)^{L^\circ_{0\,G,G/H}}$, удовлетворяющих необходимому условию из предложения 6.3.5. В пункте 6.5 мы завершаем доказательство предложения 6.1.3.

6.2. **Доказательства предложений 6.1.1,6.1.2.**

Доказательство предложения 6.1.1. Отметим прежде всего, что если F является редуктивной подгруппой в G, то для любой алгебраической подгруппы $H\subset G$ многообразие $(G/H)^F$ является объединением конечного числа $N_G(F)^\circ$ орбит. В самом деле, пусть $x\in(G/H)^F$, тогда

$$T_x(X^{L_0}) \subset (T_xX)^{L_0} = (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)^{L_0} = \mathfrak{g}^{L_0}/(\mathfrak{g}_x)^{L_0} = T_x(N_G(L_0)^\circ x).$$

Поэтому $T_x(X^{L_0}) = T_x(N_G(L_0)^\circ x)$. Остается заметить, что $N_G(L_0)^\circ x$ является гладким неприводимым подмногообразием в $\underline{X}_0$. Поэтому в пункте 1 $\underline{X}_0$ является однородным пространством. Утверждение о структуре группы $N_G(L_0,\underline{X}_0)$ очевидно.

Перейдем к доказательству утверждений пункта 2. Очевидно, что проекция $X_0^{L_0}\to(G/H)^{L_0}$ сюръективна и слой над точкой $x\in(G/H)^{L_0}$ совпадает с $\pi^{-1}(x)^{L_0}$, где π – естественная проекция $X_0\to G/H$. Отсюда следует, что $\underline{X}_0$ является однородным векторным расслоением над некоторой компонентой многообразия $(G/H)^{L_0}$. Отметим также, что $N_G(L_0,\underline{X}_0) = N_G(L_0,\pi(\underline{X}_0))$. Отсюда следует утверждение о структуре группы $N_G(L_0,\underline{X}_0)$.

Остается доказать, что выделенная компонента Y_0 многообразия $(G/H)^{L_1}$, где $L_1 = L^\circ_{0\,G,G/H}$, содержится в $\underline{X}_0$. Для этого достаточно показать, что подмножество $U(\pi^{-1}(Y_0)^{L_0})$ плотно в X_0. Заметим сначала, что из предложения 2.6.8, следует, что $(U\cap L_1)\pi^{-1}(x)^{L_0}$ плотно в $\pi^{-1}(x)$ для всех $x\in Y_0$. Остается напомнить, что $\overline{UY_0} = G/H$. □

Доказательство предложения 6.1.2. По предложению 2.6.4, $L_0 = L^\circ_{0\,M,Q/H}$. Обозначим через Y_0 выделенную компоненту в $(Q/H)^{L_0}$. По определению, $(U\cap M)Y_0$ плотно в Q/H. Остается заметить, что подмножество $U(Q/H)$ плотно в X_0. $\square$

6.3. **Вспомогательный результат.** Здесь мы исследуем структуру компонент многообразия $X_0^{L_0}$ в случае, когда X_0 – гладкое аффинное многообразие.

В этом пункте и далее нам потребуется понятие локально ортогонализуемого многообразия.

Вот общее определение локальной ортогонализуемости.

Определение 6.3.1. Гладкое аффинное G-многообразие Y назовем *локально ортогонализуемым*, если для любой точки y с замкнутой G-орбитой G_y-модуль T_yY ортогонализуем.

Замечание 6.3.2. Отметим, что в определении мы можем требовать ортогонализуемости слайс-модуля $T_yY/\mathfrak{g}_*y$, вместо модуля T_yY. Действительно, G_y-модуль $\mathfrak{g}_*y \cong \mathfrak{g}_y^\perp$ ортогонализуем. Если слайс-модуль ортогонализуем, то то же верно для T_yY, т.к. $T_yY \cong \mathfrak{g}_*y \oplus (T_yY/\mathfrak{g}_*y)$. Обратно, если модуль $T_yY \cong \mathfrak{g}_*y \oplus (T_yY/\mathfrak{g}_*y)$ ортогонализуем, то прибавляя к его форме некоторое кратное формы на $\mathfrak{g}_*y$, мы добъемся того, чтобы ограничение формы на $\mathfrak{g}_*y$ было невырождено. Отождествив $T_yY/\mathfrak{g}_*y$ с ортогональным дополнением к $\mathfrak{g}_*y$, мы получим требуемую форму на слайс-модуле.

Следующая простая лемма доставляет примеры локально-ортогонализуемых многообразий.

Лемма 6.3.3. (1) *Пусть H – редуктивная подгруппа в G, и V – H-модуль. Тогда G-многообразие $G*_HV$ локально ортогонализуемо тогда и только тогда, когда H-модуль V ортогонализуем.*

(2) *Пусть Y – локально ортогонализуемое G-многообразие, и $y \in Y$ – точка с замкнутой G-орбитой. Тогда $G *_{G_y} (T_yY/\mathfrak{g}_*y)$ – локально ортогонализуемое G-многообразие.*

(3) *Пусть X_0 – гладкое аффинное G-многообразие. Тогда T^*X_0 – локально ортогонализуемое G-многообразие.*

(4) *Если X – локально ортогонализуемое G-многообразие, и G^0 – подгруппа в G содержащая G, то X локально ортогонализуемо и как G^0-многообразие.*

Доказательство. Для доказательства первого пункта достаточно заметить, что в точке $y = [e,v] \in G *_H V$ $G_y = H_v$-модуль $T^*_y(G *_H V)$ отождествляется с $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \oplus V$ и применить рассуждения из замечания 6.3.2. Второй пункт тривиально следует из первого и замечания 6.3.2. Для доказательства утверждения пункта 3 заметим, что для $y \in T^*X_0$ с замкнутой G-орбитой G_y-модуль $T_y(T^*X_0)$ изоморфен $T_{\pi(y)}X_0 \oplus T^*_{\pi(y)}X_0$, где $\pi : T^*X_0 \to X_0$ – каноническая проекция. В пункте 4 достаточно заметить, что из замкнутости орбиты Gx следует замкнутость орбиты G^0x. $\square$

В следующем предложении нам понадобится понятие стабилизатора общего положения.

Определение 6.3.4. Пусть алгебраическая группа H действует на неприводимом многообразии Y. Погруппа $H_0 \subset H$ называется стабилизатором общего положения (сокращенно, с.о.п.) для действия $H : Y$, если найдется открытое подмногообразие $Y^0 \subset Y$, для которого подгруппы H_y и H_0 сопряжены в H для всех $y \in Y^0$.

Предложение 6.3.5. *Пусть X_0 – гладкое аффинное G-многообразие, L_0 – одна из групп $L_{0\,G,X_0}, L^\circ_{0\,G,X_0}$, а $\underline{X}_0$ – выделенная компонента в $X_0^{L_0}$. Тогда $\dim X_0^{L_0} = \dim X_0 - \frac{\dim G - \dim N_G(L_0)}{2}$. Компонента многообразия $X_0^{L_0}$ сопряжена с $\underline{X}_0$ под действием группы $N_G(L)$ тогда и только тогда, когда её размерность равна $\dim X_0^{L_0}$.*

Доказательство. Из предложения 2.6.6 следует (в обозначениях этого предложения), что $\dim \underline{X}_0 = \dim X - \dim \mathrm{R}_u(P) + \dim F$. Поскольку F является максимальной унипотентной подгруппой в $N_G(L_0)/L_0$, выполняется равенство $\dim X_0 = \dim X_0 - (\dim G - \dim N_G(L_0))/2$.

Положим $X = T^*X_0$. Как показано в [Kn1], Korollar 8.2, подгруппа $L_{0\,G,X} \subset G$ является с.о.п для действия $G : X$. По лемме 6.3.3 G-многообразие X является локально ортогонализуемым, а значит, действие $G : X$ стабильно (т.е. его общая орбита замкнута). Это следует, например, из работы [Lu1].

Поскольку действие $G : X$ стабильно, группа $N_G(L_0)$ транзитивно переставляет неприводимые (=связные) компоненты многообразия X^{L_0}, пересекающие множество $\{x \in X | (G_x)^\circ = L_0, Gx \text{ замкнута}\}$ (для $L_0 = L_{0\,G,X}$ надо заменить условие $G_x^\circ = L_0$ на $G_x = L_0$). Это следует из теоремы об ограничении, принадлежащей Луне и Ричардсону, см. [LR]. Эти компоненты характеризуются в точности тем, что морфизм факторизации доминантно (или, что эквивалентно по основной теореме из [LR], сюръективно) отображает их на $X/\!/G$. Пусть Z – такая компонента, и $G_0 = N_G(L_0, Z)$. Тогда морфизм $G *_{G_0} Z \to X$ является бирациональным. Действительно, указанный морфизм доминантен, поскольку точка общего положения из X G-сопряжена точке из Z. С другой стороны, для $z \in Z$ общего положения выполняется равенство $(G_z)^\circ = L_0$ (или $G_z = L_0$). Поэтому включение $gz \in Z$ влечет $g \in G_0$. Это доказывает инъективность морфизма в общей точке. Из бирациональности морфизма следует, что $\dim Z = \dim X - \dim G + \dim G_0$.

Обозначим через π проекцию $X \to X_0$. Как было замечено в доказательстве теоремы 5.1.3 (пункт 5.5), ограничение морфизма π на X^{L_0} является кокасательным расслоением $X^{L_0} \to X_0^{L_0}$. Пусть Z_0 – неприводимая компонента многообразия $X_0^{L_0}$, и $Z = \pi^{-1}(Z_0) \cap X^{L_0}$. Это неприводимая компонента многообразия X^{L_0}.

Остается показать, что $\dim Z_0 \leqslant \dim X - (\dim G - \dim N_G(L_0))/2$ и что если выполняется равенство, то подмножество $\pi(Z)$ плотно в $X/\!/G$.

Поскольку Z является кокасательным расслоением над аффинным многообразием, действие $N_G(L_0)^\circ : Z$ стабильно. Пусть L_Z – с.о.п. для этого действия. Имеет место равенство

$$\dim Z/\!/N_G(L_0)^\circ = \dim Z - \dim N_G(L_0) + \dim L_Z. \tag{6.1}$$

Очевидно, что $L_0 \subset L_Z$.

Морфизм $Z/\!/N_G(L_0)^\circ \to X/\!/G$, индуцированный вложением $Z \hookrightarrow X$ конечен (см. [ВП], теорема 6.16). Отсюда следует, что

$$\dim Z - \dim N_G(L_0) + \dim L_Z \leqslant \dim X - \dim G + \dim L_0,$$

или, эквивалентно,

$$2\dim Z_0 \leqslant 2\dim X_0 - \frac{\dim G - \dim N_G(L_0)}{2} - (\dim L_Z - \dim L_0).$$

Применение равенства (6.1) завершает доказательство. □

6.4. **Вложения подалгебр.** В этом разделе мы строим вложения $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ для пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ из таблиц 2.1,2.2. В следующем пункте мы увидим, что соответствующие точки eH однородных пространств лежат на выделенных компонентах. Для этого необходимо, чтобы $\mathfrak{l}_0 \subset \mathfrak{h}$ и, по предложению 6.3.5, чтобы

$$2(\dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0)) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0). \tag{6.2}$$

Предложение 6.4.1. *Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ – пара одной из следующих форм*

(1) *Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ из таблицы 2.1.*

(2) *Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, где $\mathfrak{h} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]))$, а пара $(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])$ приведена в таблице 2.2.*

Предположим, что вложение $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \hookrightarrow \mathfrak{g}$ таково, как описано ниже в этом пункте. Тогда $\mathfrak{l}_0 \subset \mathfrak{h}$ и выполняется равенство (6.2).

Это предложение проверяется ниже для каждого случая по отдельности.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$.

1) Подалгебра $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{sl}_k, \frac{n}{2} \leqslant k < n$, (первые строки таблиц 2.1,2.2) вложена в $\mathfrak{g}$ как аннулятор векторов $e_1, \ldots, e_{n-k}$. В обоих случаях ($\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = 0$ или 1) мы получаем

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0) = 4(n-k)^2 + (2k-n)^2 - 1, \dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0) = (n-k)^2 + (2k-n)^2 - 1 + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{h}).$$

2) Подалгебра $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{sl}_k \times \mathfrak{sl}_{n-k}, \frac{n}{2} \leqslant k < n-1$ (вторые строчки в обеих таблицах) вложена в $\mathfrak{g}$, как полупростая часть алгебры $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f})$, где подалгебра $\mathfrak{f} \cong \mathfrak{sl}_k$ вложена так, как в пункте 1). В обоих случаях

$$\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0) = 4(n-k) + (2k-n)^2 - 1,$$

$$\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0) = 2(n-k) + (2k-n)^2 - 1 + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{h}).$$

3) Пусть $n = 2m$. Подалгебра $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_{2m}$ (строка N3 таблицы 2.1) вложена в $\mathfrak{sl}_{2n}$, как аннулятор 2-формы $e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 + \ldots + e^{2n-1} \wedge e^{2n}$. Мы получаем $\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0) = 4n - 1, \dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0) = 3n$.

4) Пусть $n = 2m+1$. Подалгебра $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{sp}_{2n}$ (третья строка таблицы 2.2) вложена в $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n+1}$, как аннулятор векторов e_1, e^1 и 2-формы $e^2 \wedge e^3 + \ldots + e^{2n} \wedge e^{2n+1}$. В этом случае $\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0) = 2n^2 + 2n, \dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0) = n^2$.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$.

1) Подалгебра $\mathfrak{sp}_{2k}, k \geqslant \frac{n}{2}$ (N4 таблицы 2.1) вложена в $\mathfrak{sp}_{2n}$, как аннулятор $2(n-k)$ векторов $e_1 + e_{n+2}, e_2 - e_{n+1}, e_3 + e_{n+4}, e_4 - e_{n+3}, \ldots, e_{2(n-k)} - e_{3n-2k-1}$. В этом случае

$$\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0) = 8(n-k)^2 + 2(2k-n)^2 + n, \dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0) = 2(n-k)^2 + 2(2k-n)^2 + k.$$

2) Подалгебра $\mathfrak{sp}_{2n-2k} \times \mathfrak{sp}_{2k}, k \geqslant \frac{n}{2}$, вложена в $\mathfrak{sp}_{2n}$ как $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f})$, где подалгебра $\mathfrak{f} \cong \mathfrak{sp}_{2k}$ вложена, как в 1). Мы имеем

$$\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0) = 4(n-k) + 2(2k-n)^2 + (2k-n), \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0) = 3(n-k) + 2(2k-n)^2 + (2k-n).$$

Замечание 6.4.2. Объясним этот, странный на первый взгляд, способ вложения. Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2k} \times \mathfrak{sp}_{2(n-k)})$ является симметрической. Соответствующая инволюция σ действует на аннуляторе подалгебры $\mathfrak{sp}_{2(n-k)} \subset \mathfrak{h}$ в $\mathbb{C}^{2n}$ тождественно, а на аннуляторе подалгебры $\mathfrak{sp}_{2k} \subset \mathfrak{sp}_{2n}$ умножением на -1. При выбранном вложении, σ действует на $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ умножением на -1, иными словами, $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ является картановским пространством пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Отметим также, что существует вложение $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ с $\mathfrak{l}_0 \subset \mathfrak{h}$, которое не $N_G(\mathfrak{l}_0)$-сопряжено приведенному выше. В самом деле, возьмем вложение $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, для которого $\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0)$ больше размерности, вычисленной выше. Таковым является вложение $\mathfrak{sp}_{2k} \times \mathfrak{sp}_{2(n-k)} \hookrightarrow \mathfrak{sp}_{2n}$, для которого $\mathfrak{sp}_{2k}$ является аннулятором подпространства $\langle e_1, \dots, e_{n-k}, e_{n+1}, \dots, e_{2n-k}\rangle$.

3) Подалгебра $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sp}_{2n-4}, n \geqslant 3$, (строки NN 6,7 таблицы 2.1) вложена в $\mathfrak{sp}_{2n}$ следующим образом: аннулятор идеала $\mathfrak{sp}_{2n-4}$ (соотв., одного из идеалов $\mathfrak{sl}_2 \subset \mathfrak{h}$) равен $\langle e_1, e_2, e_{n+1}, e_{n+2}\rangle \subset \mathbb{C}^{2n}$ (соотв., $\langle e_2, e_3, \dots, e_n, e_{n+2} \dots, e_{2n}\rangle$). Если $n \geqslant 8$, то $\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0) = 16 + 2(n-4)^2 + (n-4), \dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0) = 6 + 2(n-4)^2 + (n-4)$. Если же $n = 3$, то $\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0) = 9, \dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0) = 3$.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n, n \geqslant 7$.

1) Подалгебра $\mathfrak{so}_k, k \geqslant \frac{n+2}{2}$, (строка 8 таблицы 2.1) вложена в $\mathfrak{so}_n$, как аннулятор векторов $e_1, e_2, \dots, e_l, e_n, \dots, e_{n-l+1}$ для $n-k = 2l$, или как аннулятор векторов $e_1, e_2, \dots, e_l$, $e_n, \dots, e_{n-l+1}, e_{l+1} + e_{n-l}$ для $n - k = 2l + 1$ (здесь $m = [n/2]$). В этом случае

$$\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0) = \frac{(2k-n)(2k-n-1)}{2} + (n-k)(2n-2k-1),$$

$$\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0) = \frac{(2k-n)(2k-n-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}.$$

2) Пусть $n = 2m$. Подалгебра $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{sl}_m$ (строки NN 9,10 таблицы 2.1 и четвертая строка таблицы 2.2) вложена в $\mathfrak{so}_{2m}$ так, чтобы $\mathfrak{h}$ оставляла на месте изотропные подпространства $\langle e_1, \dots, e_m\rangle, \langle e_{m+1}, \dots, e_{2m}\rangle$. Отметим, что при таком выборе вложения для m, делящегося на 2, подалгебра $\mathfrak{h}$ содержится в аннуляторе старшего вектора из $V(\pi_m)$. Если m – четное число, то $\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0) = 3m, \dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0) = 2m-1$, а если нечетное, то $\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0) = 3m-2, \dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0) = 2m - 2 + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$.

3) Подалгебра $\mathfrak{spin}_7$ вложена в $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_9$ (строка 11 таблицы 2.1), как аннулятор старшего и младшего векторов в $\mathfrak{so}_9$-модуле $V(\pi_4)$. При таком выборе вложения $\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0) = 12, \dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0) = 9$.

4) В качестве вложения $\mathfrak{spin}_7 \hookrightarrow \mathfrak{so}_{10}$ (строка 12 таблицы2.1) мы берем композицию вложений $\mathfrak{spin}_7 \hookrightarrow \mathfrak{so}_9, \mathfrak{so}_9 \hookrightarrow \mathfrak{so}_{10}$, описанных выше. В этом случае $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0) = 21, \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0) = 9$.

5) Подалгебра G_2 вложена в $\mathfrak{so}_7$ (строка 13 таблицы 2.1), как аннулятор суммы старшего и младшего векторов $\mathfrak{so}_7$-модуля $V(\pi_3)$. Выполняется равенство $\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0) = 9, \dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0) = 8$.

6) В качестве вложения $G_2 \hookrightarrow \mathfrak{so}_8$ (строка 14 таблицы 2.1) мы берем композицию вложений $G_2 \hookrightarrow \mathfrak{so}_7, \mathfrak{so}_7 \hookrightarrow \mathfrak{so}_8$, описанных выше. Здесь $\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0) = 12, \dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0) = 6$.

Случай $\mathfrak{g} = G_2$.

Подалгебра A_2 (строка 15 таблицы 2.1) вложена в G_2, как регулярная подалгебра, соответствующая подсистеме, состоящей из длинных корней. В этом случае $\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0) = 6, \dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{l}_0) = 4$.

Случай $\mathfrak{g} = F_4$.

1) Подалгебра B_4 вложена в F_4 (строка 16 таблицы 2.1) следующим образом. Имеем равенство $\dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0) = 22$. Равенство (6.2) выполнено тогда и только тогда, когда подалгебра $\mathfrak{l}_0 \cong \mathfrak{so}_7$ вложена в $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{so}_9$, как $\mathfrak{spin}_7$. Положим $\alpha = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4}{2}$, $x = e_\alpha + e_{-\alpha}$. Пусть $\mathfrak{h}_0$ – регулярная подалгебра в $\mathfrak{g}$, соответствующая корневой подсистеме $\{\pm\varepsilon_i, \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\}$. Элемент $x \in \mathfrak{h}_0^\perp$ является суммой старшего и младшего векторов $\mathfrak{h}_0$-модуля $\mathfrak{h}_0^\perp$. Поэтому $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_0}(x) \cap \mathfrak{h}_0$ – это подалгебра $\mathfrak{spin}_7$. Положим теперь $\mathfrak{h} = \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h}_0$, где $g \in G$ – такой элемент, что $\mathrm{Ad}(g)x = \varepsilon_1^\vee$. Такой элемент g можно получить в виде

произведения $g = g_2 g_1$, где g_1 – такой элемент в $N_G(\mathfrak{t})$, что $g_1 \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4}{2} = \varepsilon_1$, а g_2 – подходящий элемент подгруппы $\mathrm{SL}_2 \subset G$, соответствующей $\mathfrak{sl}_2$-тройке $(e_{\varepsilon_1}, \varepsilon_1^\vee, e_{-\varepsilon_1})$.

2) Подалгебра D_4 (строка 17 таблицы 2.1) вложена в $\mathfrak{g}$, как регулярная подалгебра, соответствующая подсистеме длинных корней. Выполняются равенства $\dim \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0) = 16, \dim \mathfrak{n}_\mathfrak{h}(\mathfrak{l}_0) = 10$.

Случай $\mathfrak{g} = E_6$.

1) Подалгебра F_4 (строка N18 таблицы 2.1) вложена в $\mathfrak{g}$, как аннулятор вектора $v_{\pi_1} + v_{-\pi_5} + v_{\pi_5-\pi_1} \in V(\pi_1)$ (где v_λ обозначает произвольный ненулевой вектор веса λ). В этом случае $\dim \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0) = 30, \dim \mathfrak{n}_\mathfrak{h}(\mathfrak{l}_0) = 28$.

2) Подалгебра D_5 (строка N19 таблицы 2.1 и пятая строка таблицы 2.2) вложена в E_6, как $\mathfrak{g}^{(\{\alpha_i\}_{i=\overline{2,6}})}$. При таком вложении $\dim \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0) = 22, \dim \mathfrak{n}_\mathfrak{h}(\mathfrak{l}_0) = 17 + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$.

3) В качестве вложения $B_4 \hookrightarrow E_6$ (строка 20 таблицы 2.1) мы берем композицию вложений $B_4 \hookrightarrow D_5$, $D_5 \hookrightarrow E_6$, рассмотренных выше. В этом случае $\dim \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0) = 38, \dim \mathfrak{n}_\mathfrak{h}(\mathfrak{l}_0) = 16$.

4) Подалгебра A_5 (строка 21 таблицы 2.1) вложена в E_6, как $\mathfrak{g}^{(\{\alpha_i\}_{i=\overline{1,5}})}$. В этом случае $\dim \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0) = 30, \dim \mathfrak{n}_\mathfrak{h}(\mathfrak{l}_0) = 11$.

Случай $\mathfrak{g} = E_7$.

1) Подалгебра $\mathfrak{h} = E_6$ (строка N22 таблицы 2.1) вложена в $\mathfrak{g}$, как $\mathfrak{g}^{(\{\alpha_i\}_{i=\overline{2,7}})}$. Здесь $\dim \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0) = 37, \dim \mathfrak{n}_\mathfrak{h}(\mathfrak{l}_0) = 30$.

2) Подалгебра $\mathfrak{h} = D_6$ (строка N23 таблицы 2.1) вложена в $\mathfrak{g}$, как $\mathfrak{g}^{(\{\alpha_i\}_{i=\overline{1,6}})}$. Получаем $\dim \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0) = 37, \dim \mathfrak{n}_\mathfrak{h}(\mathfrak{l}_0) = 18$.

Случай $\mathfrak{g} = E_8$.

Подалгебра $\mathfrak{h} = E_7$ ($N24$ в таблице 2.1) вложена в $\mathfrak{g}$, как $\mathfrak{g}^{(\{\alpha_i\}_{i=\overline{2,8}})}$. Здесь $\dim \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0) = 56, \dim \mathfrak{n}_\mathfrak{h}(\mathfrak{l}_0) = 37$.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$.

Фиксируем борелевскую подгруппу $B_0 \subset H$ и максимальный тор T_0 в B_0, и строим по ним борелевскую подгруппу и максимальный тор в G (см. раздел 12). Вложение $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ задается формулой $\xi \mapsto (\xi, w_0\xi)$. Здесь w_0 – элемент в $N_H(T_0)$, отображающийся в элемент максимальной длины в группе Вейля. Имеем $\dim \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0) = 2\,\mathrm{rk}\,\mathfrak{h}, \dim \mathfrak{n}_\mathfrak{h}(\mathfrak{l}_0) = \mathrm{rk}\,\mathfrak{h}$.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sp}_{2m}, m \geqslant 1, n > 1$.

Пусть $e_1, \ldots, e_{2n}, e_1', \ldots, e_{2m}'$ – стандартные базисы в пространствах $\mathbb{C}^{2n}, \mathbb{C}^{2m}$, соотв., а симплектические формы выбраны как указано в разделе 12. Мы вкладываем $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_{2n-2} \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sp}_{2m-2}$ в $\mathfrak{g}$ как стабилизатор подпространства $\langle e_1 + e_1', e_{n+1} + e_{m+1}' \rangle$. Имеем $\dim \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0) = 2(n-2)^2 + n - 2 + 2(m-2)^2 + (m-2) + 8, \dim \mathfrak{n}_\mathfrak{h}(\mathfrak{l}_0) = 2(n-2)^2 + n - 2 + 2(m-2)^2 + (m-2) + 3$ для $m > 1$ и $\dim \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0) = 2(n-2)^2 + n - 2 + 5, \dim \mathfrak{n}_\mathfrak{h}(\mathfrak{l}_0) = 2(n-2)^2 + n - 2 + 2(m-2)^2 + (m-2) + 2$ для $m = 1$.

В заключение этого пункта мы приведем подалгебры $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0)/\mathfrak{l}_0, \mathfrak{n}_\mathfrak{h}(\mathfrak{l}_0)/\mathfrak{l}_0$ для вложений $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ из таблицы 2.1, перечисленных выше. Это сделано в таблице 6.1. В первом столбце приведен номер пары в таблице 2.1. В четвертом столбце приведены элементы в $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, образующие систему простых корней в алгебре $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0)/\mathfrak{l}_0$. Эти сведения будут использованы в пункте 7.6 для вычисления групп Вейля аффинных однородных пространств.

Таблица 6.1: Пары $(\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0)/\mathfrak{l}_0, \mathfrak{n}_\mathfrak{h}(\mathfrak{l}_0)/\mathfrak{l}_0)$

N	$\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0)/\mathfrak{l}_0$	$\mathfrak{n}_\mathfrak{h}(\mathfrak{l}_0)/\mathfrak{l}_0$	простые корни алгебры $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0)/\mathfrak{l}_0$
1	$\mathfrak{sl}_{2(n-k)}$	$\mathfrak{sl}_{n-k}$	$\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, i < n-k$ или $i \geqslant k$, $\varepsilon_{n-k} - \varepsilon_k$

N	$\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0)/\mathfrak{l}_0$	$\mathfrak{n}_\mathfrak{h}(\mathfrak{l}_0)/\mathfrak{l}_0$	простые корни алгебры $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0)/\mathfrak{l}_0$
2	$\mathfrak{sl}_2^{n-k}\oplus\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^{n-k}:(\mathbb{C},\ldots,\mathbb{C},0)$	$\varepsilon_i-\varepsilon_{n+1-i}, i\leqslant n-k.$
3	$\mathbb{C}^n$	0	
4	$\mathfrak{sp}_{4(n-k)}$	$\mathfrak{sp}_{2(n-k)}$	$\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}, i<2(n-k), \varepsilon_{2(n-k)}$
5	$\mathbb{C}^{n-k}$	0	
6	$\mathfrak{sl}_4$	$\mathfrak{sl}_2\times\mathbb{C}^2$	$\varepsilon_1-\varepsilon_4,\varepsilon_3+\varepsilon_4,\varepsilon_2-\varepsilon_3$
7	$\mathfrak{sl}_3$	$\mathbb{C}^2$	$\varepsilon_1+\varepsilon_3,\varepsilon_2-\varepsilon_3$
8	$\mathfrak{so}_{2(n-k)}$	$\mathfrak{so}_{n-k}$	$\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}, i<n-k, \varepsilon_{n-k+1}+\varepsilon_{n-k}$
9	$\mathfrak{sl}_2^n$	$\mathbb{C}^n$	$\varepsilon_{2i-1}+\varepsilon_{2i}, i=\overline{1,n}$
10	$\mathfrak{sl}_2^n\oplus\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^{n+1}$	$\varepsilon_{2i-1}+\varepsilon_{2i}, i=\overline{1,n}$
11	$\mathfrak{sl}_2\times\mathbb{C}$	$\mathbb{C}:(\mathbb{C},\mathbb{C})$	ε_1
12	$\mathfrak{so}_6\times\mathfrak{sl}_2$	$\mathfrak{sl}_2\times\mathfrak{sl}_2:(\mathfrak{so}_4,\mathfrak{sl}_2)$	$\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_2-\varepsilon_5,-\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_3+\varepsilon_4$
13	$\mathbb{C}$	0	
14	$\mathfrak{sl}_2^3$	$\mathfrak{sl}_2$: $(\mathfrak{sl}_2,\mathfrak{sl}_2,\mathfrak{sl}_2)$	$\varepsilon_1-\varepsilon_4,\varepsilon_1+\varepsilon_4,\varepsilon_2+\varepsilon_3$
15	$\mathfrak{sl}_2$	$\mathbb{C}$	ε_1
16	$\mathfrak{sl}_2$	$\mathbb{C}$	ε_1
17	$\mathfrak{sl}_3$	$\mathbb{C}^2$	$(\varepsilon_1\pm(\varepsilon_2+\varepsilon_3\pm\varepsilon_4))/2$
18	$\mathbb{C}^2$	0	
19	$\mathfrak{sl}_2^2\times\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^2:(\mathbb{C},\mathbb{C},\mathbb{C})$	$\varepsilon_1-\varepsilon_6, 2\varepsilon$
20	$\mathfrak{sl}_6$	$\mathfrak{sp}_4\times\mathfrak{sl}_2$	$\varepsilon-\varepsilon_1-\varepsilon_3-\varepsilon_4,\varepsilon_1-\varepsilon_2,$ $\varepsilon_2-\varepsilon_5,\varepsilon_5-\varepsilon_6,\varepsilon+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_6$
21	$\mathfrak{so}_8$	$\mathfrak{sl}_2^3$	$\varepsilon_1-\varepsilon_6,\varepsilon+\varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_6,\varepsilon_2-\varepsilon_5,\varepsilon_3-\varepsilon_4$
22	$\mathfrak{sl}_2^3$	$\mathbb{C}^2:(\mathbb{C},\mathbb{C},\mathbb{C})$	$\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_6,\varepsilon_8-\varepsilon_7$
23	$\mathfrak{so}_8$	$\mathfrak{sl}_2^3$	$\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_7+\varepsilon_8,\varepsilon_6-\varepsilon_7,\varepsilon_5-\varepsilon_6,\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_7+\varepsilon_8$
24	$\mathfrak{so}_8$	$\mathfrak{sl}_2^3$	$\varepsilon_2-\varepsilon_3,\varepsilon_1-\varepsilon_2,-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_9,\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_8$
25	$\mathbb{C}^{\mathrm{rk}\,\mathfrak{h}}$	0	
26	$\mathfrak{sl}_2^2\times\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^2:(\mathbb{C},\mathbb{C},\mathbb{C})$	$\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_1'+\varepsilon_2'$
27	$\mathfrak{sl}_2\times\mathbb{C}$	$\mathbb{C}:(\mathbb{C},\mathbb{C})$	$\varepsilon_1+\varepsilon_2$

В скобках после алгебры $\mathfrak{n}_\mathfrak{h}(\mathfrak{l}_0)/\mathfrak{l}_0$ во третьем столбце указаны её проекции на идеалы алгебры $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{l}_0)/\mathfrak{l}_0$, если последняя алгебра не проста, и $\mathfrak{n}_\mathfrak{h}(\mathfrak{l}_0)/\mathfrak{l}_0\neq 0$.

6.5. **Доказательство предложения 6.1.3.**

Доказательство. Пункт 1. Отметим, что $L^\circ_{0\,G,G/H^{ess}}=L^\circ_{0\,G,G/H}$. Понятно, что $\pi(\underline{X}_0')\subset X_0^{L_0}$. Далее, $\overline{U\pi(\underline{X}_0')}=\pi(\overline{U\underline{X}_0'})=\pi(G/H^{ess})=X$. Поэтому $\pi(\underline{X}_0')\subset\underline{X}_0$.

Пункт 2. Положим $P=P_{G,G/H}, L=L_{G,G/H}$. Применим предложение 2.2.4 к действию $G:G/H^{sat}$. Получим открытое P-вложение $\mathrm{R}_u(P)\times S\hookrightarrow G/H^{sat}$, где $\mathrm{R}_u(P)$ действует на $\mathrm{R}_u(P)$ левыми сдвигами, L сопряжениями, а действие $P:S$ пропускается через действие группы L с ядром неэффективности $L_{0\,G,G/H^{sat}}$. Имеем отсюда открытое P-вложение $\mathrm{R}_u(P)\times\pi^{-1}(S)\hookrightarrow G/H$. Из замечания 2.2.3 следует, что $\mathfrak{X}_{G,X_0}=\mathfrak{X}_{L,\pi^{-1}(S)}$, откуда получаем, что действие $(L,L):\pi^{-1}(S)$ тривиально. По предложению 2.6.6, $\underline{X}_0'=\overline{\mathrm{R}_u(P)^{L^\circ_{0\,G,G/H^{sat}}}S}, \underline{X}_0=\overline{\mathrm{R}_u(P)^{L_0}\pi^{-1}(S)}$. Заметим, что $\mathrm{R}_u(P)^{L^\circ_{0\,G,G/H^{sat}}}\pi^{-1}(S)$ является плотным подмножеством в $\pi^{-1}(\underline{X}_0'))$. Это дает требуемое.

Пункт 3. Это очевидно.

Пункт 4. Здесь $L=L_{G,G/H}$.

По предложению 6.1.1, достаточно показать, что

$$N_G(L_0)=N_G(L_0)^\circ N_H(L_0). \tag{6.3}$$

Отметим, что $Z(G) \subset L \subset N_G(L_0)^\circ N_H(L_0)$. Поэтому при доказательстве мы всегда можем рассматривать такую группу G с касательной алгеброй $\mathfrak{g}$, какую нам удобно.

Доказательство равенства (6.3) будет проведено в два шага. Положим $N_G(L_0)_0 = Z_G(L_0)L_0, N_H(L_0)_0 = Z_H(L_0)L_0$. Это подгруппы в соответствующих нормализаторах, состоящие в точности из тех элементов, которые действуют на $\mathfrak{l}_0$ внутренними автоморфизмами. На первом шаге мы покажем, что $N_G(L_0)_0 = N_H(L_0)_0 N_G(L_0)^\circ$, а на втором, что $N_G(L_0) = N_G(L_0)_0 N_H(L_0)$. Отметим, что $N_G(L_0)_0 = Z_G(L_0)L_0$. Поэтому утверждение первого шага эквивалентно связности группы $Z_G(L_0)/Z_H(L_0)$.

Шаг 1.

Лемма 6.5.1. *Пусть $\mathfrak{m}_0$ – подалгебра в $\mathfrak{g}$, содержащаяся в некоторой подалгебре Леви $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ и содержащая $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]$. Предположим, что $\Delta(\mathfrak{m})$ состоит из длинных корней алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда группа $Z_G(\mathfrak{m}_0)M_0$ связна (здесь M_0 – связная подгруппа в G с касательной алгеброй $\mathfrak{m}_0$).*

Доказательство леммы 6.5.1. Утверждение хорошо известно в случае, когда алгебра $\mathfrak{m}_0$ коммутативна (см. [BO], гл.3, §3). Используя индукцию по $\dim \mathfrak{m}_0$, можно считать, что алгебра $\mathfrak{m}_0$ проста. Выберем картановскую подалгебру $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{m}$. Любая компонента группы $Z_G(M_0)M_0$ содержит элемент из $N_G(\mathfrak{t}) \cap Z_G(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{m}_0)$. Элемент из последней группы действует на $\mathfrak{t}$ композицией отражений относительно элементов из $\Delta(\mathfrak{m})^\perp \cap \Delta(\mathfrak{g})$. Отметим, что $\alpha + \beta \notin \Delta(\mathfrak{g})$ для всех $\alpha \in \Delta(\mathfrak{m})^\perp, \beta \in \Delta(\mathfrak{m})$, поскольку β –это корень максимальной длины. Отсюда $\Delta(\mathfrak{m})^\perp \cap \Delta(\mathfrak{g}) \subset \Delta(\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{m}_0))$. Поэтому $Z_G(\mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{t}) \cap N_G(\mathfrak{t}) \subset Z_G(\mathfrak{m}_0)^\circ M_0$. □

Остается рассмотреть только такие пары $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, для которых $\mathfrak{g}$ содержит идеал типа B_l, C_l, F_4, G_2, а в $\Delta(\mathfrak{l})$ содержатся короткие корни. Это в точности следующие пары из таблицы 2.1: 4 $(2k-n>1)$,5,6 $(n>5)$,8 (n нечетно),16,26 $(n \geqslant 3)$,27 $(n \geqslant 3)$. В случаях 4,6,27 подалгебра $[\mathfrak{l}_0,\mathfrak{l}_0]$ есть $\mathfrak{sp}_{2l}$, а в случае 26 сумма двух идеалов $\mathfrak{sp}_{2l_1}, \mathfrak{sp}_{2l_2}$, вложенных в разные идеалы алгебры $\mathfrak{g}$. Поскольку централизаторы подалгебр $\mathfrak{sp}_{2l} \subset \mathfrak{sp}_{2n}$ в $\mathrm{Sp}(2n)$ связны для всех l, n, остается рассмотреть случаи 5,8,16.

Положим $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2m}, \mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_{2k} \times \mathfrak{sp}_{2(m-k)}, k \geqslant n/2$. Применяя рассуждение из предыдущего абзаца, видим, что достаточно рассмотреть случай $n = 2k$. Опишем вложение $L_0 \hookrightarrow \mathrm{Sp}(2n)$. Пространство $\mathbb{C}^{4k}$ разлагается в прямую сумму $2k$ двумерных пространств $V_1, \ldots, V_{2k}$. Мы можем считать, что $H = \mathrm{Sp}(V_1 \oplus V_3 \oplus \ldots \oplus V_{2k-1}) \times \mathrm{Sp}(V_2 \oplus V_4 \oplus \ldots \oplus V_{2k})$. Подгруппа $L_0 \subset \mathrm{Sp}_{2n}$ изоморфна прямому произведению k копий групп SL_2. i-ая копия (обозначим её через L_0^i) действует диагонально на $V_{2i-1} \oplus V_{2i}$ и тривиально $V_j, j \neq 2i-1, 2i$. Непосредственно видно, что $Z_G(L_0) = Z_{\mathrm{Sp}(V_1 \oplus V_2)}(L_0^1) \times \ldots \times Z_{\mathrm{Sp}(V_{2k-1} \oplus V_{2k})}(L_0^k)$. Поэтому $Z_G(L_0)/Z_H(L_0)$ – это k-мерный тор.

В случае 8 группы $Z_G(L_0)$ и $Z_H(L_0)$ содержат две связные компоненты. Компоненты единицы в обеих группах характеризуются тем, что все их элементы действуют тождественно на $\mathbb{C}^{2n+1}/(\mathbb{C}^{2n+1})^{\mathfrak{l}_0}$. Это дает требуемое утверждение.

В случае 16 мы имеем $Z_H(\mathfrak{l}_0)/Z_H(\mathfrak{l}_0)^\circ \cong \mathbb{Z}_2$. Элемент $\sigma \in (Z_H(\mathfrak{l}_0) \setminus Z_H(\mathfrak{l}_0)^\circ) \cap N_G(\mathfrak{t})$ действует на $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{l}_0^\perp$ умножением на -1. Отметим, что любой элемент из $Z_G(\mathfrak{l}_0) \cap N_G(\mathfrak{t})$ действует на $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{l}_0^\perp$ умножением на ± 1. Требуемое утверждение следует из равенства $Z_G(\mathfrak{l}_0) = Z_G(\mathfrak{l}_0)^\circ (Z_G(\mathfrak{l}_0) \cap N_G(\mathfrak{t}))$.

Шаг 2. Остается доказать равенство $N_G(L_0) = N_G(L_0)_0 N_H(L_0)$. Для этого достаточно показать, что образы групп $N_G(\mathfrak{l}_0), N_H(\mathfrak{l}_0)$ в $\mathrm{GL}(\mathfrak{l}_0)$ совпадают. В случае 1 группа $N_G(\mathfrak{l}_0)$ связна. Если $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ – одна из пар NN 4,8 (n нечетно), 12,14,15,16,20, то группа внешних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{l}_0$ тривиальна. Для номеров 11,13,17,18,19,22,24 из таблицы 2.1 алгебра $\mathfrak{l}_0$ проста и группа $N_H(\mathfrak{l}_0)$ содержит все автоморфизмы алгебры

$\mathfrak{l}_0$ (в случаях 22,24 это выводится из наличия вложений $D_4 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8$). В случаях 3,9,22, $5(n = 2k)$ алгебра $\mathfrak{l}_0$ изоморфна прямому произведению нескольких копий алгебры $\mathfrak{sl}_2$. Группа внешних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{l}_0$ – это симметрическая группа на простых идеалах алгебры $\mathfrak{l}_0$. Образ группы $N_H(\mathfrak{l}_0)$ в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{l}_0)/\mathrm{Int}(\mathfrak{l}_0)$ совпадает со всей симметрической группой. Аналогично рассматривается случай 5, $n > 2k$, (здесь группа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{l}_0)/\mathrm{Int}(\mathfrak{l}_0)$ есть симметрическая группа на множестве простых идеалов алгебры $\mathfrak{l}_0$, которые изоморфны $\mathfrak{sl}_2$ и имеют индекс 2). В случае 8 (для четного числа n) образы обеих групп $N_H(\mathfrak{l}_0), N_G(\mathfrak{l}_0)$ в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{l}_0)$ содержат внешний автоморфизм алгебры $\mathfrak{l}_0$, индуцированный элементом из $\mathrm{O}_{2k-n} \setminus \mathrm{SO}_{2k-n}$ и не содержат автоморфизмов из других связных компонент группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{l}_0)$ (которые существуют только при $2k - n = 8$).

Осталось рассмотреть случаи 2,6,7,21,25,26,27 из таблицы 2.1 и пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, где $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{z}_\mathfrak{g}([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]))$, а $(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])$ – одна из пар, перечисленных в таблице 2.2. Во всех указанных случаях алгебра $\mathfrak{l}_0$ не полупроста. Если $(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) \neq (\mathfrak{so}_{4n+2}, \mathfrak{sl}_{2n+1}), (E_6, D_5)$, то группа $N_G([\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_0])$ связна. Как мы видели выше, в указанных двух случаях $N_G([\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_0]) = N_G([\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_0])_0 N_H([\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_0])$. Остается доказать, что

$$N_{Z_G([\mathfrak{l}_0,\mathfrak{l}_0])}(\mathfrak{z}(\mathfrak{l}_0)) = Z_G(\mathfrak{l}_0) N_{Z_H([\mathfrak{l}_0,\mathfrak{l}_0])}(\mathfrak{z}(\mathfrak{l}_0)). \tag{6.4}$$

Если пара $(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])$ содержится в таблице 2.2, то группа $Z_G([\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_0])$ связна по лемме 6.5.1. Если же, дополнительно, $(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) \neq (\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_{n-k} \times \mathfrak{sl}_k)$, то и группа $N_{Z_G([\mathfrak{l}_0,\mathfrak{l}_0])}(\mathfrak{z}(\mathfrak{l}_0))$ связна. В случаях 6,7, 26,27 алгебра $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}_0)$ одномерна, а группы в обеих частях равенства (6.4) действуют на $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}_0)$ умножениями на ± 1. Отсюда следует справедливость равенства (6.4). Остается рассмотреть случаи $(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = (\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_{n-k} \times \mathfrak{sl}_k), (E_6, A_5), (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}, \mathfrak{h})$.

Случай $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}, \mathfrak{h})$. Здесь $\mathfrak{l}_0$ отождествляется с картановской подалгеброй в $\mathfrak{h}$, и группы из обеих частей равенства (6.4) действуют на $\mathfrak{l}_0$ как группа Вейля алгебры $\mathfrak{h}$.

Случай $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (E_6, A_5)$.

Мы считаем, что инвариантная симметрическая форма на $\mathfrak{g}$ такова, что длины всех корней равны 2.

Имеем $\mathfrak{l}_0 = \langle \alpha_1 - \alpha_5, \alpha_2 - \alpha_4 \rangle$. Группа $N_H(\mathfrak{l}_0)$ действует на $\mathfrak{l}_0$, как симметрическая группа S_3 на единственном 2-мерном неприводимом модуле. Действительно, подалгебра $\mathfrak{l}_0$ вложена в $\mathfrak{sl}_6$ как $\{diag(x, y, -x-y, -x-y, y, x)\}$.

Отметим, что все элементы длины 4, лежащие в пересечении подалгебры $\mathfrak{l}_0$ и корневой решетки алгебры $\mathfrak{g}$, суть $\pm(\alpha_1 - \alpha_5), \pm(\alpha_2 - \alpha_4), \pm(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_5)$. Предположим теперь, что образы групп $N_G(\mathfrak{l}_0)$ и $N_H(\mathfrak{l}_0)$ в $\mathrm{GL}(\mathfrak{l}_0)$ не совпадают. Образ группы $N_G(\mathfrak{l}_0) \cap N_G(\mathfrak{t})$ в $\mathrm{GL}(\mathfrak{l}_0)$ переставляет 6 элементов длины 4 и сохраняет длины элементов из $\mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{t}(\mathbb{R})$. Отсюда следует, что N содержит умножение на -1. Теперь остается доказать, что элемент $g \in N_G(\mathfrak{t}) \cap N_G(\mathfrak{l}_0)$ не может действовать на $\mathfrak{l}_0$ умножением на -1.

Предположим противное. Такой элемент g обязан лежать в нормализаторе подалгебры $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\alpha_1 - \alpha_5)$. Последняя подалгебра изоморфна $\mathbb{C} \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_4$. Простые корни идеалов, изоморфных $\mathfrak{sl}_2$, – это $\varepsilon_1 - \varepsilon_6, \varepsilon_2 - \varepsilon_5$. Поэтому g оставляет на месте пару прямых $\{\langle \varepsilon_1 - \varepsilon_6 \rangle, \langle \varepsilon_2 - \varepsilon_5 \rangle\}$. Заменяя в предыдущем рассуждении $\alpha_1 - \alpha_5$ на $\alpha_2 - \alpha_4$ и $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_5$, можно доказать аналогичные утверждения для пар прямых $\{\langle \varepsilon_2 - \varepsilon_5 \rangle, \langle \alpha_3 \rangle\}$, $\{\langle \varepsilon_1 - \varepsilon_6 \rangle, \langle \alpha_3 \rangle\}$. Отсюда следует, что прямые $\langle \varepsilon_1 - \varepsilon_6 \rangle, \langle \varepsilon_2 - \varepsilon_5 \rangle, \langle \alpha_3 \rangle$ устойчивы относительно g. Поскольку g – ортогональное преобразование пространства $\mathfrak{t}$, оставляющее подпространство $\langle \alpha_1 - \alpha_5, \alpha_2 - \alpha_4 \rangle$ на месте, g оставляет на месте прямую $\langle \varepsilon \rangle$. Заменяя g на композицию g с отражением, соответствующим корню 2ε, мы можем считать, что $g \in Z_G(\langle\varepsilon\rangle)$. Но последняя группа есть произведение $A_5 \subset E_6$ и одномерного тора, и не содержит элемента, действующего на $\mathfrak{l}_0$ умножением на -1.

Случай $(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = (\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_k \times \mathfrak{sl}_{n-k})$. Подалгебра $\mathfrak{l}_0 \subset \mathfrak{h}$ состоит из матриц вида $diag(x_1, \ldots, x_{n-k}, A, x_{n-k}, \ldots x_1)$, где $x_1, \ldots, x_{n-k} \in \mathbb{C}, A \in \mathfrak{gl}_{2k-n}$, $\mathrm{tr}(A) = -2\sum_{i=1}^{n-k} x_i$ для $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \neq 0$, $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n-k} x_i = 0$ для $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = 0$. Группы $N_G(\mathfrak{l}_0), N_H(\mathfrak{l}_0)$ действуют на $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}_0)$ как S_{n-k} (переставляя x_i).

Пункт 5. Это прямое следствие пункта 4 и предложений 6.1.1, 6.3.5. □

В пункте 7.6 нам нужно будет знать образ группы $N_G(\mathfrak{l}_0) \cap N_G(\mathfrak{t})$ в $\mathrm{GL}(\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ для пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ из таблицы 2.1. Эта информация, большей частью, извлекается из предыдущего доказательства и таблицы 6.1. Она представлена в таблице 6.2.

Таблица 6.2: Образ группы $N_G(\mathfrak{l}_0) \cap N_G(\mathfrak{t})$ в $\mathrm{GL}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}})$

N	Группа
1	W
2	$s_{\varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_{n+1-i} + \varepsilon_{n+1-j}}, 1 \leqslant i < j \leqslant n-k$
3	$s_{\varepsilon_{2i-1} + \varepsilon_{2i} \pm (\varepsilon_{2j-1} + \varepsilon_{2j})}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$
4	W
5	$s_{\varepsilon_{2i-1} + \varepsilon_{2i} \pm (\varepsilon_{2j-1} + \varepsilon_{2j})}, 1 \leqslant i, j \leqslant n-k$
6	A
7	A
8	A
9	A
10	A
11	$A \oplus \mathbb{Z}_2$
12	W
13	$\mathbb{Z}_2$
14	W
15	$\mathbb{Z}_2$
16	$\mathbb{Z}_2$
17	A
18	s_{π_1}, s_{π_5}
19	A
20	W
21	A
22	A
23	A
24	A
25	$W(\mathfrak{h})$
26	$W \oplus \mathbb{Z}_2$
27	$W \oplus \mathbb{Z}_2$

Поясним использованные в таблице обозначения. В строках 2,3,5,18 указаны образующие требуемой группы. Символы A, W обозначают группу автоморфизмов (соотв., группу Вейля) системы корней алгебры $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0)/\mathfrak{l}_0$ (предполагается, что группа действует тривиально на $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0)/\mathfrak{l}_0)$). Символ $\mathbb{Z}_2$ обозначает группу действующую умножением на -1 на центре алгебры $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}_0)/\mathfrak{l}_0$ и тривиально на полупростой части.

7. Вычисление групп Вейля аффинных однородных векторных расслоений

7.1. **Введение.** Основная задача раздела – это вычисление группы W_{G,X_0}, где $X_0 = G *_H V$ – однородное векторное расслоение над аффинным однородным пространством G/H. Напомним, что группа W_{G,X_0} зависит лишь от тройки $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ (следствие 2.3.4), поэтому мы пишем $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ вместо $W_{G,G*_H V}$.

Пусть $\underline{X}_0$ – выделенная компонента в многообразии $X_0^{L_0}$, где $L_0 = L^\circ_{0\,G,X_0}$, и $\underline{G} = N_G(L_0, \underline{X}_0)/L_0$. Согласно теореме 5.1.3, $W_{G,X_0} = W_{\underline{G},\underline{X}_0}$. Предложение 5.4.1 сводит вычисление группы $W_{\underline{G},\underline{X}_0}$ к вычилению группы $W_{\underline{G}^\circ,\underline{X}_0}$. Кроме того, результаты раздела 6, показывают, что $\underline{G}^\circ$-многообразие $\underline{X}_0$ является аффинным однородным векторным расслоением, и позволяют находить это расслоение. Таким образом, для вычисления групп Вейля достаточно ограничиться случаем $\mathrm{rk}_G(X) = \mathrm{rk}\, G$. Далее, предложения 5.4.7,5.4.8 позволяют ограничиться случаем простой группы G. Кроме того, мы можем считать, что группа G односвязна. Везде в дальнейшем в этом пункте считается, что указанные условия выполнены.

Первым делом, мы сформулируем основной результат. Существует минимальный идеал $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}$, для которого $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V) = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, V/V^{\mathfrak{h}_0})$. Мы называем соответствующую тройку $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, V/V^{\mathfrak{h}_0})$ *W-существенной частью* тройки $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$.

Везде ниже в этом разделе под *допустимой тройкой* всегда понимается тройка $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$, где $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ – её редуктивная подалгебра, а V – $\mathfrak{h}$-модуль, который является модулем над связной подгруппой $H \subset G$ с касательной алгеброй $\mathfrak{h}$, причем $\mathrm{rk}_G(G *_H V) = \mathrm{rk}\, G$.

Таким образом, проблема вычисления группы $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ может быть разделена на три части:

a) Найти все допустимые тройки $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$, для которых $V^{\mathfrak{h}} = \{0\}$ и $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V) \neq W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, V)$ для любого идеала $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}$. Такую тройку $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ мы будем называть *W-существенной.* Очевидно, что тройка является W-существенной тогда и только тогда, когда она совпадает со своей W-существенной частью.

b) Вычислить группы $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ для всех троек $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ найденных на предыдущем шаге.

c) Показать, как по заданной тройке $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ найти её (некоторую) W-существенную часть.

Определение 7.1.1. Две тройки $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1, V_1), (\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_2, V_2)$ называются *изоморфными* (соответственно, *эквивалентными*), если существует элемент $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ (соотв., $\sigma \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$) и линейный изоморфизм $\varphi : V_1 \to V_2$, для которых $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$ и $\varphi \circ \rho_1 = \rho_2 \circ \sigma$, где ρ_i – представление алгебры $\mathfrak{h}_i$ в V.

Пусть H_1, H_2 – связные редуктивные подгруппы, соответствующие подалгебрам $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$. Положим $X_{01} = G *_{H_1} V_1, X_{02} = G *_{H_2} V_2$. Тройки $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1, V_1), (\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_2, V_2)$ изоморфны (соотв., эквивалентны) тогда и только тогда когда $X_{01} \cong^\tau X_{02}$ для некоторого элемента $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$ (соотв., $X_{01} \cong X_{02}$). Лемма 2.6.9 позволяет считать группы Вейля только для одной тройки из заданного класса изоморфных троек.

Существует тривиальная W-существенная тройка, именно, $(\mathfrak{g}, 0, 0)$ с $W(\mathfrak{g}, 0, 0) = W(\mathfrak{g})$.

Теорема 7.1.2. (1) *Все нетривиальные W-существенные тройки $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ (с точностью до изоморфизма) вместе с соответствующими группами $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ перечислены в таблице 7.1.*

(2) *Предположим, что допустимая тройка $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ не изоморфна ни одной тройке из таблицы 7.1. Если существует простой идеал $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$, для которого тройка*

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1,V/V^{\mathfrak{h}_1})$ изоморфна тройке из таблицы 7.1, то $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1,V/V^{\mathfrak{h}_1})$ является W-существенной частью тройки $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$. В противном случае, W-существенной частью тройки $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ является $(\mathfrak{g},0,0)$.

Таблица 7.1: Минимальные тройки $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ и соответствующие группы Вейля

N	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	V	$W(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$
1	$\mathfrak{sl}_n$ $n>1$	$\mathfrak{sl}_{n-k}$ $k<\frac{n}{2}$	$l\tau+m\tau^*$ $l+m=n-2k-1, l\geqslant m$	$\varepsilon_i-\varepsilon_{i-1},\varepsilon_{k+m}-\varepsilon_{k+m+2}$ $i\neq k+m,k+m+1$
2	$\mathfrak{sl}_n$ $n>3$	$\mathfrak{sl}_n$	$\bigwedge^2\tau+\tau$	$\varepsilon_i-\varepsilon_{i+2}$ $i=\overline{1,n-2}$
3	$\mathfrak{sl}_n$ четное $n\geqslant 4$	$\mathfrak{sl}_n$	$\bigwedge^2\tau+\tau^*$	N2
4	$\mathfrak{sl}_n$ нечетное $n\geqslant 5$	$\mathfrak{sl}_n$	$\bigwedge^2\tau+\tau^*$	$\varepsilon_i-\varepsilon_{i+2},\varepsilon_1-\varepsilon_2$ $i=\overline{2,n-1}$
5	$\mathfrak{sl}_n$ четное $n\geqslant 4$	$\mathfrak{sl}_{n-1}$	$\bigwedge^2\tau$	$\varepsilon_i-\varepsilon_{i+2},\varepsilon_1-\varepsilon_2$ $i=\overline{2,n-1}$
6	$\mathfrak{sl}_n$ нечетное $n\geqslant 3$	$\mathfrak{sl}_{n-1}$	$\bigwedge^2\tau$	N2
7	$\mathfrak{sl}_n$ четное $n\geqslant 4$	$\mathfrak{sp}_n$	τ	N2
8	$\mathfrak{sl}_n$ нечетное $n\geqslant 5$	$\mathfrak{sp}_{n-1}$	0	N2
9	$\mathfrak{so}_{2n+1}$ $n\geqslant 3$	$\mathfrak{sl}_n$	0	$\varepsilon_i-\varepsilon_{i+2},\varepsilon_{n-1},\varepsilon_n$ $i=\overline{1,n-2}$
10	$\mathfrak{so}_7$	$\mathfrak{so}_7$	$l\tau+(2-l)R(\pi_3), l=0,1$	N9
11	$\mathfrak{so}_7$	$\mathfrak{so}_6$	$kR(\pi_3)+(2-k)R(\pi_1), k>0$	$k=1$:N9 $k=2:\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3$
12	$\mathfrak{so}_7$	G_2	$R(\pi_1)$	N9
13	$\mathfrak{so}_9$	$\mathfrak{so}_9$	$R(\pi_4)+\tau$	$\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_2-\varepsilon_4,\varepsilon_3,\varepsilon_4$
14	$\mathfrak{so}_9$	$\mathfrak{so}_8$	$(2-k-l)\tau+lR(\pi_3)+kR(\pi_4)$ $(k,l)=(1,0),(2,0),(1,1)$	N13, $(k,l)\neq(2,0)$ N9, $(k,l)=(2,0)$
15	$\mathfrak{so}_9$	$\mathfrak{so}_7$	$R(\pi_3)$	N13
16	$\mathfrak{so}_9$	$\mathfrak{spin}_7$	$R(\pi_1)$	N9
17	$\mathfrak{so}_9$	$\mathfrak{spin}_7$	$R(\pi_3)$	N13
18	$\mathfrak{so}_9$	G_2	0	N13
19	$\mathfrak{so}_{11}$	$\mathfrak{so}_{11}$	$R(\pi_5)$	N9
20	$\mathfrak{so}_{11}$	$\mathfrak{so}_{10}$	$R(\pi_1)+R(\pi_4)$	$\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}, i=1,2,3$ $\varepsilon_4,\varepsilon_5$
21	$\mathfrak{so}_{11}$	$\mathfrak{so}_9$	$R(\pi_4)$	N20
22	$\mathfrak{so}_{11}$	$\mathfrak{so}_8$	$R(\pi_3)$	N20
23	$\mathfrak{so}_{11}$	$\mathfrak{spin}_7$	0	N20
24	$\mathfrak{so}_{13}$	$\mathfrak{so}_{10}$	$R(\pi_4)$	$\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}, i=1,2,3$ $\varepsilon_4,\varepsilon_5$
25	$\mathfrak{sp}_{2n}$ $n\geqslant 2$	$\mathfrak{sp}_{2k}$ $k\geqslant\frac{n}{2}$	$(2k-n)\tau$	$\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1},\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n$ $i=\overline{1,n-1}$

N	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	V	$W(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$
26	$\mathfrak{so}_{4n+2}$ $n\geqslant 2$	$\mathfrak{sl}_{2n+1}$	τ^*	$\varepsilon_i+\varepsilon_{i+1}$ $i=\overline{1,2n}$
27	$\mathfrak{so}_{4n}$ $n\geqslant 2$	$\mathfrak{sl}_{2n}$	τ^*	$\varepsilon_i+\varepsilon_{i+1}$ $i=\overline{1,2n-1}$
28	$\mathfrak{so}_{4n}$ $n\geqslant 2$	$\mathfrak{sl}_{2n}$	τ	N27
29	G_2	A_2	τ	$\varepsilon_1,\varepsilon_2$
30	F_4	B_4	2τ	$\varepsilon_3,\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4}{2}$, $\varepsilon_4,\varepsilon_2-\varepsilon_4$
31	F_4	D_4	τ	N30
32	F_4	B_3	0	N30
33	$\mathfrak{sp}_{4n}$ $n\geqslant 1$	$\mathfrak{sp}_{2n}\times\mathfrak{sp}_{2n}$	$R(\pi_1)$	$\varepsilon_i+\varepsilon_{i+1}$ $i=\overline{1,2n-1}$
34	$\mathfrak{sp}_{4n+2}$ $n\geqslant 1$	$\mathfrak{sp}_{2n+2}\times\mathfrak{sp}_{2n}$	$R(\pi_1)$	$\varepsilon_i+\varepsilon_{i+1}$ $i=\overline{1,2n}$

Объясним обозначения, использованные в предыдущей таблице. Во втором столбце приведено представление алгебры $\mathfrak{h}$ в V. Через τ здесь обозначено тавтологическое представление алгебры $\mathfrak{h}$. В столбце 5 мы перечисляем корни, для которых соответствующие отражения порождают группу $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$. Символы "N$k$" в столбце 5 означают, что соответствующая группа Вейля совпадает с приведенной в k-ой строке. Если в строке 1 нижний индекс j в ε_j меньше 1 или больше n, то соответствующий корень должен быть опущен. В строках 27,28 мы считаем, что $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n-1})}$.

Замечание 7.1.3. Просматривая таблицу 7.1, мы выводим из предыдущей теоремы, что W-существенная часть тройки $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ определеляется однозначно.

Замечание 7.1.4. Пусть $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ – одна из троек, перечисленных в таблице 7.1. Класс изоморфизма тройки $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ содержит более одного класса эквивалентности в точности для следующих троек: N1 ($l\neq m$), NN2-6, 24-26. В каждом из этих случаев в соответствующем классе изоморфизма имеется ровно две не эквивалентные тройки.

Теперь приступим к описанию содержания этого раздела.

В пункте 7.2 мы получаем некоторые результаты о строении группы $W_{G,X}^{(\cdot)}$, где X – коническое гамильтоново многообразие, удовлетворяющее эквивалентным условиям леммы 3.4.5. Эти результаты содержатся в следствиях 7.2.3,7.2.5. Первое из них будет использовано в дальнейшем, в основном, для ответа на вопрос: содержит ли группа $W_{G,X}^{(\cdot)}$ все отражения, сопряженные данному. Ответ: если группа Вейля не содержит отражения, сопряженного данному корню α, то $S^{(\alpha)}\rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} X$ для $\mathfrak{g}$-страта $S^{(\alpha)}$, который определяется следующим образом: $S^{(\alpha)}=(\mathfrak{g}^{(\alpha)},V^{(\alpha)})$, где $V^{(\alpha)}$ – прямая сумма двух копий неприводимого двумерного $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$-модуля.

Следствие 7.2.5 утверждает, что подгруппа $W_{G,X}^{(\cdot)}\subset W$, в некотором смысле, велика. В конце пункта получено описание таких больших подгрупп для групп G типов A,B,C,D,E.

В пункте 7.3 мы занимаемся классификацией псевдо-W-существенных троек.

Определение 7.1.5. Допустимая тройка $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ называется *W-квазисущественной*, если для любого собственного идеала $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{h}$ существует корень $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g})$, для которого $S^{(\alpha)}\rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} T^*(G*_H V)$, но $S^{(\alpha)}\not\rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} T^*(G*_{H_1} V)$. Здесь H,H_1 – связные подгруппы в G, соответствующие подалгебрам $\mathfrak{h},\mathfrak{h}_1$.

Мы увидим, что W-квазисущественные тройки суть в точности перечисленные в таблице 7.1.

В пункте 7.4 мы вычислим группы Вейля троек, приведенных в таблице 7.1. Пункт 7.5 завершает доказательство теоремы 7.1.2. В пункте 7.6 мы вычисляем группы Вейля аффинных однородных пространств настолько явно, насколько, по-видимому, это вообще возможно.

7.2. **Строение групп Вейля аффинных гамильтоновых многообразий.** В этом пункте G – связная редуктивная группа, а X – аффинное неприводимое коническое гамильтоново G-многообразие, удовлетворяющее эквивалентным условиям леммы 3.4.5. Целью данного пункта является получение информации о группе Вейля $W^{(\cdot)}_{G,X}$, а также получение ограничений на гамильтоново G-многообразие X с данной группой Вейля. Все результаты данного пункта основаны на применении предложений 4.5.1, 4.5.3. Эти предложения говорят нам, что изучение группы $W^{(\cdot)}_{G,X}$ можно свести к случаю, когда группа G полупроста, а X есть модельное коизотропное многообразие $M_G(H,\eta,V)$, где η – нильпотентный элемент. Первым делом, мы выясним, когда группа Вейля многообразия такого вида тривиальна.

Предложение 7.2.1. *Пусть группа G полупроста, H – редуктивная подгруппа в G, η – нильпотентный элемент в $\mathfrak{g}^H$, V – симплектический H-модуль. Предположим, что $X=M_G(H,\eta,V)$ удовлетворяет следующим условиям:*

(a) $\operatorname{cork}_G(X)=0$.
(b) $W^{(\cdot)}_{G,X}=\{1\}$.
(c) *X удовлетворяет эквивалентным условиям леммы 3.4.5.*

Тогда

(1) $\eta=0, H=G$.
(2) *$G\cong G_1\times\ldots\times G_k$ для некоторого k, где $G_i\cong \mathrm{SL}_2$.*
(3) *Имеет место изоморфизм G-модулей $V/V^G\cong V_1\oplus V_2\oplus\ldots\oplus V_k$, где V_i – прямая сумма двух неприводимых двумерных модулей над G_i.*

Доказательство. Условие (a) эквивалентно тому, что пуассоново поле $\mathbb{C}(X)^G$ коммутативно, ср. с [Ви2], гл.2, §3, предложение 5. Согласно [Lo1], Theorem 1.8, имеет место изоморфизм $C_{G,X}\cong\mathfrak{a}^{(\cdot)}_{G,X}/W^{(\cdot)}_{G,X}$, и $\mathbb{C}[C_{G,X}]$ совпадает со всей алгеброй инвариантов $\mathbb{C}[X]^G$. Условие (b) при выполнении (a) эквивалентно, таким образом, тому, что алгебра $\mathbb{C}[X]^G$ порождается элементами степени 2 (градуировка на алгебре $\mathbb{C}[X]^G$ была введена в замечании 3.3.5).

Морфизм $M_G(H^\circ,\eta,V)\to M_G(H,\eta,V),[g,(u,v)]\mapsto[g,(u,v)]$, является гамильтоновым (см. пример 3.5.2). Из леммы 3.8.4 следует, что $W^{(\cdot)}_{G,M_G(H^\circ,\eta,V)}=\{1\}$. Поэтому можем считать, что группа H связна.

Положим $U=(\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\eta)\cap\mathfrak{h}^\perp)^*$. Снабдим алгебру $\mathbb{C}[U\oplus V]$ градуировкой, описанной в замечании 3.3.5. Алгебра $\mathbb{C}[U\oplus V]^H$ порождена элементами степени 2. Напомним, что $\eta\in U^*$ имеет степень 4. Поэтому $\eta=0$. Любой элемент из $U^*\cong\mathfrak{h}^\perp$ имеет степень 2. Поэтому $U/\!/H\cong U^H$, или, эквивалентно, $\mathbb{C}[U/U^H]^H=\mathbb{C}$. Но H-модуль U/U^H обладает невырожденной H-инвариантной билинейной симметрической формой, ибо это верно для H-модуля U. Значит, $U=U^H$. Эквивалентно, $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{g}^\mathfrak{h}$. В частности, $\mathfrak{h}$ – идеал в $\mathfrak{g}$. Из условий (1),(3) следует, что

$$\dim X=\dim\mathfrak{g}+\operatorname{rk}\mathfrak{g}. \tag{7.1}$$

Но $\dim X = 2\dim\mathfrak{g} - 2\dim\mathfrak{h} + \dim V$. Отметим, что $m_H(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\oplus V) = \dim H$, поскольку $m_G(X) = \dim G$. Далее, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ – тривиальный $\mathfrak{h}$-модуль. Поэтому $m_H(V) = \dim H$. Поскольку V – симплектический H-модуль, то

$$\dim V = \dim\mathfrak{h} + \operatorname{rk}\mathfrak{h} + \operatorname{cork}_H(V). \tag{7.2}$$

Из (7.1), (7.2) следует, что

$$\dim\mathfrak{g} + \operatorname{rk}\mathfrak{g} = \dim X = 2\dim G/H + \dim V \geqslant 2\dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{h} + \operatorname{rk}\mathfrak{h}. \tag{7.3}$$

Выводим отсюда, что $\dim\mathfrak{g} - \operatorname{rk}\mathfrak{g} \leqslant \dim\mathfrak{h} - \operatorname{rk}\mathfrak{h}$. Поскольку $\mathfrak{h}$ – идеал в $\mathfrak{g}$, то последнее неравенство эквивалентно равенству $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$. Это доказывает утверждение пункта 1.

Пусть $H = G_1\ldots G_k$ – разложение в локально прямое произведение связной компоненты центра и простых нормальных подгрупп. Согласно лемме 3.8.7, $W^{(\cdot)}_{G_i,V} = \{1\}$. Согласно предложению 4.5.1, существует точка $x\in\psi^{-1}_{G_i,V}(0)$, удовлетворяющая условиям (a)-(f) указанного предложения. Пусть (H_0,η_0,V_0) – определяющая тройка гамильтонова G_i-многообразия V в точке x. По предложению 4.5.3, $W^{(\cdot)}_{G_i,M_{G_i}(H_0,\eta_0,V_0)} = \{1\}$. По пункту 1, $\eta_0 = 0, H_0 = G_i$, откуда $V_0 = V$. Далее, V/V^{G_i} – коизотропный G_i-модуль размерности $\dim\mathfrak{g}_i + \operatorname{rk}\mathfrak{g}_i$. Воспользовавшись классификацией коизотропных модулей, полученной в [Л1],[Kn9], видим, что $G_i = \mathrm{SL}_2$. Далее, поскольку $W^{(\cdot)}_{G_i,V/V^{G_i}} = \{1\}$, то G_i-модуль V/V^{G_i} изоморфен прямой сумме двух двумерных неприводимых модулей. Это следует, например, из вычислений в пункте 3.7.

Поскольку $V/V^{G_i}\cong V^{G_i\angle}$ является симплектическим G-модулем, а $\mathrm{Sp}(V/V^{G_i})^{G_i}$ является тором, то для всех $i=\overline{1,k}$ группа $\prod_{j\neq i}G_j$ действует тривиально на V/V^{G_i}. Итак, имеет место включение

$$\bigoplus_{i=1}^{k} V^{G_i\angle}\subset V^{G\angle}. \tag{7.4}$$

Отметим, что $(\bigoplus_{i=1}^k V^{G_i\angle})^\angle = \bigcap_{i=1}^k V^{G_i} = V^G$. Поэтому включение (7.4) является равенством. Это доказывает пункт 3 предложения. Для завершения доказательства пункта 2 остается заметить, что группа $\prod_{i=1}^k G_i$ действует на V/V^G эффективно, а потому эпиморфизм $\prod_{i=1}^k G_i\to G$ является изоморфизмом. $\square$

В качестве первого следствия из предложения 7.2.1 мы получим условие на действие $G:X$, необходимое для того, чтобы группа $W^{(\cdot)}_{G,X}$ не пересекала какцю-то подгруппу в $W(\mathfrak{g})$, сопряженную подгруппе из определенного класса. Для описания этого класса подгрупп нам нужно

Определение 7.2.2. Подмножество $A\subset\Delta(\mathfrak{g})$ назовем *вполне перпендикулярным*, если выполнены следующие два условия:

(1) Если $\alpha\in A$, то $-\alpha\notin A$.
(2) $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(A)\cap\Delta(\mathfrak{g}) = A\cup -A$.

К примеру, любое одноэлементное подмножество в $\Delta(\mathfrak{g})$ является вполне перпендикулярным.

Пусть A – непустое вполне-перпендикулярное подмножество из $\Delta(\mathfrak{g})$. Отметим, что алгебра $\mathfrak{g}^{(A)}$ изоморфна прямой сумме нескольких копий алгебры $\mathfrak{sl}_2$. Положим $S^{(A)} = (\mathfrak{g}^{(A)}, V^{(A)} := \bigoplus_{\alpha\in A} V(\pi_1^\alpha)^{\oplus 2}),$, где через $V(\pi_1^\alpha)$ обозначен единственный двумерный неприводимый $\mathfrak{g}^{(A)}$-модуль, на котором идеал $\mathfrak{g}^{(A\setminus\{\alpha\})}$ действует тривиально.

Следствие 7.2.3. *Выберем T-сечение X_T многообразия X. Если $W^{(X_T)}_{G,X}\cap W(\mathfrak{g}^{(A)})=\{1\}$, то $S^{(A)}\rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} X$.*

Доказательство. Положим $M=Z_G(\bigcap_{\alpha\in A}\ker\alpha)$. Отметим, что $G^{(A)}=(M,M)$. Выберем точку $x\in X$, удовлетворяющую условиям (a)-(f) предложения 4.5.1. Пусть (H,η,V) – определяющая тройка многообразия X в точке x и $\widehat{X}=M_{G^{(A)}}(H\cap G^{(A)},\eta_n,V/V^H)$. Согласно пункту 1 предложения 4.5.3, $W^{(\cdot)}_{G^{(A)},\widehat{X}}=\{1\}$. Применяя предложение 7.2.1, видим, что $\mathfrak{g}$-страт $S^{(A)}$ эквивалентен $\mathfrak{g}$-страту точки x. □

Теперь мы получим некоторое ограничение на группу Вейля $W^{(\cdot)}_{G,X}$: мы покажем, что эта подгруппа в $W(\mathfrak{g})$ "велика".

Определение 7.2.4. Подгруппа $\Gamma\subset W(\mathfrak{g})$ называется *большой*, если для любых двух корней $\alpha,\beta\in\Delta(\mathfrak{g})$, таких, что $\beta\neq\pm\alpha,(\alpha,\beta)\neq 0$, найдется корень $\gamma\in\mathbb{R}\alpha+\mathbb{R}\beta$, для которого $s_\gamma\in\Gamma$.

Следствие 7.2.5. *Подгруппа $W^{(X_T)}_{G,X}\subset W(\mathfrak{g})$ является большой.*

Доказательство. Предположим противное. Выберем $\alpha,\beta\in\Delta(\mathfrak{g})$, удовлетворяющие требованиям определения 7.2.4, для которых $s_\gamma\notin W^{(X_T)}_{G,X}$ для всех корней $\gamma\in\mathbb{R}\alpha+\mathbb{R}\beta$. Положим $M=Z_G(\ker\alpha\cap\ker\beta)$. Отметим, что $(M,M)=G^{(\alpha,\beta)}$. Применим предложение 4.5.1 к M и найдем точку $x\in X$, удовлетворяющую условиям (a)-(f) этого предложения. Пусть (H,η,V) – определяющая тройка многообразия X в точке x. Положим $\widehat{X}=M_{G^{(\alpha,\beta)}}(H\cap G^{(\alpha,\beta)},\eta_n,V/V^H)$. Из пункта 1 предложения 4.5.3 следует, что группа $W^{(\cdot)}_{G^{(\alpha,\beta)},\widehat{X}}$ не содержит отражений. Обозначим через $\widetilde{G}$ односвязную накрывающую группы $G^{(\alpha,\beta)}$. Это простая односвязная группа ранга 2. Далее, через $\widetilde{H}$ обозначим связную нормальную подгруппу в $\widetilde{G}$ с касательной алгеброй $\mathfrak{h}$. Положим $\widetilde{X}=M_{\widetilde{G}}(\widetilde{H},\eta_n,V/V^H)$. Это коизотропное многообразие. Согласно примеру 3.5.2, имеется гамильтонов морфизм из $\widetilde{X}$ в $\widehat{X}$. Из леммы 3.8.4 выводим, что группа $W^{(\cdot)}_{\widetilde{G},\widetilde{X}}$ не содержит отражений. С другой стороны, по следствию 4.4.6, группа $W^{(\cdot)}_{\widetilde{G},\widetilde{X}}$ порождается отражениями. Поэтому $W^{(\cdot)}_{\widetilde{G},\widetilde{X}}=\{1\}$. Противоречие с предложением 7.2.1. □

Займемся теперь задачей описания больших подгрупп в $W(\mathfrak{g})$ для простых групп G типов $A-E$.

Для подгруппы $\Gamma\subset W(\mathfrak{g})$ мы обозначим через Γ_r подгруппу в Γ, порожденную всеми отражениями, содержащимися в Γ. Из определения 7.2.4 следует, что подгруппа $\Gamma\subset W(\mathfrak{g})$ большая тогда и только тогда подгруппа $\Gamma_r\subset W(\mathfrak{g})$ такова. Таким образом, задача описания всех больших подгрупп в $W(\mathfrak{g})$ сводится к случаю подгрупп, порожденных отражениями.

Во-первых, рассмотрим случай, когда группа $\mathfrak{g}$ проста и имеет тип A,D,E. Последнее эквивалентно тому, что все корни из $\Delta(\mathfrak{g})$ имеют одинаковую длину.

Напомним классификацию максимальных собственных корневых подсистем в $\Delta(\mathfrak{g})$ (см. [Д]). Фиксируем систему $\alpha_1,\ldots,\alpha_r\in\Delta(\mathfrak{g})$ простых корней. Пусть α_0 – минимальный корень, и пусть $n_1,\ldots,n_r$ – такие (однозначно определенные) целые неотрицательные числа, что $\alpha_0+n_1\alpha_1+\ldots+n_r\alpha_r=0$. Собственная корневая подсистема $\Delta_0\subset\Delta(\mathfrak{g})$ максимальна тогда и только тогда, когда она $W(\mathfrak{g})$-сопряжена одной из следующих корневых подсистем.

(a) $\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_r)\cap\Delta(\mathfrak{g})$ для $n_i=1$.

(b) $\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_r) \cap \Delta(\mathfrak{g})$ для простого числа n_i.

Число n_i в предыдущем определении зависит лишь от Δ_0. Мы будем называть это число *характеристикой* корневой подсистемы Δ_0.

Пусть Γ – собственная подгруппа в $W(\mathfrak{g})$. Обозначим через Δ_Γ множество всех таких корней $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})$, что $s_\alpha \in \Gamma$.

Предложение 7.2.6. *Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли типа A, D, E, $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g} > 1$, а Γ – собственная подгруппа в $W(\mathfrak{g})$. Подгруппа Γ – большая, если и только если Δ_Γ является максимальной корневой подсистемой в $\Delta(\mathfrak{g})$ характеристики 1 или 2.*

Лемма 7.2.7. *Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра типа A, D или E. Тогда Δ_Γ является подсистемой корней в $\Delta(\mathfrak{g})$ для произвольной подгруппы $\Gamma \subset \Delta(\mathfrak{g})$.*

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g})$. Поскольку все корни в $\Delta(\mathfrak{g})$ имеют одинаковую длину, $\alpha + \beta \in \Delta(\mathfrak{g})$, (соотв., $\alpha - \beta \in \Delta(\mathfrak{g})$) если и только если $(\alpha, \beta) < 0$, (соотв., $(\alpha, \beta) > 0$). Здесь $(\cdot, \cdot)$ – $W(\mathfrak{g})$-инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$.

По определению подмножества $\Delta_\Gamma \subset \Delta(\mathfrak{g})$, оно обладает следующим свойством:

(*) Δ_Γ совпадает с множеством всех корней $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})$, для которых s_α содержится в подгруппе из $W(\mathfrak{g})$, порожденной отражениями относительно элементов из Δ_Γ.

Нам надо показать, что включение $\alpha \in \Delta_\Gamma$ влечет $-\alpha \in \Delta_\Gamma$, и что включения $\alpha, \beta \in \Delta_\Gamma, \alpha + \beta \in \Delta(\mathfrak{g})$ влекут $\alpha + \beta \in \Delta_\Gamma$. Первая импликация следует непосредственно из (*). Для доказательства второй достаточно заметить, что $\alpha + \beta = s_\alpha \beta$, как только $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta(\mathfrak{g})$. □

Доказательство предложения 7.2.6. Подгруппа $\Gamma \subset W(\mathfrak{g})$ является большой тогда и только тогда, когда

(**) $\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\} \cap \Delta_\Gamma \neq \varnothing$ для всех таких $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g})$, что $\alpha + \beta \in \Delta(\mathfrak{g})$.

Непосредственно проверяется, что максимальная корневая подсистема $\Delta_\Gamma \subset \Delta(\mathfrak{g})$ характеристики 1 или 2 удовлетворяет (**).

Осталось доказать, что корневая подсистема $\Delta_\Gamma \subset \Delta(\mathfrak{g})$, удовлетворяющая (**), является максимальной характеристики 1 или 2. Предположим сперва, что подсистема Δ_Γ не максимальна. Пусть Δ_1 – максимальная корневая подсистема в $\Delta(\mathfrak{g})$, содержащая Δ_Γ. Выберем элемент $\alpha \in \Delta_1 \setminus \Delta_\Gamma$. Мы видим, что $\alpha + \beta \notin \Delta(\mathfrak{g})$ для всех $\beta \notin \Delta_1$. Иначе α, β не удовлетворяют требованиям из (**). Аналогично, $\alpha - \beta \notin \Delta(\mathfrak{g})$. Поэтому $(\alpha, \beta) = 0$. В частности, $\Delta_1 \cup \{\pm\alpha\}$ является корневой подсистемой в $\Delta(\mathfrak{g})$. По выбору Δ_1, $\Delta_1 \cup \{\pm\alpha\} = \Delta(\mathfrak{g})$. Это противоречит простоте алгебры $\mathfrak{g}$.

Покажем, что характеристика подсистемы Δ_Γ меньше 3. Предположим, что $\Delta_\Gamma = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n\} \cap \Delta(\mathfrak{g})$, где $n_i > 2$. Обозначим $\pi_i^\vee$ двойственный фундаментальный вес. Подмножество $\Delta_\Gamma \subset \Delta(\mathfrak{g})$ совпадает с множеством всех таких $\alpha \in \Delta$, что $n_i | \pi_i^\vee(\alpha)$. Поэтому остается проверить, что найдутся корни $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g})$, для которых $\langle \pi_i^\vee, \alpha \rangle = \langle \pi_i^\vee, \beta \rangle = 1$, а $\alpha + \beta \in \Delta(\mathfrak{g})$. В самом деле, если условие (**) удовлетворено для α, β, то $\alpha + \beta \in \Delta_\Gamma$ и 2 делится на n_i. Существует элемент $\gamma \in \Delta(\mathfrak{g})$ с $\langle \pi_i^\vee, \gamma \rangle = 2$. Выберем такой элемент $\gamma = \sum_{j=1}^r m_j \alpha_j$ с минимально возможной суммой $\sum m_j$. В этом случае $\alpha := \alpha_i, \beta := \gamma - \alpha_i \in \Delta(\mathfrak{g})$ и $\langle \pi_i^\vee, \gamma - \alpha_i \rangle = 2 - 1 = 1$. □

Следствие 7.2.8. *Предположим, что $\mathfrak{g}$ – простая классическая алгебра Ли. Тогда подгруппа $\Gamma \subset W(\mathfrak{g})$ является большой, если и только если подмножество $\Delta_\Gamma \subset \Delta(\mathfrak{g})$ перечислено в таблице 7.2.*

Таблица 7.2: Множества Δ_Γ для больших подгрупп $\Gamma \subset W(\mathfrak{g})$ в классических алгебрах $\mathfrak{g}$

$\mathfrak{g}$	Δ_Γ
$A_l, l \geqslant 2$	$\{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i,j \in I$ или $i,j \notin I\}, I \subset \{1,\ldots,n+1\}$
$B_l, l \geqslant 3$	a. $\{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i,j \in I$ или $i,j \notin I\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid i \in I\}, I \subset \{1,\ldots,n\}$ b. $\{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i,j \in I$ или $i,j \notin I\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid i \in \{1,2,\ldots,n\}\}, I \subset \{1,\ldots,n\}$ c. $\{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i,j \in I$ или $i,j \notin I\} \cup \{\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j), i \in I, j \notin I)\}, I \subset \{1,\ldots,n\}$
$C_l, l \geqslant 2$	a. $\{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i,j \in I$ или $i,j \notin I\} \cup \{\pm 2\varepsilon_i \mid i \in I\}, I \subset \{1,\ldots,n\}$ b. $\{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i,j \in I$ или $i,j \notin I\} \cup \{\pm 2\varepsilon_i \mid i \in \{1,2,\ldots,n\}\}, I \subset \{1,\ldots,n\}$ c. $\{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i,j \in I$ или $i,j \notin I\} \cup \{\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j), i \in I, j \notin I)\}, I \subset \{1,\ldots,n\}$
$D_l, l \geqslant 3$	a. $\{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i,j \in I$ или $i,j \notin I\}, I \subset \{1,\ldots,n\}$ b. $\{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i,j \in I$ или $i,j \notin I\} \cup \{\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j), i \in I, j \notin I)\}, I \subset \{1,\ldots,n\}$

Отметим, что некоторые множества Δ_Γ появляются в таблице 7.2 более одного раза.

Доказательство. Если алгебра $\mathfrak{g}$ имеет тип A_l или D_l, то требуемое утверждение является прямым следствием предложения 7.2.6.

Пусть $\mathfrak{g}$ имеет тип $C_l, l \geqslant 2$. Если $l = 2$, то подгруппа $\Gamma \subset W(\mathfrak{g})$ большая тогда и только тогда, когда множество Δ_Γ непусто. Все непустые подмножества $\Delta_\Gamma \subset \Delta(\mathfrak{g})$ представлены в таблице 7.2. Предположим теперь, что $l > 2$. Обозначим через Δ_0 множество всех коротких корней в $\Delta(\mathfrak{g})$ и через W_0 подгруппу в $W(\mathfrak{g})$, порожденную $s_\alpha, \alpha \in \Delta_0$. Заметим, что W_0 является группой Вейля системы корней D_l. Из определения больших подгрупп понятно, что подгруппа $\Gamma_0 \subset W_0$, порожденная отражениями $s_\alpha, \alpha \in \Delta_\Gamma \cap \Delta_0$ является большой в W_0. Если $\Delta_0 \cap \Delta_\Gamma$ имеет тип (a) и $I \neq \varnothing, \{1,\ldots,n\}$, то подгруппа $\Gamma \subset W$ является большой тогда и только тогда, когда Δ_Γ содержит длинный корень. Если $\Delta_0 \cap \Delta_\Gamma$ имеет тип (a) с $I = \varnothing, \{1, 2\ldots,n\}$ или тип (b), то Γ_0 является большой подгруппой и в $W(\mathfrak{g})$. Поскольку $\Gamma \subset N_{W(\mathfrak{g})}(\Gamma_0)$, мы получаем требуемый список.

Случай $B_l, l > 2$, следует легко следует из двойственности между системами корней B_l и C_l. $\square$

7.3. **Классификация W-квазисущественных троек.** Вот основной результат классификации:

Предложение 7.3.1. (1) *W-квазисущественные троки $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ суть в точности перечисленные в таблице 7.1.*

(2) *Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ – W-квазисущественная тройка. Если алгебра $\mathfrak{h}$ проста, и $S^{(\alpha)} \rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} T^*(G *_H V)$, то α – длинный корень. Если же алгебра $\mathfrak{h}$ не проста то $S^{(\alpha)} \rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} T^*(G *_H V)$ для всех корней α.*

Перед тем, как доказывать предложение 7.3.1, мы приведем некоторые технические утверждения.

Сначала введем одно обозначение. Пусть H – редуктивная алгебраическая группа, и $\mathfrak{s}$ – подалгебра в $\mathfrak{h}$, изоморфная $\mathfrak{sl}_2$. Мы обозначаем через $S^{\mathfrak{s}}$ $\mathfrak{h}$-страт, состоящий из $\mathfrak{s}$ и прямой суммы двух копий неприводимых двумерных $\mathfrak{s}$-модулей.

Замечание 7.3.2. Пусть H – редуктивная подгруппа в G, U – H-модуль. Далее, пусть $(\mathfrak{s}, V)$ – $\mathfrak{g}$-страт. Тогда $(\mathfrak{s}, V) \rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} G *_H U$ тогда и только тогда, когда найдется элемент $g \in G$, для которого $\mathrm{Ad}(g)s \subset \mathfrak{h}$ и $(\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{s}, V) \rightsquigarrow_{\mathfrak{h}} U$ ($\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{s}$ действует на V посредством изоморфизма $\mathrm{Ad}(g^{-1}) : \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{s} \to \mathfrak{s}$).

Напомним определение индекса Дынкина ([Д]). Пусть $\mathfrak{h}$ – простая подалгебра в $\mathfrak{g}$. Зафиксируем невырожденную симметрическую инвариантную форму $K_\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}$, для которой $K_\mathfrak{g}(\alpha^\vee,\alpha^\vee)=2$ для корня $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g})$ максимальной длинны. Аналогичным образом определим форму $K_\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{h}$. *Индексом Дынкина* подалгебры $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ называется частное $K_\mathfrak{g}(x,x)/K_\mathfrak{h}(x,x)$ (оно не зависит от выбора элемента $x\in\mathfrak{h}$, для которого $K_\mathfrak{h}(x,x)\neq 0$). Мы обозначим индекс Дынкина через $i(\mathfrak{h},\mathfrak{g})$. Оказывается, что $i(\mathfrak{h},\mathfrak{g})$ является положительным целым числом ([Д]).

Следующая лемма, по-видимому, довольно стандартна.

Лемма 7.3.3. *Пусть $\mathfrak{h}$ – простая алгебра Ли, и $\mathfrak{s}$ – подалгебра в $\mathfrak{h}$ изоморфная $\mathfrak{sl}_2$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\iota(\mathfrak{s},\mathfrak{h})=1$.
(2) $\mathfrak{s}\sim_{\mathrm{Int}(\mathfrak{h})}\mathfrak{h}^{(\alpha)}$ *для длинного корня* $\alpha\in\Delta(\mathfrak{h})$.

Доказательство. Понятно, что (2) $\Rightarrow$ (1). Проверим обратную импликацию. Выберем стандартный базис e,h,f в $\mathfrak{s}$. Можем считать, что h лежит в фиксированной картановской подалгебре в $\mathfrak{h}$. Из теории представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2$ следует, что $\langle\pi,h\rangle\in\mathbb{Z}$ для любого веса π алгебры $\mathfrak{h}$. Поэтому $h\in Q^\vee$, где $Q^\vee$ обозначает двойственную корневую решетку алгебры $\mathfrak{h}$. Поскольку $i(\mathfrak{s},\mathfrak{h})=i(\mathfrak{h}^{(\alpha)},\mathfrak{h})$ для длинного корня $\alpha\in\Delta(\mathfrak{h})$, длины элементов $h,\alpha^\vee\in Q^\vee$ совпадают. Непосредственно из конструкции систем корней видно, что все элементы из $Q^\vee$, чья длина совпадает с длиной короткого двойственного корня $\alpha^\vee$, сами являются короткими двойственными корнями, см. [Б]. Поэтому можем считать, что $h=\alpha^\vee$. Из стандартных теорем о сопряженности $\mathfrak{sl}_2$-троек, см., скажем, [McG], следует, что подалгебры $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{h}^{(\alpha)}$ сопряжены. $\square$

В таблице 7.3 мы приводим все простые подалгебры индекса 1 простых классических алгебр Ли.

Таблица 7.3: Простые подалгебры $\mathfrak{h}$ классических алгебр $\mathfrak{g}$ с $\iota(\mathfrak{h},\mathfrak{g})=1$

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$
$\mathfrak{sl}_n, n\geqslant 2$	$\mathfrak{sl}_k, k\leqslant n$
$\mathfrak{sl}_n, n\geqslant 4$	$\mathfrak{sp}_{2k}, 2\leqslant k\leqslant n/2$
$\mathfrak{so}_n, n\geqslant 7$	$\mathfrak{so}_k, k\leqslant n, k\neq 4$
$\mathfrak{so}_n, n\geqslant 7$	$\mathfrak{sl}_k, k\leqslant n/2$
$\mathfrak{so}_n, n\geqslant 8$	$\mathfrak{sp}_{2k}, 2\leqslant k\leqslant n/4$
$\mathfrak{so}_n, n\geqslant 7$	G_2
$\mathfrak{so}_n, n\geqslant 9$	$\mathfrak{spin}_7$
$\mathfrak{sp}_{2n}, n\geqslant 2$	$\mathfrak{sp}_{2k}, k\leqslant n$

Лемма 7.3.4. *Пусть $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g})$, и $\mathfrak{h}$ – редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$. Предположим, что никакой собственный идеал алгебры $\mathfrak{h}$ не содержит $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$. Тогда*

(1) *Если α – длинный корень, то алгебра $\mathfrak{h}$ проста, и $\iota(\mathfrak{g}^{(\alpha)},\mathfrak{h})=\iota(\mathfrak{h},\mathfrak{g})=1$.*
(2) *Предположим, что α – короткий корень, а алгебра $\mathfrak{h}$ не проста. Тогда*
   (a) $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{so}_{2l+1},\mathfrak{sp}_{2l}, l\geqslant 2, F_4$, $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{h}_2$, *где $\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2$ – простые идеалы в $\mathfrak{h}$ с $i(\mathfrak{h}_1,\mathfrak{g})=i(\mathfrak{h}_2,\mathfrak{g})=1$. Если $\mathfrak{s}_i$ – проекция подалгебры $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ на $\mathfrak{h}_i, i=\overline{1,2}$, то $i(\mathfrak{s}_i,\mathfrak{h}_i)=1$.*
   (b) *Если $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{so}_{2l+1}, l\geqslant 2$, то подалгебра $\mathfrak{h}$ совпадает с $\mathfrak{so}_4$.*

(c) *Если* $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{sp}_{2l}$, *то* $\mathfrak{h}=\mathfrak{sp}_{2k}\times\mathfrak{sp}_{2m}, k+m\leqslant l$ *(оба идеала вложены в* $\mathfrak{sp}_{2l}$ *стандартным образом).*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{s}\subset[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$, то алгебра $\mathfrak{h}$ полупроста. Пусть $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_3$ – простые алгебры Ли, а $\mathfrak{g}_2$ – полупростая алгебра Ли, и $\mathfrak{g}_1\subset\mathfrak{g}_2\subset\mathfrak{g}_3$. Пусть $\mathfrak{g}_2=\mathfrak{g}_2^1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}_2^k$ – разложение алгебры $\mathfrak{g}_2$ в прямую сумму простых идеалов, и $\iota^i, i=1,\ldots,k$ – композиция вложений $\mathfrak{g}_1\hookrightarrow\mathfrak{g}_2$ и проекций $\mathfrak{g}_2\twoheadrightarrow\mathfrak{g}_2^i$. Как показано в [Д],

$$i(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_3)=\sum_{i=1}^{k}i(\iota_i(\mathfrak{g}_1),\mathfrak{g}_2^i)i(\mathfrak{g}_2^i,\mathfrak{g}_3). \tag{7.5}$$

Отсюда следует утверждение пункта 1.

С учетом (7.5), в пункте 2a остается доказать, что $\mathfrak{g}\neq G_2$. В G_2 существует единственная (с точностью до сопряженности) полупростая, но не простая подалгебра, именно $\mathfrak{g}^{(\alpha)}\times\mathfrak{g}^{(\beta)}$, β – короткий корень, и $(\alpha,\beta)=0$. Поскольку $i(\mathfrak{g}^{(\alpha)},\mathfrak{g})=1, i(\mathfrak{g}^{(\beta)},\mathfrak{g})=3$, требуемое утверждение следует из (7.5).

Перейдем к пункту 2b. Отметим, что представление алгебры $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ в тавтологическом $\mathfrak{g}$-модуле V является суммой тривиального $2l-2$-мерного и 3-трехмерного неприводимого представлений. Отсюда следует, что представление алгебры $\mathfrak{h}$ в $V/V^{\mathfrak{h}}$ неприводимо. Действительно, в противном случае алгебра $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ действовала бы тривиально на некотором $\mathfrak{h}$-подмодуле в $V/V^{\mathfrak{h}}$, что невозможно, ибо $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ не содержится ни в каком собственном идеале алгебры $\mathfrak{h}$. Поэтому $V/V^{\mathfrak{h}}=V_1\otimes V_2$, где V_i – неприводимый $\mathfrak{h}_i$-модуль, $i=1,2$. Отметим, что представление алгебры $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ в V_i нетривиально, поскольку проекция подалгебры $\mathfrak{g}^{(\alpha)}\subset\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{h}_i$ ненулевая. Принимая во внимание, что $\dim(V_1\otimes V_2)/(V_1\otimes V_2)^{\mathfrak{g}^{(\alpha)}}=3$, и используя формулу Клебша-Гордона, мы получаем, что $\dim V_1=\dim V_2=2$. Отсюда, $\mathfrak{h}_1\cong\mathfrak{h}_2\cong\mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{h}=\mathfrak{so}_4$.

Перейдем к пункту 2c. Из пункта 2a следует $i(\mathfrak{h}_1,\mathfrak{g})=i(\mathfrak{h}_2,\mathfrak{g})=1$. Отсюда выводим, что $\mathfrak{h}_1=\mathfrak{sp}_{2m},\mathfrak{h}_2=\mathfrak{sp}_{2k}$. □

Напомним понятие *индекса* модуля над простой алгеброй Ли, впервые введенное в [АВЭ]. Пусть $\mathfrak{h}$ – простая алгебра Ли, U – простой $\mathfrak{h}$-модуль. Определим инвариантную симметрическую форму $(\cdot,\cdot)_U$ на $\mathfrak{h}$ по формуле $(x,y)_U=\mathrm{tr}_U(xy)$. Если модуль U нетривиален, то форма $(\cdot,\cdot)_U$ невырождена. *Индексом* $\mathfrak{h}$-модуля U называется частное $\frac{(x,y)_U}{(x,y)_{\mathfrak{h}}}$. Поскольку алгебра $\mathfrak{h}$ проста, последнее частное не зависит от выбора элементов $x,y\in\mathfrak{h}$ с $(x,y)_{\mathfrak{h}}\neq 0$. Мы обозначаем индекс через $l_{\mathfrak{h}}(U)$.

Лемма 7.3.5. *Пусть H – полупростая алгебраическая группа, и $\mathfrak{s}\subset\mathfrak{h}$ – подалгебра, изоморфная $\mathfrak{sl}_2$. Пусть V – H-модуль с $S^{\mathfrak{s}}\rightsquigarrow_{\mathfrak{h}} V$. Тогда верны следующие утверждения.*

(1) *Пусть e,h,f – стандартный базис в $\mathfrak{s}$. Тогда $(h,h)_V=(h,h)_{\mathfrak{h}}-4$.*
(2) *Если алгебра $\mathfrak{h}$ проста, то $l_{\mathfrak{h}}(V)=1-\frac{4}{i(\mathfrak{s},\mathfrak{h})k_{\mathfrak{h}}}$, где $k_{\mathfrak{h}}=(\alpha^\vee,\alpha^\vee)_{\mathfrak{h}}$ для длинного корня $\alpha\in\Delta(\mathfrak{h})$.*

Доказательство. Имеет место изоморфизм $V\cong V^{\mathfrak{s}}\oplus\mathfrak{g}/\mathfrak{s}+V(1)^{\oplus 2}$ $\mathfrak{s}$-модулей, где через $V(1)$ обозначен тавтологический $\mathfrak{sl}_2$-модуль. Поэтому $\mathrm{tr}_V h^2=\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}h^2-\mathrm{tr}_{\mathfrak{s}}h^2+2\,\mathrm{tr}_{V(1)}h^2=\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}h^2+8-4$. Это доказывает первое утверждение. Для доказательства второго остается заметить, что

$$\frac{\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}h^2}{\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\alpha^{\vee 2}}=\frac{i(\mathfrak{s},\mathfrak{h})}{i(\mathfrak{h}^{(\alpha)},\mathfrak{h})}=i(\mathfrak{s},\mathfrak{h}).$$

□

Числа $k_{\mathfrak{h}}$ для всех простых алгебр $\mathfrak{h}$ приведены в таблице 7.4.

Таблица 7.4: $k_{\mathfrak{h}}$.

$\mathfrak{h}$	A_l	B_l	C_l	D_l	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$k_{\mathfrak{h}}$	$4l+4$	$8l-4$	$4l+4$	$8l-8$	48	72	120	36	16

Пусть V – H-модуль, где H – редуктивная группа. Для этого модуля существует стабилизатор общего положения (сокращенно, с.о.п), см. [ВП], Теорема 7.2. По определению, это означает, что существует открытое подмножество $V^0 \subset V$ и подгруппа $H_0 \subset H$, для которых подгруппы $H_0, H_v \subset H$ сопряжены для всех $v \in V^0$. Касательная алгебра стабилизатора общего положения называется стабильной подалгеброй общего положения (сокращенно, с.п.о.п.).

Напомним, что действие $H : V$ называется стабильным, если орбита общего положения замкнута. В этом случае с.о.п редуктивен.

Лемма 7.3.6. *Пусть $\mathfrak{h}$ – полупростая подалгебра Ли, а V – $\mathfrak{h}$-модуль. Пусть $V_1 \subset V$ – H-подмодуль, для которого действие $H : V_1$ стабильно. Обозначим через H_1 компоненту единицы с.о.п этого действия. Пусть $\mathfrak{s}$ – подалгебра в $\mathfrak{h}_1$, изоморфная $\mathfrak{sl}_2$. Если $S^{\mathfrak{s}} \rightsquigarrow_{\mathfrak{h}_1} V/V_1$, то $S^{\mathfrak{s}} \rightsquigarrow_{\mathfrak{h}} V$.*

Доказательство. Пусть $v_1 \in V_1$ – такой вектор, что его орбита замкнута, и $(H_{v_1})^\circ = H_1$. Слайс-модуль в точке v_1 является прямой суммой модуля V/V_1 и тривиального (H_{v_1})-модуля. Теперь требуемое утверждение легко следует из теоремы Луны о слайсах и замечания 7.3.2. $\square$

Доказательство предложения 7.3.1. Доказательство осуществляется в три шага.

Шаг 1. Здесь мы докажем утверждения предложения для случая, когда алгебра $\mathfrak{h}$ проста.

Понятно, что тройка $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ является W-квазисущественной, если и только если $S^{\mathfrak{s}} \rightsquigarrow_{\mathfrak{h}} V \oplus V^* \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, где $\mathfrak{s}$ – подалгебра в $\mathfrak{h}$, сопряженная с $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ для некоторого корня $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})$.

Предположим, что $S^{\mathfrak{s}} \rightsquigarrow_{\mathfrak{h}} V \oplus V^* \oplus \mathfrak{h}^\perp$ для некоторой подалгебры $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{h}$, изоморфной $\mathfrak{sl}_2$. Из пункта 2 леммы 7.3.5 следует, что

$$l_{\mathfrak{h}}(V \oplus V^* \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = 1 - \frac{1}{i(\mathfrak{s}, \mathfrak{h})k_{\mathfrak{g}}}. \tag{7.6}$$

Отсюда $l_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) < 1$. Из раздела 3 работы [Lo2], следует, что $i(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = 1$. Эквивалентно, $i(\mathfrak{s}, \mathfrak{h}) = i(\mathfrak{s}, \mathfrak{g})$. Мы нашли все простые подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ с $l_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) < 1$ в [Lo2],см. таблицу 5. Список (с точностью до сопряженности в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$) приведен в таблице 7.5. В столбце 4 приведена нетривиальная часть $\mathfrak{h}$-модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Через τ мы обозначаем тавтогическое представление классической алгебры Ли.

Таблица 7.5: Простые подалгебры $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ с $l_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) < 1$

N	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_+$
1	$\mathfrak{sl}_n, n > 1$	$\mathfrak{sl}_k, n/2 < k < n$	$(n-k)(\tau + \tau^*)$
2	$\mathfrak{sl}_{2n}, n \geqslant 2$	$\mathfrak{sp}_{2n}$	$\bigwedge^2 \tau$
3	$\mathfrak{sl}_{2n+1}, n \geqslant 2$	$\mathfrak{sp}_{2n}$	$2\tau + \bigwedge^2 \tau$
4	$\mathfrak{sp}_{2n}, n \geqslant 2$	$\mathfrak{sp}_{2k}, n/2 \leqslant k < n$	$2(n-k)\tau$
5	$\mathfrak{so}_n, n \geqslant 7$	$\mathfrak{so}_k, \frac{n+2}{2} < k < n, k \neq 4$	$(n-k)\tau$

N	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_+$
6	$\mathfrak{so}_{2n}, n \geqslant 5$	$\mathfrak{sl}_n$	$\bigwedge^2 \tau + \bigwedge^2 \tau^*$
7	$\mathfrak{so}_{2n+1}, n \geqslant 3$	$\mathfrak{sl}_n$	$\tau + \tau^* + \bigwedge^2 \tau + \bigwedge^2 \tau^*$
8	$\mathfrak{so}_n, 9 \leqslant n \leqslant 11$	$\mathfrak{spin}_7$	$\tau + (n-8)R(\pi_3)$
9	$\mathfrak{so}_n, 7 \leqslant n \leqslant 9$	G_2	$(n-3)R(\pi_1)$
10	G_2	A_2	$\tau + \tau^*$
11	F_4	B_4	$R(\pi_4)$
12	F_4	D_4	$\tau + R(\pi_3) + R(\pi_4)$
13	F_4	B_3	$2\tau + 2R(\pi_3)$
14	E_6	F_4	$R(\pi_1)$
15	E_6	D_5	$R(\pi_4) + R(\pi_5)$
16	E_6	B_4	$\tau + 2R(\pi_4)$
17	E_7	E_6	$R(\pi_1) + R(\pi_5)$
18	E_7	D_6	$2R(\pi_6)$
19	E_8	E_7	$2R(\pi_1)$

Все ортогональные модули U над простой группой H, для которых $m_H(U) = \dim H$, и $S^{\mathfrak{s}} \rightsquigarrow_{\mathfrak{h}} U$ были найдены Шварцем в [Sch2], таблицы I-V ("ортогональные представления с $\mathbb{S}^3$-стратом" в его терминологии). Эти модули приведены в таблице 7.6. Отметим, что в [Sch2] упущен один модуль, а именно, N11, $k = 1$. Для того, чтобы увидеть, что $S^{\mathfrak{s}}$, где $\mathfrak{s} = \mathfrak{h}^{(\alpha)}$, α – длинный корень в $\Delta(\mathfrak{h})$, является $\mathfrak{h}$-стратом модуля U, достаточно применить лемму 7.3.6 к паре $\mathbb{C}^{12} \subset U$. Соответствующая пара $(\mathfrak{h}_1, V/(V_1 \oplus V^{\mathfrak{h}_1}))$ приведена в строке 6 таблицы 7.5.

В третьем столбце таблицы приведено представление алгебры $\mathfrak{h}$ в U/U^H. Из равенства (7.6) следует, что $\iota(\mathfrak{s}, \mathfrak{h}) = 1$ для всех модулей, приведенных в таблице 7.6. Это доказывает утверждение пункта 2 предложения.

Таблица 7.6: Ортогональные H-модули U с $m_H(U) = \dim H$ и $\mathfrak{h}$-стратом $S^{\mathfrak{s}}$

N	$\mathfrak{h}$	U
1	$\mathfrak{sl}_n, n > 1,$	$(n-1)(\tau + \tau^*)$
2	$\mathfrak{sl}_n, n > 3,$	$\tau + \tau^* + \bigwedge^2 \tau + \bigwedge^2 \tau^*$
3	$\mathfrak{sl}_4$	$2(\tau + \tau^*) + \bigwedge^2 \tau$
4	$\mathfrak{so}_7$	$(4-k)\tau + kR(\pi_3), k > 0$
5	$\mathfrak{so}_9$	$kR(\pi_4) + (6-2k)\tau, k > 0$
6	$\mathfrak{so}_{11}$	$2R(\pi_5)$
7	$\mathfrak{sp}_{2m}, m > 1$	$2m\tau$
8	$\mathfrak{sp}_{2m}, m > 1$	$2\tau + R(\pi_2)$
9	$\mathfrak{so}_8$	$k\tau + lR(\pi_3) + mR(\pi_4), k+l+m = 5, k, l, m < 5$
10	$\mathfrak{so}_{10}$	$3\tau + R(\pi_4) + R(\pi_5)$
11	$\mathfrak{so}_{12}$	$\tau + kR(\pi_5) + (2-k)R(\pi_6)$
12	G_2	$3R(\pi_1)$

Пользуясь таблицами 7.5,7.6, мы находим все тройки $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$, для которых $S^{\mathfrak{s}} \rightsquigarrow_{\mathfrak{h}} V \oplus V^* \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Это завершает доказательство пункта 1 предложения в данном случае.

Шаг 2. Осталось рассмотреть случай, когда алгебра $\mathfrak{h}$ не является простой. На данном шаге мы предположим, что $\mathfrak{h}$ обладает следующим свойством:

(*) $S^{\mathfrak{s}} \rightsquigarrow_{\mathfrak{h}} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \oplus V \oplus V^*$, где подалгебра $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{h}$ такова, что

(1) $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, где $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ – простые идеалы алгебры $\mathfrak{h}$.

(2) $\mathfrak{s} \sim_G \mathfrak{g}^{(\alpha)}$, где α – короткий корень в $\mathfrak{g}$.

(3) $i(\mathfrak{s}_i, \mathfrak{h}_i) = 1$, где $\mathfrak{s}_i$ – проекция подалгебры $\mathfrak{s}$ на $\mathfrak{h}_i, i = 1, 2$.

Из леммы 7.3.4 следует, что подалгебра $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{h}$, удовлетворяющая условиям (1)-(3), определена однозначно с точностью до $\mathrm{Int}(\mathfrak{h})$-сопряженности.

Покажем, что

$$k_{\mathfrak{g}} = k_{\mathfrak{h}_1} + k_{\mathfrak{h}_2} - 2 - k_{\mathfrak{h}_1} l_{\mathfrak{h}_1}(V) - k_{\mathfrak{h}_2} l_{\mathfrak{h}_2}(V). \tag{7.7}$$

Пусть $h \in \mathfrak{s}$ – двойственный корень, $h = h_1 + h_2, h_i \in \mathfrak{h}_i$. По лемме 7.3.5, $(h,h)_V + (h,h)_{V^*} + (h,h)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = (h,h)_{\mathfrak{h}} - 4$. Эквивалентно,

$$2(h,h)_V + (h,h)_{\mathfrak{g}} = 2(h,h)_{\mathfrak{h}} - 4. \tag{7.8}$$

Поскольку $(\cdot,\cdot)_V, (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{h}}$ суть инвариантные формы на $\mathfrak{h}$, то $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ ортогональны относительно $(\cdot,\cdot)_V, (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{h}}$. Поэтому (7.8) равносильно равенству

$$(h,h)_{\mathfrak{g}} + 2((h_1,h_1)_V + (h_2,h_2)_V) = 2((h_1,h_1)_{\mathfrak{h}_1} + (h_2,h_2)_{\mathfrak{h}_2}) - 4. \tag{7.9}$$

По пункту 2a леммы 7.3.4 и лемме 7.3.3, элемент $h_i \sim_{\mathrm{Int}(\mathfrak{h}_i)} \alpha^\vee$, где α – длинный корень в $\Delta(\mathfrak{g})$. Поэтому $(h_1,h_1)_{\mathfrak{h}_1} = k_{\mathfrak{h}_1}, (h_2,h_2)_{\mathfrak{h}_1} = 0$. Из выбора подалгебры $\mathfrak{s}$ следует, что $i(\mathfrak{s},\mathfrak{h}) = 2$, откуда $(h,h)_{\mathfrak{g}} = 2k_{\mathfrak{g}}$. Поэтому (7.9) и (7.7) эквивалентны.

Покажем, что $\mathfrak{g} \not\cong F_4, \mathfrak{so}_{2l+1}, l \geqslant 3$. Предположим, что $\mathfrak{g} \cong F_4$. По (7.7), $k_{\mathfrak{h}_1} + k_{\mathfrak{h}_2} \geqslant 38$. Принимая во винмание то, что $\mathrm{rk}\,\mathfrak{h}_1 + \mathrm{rk}\,\mathfrak{h}_2 \leqslant 4$, и используя таблицу 7.4, получаем противоречие. Предположим, что $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}_{2l+1}, l \geqslant 3$. По пункту 2b леммы 7.3.4, $\mathfrak{h}_1 \cong \mathfrak{h}_2 \cong \mathfrak{sl}_2$. Снова получаем противоречие с (7.7).

Из пунктов 2a,2c леммы 7.3.4 следует, что $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sp}_{2n}$, $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{sp}_{2m_1} \oplus \mathfrak{sp}_{2m_2}, m_1 + m_2 \leqslant n, m_1 \leqslant m_2$. Равенство (7.7) можно переписать так

$$2(m_1 + m_2 - n) + 1 = (2m_1 + 2) l_{\mathfrak{h}_1}(V) + (2m_2 + 2) l_{\mathfrak{h}_2}(V). \tag{7.10}$$

Из (7.10) следует, что $m_1 + m_2 = n$. Поэтому $\mathfrak{h}$-модуль $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ является тензорным произведением тавтологических $\mathfrak{sp}_{2m_1}$- и $\mathfrak{sp}_{2m_2}$-модулей. Из (7.10) следует, что $l_{\mathfrak{h}_i}(V) \leqslant \frac{1}{2m+2}$. Все модули над простыми алгебрами Ли с индексом меньшим 1 (вместе с их индексами) были найдены в [АВЭ]. Из этих результатов следует, что V является тавтологическим $\mathfrak{sp}_{2m_j}$-модулем для одного из индексов $j \in \{1,2\}$. Напомним, что $m_H(V \oplus V^* \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \dim H$. В частности, $m_{H_i}(V \oplus V^* \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{h}), i = 1, 2$. По доказанному выше, H_i-модуль $V \oplus V^* \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ является прямой суммой тавтологических $\mathrm{Sp}(2m_i)$-модулей. Отсюда следует, что если $m_1 < m_2$, то H_1 действует тривиально на V и $m_2 = m_1 + 1$. Этим доказано, что W-квазисущественная тройка $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$, имеющая свойство (*) должна являться одной из двух требуемых.

Обратно, покажем, что тройки NN33,34 обладают свойством (*). Положим $V_0 = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Это ортогональный, поэтому стабильный, см., скажем, [Lu1], H-модуль. С.п.о.п. $\mathfrak{h}_0$ для H_0-модуля V_0 есть прямая сумма m_1 копий алгебры $\mathfrak{sl}_2$, вложенных диагонально в $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ и $m_2 - m_1$ копий $\mathfrak{sl}_2$, вложенных в $\mathfrak{h}_2$ (см. [Эл2]). Требуемое следует из леммы 7.3.6, примененной к паре $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \oplus V \oplus V^*$.

Наконец, отметим, что $S^{(\mathfrak{h}_2^{(\alpha)})} \rightsquigarrow_{\mathfrak{h}_2} V \oplus V^* \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (если $\mathfrak{h}_1 \cong \mathfrak{h}_2$, то в качестве $\mathfrak{h}_2$ берется идеал в $\mathfrak{h}$, действующий тривиально на V), где α – длинный корень алгебры $\mathfrak{h}_2$.

Шаг 3. Остается показать, что любая W-квазисущественная тройка $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$, у которой алгебра $\mathfrak{h}$ непроста, обладает свойством (*). Предположим противное.

Докажем, что

(**) $S^{\mathfrak{s}} \rightsquigarrow_{\mathfrak{h}} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \oplus V \oplus V^*$ для некоторой подалгебры $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{h}, \mathfrak{s} \cong \mathfrak{sl}_2$, не лежащей ни в каком простом идеале алгебры $\mathfrak{h}$.

Действительно, в противном случае найдутся простые идеалы $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_i$ алгебры $\mathfrak{h}$ и подалгебры $\mathfrak{s}_i \subset \mathfrak{h}_i$, изоморфные $\mathfrak{sl}_2$, для которых $S^{\mathfrak{s}_i} \rightsquigarrow_{\mathfrak{h}} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \oplus V \oplus V^*$, эквивалентно, $S^{\mathfrak{s}_i} \rightsquigarrow_{\mathfrak{h}_i} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \oplus V \oplus V^*$. Тогда $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_i, V/V^{\mathfrak{h}_i})$ – это одна из троек NN 1-32 из таблицы 7.1. В частности, если $S^{(\alpha)} \rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} T^*(G *_H V)$, то α – длинный корень. Это было доказано на шаге 1. Поскольку алгебра $\mathfrak{h}$ не проста, то тройка $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ не является W-квазисущественной. Это противоречие доказывает утверждение (**).

Используя пункт 2b леммы 7.3.5, мы видим, что существует подалгебра $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{h}$ и простые идеалы $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$, для которых тройка $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2, V/V^{\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2})$ удовлетворяет условию (*) предыдущего шага. По доказанному на шаге 2, $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2) = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, откуда $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$. Противоречие с предположением противного. □

7.4. **Вычисление групп Вейля.** В этом разделе мы вычислим группы $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ для троек $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$, перечисленных в таблице 7.1.

Сначала мы сведем задачу к случаю, когда представление $H : V$ не имеет непостоянных инвариантов. Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ – одна из троек из таблицы 7.1. Обозначим через H_0 связную компоненту главной изотропной подгруппы для действия $H : V$ (определение дано в доказательстве леммы 4.5.2) и положим $V_0 = V/(V^{H_0} + \mathfrak{h}v)$, где $v \in V$ – точка с замкнутой H-орбитой и $H_v^\circ = H_0$. Тогда (см. следствие 2.3.3) $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V) = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, V_0)$. Мы говорим, что $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, V_0)$ является тройкой *редуцированной* из $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$. Понятно, что $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V) = (\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, V_0)$ если, и только если $\mathbb{C}[V]^H = \mathbb{C}$, эквивалентно, H имеет плотную орбиту в V (во всех рассматриваемых случаяах группа H полупроста, откуда $\mathbb{C}(V)^H = \mathrm{Quot}(\mathbb{C}[V]^H)$). В таблице 7.7 приведены тройки, редуцированные из тех троек таблицы 7.1, которые сами не являются редуцированными. Мы используем обозначения из таблицы 7.1. В столбце 1 приведен номер тройки $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ в таблице 7.1, а также, в некоторых случаях ограничение на алгебру $\mathfrak{g}$ или $\mathfrak{h}$-модуль V. Оказывается, что во всех случаях тройка $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, V_0)$ снова содержится в таблице 7.1.

Таблица 7.7: Редуцированные тройки для $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$

N	$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$	$\mathfrak{h}_0$	V_0
1	N1, $m > 0$	$\mathfrak{sl}_{n-k-m}$	$(l-m)\tau$
2	N2, n четно	$\mathfrak{sp}_n$	τ
3	N2, n нечетно	$\mathfrak{sp}_{n-1}$	0
4	N3	$\mathfrak{sp}_n$	τ
5	N6, n нечетно	$\mathfrak{sp}_{n-1}$	0
6	N10	$\mathfrak{sl}_3$	0
7	N11, $k=1$	$\mathfrak{sl}_3$	0
8	N12	$\mathfrak{sl}_3$	0
9	N13	G_2	0
10	N14, $(k,l) = (2,0)$	$\mathfrak{sl}_4$	0
11	N14, $(k,l) \neq (2,0)$	G_2	0
12	N15	G_2	0
13	N16	$\mathfrak{sl}_4$	0
14	N17	G_2	0
15	N19	$\mathfrak{sl}_5$	0
16	N20	$\mathfrak{spin}_7$	0

N	$(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$	$\mathfrak{h}$	V
17	N21	$\mathfrak{spin}_7$	0
18	N22	$\mathfrak{spin}_7$	0
19	N25, n четно	$\mathfrak{sp}_n$	0
20	N25, n нечетно	$\mathfrak{sp}_{n+1}$	τ
21	N31	B_3	0
22	N32	B_3	0

Лемма 7.4.1. *Тройки, перечисленные в первом столбце таблицы 7.7, суть в точности те тройки* $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ *из таблицы 7.1, у которых* $\mathbb{C}[V]^H\neq\mathbb{C}$. *Тройки* $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0,V_0)$ – *это редуцированные тройки для* $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$.

Доказательство. Список простых линейных групп, обладающих плотной орбитой, хорошо известен, см., например, [Ви1]. Из классификации в [Эл1] следует, что с.п.о.п просты для всех троек $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ из таблицы 7.1, за исключением троек из строк 1,2,4,20. По критерию Попова, см. [По2], действия $H:V$ в этом случае стабильны. Для оставшихся четырех действий утверждение о редуцированных тройках несложно проверяется для каждого случая по отдельности. □

В дальнейшем в этом пункте мы рассматриваем только редуцированные тройки $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ из таблицы 7.1.

Группа $T_1\times T_2$, где $T_1=Z(Z_G(H))^\circ, T_2=Z(\mathrm{GL}(V)^H)$ – это тор, естественным образом действующий на $X_0=G*_H V$ G-автоморфизмами. Именно, для $t_1\in T_1,t_2\in T_2$ мы полагаем $(t_1,t_2)[g,v]=[gt_1^{-1},t_2v], g\in G, v\in V$. Положим $\widetilde{G}=G\times T_1\times T_2$, $\widetilde{H}=H\times T_1\times T_2$.

Для некоторых троек $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ имеет место неравенство $\mathrm{rk}_{\widetilde{G}}(X_0)<\mathrm{rk}\,\widetilde{G}$. Эти тройки приведены в таблице 7.8. В столбце 3 первой строки имеется ввиду диагональная матрица, у которой на позиции $k+1$ стоит $(n-1)x$, а на оставшихся – $-x$. В строках 6-10 элементы $\varepsilon_i\in\mathfrak{t}$ выбраны как в [ВО].

Таблица 7.8: Проекции пространств $\mathfrak{l}_{0\,\widetilde{G},X}$ на $\mathfrak{g}$

N	$(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$	проекция $\mathfrak{l}_{0\,\widetilde{G},X}$ на $\mathfrak{g}$
1	N1, $m=0$	$diag(-x^k,(n-1)x,-x^{n-k-1})$
2	N4	$diag(-x,-x,\frac{(n+1)x}{n-1},-x\ldots,\frac{(n+1)x}{n-1},-x)$
3	N5	$diag(\frac{x}{n},\frac{x}{n}-\frac{x}{(n-2)},\frac{x}{n},\ldots,-\frac{x}{(n-2)},\frac{x}{n})$
4	N7	$diag(-x,x,-x,\ldots,x)$
5	N8	$diag(\frac{x}{n+1},-\frac{x}{n-1},\frac{x}{n+1},\ldots,-\frac{x}{n+1},\frac{x}{n+1})$
6	N26	$x\sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^i\varepsilon_i$
7	N27	$x\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i\varepsilon_i$
8	N28	$x\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i\varepsilon_i$
9	N33	$x\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i\varepsilon_i$
10	N34	$x\sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^i\varepsilon_i$

Лемма 7.4.2. (1) *Для троек* $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$, *указанных во втором столбце таблицы 7.8, проекции подалгебр* $\mathfrak{l}_{0\,\widetilde{G},X_0}\subset\widetilde{\mathfrak{g}}$ *на* $\mathfrak{g}$ *указаны в столбце 3.*

(2) *Для этих троек* $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ *группы Вейля* $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ *совпадают с указанными в таблице 7.1.*

Доказательство. Заметим, что $\dim T_1 = 1$ для строк NN 1 (с $k \neq 0$),3,5-8, иначе $\dim T_1 = 0$. Размерность тора T_2 равна 2 для второй строки, 1 для строк NN 1,3,4,6-10, и 0 иначе.

Вложим группу $\widetilde{H}$ в $\widetilde{G}$ посредством мономорфизма $(h, t_1, t_2) \mapsto (ht_1, t_1, t_2)$. Снабдим пространство V естественной структурой $\widetilde{H}$-модуля: H действует на V, как прежде, T_1 тривиально, а T_2 посредством отождествления $T_2 \cong Z(\mathrm{GL}(V)^H)$. Имеется изоморфизм $\widetilde{G}$-многообразий $X_0 \cong \widetilde{G} *_{\widetilde{H}} V$.

Поскольку $\mathfrak{a}_{G,X_0} = \mathfrak{t}$, то проекция $\mathfrak{a}_{\widetilde{G},X_0}$ на $\mathfrak{t}$ сюръективна. Поэтому $\mathfrak{a}_{\widetilde{G},X} \oplus \mathfrak{l}_{0\,\widetilde{G},X}$ является ортогональной прямой суммой равной $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$. Для доказательства утверждения первого пункта остается вычислить подпространство $\mathfrak{a}_{\widetilde{G},X_0} \subset \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$. Поскольку $X_0 \cong \widetilde{G} *_{\widetilde{H}} V$, это вычисление может быть произведено с помощью алгоритма из пункта 11.1. Отметим, однако, что вычисление можно упростить. Именно, для строк 1-3, 6-8 существует антистандартная параболическая подгруппа $Q \subset \widetilde{G}$, и стандартная подгруппа Леви $M \subset Q$, для которых $H = (M, M)$. Применяя предложение 2.6.4, мы сводим проблему вычисления пространства $\mathfrak{a}_{\widetilde{G},X_0}$ в указанных случаях к вычислению $\mathfrak{a}_{\bullet,\bullet}$ для некоторых линейных действий. Для всех строк, кроме первой, эти линейные действия сферические и картановское пространство может быть извлечено, скажем, из второй таблицы в [Le], Section 2.

Перейдем к пункту 2. Проекция $\mathfrak{a}_0$ подалгебры $\mathfrak{l}_{0\,\widetilde{G},X_0}$ на $\mathfrak{g}$ лежит в $\mathfrak{t} \cap (\mathfrak{a}_{\widetilde{G},X_0} \cap \mathfrak{g})^{\perp}$. Из предложения 5.4.4 следует, что $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{t}^{W_{G,X_0}}$. Поэтому $W_{G,X_0} \subset W_\xi$ для $\xi \in \mathfrak{a}_0 \setminus \{0\}$. Но, по следствию 7.2.8, W_{G,X_0} – это одна из групп перечисленных в таблице 7.2. Равенства $W_{G,X_0} = W(\mathfrak{g})_\xi$ проверяются непосредственно во всех случаях. □

Остается вычислить группы Вейля для следующих троек $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$:

NN 9,11 (с $k = 2$), 18, 23-25,29,32.

Заметим, прежде всего, что во всех перечисленных случаях $s_\alpha \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ для всех коротких корней $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})$. В самом деле, из предложения 7.3.1 следует, что $S^{(\alpha)} \rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} T^*(G *_H V)$ если и только если $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})$ – длинный корень. Наше утверждение теперь следует из следствия 7.2.3.

N9. Здесь $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}, \mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_n, V = \{0\}$. Пусть M – стандартная подгруппа Леви, соответствующая простым корням $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ (так что $\mathfrak{h} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$). Пусть Q – антистандартная параболическая подгруппа в G с подгруппой Леви M. Представление группы $H \cong \mathrm{SL}_n$ в $\mathfrak{q}_u$ – это $\bigwedge^2 \tau^* + \tau^*$. Из следствия 5.4.3 получаем, что $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V) \cap M/T = W_{\mathrm{SL}_n, \bigwedge^2 \mathbb{C}^{n*} \oplus \mathbb{C}^{n*}}$. По доказанному выше, последняя группа Вейля порождена отражениями $s_{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+2}}, i = \overline{1, n-2}$. Поэтому группа $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ такова, как указано в таблице 7.1.

N11. Здесь $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_7, \mathfrak{h} = \mathfrak{so}_6$, и V – сумма двух копий полуспинорного $\mathfrak{h}$-модуля $V(\pi_3)$. Мы считаем, что подалгебра $\mathfrak{h}$ вложена в $\mathfrak{so}_7$ как аннулятор вектора e_4. Из пункта 3 предложения 2.3.1 следует, что $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V) = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0)$, где $\mathfrak{h}_0$ – с.п.о.п. $\mathfrak{h}$-модуля V. Пусть алгебра $\mathfrak{h}_1$ – с.п.о.п для действия $H : V(\pi_3)$. Это подалгебра, состоящая из всех матриц вида $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & -J_1 A^T J_1 \end{pmatrix}$, где $A \in \mathfrak{sl}_3, B \in \mathfrak{so}_3$ и $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Мы можем предположить, что $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}_1$. Заметим, что $\mathfrak{h}_0 \cong \mathfrak{sl}_2 \ltimes (\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2)$. Значит, можем считать, что

$$\mathfrak{h}_0 = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ x & a & b & 0 & 0 & 0 & 0\\ y & c & -a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -t & 0 & 0 & 0 & a & -b & 0\\ -z & 0 & 0 & 0 & -c & -a & 0\\ 0 & z & t & 0 & -y & -x & 0 \end{pmatrix}, x,y,z,t,a,b,c \in \mathbb{C}\}.$$

Пусть $\mathfrak{q}$ – антистандартная параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}$, соответствующая простому корню $\varepsilon_2-\varepsilon_3$, $\mathfrak{m}$ – её стандартная подалгебра Леви. Непосредственно видим, что $\mathfrak{s} := \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{m} \cong \mathfrak{sl}_2$ – это подалгебра Леви в $\mathfrak{h}_0$, и что $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h}_0) \subset \mathrm{R}_u(\mathfrak{q})$. Нетривиальная часть $\mathfrak{s}$-модуля $\mathfrak{q}/\mathfrak{h}_0$ двумерна (и неприводима). Применив следствие 5.4.3 к Q и M, видим, что $s_{\varepsilon_2-\varepsilon_3} \notin W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0)$.

Теперь достаточно показать, что $s_{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \in W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0)$. Положим

$$\widetilde{\mathfrak{h}}_0 = \{\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ x & a & b & 0 & 0 & 0 & 0\\ y & c & d & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -t & v & 0 & 0 & -d & -b & 0\\ -z & 0 & -v & 0 & -c & -a & 0\\ 0 & z & t & 0 & -y & -x & -u \end{pmatrix}, a,b,c,d,u,v,x,y,z,t \in \mathbb{C}\}.$$

Картановское пространство и группа Вейля однородного пространства $G/\widetilde{H}_0$ могут быть извлечены из [Wa], Table B, строка 7: $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}}_0) = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle$, группа $W(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}}_0)$ порождена отражениями $s_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}, s_{\varepsilon_2}$. Согласно пункту 1 предложения 2.3.1, $W(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}}_0)$ является подфактором группы $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0)$. Отсюда легко следует включение $s_{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \in W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0)$.

N18. Здесь $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_9, \mathfrak{h} = G_2, V = \{0\}$.

Мы можем предположить, что $H \subset M$, где M – стандартная подгруппа Леви в G, соответствующая простым корням $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$. Положим $\mathfrak{q} = \mathfrak{b}^- + \mathfrak{m}$. Применив следствие 5.4.3 к Q, M, мы видим, что $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cap M/T = W(\mathfrak{so}_7,\mathfrak{h},V(\pi_3))$. Последняя группа уже была вычислена, она порождена отражениями $s_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}, s_{\varepsilon_3}, s_{\varepsilon_4}$. Поэтому группа $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ порождена либо набором $s_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}, s_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}, s_{\varepsilon_3}, s_{\varepsilon_4}$, либо набором $s_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}, s_{\varepsilon_3}$, $s_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}, s_{\varepsilon_4}$. По следствию 7.2.3, осталось показать, что $S^{(A)} \not\rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} T^*(G/H)$, где $A = \{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_3-\varepsilon_4\}$. В самом деле, в $T^*(G/H)$ нет $G^{(A)}$-неподвижных точек, поскольку подгруппа $G^{(A)} \subset G$ не сопряжена подгруппе в $H = G_2$.

N23. Здесь $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{11}, \mathfrak{h} = \mathfrak{spin}_7, V = \{0\}$.

Как и выше, мы можем предположить, что $H \subset M$, где M – стандартная подгруппа Леви в G, соответствующим простым корням $\alpha_2,\ldots,\alpha_5$. Аналогично предыдущему случаю, мы получаем $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cap M/T = W(\mathfrak{so}_9,\mathfrak{h},V(\pi_3))$. Последняя группа порождена отражениями $s_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}, s_{\varepsilon_3-\varepsilon_5}, s_{\varepsilon_4}, s_{\varepsilon_5}$. Как и в предыдущем случае, остается проверить, что $S^{(A)} \not\rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} T^*(G/H)$, где $A = \{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_3-\varepsilon_4\}$. Предположим противное. Если подалгебра $\mathfrak{g}^{(A)} \subset \mathfrak{g}$ сопряжена подалгебре $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{h}$, то оба простых идеала из $\mathfrak{s}$ имеют индекс 1 в $\mathfrak{h}$. Такая подалгебра $\mathfrak{s}$ в $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{so}_7$ единственна, это стандартно вложенная подалгебра $\mathfrak{so}_4 \subset \mathfrak{so}_7$. Из замечания 7.3.2 следует, что $(\mathfrak{s}, V_0) \rightsquigarrow_{\mathfrak{h}} U := \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, где $\dim V_0 = 8$. Поэтому $\mathrm{codim}_U(\mathfrak{h}v + U^{\mathfrak{s}}) = 8$ для некоторого элемента $v \in U^{\mathfrak{s}}$. Отсюда выводим, что

$$\dim U^{\mathfrak{s}} + \dim \mathfrak{h}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{s}) \geqslant \dim U - 8. \tag{7.11}$$

Имеет место изоморфизм $\mathfrak{h}$-модулей $U \cong V(\pi_1) \oplus V(\pi_3)^{\oplus 3}$. Легко видеть, что $\dim V(\pi_1)^{\mathfrak{s}} = 3, \dim V(\pi_3)^{\mathfrak{s}} = 0, \dim \mathfrak{h}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{s}) = 21 - 9 = 12$. Противоречие с (7.11).

N24. Здесь $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{13}, \mathfrak{h} = \mathfrak{so}_{10}, V = V(\pi_4)$.

Снова, можем предположить, что $H \subset (M, M)$, где M – стандартная подгруппа Леви в G, соответствующая простым корням $\alpha_2, \ldots, \alpha_6$. Используя следствие 5.4.3, мы имеем $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V) \cap M/T = W([\mathfrak{m}, \mathfrak{m}], \mathfrak{h}, V(\pi_1) \oplus V(\pi_4))$. Как и выше, достаточно показать, что $S^{(A)} \not\rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} G *_H (\mathfrak{h}^\perp \oplus V \oplus V^*)$, где $A = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_4 - \varepsilon_5\}$. Существует единственная с точностью до сопряжения подалгебра $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{h}$ G-сопряженная с $\mathfrak{g}^{(A)}$, а именно, $\mathfrak{s} = \mathfrak{h}^{(A')}$, где $(A') = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_3 - \varepsilon_4\}$ (здесь имеются в виду корни из $\Delta(\mathfrak{so}_{10})$).

Аналогично предыдущему случаю, остается показать, что

$$\dim \widetilde{V}^{\mathfrak{s}} + \dim \mathfrak{h}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{s}) < \dim \widetilde{V} - 8, \tag{7.12}$$

где $\widetilde{V} := \mathfrak{h}^\perp \oplus V \oplus V^* \cong V(\pi_1)^{\oplus 3} \oplus V(\pi_4) \oplus V(\pi_5)$. Несложно видеть, что $\dim V(\pi_1)^{\mathfrak{s}} = 2, \dim \mathfrak{h}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{s}) = 32$. Для вычисления $\dim(V(\pi_4) \oplus V(\pi_5))^{\mathfrak{s}}$ заметим, что система весов $\mathfrak{h}$-модуля $V(\pi_4) \oplus V(\pi_5)$ состоит из элементов $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^5 \pm\varepsilon_i$ без кратностей. Поскольку $\mathfrak{s}$ является регулярной подалгеброй в $\mathfrak{h}$, пространство $(V(\pi_4) \oplus V(\pi_5))^{\mathfrak{s}}$ является прямой суммой весовых подпространств. Весовой вектор v_λ веса λ аннулируется подалгеброй $\mathfrak{s}$ тогда и только тогда, когда $(\lambda, \varepsilon_1 - \varepsilon_2) = (\lambda, \varepsilon_3 - \varepsilon_4) = 0$. Поэтому $\dim(V(\pi_4) \oplus V(\pi_5))^{\mathfrak{s}} = 8$. Отсюда неравенство (7.12).

N25. Здесь $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_{2m}, m = \left[\frac{n+1}{2}\right]$, $V = V(\pi_1)$ для четного числа n и 0, иначе.

Достаточно показать, что $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V) \neq W(\mathfrak{g})$. Мы сделаем это индукцией по n. Для $n = 1$ мы имеем $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2, V = V(\pi_1)$, и требуемое утверждение следует, например, из вычислений в пункте 3.7. Пусть теперь $n > 1$, и M – подгруппа Леви в G, соответствующая простым корням $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Можем предположить, что $H \subset (M, M)$. Используя следствие 5.4.3, мы видим, что $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V) \cap M/T = W([\mathfrak{m}, \mathfrak{m}], \mathfrak{h}, V(\pi_1) \oplus V)$. Редуцированная тройка для $([\mathfrak{m}, \mathfrak{m}], \mathfrak{h}, V(\pi_1) \oplus V)$ – это $(\mathfrak{sp}_{2(n-1)}, \mathfrak{sp}_{2[n/2]}, V(\pi_1)^{\oplus(2\{n/2\})})$, и все доказано по предположению индукции.

N29. Здесь $\mathfrak{g} = G_2, \mathfrak{h} = A_2, V = V(\pi_1)$.

Достаточно доказать, что $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V) \neq W(\mathfrak{g})$. Отметим, что $\alpha_2, \alpha_2 + 3\alpha_1$ – система простых корней алгебры $\mathfrak{h}$. Подалгебра $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{g}^{(\alpha_2)} \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha_2 - 3\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}^{-2\alpha_2 - 3\alpha_1}$ – это с.п.о.п для $\mathfrak{h}$-модуля V. Отметим, что подалгебра $\mathfrak{h}_0$ правильно вложена в параболическую подалгебру $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}^{\alpha_2} \oplus \mathfrak{b}^-$. Пусть M – подгруппа Леви в G, соответствующая простому корню α_2. Отметим, что ограничение $\mathfrak{h}_0$-модуля $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h}_0)$ на $\mathfrak{g}^{(\alpha_2)}$ – это неприводимый двумерный модуль. Применяя следствие 5.4.3 к однородному пространству G/H_0 и паре (Q, M), мы видим $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0) \cap M/T = \{1\}$. Но $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V) = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_0)$ по пункту 3 предложения 2.3.1.

N32. Здесь $\mathfrak{g} = F_4, \mathfrak{h} = B_3, V = \{0\}$.

Пусть M – стандартная подгруппа Леви в G, соответствующая простым корням $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Мы можем предположить, что $\mathfrak{h} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$. Используя следствие 5.4.3, мы видим, что $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V) \cap M/T = W([\mathfrak{m}, \mathfrak{m}], \mathfrak{h}, V(\pi_3) \oplus V(\pi_1))$. По доказанному выше, последняя группа порождена отражениями $s_{\varepsilon_2 - \varepsilon_4}, s_{\varepsilon_3}, s_{\varepsilon_4}$. В частности, $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V) \neq W(\mathfrak{g})$. Напомним, что $s_\alpha \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V)$ для всех коротких корней α. Отражения s_α, где α – короткий корень, и $s_{\varepsilon_2 - \varepsilon_4}$ порождают подгруппу в $W(\mathfrak{g})$, указанную в таблице 7.1. Эта подгруппа максимальна.

7.5. **Завершение доказательства теоремы 7.1.2.** Теорема 7.1.2 будет доказана, если, во-первых, мы покажем, что любая W-квазисущественная тройка является W-существенной, и обратно, и во-вторых, покажем, как определять W-существенную часть тройки. Это делается в следующей лемме.

Лемма 7.5.1. (1) *Любая W-квазисущественная тройка является W-существенной.*

(2) *Пусть* $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ *– допустимая тройка, и* $\mathfrak{h}_0$ *– минимальный идеал в* $\mathfrak{h}$*, для которого условия* $S^{(\alpha)} \rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} T^*(G*_H V)$*,* $S^{(\alpha)} \rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} T^*(G*_{H_0} V)$ *эквивалентны для любого корня* α*. Тогда* $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0,V/V^{\mathfrak{h}_0})$ *является* W*-квазисущественной тройкой и* $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)=W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0,V/V^{\mathfrak{h}_0})$.

Отметим, что из пункта 2 леммы непосредственно следует, что любая W-существенная тройка W-квазисущественна. Более того, тройка $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0,V/V^{\mathfrak{h}_0})$ из пункта 2 леммы – это либо тривиальная тройка $(\mathfrak{g},0,0)$, либо одна из троек таблицы 7.1. Просматривая таблицу, убеждаемся, что идеал $\mathfrak{h}_0$ определен однозначно. Таким образом, тройка $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0,V/V^{\mathfrak{h}_0})$ совпадает с тройкой, определенной в пункте 2 теоремы 7.1.2, и является W-существенной частью тройки $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$.

Доказательство. Предположим, что тройка $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ W-квазисущественна, но не W-существенна. Тогда, по определению, существует собственный идеал $\mathfrak{h}_0\subset\mathfrak{h}$, для которого $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)=W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0,V)$. С другой стороны, существует корень $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g})$, для которого $S^{(\alpha)} \rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} T^*(G*_H V)$, $S^{(\alpha)} \not\rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} T^*(G*_{H_0} V)$. Следствие 7.2.3 показывает, что $s_{w\alpha}\in W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0,V)$ для всех $w\in W$. Вычисления предыдущего пункта показывают, однако, что найдется такой элемент $w\in W$, что $s_{w\alpha}\notin W(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$. Противоречие.

Перейдем к пункту 2. Тройка $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0,V/V^{\mathfrak{h}_0})$ является W-квазисущественной в силу условия минимальности на $\mathfrak{h}_0$. Если $\mathfrak{h}_0=\{0\}$, то, по следствию 7.2.3, $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)=W(\mathfrak{g})$. Если $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0,V/V^{\mathfrak{h}_0})$ – одна из троек NN29,33,34 из Table 7.1, то $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_0$, откуда равенство для групп Вейля. Таким образом, мы можем в дальнейшем считать, что $\mathfrak{g}\neq G_2$, и что $S^{(\alpha)} \rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} T^*(G*_H V)$ тогда и только тогда, когда α – длинный корень. Принимая во внимание следствие 7.2.3, выводим отсюда, что группа $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ содержит все отражения, соответствующие коротким корням. Предположим сначала, что $\mathfrak{g}$ является классической алгеброй Ли. По следствиям 7.2.5, 7.2.8, $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ – одна из подгрупп, приведенных в таблице 7.2. Но любая подгруппа из этой таблицы, содержащая все отражения, соответствующие коротким корням, является максимальной среди собственных подгрупп в W, порожденных отражениями. Поскольку $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)\subset W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0,V/V^{\mathfrak{h}_0})$, то из вычислений предыдущего пункта следует, что $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0,V/V^{\mathfrak{h}_0})=W(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$. Остается рассмотреть случай $\mathfrak{g}=F_4$. Аналогично классическому случаю, достаточно показать, что $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ содержит отражение соответствующее длинному корню. Для этого заметим, что иначе $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h},V)$ не является большой подгруппой в $W(\mathfrak{g})$ (в определении 7.2.4 надо взять $\alpha=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\beta=\varepsilon_2-\varepsilon_3$). □

7.6. **Группы Вейля аффинных однородных пространств.** Формулировке основного результата мы предпошлем следующее замечание. Группа $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ зависит лишь от коммутанта $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$, см. следствие 5.4.5. Поэтому при вычислении групп Вейля достаточно ограничиться случаем, когда подалгебра $\mathfrak{h}$ полупроста. Мы вычислим группы Вейля лишь для некоторого класса *W-существенных* подалгебр $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$, а затем покажем, как сводить общий случай к этому.

Определение 7.6.1. Полупростая подалгебра $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ называется W-существенной, если в $\mathfrak{h}$ нет полупростого идеала $\mathfrak{h}_0$ отличного от $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$, для которого $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},[\mathfrak{h},\mathfrak{h}])=\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0), W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0)$, совпадает с $\mathfrak{h}$. Для полупростой подалгебры $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ мы обозначим через $\mathfrak{h}^{W-ess}$ минимальный идеал в $\mathfrak{g}$, для которого $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^{W-ess}), W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^{W-ess})$.

Вот наш основной результат:

Предложение 7.6.2. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *– полупростая алгебра Ли, а* $\mathfrak{h}$ *её полупростая подалгебра. Тогда*

(1) *Пусть* $\mathfrak{h}$ *является* W*-существенной подалгеброй в* $\mathfrak{g}$. *Тогда пара* $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *содержится либо в таблице 7.1, либо в таблице 2.1. В последнем случае группа* $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *совпадает с приведенной в таблице 6.2.*

(2) *Идеал* $\mathfrak{h}^{W-ess}$ *коректно определен и совпадает с максимальным идеалом в* $\mathfrak{h}$, *который является* W*-существенной подалгеброй в* $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\mathfrak{t}$. Тогда $\mathfrak{h}$ – W-существенная подалгебра в $\mathfrak{g}$ если и только если $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},0)$ – W-существенная тройка. По определению, любая существенная полупростая подалгебра в $\mathfrak{g}$ является W-существенной. Предположим теперь, что $\mathfrak{h}$ – W-существенная подалгебра в $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\subsetneqq\mathfrak{t}$. Пусть $L_0=L^\circ_{0\,G,G/H}$, $\underline{X}_0$ – выделенная компонента в $(G/H)^{L_0}$, $\underline{G}=N_G(\mathfrak{l}_0,\underline{X}_0)/L_0, \underline{H}=N_H(\mathfrak{l}_0)/L_0$, $\underline{\mathfrak{t}}=\underline{\mathfrak{g}}\cap\mathfrak{t}$. Пусть F – подгруппа в $\underline{G}$, состоящая из всех элементов, оставляющих на месте выделенные борелевскую и картановские подалгебры в $\underline{\mathfrak{g}}$. Из пункта 1 предложения 6.1.1 следует, что $\underline{X}_0=\underline{G}/\underline{H}$. Согласно предложению 5.4.1, $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=W(\underline{\mathfrak{g}},\underline{\mathfrak{h}})\leftthreetimes F/\underline{T}$. По пункту 4 предложения 6.1.3, $N_G(L_0)=N_G(L_0)^\circ N_{H^{ess}}(L_0)$. Отсюда $N_G(L_0)=N_G(L_0)^\circ N_H(L_0)$, или, эквивалентно, $N_G(L_0,\underline{X}_0)=N_G(L_0)$. Поэтому $N_G(L_0)^\circ F=N_G(L_0)$. Из таблицы 6.1 и теоремы 7.1.2 следует, что для любой подалгебры $\underline{\mathfrak{h}}_1$ в $\underline{\mathfrak{g}}$, содержащей $\mathfrak{h}^{ess}$ в качестве идеала и такой, что $\mathfrak{a}(\underline{\mathfrak{g}},\underline{\mathfrak{h}}_1)=\underline{\mathfrak{t}}$, имеет место равенство $W(\underline{\mathfrak{g}},\underline{\mathfrak{h}})=W(\underline{\mathfrak{g}})$. Отсюда $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^{ess})=W(\underline{\mathfrak{g}})\leftthreetimes F/\underline{T}$. В частности, если $\mathfrak{h}^{ess}\neq\{0\}$, то $\mathfrak{h}^{W-ess}=\mathfrak{h}^{ess}$. □

8. Вычисление решеток корней и весов для аффинных однородных пространств

8.1. **Введение.** В этом разделе G – связная редуктивная группа с борелевской подгруппой $B\subset G$ и максимальным тором $T\subset B$.

Целью этого раздела является вычисление решеток $\Lambda_{G,X_0},\mathfrak{X}_{G,X_0}$ для аффинного однородного пространства X_0.

Из теоремы 5.1.3 следует, что вычисление решеток весов сводится к случаю, когда $\mathrm{rk}_G(X_0)=\mathrm{rk}\,G$. В этом случае мы сначала вычислим решетки корней, а затем, пользуясь, этим вычислением, решетки весов. Решетку корней произвольного аффинного однородного пространства можно вычислить, используя предложение 8.2.1.

Напомним, что решетка $\Lambda_{G,G/H}$ зависит лишь от пары $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ (из предложения 2.5.2), поэтому мы пишем $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ вместо $\Lambda_{G,G/H}$. Отметим, что из леммы 2.5.4 следует, что для любого идеала $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{h}$ имеет место включение $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\subset\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1)$.

Пусть теперь $\mathfrak{g}=\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\oplus\bigoplus_{i=1}^k\mathfrak{g}_i$ – разложение в прямую сумму центра и простых идеалов, и $\mathfrak{h}_i=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_i$. Из предложений 5.4.7,5.4.8 следует, что $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\bigoplus_{i=1}^k\Lambda(\mathfrak{g}_i,\mathfrak{h}_i)$. Поэтому при вычислении решеток $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ мы можем ограничиться случаем простой алгебры $\mathfrak{g}$.

В этом случае мы введем следующее определение, аналогичное определениям 2.7.2, 7.6.1.

Определение 8.1.1. Подалгебра $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ называется Λ-существенной, если $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\mathfrak{t}$ и для любого собственного идеала $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{h}$ включение $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\subset\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1)$ является строгим.

Следующая теорема является основным результатом в вычислении решеток $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

Теорема 8.1.2. (1) *Все* Λ*-существенные подалгебры в* $\mathfrak{g}$ *вместе с соответствующими решетками* $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *приведены в таблице 8.1.*

(2) *Для любой редуктивной подалгебры существует единственный идеал* $\mathfrak{h}^{\Lambda-ess}\subset\mathfrak{h}$, *который является* Λ*-существенной подалгеброй в* $\mathfrak{g}$, *и для которого* $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=$

$\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^{\Lambda-ess})$. *Он является максимальным по включению идеалом в* $\mathfrak{h}$, *который является* Λ-*существенной подалгеброй в* $\mathfrak{g}$.

Таблица 8.1: Λ-существенные подалгебры $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ и решетки $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$

N	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$
1	$\mathfrak{sl}_n, n\geqslant 2$	$\mathfrak{so}_n$	$2\Lambda(\mathfrak{g})$
2	$\mathfrak{sl}_{2n+1}$	$\mathfrak{sl}_{n+1}$	$\{\sum_{i\neq n+1} x_i\varepsilon_i \mid x_i\in\mathbb{Z}, \sum_{i\neq n+1} x_i=0\}$
3	$\mathfrak{sl}_{2n+1}$	$\mathfrak{sp}_{2n}$	$\{\sum x_i\varepsilon_i \mid x_i\in\mathbb{Z}, \sum_i x_{2i}=\sum_i x_{2i+1}=0\}$
4	$\mathfrak{so}_{2n+1}, n\geqslant 3$	$\mathfrak{so}_{n+1}$	$\{\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i \mid x_i\in\mathbb{Z}, \sum_{i=1}^n x_i\equiv 0 (\operatorname{mod} 2)\}$
5	$\mathfrak{so}_{2n+1}, n\geqslant 3$	$\mathfrak{so}_{n+1}\oplus\mathfrak{so}_n$	$2\Lambda(\mathfrak{g})$
6	$\mathfrak{so}_{2n+1}, n\geqslant 3$	$\mathfrak{gl}_n$	$\{\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i \mid x_i\in\mathbb{Z}, \sum_{i=1}^{[n/2]} x_{n-2i}\equiv 0 (\operatorname{mod} 2)\}$
7	$\mathfrak{sp}_{2n}, n\geqslant 2$	$\mathfrak{sl}_n$	$\{2\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i \mid x_i\in\mathbb{Z}\}$
8	$\mathfrak{sp}_{2n}, n\geqslant 2$	$\mathfrak{gl}_n$	$2\Lambda(\mathfrak{g})$
9	$\mathfrak{so}_{2n}, n\geqslant 4$	$\mathfrak{so}_n\oplus\mathfrak{so}_n$	$2\Lambda(\mathfrak{g})$
10	G_2	$A_1\times\widetilde{A}_1$	$2\Lambda(\mathfrak{g})$
11	F_4	C_3	$\{\sum_{i=1}^4 x_i\varepsilon_i \mid x_i\in\mathbb{Z}, \sum_{i=1}^4 x_i\equiv 0 (\operatorname{mod} 2)\}$
12	F_4	$C_3\times A_1$	$2\Lambda(\mathfrak{g})$
13	E_6	C_4	$2\Lambda(\mathfrak{g})$
14	E_7	A_7	$2\Lambda(\mathfrak{g})$
15	E_8	D_8	$2\Lambda(\mathfrak{g})$

Перейдем к вычислению решеток весов. До конца пункта мы считаем, что G – произвольная связная редутивная группа. Через $\mathfrak{g}_1,\ldots,\mathfrak{g}_k$ мы обозначаем все простые идеалы алгебры $\mathfrak{g}$.

Введем теперь одно обозначение. Пусть H – редуктивная подгруппа в G с $\operatorname{rk}_G(G/H)=\operatorname{rk} G$. Обозначим через $\widehat{H}$ связную подгруппу в G с касательной алгеброй $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\oplus\bigoplus_{i=1}^k(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_i)^{\Lambda-ess}$. Через $H^{\mathfrak{X}-sat}$ мы обозначим прообраз подгруппы $\mathfrak{A}_{G,G/\widehat{H}}\subset N_G(\widehat{H})/\widehat{H}$ в $N_G(\widehat{H})$. Непосредственно из определения, видим, что имеет место равенство $\mathfrak{X}_{G,G/H^{\mathfrak{X}-sat}}=\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

Вот основной результат вычисления решеток весов.

Теорема 8.1.3. *Пусть H – редуктивная подгруппа в G с $\operatorname{rk}_G(G/H)=\operatorname{rk} G$. Предположим дополнительно, что группа G алгебраически односвязна (т.е. является прямым произведением алгебраического тора и односвязной полупростой подгруппы).*

(1) *Для любой редуктивной подгруппы $H\subset G$ имеет место равенство $\mathfrak{X}_{G,G/H}=\mathfrak{X}_{G,G/H_0}$, где $H_0:=H\cap H^{\mathfrak{X}-sat}$. Кроме того, H_0 является наибольшей по включению нормальной подгруппой в H, содержащейся в $H^{\mathfrak{X}-sat}$, а $\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}^{\Lambda-ess}$. Наконец, $H_0^{\mathfrak{X}-sat}=H^{\mathfrak{X}-sat}$.*

(2) *Предположим, что $H\subset H^{\mathfrak{X}-sat}$. Напомним, что имеет место двойственность между $\mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}/\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ и $H^{\mathfrak{X}-sat}/H^\circ=\mathfrak{A}_{G,G/H^\circ}$. В случае простой группы эта двойственность описывается замечанием 8.1.4. В общем случае имеют место*

равенства

$$(8.1)\quad \begin{gathered}\mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}/\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \mathfrak{X}_{Z(G)^\circ} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} \mathfrak{X}_{G_i,G_i/H_i^\circ}/\Lambda(\mathfrak{g}_i,\mathfrak{h}_i),\\ H^{\mathfrak{X}-sat}/H^\circ = Z(G)^\circ \times \prod_{i=1}^{k} H_i^{\Lambda-sat}/H_i^\circ.\end{gathered}$$

Двойственность между $\mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}/\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *и* $H^{\mathfrak{X}-sat}/H^\circ$ *является произведением двойственностей между соответствующими множителями в (8.1).*

(3) *Если* $H \subset H^{\mathfrak{X}-sat}$, *то* $\mathfrak{X}_{G,G/H}$ *совпадает с прообразом аннулятора* H/H° *в* $\mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}/\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *при естественном эпиморфизме* $\mathfrak{X}_{G,G/H^\circ} \twoheadrightarrow \mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}/\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

Замечание 8.1.4. Данное замечание описывает двойственность между решетками $\mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}/\mathfrak{X}_{G,G/H^{\mathfrak{X}-sat}}$ и $H^{\mathfrak{X}-sat}/H^\circ$ в случае, когда G – простая группа, а $\mathfrak{h}$ – подалгебра в $\mathfrak{g}$, приведенная в таблице 8.1. Через χ_λ мы обозначим характер группы $H^{\mathfrak{X}-sat}/H^\circ$, который сопоставляется весу $\lambda \in \mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}$. Отметим, во-первых, что центр группы G отождествляется с $(\mathfrak{X}(G)/\Lambda(\mathfrak{g}))^*$. Далее, имеет место естественное отображение $\mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}/\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \to \mathfrak{X}(G)/\Lambda(\mathfrak{g})$. Значит, любой элемент из $Z(G)$ определяет элемент из $(\mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}/\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))^*$. Отметим, что $Z(G) \subset H^{\mathfrak{X}-sat}$. Ниже мы увидим, что ядром отображения $Z(G) \to (\mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}/\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))^*$ является $Z(G)\cap H^\circ$, а соответствующее отображение $\mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}/\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \to \mathfrak{X}(Z(G)/Z(G)\cap H^\circ)$ совпадает с $\lambda \mapsto \chi_\lambda$. Таким образом, остается найти решетку $\mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}$, элементы из $H^{\mathfrak{X}-sat}$, образы которых в $H^{\mathfrak{X}-sat}/Z(G)H^\circ$ являются образующими этой группы, и описать характер χ_λ на них. Таких элементов нет в точности для пар $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ NN10-13,15. Для всех оставшихся случаев указанная информация приведена в таблице 8.2. В первом столбце таблицы указан номер пары в таблице 8.1. Во втором столбце мы указываем элемент $\lambda \in \mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}$, образ которого в $\mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}/\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ порождает эту группу. В квадратных скобках после элемента указан порядок образа. В столбце 3 приведена группа $H^{\mathfrak{X}-sat}/H^\circ$. Если группа конечна, то мы указываем элемент из $H^{\mathfrak{X}-sat}$, образ которого порождает эту группу. Если же группа бесконечна (пары NN2,3), то указывается общий элемент однопараметрической подгруппы, дополняющей H° в $H^{\mathfrak{X}-sat}$. Наконец, в последнем столбце приведен характер χ_λ для элемента λ, приведенного в столбце 2. В случаях, когда $\operatorname{rk} H = \operatorname{rk} G$ (и следовательно $Z(G) \subset H$ при любой группе G), мы рассматриваем такую группу G, какую нам удобно. В строке 4 мы считаем, что $G = \mathrm{SO}_{2n+1}$, т.к. и в случае односвязной группы G имеет место включение $Z(G) \subset H^\circ$. Во всех остальных случаях мы рассматриваем односвязную группу G.

Таблица 8.2: Соответствие между $\mathfrak{X}(H^{\mathfrak{X}-sat}/H^\circ)$ и $\mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}/\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$

N	λ	h	$\chi_\lambda(h)$
1	$2\pi_1[n]$	$diag(e^{i\pi/n},\ldots,e^{i\pi/n})d, d \in \mathrm{O}(n)\setminus \mathrm{SO}(n)$	$e^{-2\pi i/n}$
2	$\pi_1[\infty]$	$diag(t^{n+1},\ldots,t^{n+1},t^{-n},\ldots,t^{-n})$	t^{-n-1}
3	$\pi_2[\infty]$	$diag(t^{2n},t^{-1},\ldots,t^{-1})$	t^2
4	$\pi_1[2]$	$diag(-1,\ldots,-1,d), d \in \mathrm{O}(n+1), \det(d) = (-1)^n$	-1
5	$2\pi_n[2]$	$h \in N_G(\mathfrak{h}) \setminus H^\circ$	-1
6	$\pi_2[2]$	$h \in N_G(\mathfrak{h}) \setminus H^\circ$	-1
7	$\pi_n[2]$	$\exp(\pi i \pi_n/2^m), 2^m \mid n, 2^{m+1} \not\mid n$	-1

N	λ	h	$\chi_\lambda(h)$
8	$2\pi_1[2]$	$h \in N_G(\mathfrak{h}) \setminus H^\circ$	-1
9	$2\pi_n[2]$	$h \in N_G(\mathfrak{h}) \setminus H^\circ$	-1
14	$2\pi_1$	$h \in N_G(\mathfrak{h}) \setminus H^\circ$	-1

Опишем теперь структуру настоящего раздела. В пункте 8.2 мы установим равенство корневой решетки $\Lambda(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ с решеткой $\mathfrak{X}_{G,G/\widetilde{H}}$ для подгруппы $\widetilde{H} \subset G$, которая строится по H. В пункте 8.3 мы получим некоторые результаты о структуре корневых решеток локально ортогонализуемых конических гамильтоновых многообразий, удовлетворяющих эквивалентным условиям леммы 3.4.5. Следующие два пункта посвящены доказательству приведенных в данном пункте теорем. В последнем пункте мы указываем, как находить точку с выделенной компоненты многообразия $(G/H)^{L_{0\,G,G/H}}$.

8.2. **Связь между весовыми и корневыми решетками однородных пространств.** В этом пункте G – связная редуктивная группа, а H – её алгебраическая подгруппа. Основной нашей целью в этом пункте является доказательство равенства корневой решетки $\Lambda_{G,G/H}$ и весовой решетки $\mathfrak{X}_{G,G/\widetilde{H}}$, где $\widetilde{H}$ – подгруппа в G, которая строится по H.

Основная идея построения группы $\widetilde{H}$ заключается в том, что группа $\widetilde{H}/H$ должна действовать на G/H G-автоморфизмами, а образ этого действия заведомо должен включать все центральные автоморфизмы. Именно, обозначим через Z полупростую часть центра группы $N_G(H)/H$. В качестве $\widetilde{H}$ мы возьмем прообраз группы Z при каноническом эпиморфизме $N_G(H) \twoheadrightarrow N_G(H)/H$.

Предложение 8.2.1. *Имеет место равенство* $\Lambda_{G,G/H} = \mathfrak{X}_{G,G/\widetilde{H}}$.

Лемма 8.2.2. *Пусть X_0 – G-многообразие, а T_0 – квазитор в группе G-автоморфизмов многообразия X_0. Пусть, далее, X_1 – рациональный G-фактор для действия $T_0 : X_0$ (см. определение 2.2.8). Решетка $\mathfrak{X}_{G,X_1} \subset \mathfrak{X}(T)$ совпадает с аннулятором подгруппы $\iota_{G,X_0}(T_0 \cap \mathfrak{A}_{G,X_0}) \subset A_{G,X_0}$ в $\mathfrak{X}_{G,X_0} \cong \mathfrak{X}(A_{G,X_0})$.*

Доказательство. Сначала мы сведем доказательство к случаю, когда группа G является тором. Пусть Z_0 (соотв. Z_1) – рациональный T-фактор для действия $U : X_0$ (соотв. $U : X_1$). Имеем равенства $\mathfrak{X}_{G,X_0} = \mathfrak{X}_{T,Z_0}, \mathfrak{X}_{G,X_1} = \mathfrak{X}_{T,Z_1}$. Поскольку $\mathbb{C}(Z_1) \cong \mathbb{C}(X_0)^{U \times T_0}$, то Z_1 – является рациональным фактором для действия $T_0 : Z_0$. Действие $T_0 : \mathbb{C}(X_0)^U$ эффективно, поскольку действие $T_0 : \mathbb{C}(X)$ таково, а значит, действие $T_0 : Z_0$ эффективно. Для всех $\lambda \in \mathfrak{X}_{G,X_0} = \mathfrak{X}_{T,Z_0}$ имеется T_0-изоморфизм $\mathbb{C}(X_0)^{(B)}_\lambda \cong \mathbb{C}(Z_0)^{(T)}_\lambda$. Поэтому $T_0 \cap \mathfrak{A}_{G,X_0} = T_0 \cap \mathfrak{A}_{T,Z_0}$ и $\iota_{G,X_0}|_{T_0 \cap \mathfrak{A}_{G,X_0}} = \iota_{T,Z_0}|_{T_0 \cap \mathfrak{A}_{T,Z_0}}$. Таким образом, утверждение леммы будет доказано для пары (G, X_0), если оно будет доказано для (T, Z_0). Факторизуя по ядру неэффективности, можем считать, что действие $T : Z_0$ эффективно.

Отметим, что $L_{T,Z_1}, L_{T \times T_0, Z_0}$ совпадают с ядрами неэффективности соответствующих действий, откуда

$$L_{T,Z_1} = \{t \in T | tz \in T_0 z \text{ для } z \in Z_0 \text{ общего положения}\}, \tag{8.2}$$

и для $z \in Z_0$ общего положения

$$L_{T \times T_0, Z_0} = (T \times T_0)_z. \tag{8.3}$$

Из (8.2) и (8.3) следует, что $L_{T,Z_1} = \pi_1(L_{T \times T_0, Z_0})$, где $\pi_1 : T \times T_0 \to T$ – проекция на первый множитель. С другой стороны, поскольку действие $T_0 : Z_0$ эффективно, то ограничение проекции $\pi_2 : T \times T_0 \to T_0$ на $L_{T \times T_0, Z_0}$ является вложением. Образ этого вложения совпадает с $\mathfrak{A}_{T,Z_0}\cap T_0$, ибо состоит в точности из тех элементов группы T_0, которые действуют на Z_0 сдвигами на элементы из T. Гомоморфизм $\pi_1\circ\pi_2^{-1}|_{T_0\cap\mathfrak{A}_{T,Z_0}}$ ставит элементу $t_0\in T_0\cap\mathfrak{A}_{T,Z_0}$ элемент $t\in T$, для которого $t_0z=tz$ для всех $z\in Z_0$. Иными словами, $\pi_1\circ\pi_2^{-1}|_{T_0\cap\mathfrak{A}_{T,Z_0}}=\iota_{T,Z_0}|_{T_0\cap\mathfrak{A}_{T,Z_0}}$. Эквивалентно, $L_{T,Z_1}=\iota_{T,Z_0}(T_0\cap\mathfrak{A}_{T,Z_0})$. □

Доказательство предложения 8.2.1. Подгруппа $T_0:=Z_0\subset N_G(H)/H$ является квазитором в группе G-автоморфизмов многообразия $X_0=G/H$, а однородное пространство $X_1:=G/\widetilde{H}$ рациональным фактором для действия $T_0:X_0$. Согласно лемме 2.4.4, имеет место включение $\mathfrak{A}_{G,X_0}\subset T_0$. Применение леммы 8.2.2 завершает доказательство. □

Следующее техническое следствие будет применено в разделе 9 при вычисления групп Вейля однородных пространств.

Следствие 8.2.3. *Пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра в $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\mathfrak{t}$, и $\mathfrak{z}$ – коммутативная редуктивная подалгебра в $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$, содержащая полупростую часть подалгебры $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h})$. Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{h}}$ прообраз подалгебры $\mathfrak{z}$ при каноническом эпиморфизме $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})\to\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$. Тогда $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$ содержится в ортогональном дополнении к $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}})$ в $\mathfrak{t}$. Если же $\mathfrak{z}$ совпадает с полупростой частью алгебры $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h})$ или же пространство G/H квазиаффинно, то $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$ совпадает с этим ортогональым дополнением.*

Доказательство. Это следует из предложений 8.2.1,2.5.7, пункта 2 предложения 2.3.1, и следствия 5.4.5. □

8.3. **Решетки корней аффинных гамильтоновых многообразий.** В этом пункте X – локально ортогонализуемое (см. определение 6.3.1) коническое аффинное гамильтоново многообразие, удовлетворяющее эквивалентным условиям леммы 3.4.5.

Для корня $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g})$ введем $\mathfrak{g}$-страт $R^{(\alpha)}$ следующим образом: $R^{(\alpha)}=(\mathfrak{s},V)$, где $\mathfrak{s}=\mathbb{C}\alpha^\vee$, и V – двумерный $\mathfrak{s}$-модуль, на котором $\mathfrak{s}$ действует с весами $\lambda,-\lambda$, где $\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle=1$.

Следующее предложение лежит в основе вычисления решеток корней:

Предложение 8.3.1. *Фиксируем T-сечение X_T многообразия X. Пусть $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g})$ – такой корень, что $\alpha\notin\Lambda_{G,X}^{(X_T)}$, но $s_\alpha\in W_{G,X}^{(X_T)}$. Тогда $S^{(\alpha)}\rightsquigarrow_\mathfrak{g}X$ или $R^{(\alpha)}\rightsquigarrow_\mathfrak{g}X$. Если многообразие X является правильным, то $R^{(\alpha)}\rightsquigarrow_\mathfrak{g}X$ и $2\alpha\in\Lambda_{G,X}^{(X_T)}$.*

Доказательство. Положим $\mathfrak{m}=\mathfrak{t}+\mathfrak{g}^{(\alpha)}$. Это подалгебра Леви в $\mathfrak{g}$. Пусть M – соответствующая подгруппа Леви в G. Применив предложение 4.5.1 к подгруппе M, найдем точку $x\in X$, удовлетворяющую условиям (a)-(f) этого предложения. Положим $\widehat{G}=G^{(\alpha)}$ и пусть $\widehat{X}$ – коизотропное модельное многообразие, определенное в условии (e) предложения 4.5.1. По пункту 3 предложения 4.5.3, $\alpha\notin\Lambda_{\widehat{G},\widehat{X}}^{(\cdot)}$. Если многообразие X является правильным, то $s_\alpha\in W_{\widehat{G},\widehat{X}}^{(\cdot)}$, по пункту 1 предложения 4.5.3. Если $s_\alpha\notin W_{\widehat{G},\widehat{X}}^{(\cdot)}$, то $\widehat{X}$ является $\widehat{G}$-модулем $\mathbb{C}^2\oplus\mathbb{C}^2$, и $S^{(\alpha)}\rightsquigarrow_\mathfrak{g}X$. Поэтому можем предположить, что $s_\alpha\in W_{\widehat{G},\widehat{X}}^{(\cdot)}$. Кроме того, по лемме 6.3.3, $\widehat{G}$-многообразие $\widehat{X}$ локально ортогонализуемо. Поэтому, согласно вычислениям в пункте 3.7, $\widehat{X}=T^*(\widehat{G}/F)$, где F° – максимальный тор в $\widehat{G}$. Отсюда получаем, что $2\alpha\in\Lambda_{\widehat{G},\widehat{X}}^{(\cdot)}$, откуда, по пункту 3 предложения 4.5.3, $2\alpha\in\Lambda_{G,X}^{(X_T)}$. Утверждение про $\mathfrak{g}$-страт следует из условия (e) предложения 4.5.1. □

Нашей следующей задачей будет классификация модельных многообразий из некоторого специального класса.

Предложение 8.3.2. *Предположим, что* $G \cong \mathrm{SL}_3$, *и* $X = M_G(H,\eta,V)$ – *локально ортогонализуемое коизотропное модельное многообразие, удовлетворяющее эквивалентным условиям леммы 3.4.5. В таком случае,* $\Lambda^{(\cdot)}_{G,X} \neq \Lambda(\mathfrak{g})$ *тогда и только тогда, когда* $\eta = 0$, *а пара* $(\mathfrak{h}, V)$ *содержится в таблице 8.3. При этом, решетка* $\Lambda^{(\cdot)}_{G,X}$ *(с точностью до сопряженности в* $W(\mathfrak{g})$*) зависит только от пары* $(\mathfrak{h}, V)$. *Образующие этой решетки приведены в третьем столбце таблицы 8.3.*

Во второй строке через $\mathbb{C}_{\pm\chi}$ обозначен $\mathfrak{h}$-модуль, на котором $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ действует тривиально, а $\mathfrak{h}/[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ – с ненулевым характером $\pm\chi$.

Таблица 8.3: Коизотропные модельные многообразия
с малыми решетками корней для $G = \mathrm{SL}_3$

N	$(\mathfrak{h}, V)$	$\Lambda^{(\cdot)}_{G,X}$
1	$(\mathfrak{sl}_2, 0)$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_3$
2	$(\mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{C}, \mathbb{C}_\chi \oplus \mathbb{C}_{-\chi})$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_3$
3	$(\mathfrak{so}_3, 0)$	$2\alpha_1, 2\alpha_2$

Доказательство. Предположим, что $\Lambda^{(\cdot)}_{G,X} \neq \Lambda(\mathfrak{g})$. Поскольку $S^{(\alpha)}$ или $R^{(\alpha)}$ является $\mathfrak{g}$-стратом многообразия X, то $\mathfrak{h}$ содержит элемент, сопряженный с $\alpha^\vee$. Отсюда следует, что $\mathfrak{g}^H$ не содержит нильпотентных элементов, откуда $\eta = 0$, и V является ортогонализуемым H-модулем. Поэтому найдется H-модуль V_0, для которого $V \cong V_0 \oplus V_0^*$. В [Л2] показано, что отсюда следует, что $X \cong T^*X_0, X_0 = G *_H V$ (изоморфизм гамильтоновых многообразий). В частности, X является правильным гамильтоновым многообразием, предложение 3.9.2, и $\Lambda^{(\cdot)}_{G,X} \sim_{W(\mathfrak{g})} \Lambda_{G,X}$, стало быть, первая решетка зависит лишь от $(\mathfrak{h}, V)$. Поскольку многообразие X коизотропно, имеет место равенство $2(\dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{h}) + 2\dim V_0 = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g} + \dim\mathfrak{g}$, эквивалентно,

$$\dim\mathfrak{h} - \dim V_0 = 3. \tag{8.4}$$

Предположим сначала, что $S^{(\alpha)} \rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} X$. Из предложения 7.3.1 следует, что подалгебра $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ сопряжена с $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ для $\alpha = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, и что $V = V^{[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]}$. Из (8.4) следует, что $(\mathfrak{h}, V)$ – одна из пар 1,2 из таблицы 8.3. Покажем теперь, что $\Lambda^{(\cdot)}_{G,X}$ совпадает с решеткой приведенной в таблице 8.3. Отметим, что, согласно предложению 2.5.3, для одномерного нетривиального $H/(H,H)$-модуля V_0 имеет место равенство $\Lambda_{G,G*_H V_0} = \Lambda(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h},\mathfrak{h}])$. Последняя решетка извлекается из [Krä], Tabelle 1.

Остается рассмотреть случай, когда $S^{(\alpha)}$ не является стратом в X. В этом случае $W_{G,X} = W(\mathfrak{g})$, и $R^{(\alpha)} \rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} X$. Поскольку алгебра $\mathfrak{g}$ не имеет сферических модулей ранга 2, см. [Le], то $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$. Отсюда $\dim\mathfrak{h} \leqslant 4$, и, в случае равенства, $\dim V_0 = 1$, и мы приходим к паре N2. Значит $\dim\mathfrak{h} = 3, V_0 = \{0\}$. Отсюда $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_3$. Из [Krä], Tabelle 1, мы получаем, что $\mathfrak{X}_{\mathrm{PSL}_3,\mathrm{PO}_3} = 2\Lambda(\mathfrak{g})$. Воспользовавшись предложением 8.2.1, получаем $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = 2\Lambda(\mathfrak{g})$. □

Следствие 8.3.3. *Мы придерживаемся соглашений предыдущего предложения. Предположим, что* $\mathfrak{g}$ – *простая алгебра Ли ранга большего 2. Обозначим через* X_T *некоторое* T*-сечение многообразия* X. *Пусть* $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})$ – *такой корень, что* $s_\alpha \in W^{(X_T)}_{G,X}$. *Пусть* α_1 – *корень в* $\Delta(\mathfrak{g})$, *для которого* $s_{\alpha_1} \notin W^{(X_T)}_{G,X}$, *а* $\mathfrak{g}^{(\alpha,\alpha_1)} \cong \mathfrak{sl}_3$. *Тогда* $\alpha \in \Lambda^{(X_T)}_{G,X}$.

Доказательство. Положим $\mathfrak{m} = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}^{(\alpha,\alpha_1)}$. Это подалгебра Леви в $\mathfrak{g}$ (здесь используется то, что $\mathfrak{g} \neq G_2$). Пусть M – соответствующая подгруппа Леви. Применим предложение 4.5.1 к M, пусть x – точка в X, удовлетворяющая условиям (a)-(f) этого предложения, $\widehat{G} = (M,M), \widehat{T} = T \cap (M,M)$, и $\widehat{X}$ – модельное многообразие, определенное в условии (e). Тогда, по предложению 4.5.3, для подходящего сечения $\widehat{X}_{\widehat{T}}$ многообразия $\widehat{X}$ имеют место включения

$$W_{\widehat{G},\widehat{X}}^{(\widehat{X}_{\widehat{T}})} \subset W_{G,X}^{(X_T)} \cap M/T, \tag{8.5}$$

$$\Lambda_{\widehat{G},\widehat{X}}^{(\widehat{X}_{\widehat{T}})} \subset \Lambda_{G,X}^{(X_T)}. \tag{8.6}$$

Из (8.5) и следствия 7.2.5 следует, что группа $W_{\widehat{G},\widehat{X}}^{(\widehat{X}_{\widehat{T}})}$ порождена отражением s_α. Из (8.6) следует, что $\Lambda_{\widehat{G},\widehat{X}}^{(\cdot)} \neq \Lambda(\widehat{g})$. Из предложения 8.3.2, получаем, что $\Lambda_{\widehat{G},\widehat{X}}^{(\widehat{X}_{\widehat{T}})}$ порождается элементом α. Повторное использование включения (8.6) завершает доказательство. □

Теперь мы получим некоторое обращение предложения 8.3.1. Для этого нам потребуется ввести ещё один $\mathfrak{g}$-страт. Пусть α_1, α_2 – два корня в $\Delta(\mathfrak{g})$, для которых $\mathfrak{g}^{(\alpha_1,\alpha_2)} \cong \mathfrak{sl}_3$. Через $\widetilde{R}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ мы обозначаем $\mathfrak{g}$-страт $(\mathfrak{s}, V)$, для которого $\mathfrak{s}$ – это подалгебра $\mathfrak{so}_3 \subset \mathfrak{sl}_3 \cong \mathfrak{g}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$, а V – пятимерный неприводимый $\mathfrak{so}_3$-модуль.

Предложение 8.3.4. *Предположим, что $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли ранга большего 2, а многообразие X правильное. Обозначим через X_T некоторое T-сечение многообразия X. Предположим, что $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta(\mathfrak{g})$ таковы, что $\mathfrak{g}^{(\alpha_1,\alpha_2)} \cong \mathfrak{sl}_3$. Предположим далее, что $s_\alpha \in W_{G,X}^{(X_T)}$ для всех корней α, сопряженных с α_1. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\widetilde{R}^{(\alpha_1,\alpha_2)} \rightsquigarrow_{\mathfrak{g}} X$.
(2) $\alpha_1 \notin \Lambda_{G,X}^{(X_T)}, 2\alpha_1 \in \Lambda_{G,X}^{(X_T)}$.

Доказательство. Положим $\mathfrak{m} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$. Понятно, что $\mathfrak{m}$ – подалгебра Леви в $\mathfrak{g}$. Применим к соответствующей подгруппе Леви M предложение 4.5.1 и получим точку $x \in X$, удовлетворяющую условиям (a)-(f) этого предложения. Пусть $\widehat{G} = (M,M)$, а $\widehat{X}$ – модельное многообразие, построенное в условии (e) предложения 4.5.1. Поскольку решетка $\Lambda_{G,X}^{(X_T)}$ инвариантна относительно действия группы $W_{G,X}^{(X_T)}$ (лемма 3.8.1), то включения $\alpha_1 \in \Lambda_{G,X}^{(X_T)}, \alpha_2 \in \Lambda_{G,X}^{(X_T)}, \alpha_1 + \alpha_2 \in \Lambda_{G,X}^{(X_T)}$ эквивалентны. Поскольку многообразие X правильное, то, по пункту 1 предложения 4.5.3, $W_{\widehat{G},\widehat{X}} = W(\widehat{\mathfrak{g}})$. Теперь импликация (2) $\Rightarrow$ (1) следует из предложения 8.3.2.

Перейдем к доказательству импликации (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим противное. Заметим, что $s_\alpha \in W_{G,X}^{(X_T)}, \alpha \in \Lambda_{G,X}^{(X_T)}$ для всех $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})$ одной длины с α_1. Действительно, по выбору $\mathfrak{g}$ и α_1, для такого корня α найдется элемент $w \in W$, порожденный отражениями, соответствующими корням одной длины с α, для которого $w\alpha_1 = \alpha$. Но $w \in W_{G,X}^{(X_T)}$, а решетка $\Lambda_{G,X}^{(X_T)}$ инвариантна относительно $W_{G,X}^{(X_T)}$.

Пусть точка $x \in X$ такова, что её G-орбита замкнута, а её $\mathfrak{g}$-страт эквивалентен $\mathfrak{g}$-страту $\widetilde{R}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$. Множество всех таких точек x является локально замкнутым подмногообразием в X, которое мы обозначим через Y. Это следует из теоремы Луны о слайсах. Из той же теоремы выводится, что $\overline{Y}/\!/G = \overline{Y/\!/G}$ является подмногообразием чистой коразмерности 2 в $X/\!/G$.

Можем считать, что $\mathfrak{g}_x\subset\mathfrak{g}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$. Отметим, что $\ker\alpha_1\cap\ker\alpha_2$ является картановской подалгеброй в $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}_x)$. Действительно, включение $\ker\alpha_1\cap\ker\alpha_2\subset\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}_x)$ следует из включения $\mathfrak{g}_x\subset\mathfrak{g}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$. С другой стороны, поскольку подалгебра $\mathfrak{g}_x$ не сопряжена ни с какой подалгеброй вида $\mathfrak{g}^{(\beta)},\beta\in\Delta(\mathfrak{g})$ (т.к. $i(\mathfrak{g}_x,\mathfrak{g})=4$), то $\operatorname{rk}\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}_x)<\operatorname{rk}\mathfrak{g}-1$.

Из предыдущего абзаца следует, что $Y/\!/G\subset\psi_{G,X}/\!/G^{-1}(\pi_{W,\mathfrak{t}}(\ker\alpha_1\cap\ker\alpha_2))$. Из теоремы 4.1.1 следует, что последнее подмногообразие имеет коразмерность 2 в $X/\!/G$.

Можем считать, что точка x такова, что $\mu_{G,X}(x)_s\in\mathfrak{z}(\mathfrak{m})\cap\mathfrak{m}^{pr}$. Тогда $\widehat{\psi}_{G,X}(x)\in\pi_{W_{G,X}^{(\cdot)},\mathfrak{a}_{G,X}^{(\cdot)}}(\mathfrak{z}(\mathfrak{m}_0)\cap\mathfrak{m}_0^{pr})$, где $\mathfrak{m}_0$ – подалгебра Леви в $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{t}$ и сопряженная с $\mathfrak{m}$. Таким образом, заменив, при необходимости, $\mathfrak{m}$ на $\mathfrak{m}_0$, мы можем считать, что $\widehat{\psi}_{G,X}(x)\in\pi_{W_{G,X}^{(\cdot)},\mathfrak{a}_{G,X}^{(\cdot)}}(\mathfrak{z}(\mathfrak{m})\cap\mathfrak{m}^{pr})$.

Отметим теперь, что для любого сечения X_T' выполняются условия $s_{\alpha_1},s_{\alpha_2}\in W_{G,X}^{(X_T')}$, $\alpha_1\in\Lambda_{G,X}^{(X_T')}$. Это следует из существования такого элемента $w\in W$, что $wW_{G,X}^{(X_T)}w^{-1}=W_{G,X}^{(X_T')},w\Lambda_{G,X}^{(X_T)}=\Lambda_{G,X}^{(X_T')}$. Таким образом, заменив X_T на X_T', можем считать, что X_T содержится в единственном M-сечении многообразия X, содержащем x. Таким образом, точка x удовлетворяет условиям (a)-(e) предложения 4.5.1. Пусть $\widehat{X}$ – модельное многообразие, построенное в условии (e) предложения 4.5.1. Применив пункт 2 предложения 4.5.3, мы видим, что проекция любого корня α той же длины, что и α_1, на $\widehat{\mathfrak{t}}:=\mathfrak{t}\cap[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]$ лежит в $\mathfrak{X}_{\widehat{G},\widehat{X}}^{(\widehat{X}_{\widehat{T}})}$ для некоторого $\widehat{T}$-сечения $\widehat{X}_{\widehat{T}}$. Но такие проекции порождают решетку весов $\mathfrak{X}_{\mathrm{SL}_3}$. По лемме 3.8.1, для всех $\xi\in\Lambda$, $w\in W_{\widehat{G},\widehat{X}}^{(\widehat{X}_{\widehat{T}})}$ имеет место включение $w\xi-\xi\in\Lambda_{\widehat{G},\widehat{X}}^{(\widehat{X}_{\widehat{T}})}$. Но $\widehat{X}=T^*(\mathrm{SL}_3/H)$, где $\mathfrak{h}=\mathfrak{so}_3$. Таким образом, $W_{\widehat{G},\widehat{X}}^{(\widehat{X}_{\widehat{T}})}=W(\widehat{\mathfrak{g}})$, $\Lambda_{\widehat{G},\widehat{X}}^{(\widehat{X}_{\widehat{T}})}=2\Lambda(\widehat{\mathfrak{g}})$ (предложение 8.3.2). С другой стороны, $s_{\alpha_1}(\pi_1)-\pi_1=-\alpha_1$. Противоречие. □

8.4. **Доказательство теоремы 8.1.2.** Обозначим через $\Delta(\mathfrak{g})^{min},\Delta(\mathfrak{g})^{max}$ подмножества корней алгебры $\mathfrak{g}$, которые имеют минимальную (соотв., отличную от минимальной) длину.

Лемма 8.4.1. *Пусть $\mathfrak{h}$ – ненулевая Λ-существенная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Тогда*

(1) $\Delta(\mathfrak{g})^{min}\not\subset\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

(2) *Если $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g})\setminus\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, то $\mathfrak{h}$ содержит элемент h, сопряженный с $\alpha^\vee$ и удовлетворяющий равенству*

$$\operatorname{tr}_\mathfrak{g}h^2=2\operatorname{tr}_\mathfrak{h}h^2+8. \tag{8.7}$$

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно заметить, что $\operatorname{Span}_\mathbb{Z}(\Delta(\mathfrak{g})^{min})=\Lambda(\mathfrak{g})$. Пусть $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g})\setminus\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. По предложению 8.3.1, $R^{(\alpha)}\rightsquigarrow_\mathfrak{g}T^*(G/H)$. Таким образом, найдется элемент $h\in\mathfrak{h}$, сопряженный с $\alpha^\vee$, для которого $(\mathbb{C}h,U)\rightsquigarrow_\mathfrak{h}\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, где U имеет базис e_1,e_2 с $he_1=2e_1,he_2=-2e_2$. Поэтому имеет место изоморфизм $\mathbb{C}h$-модулей $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\cong\mathfrak{h}/\mathbb{C}h\oplus U$, откуда следует (8.7). □

Лемма 8.4.2. *Пусть $\mathfrak{h}$ – ненулевая Λ-существенная подалгебра в $\mathfrak{g}$ с $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=W(\mathfrak{g})$.*

(1) *Если $\mathfrak{g}$ имеет тип A,D,E,G, то $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=2\Lambda(\mathfrak{g})$.*

(2) *Если $\mathfrak{g}$ имеет тип B,C,F, то $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\operatorname{Span}_\mathbb{Z}(2\Delta_G^{min}\cup\Delta(\mathfrak{g})^{max})$ или $2\Lambda(\mathfrak{g})$.*

Доказательство. Напомним, что базисом решетки $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ является некоторая система корней, группой Вейля которой является $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ (см. предложение 2.5.7). Теперь доказательство несложно следует из предложения 8.3.1. □

Лемма 8.4.3. *Пусть* $\mathfrak{h}$ *– ненулевая* Λ*-существенная подалгебра в* $\mathfrak{g}$, $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]=\mathfrak{h}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{h}_k$ *– разложение в прямую сумму простых идеалов и* $i_j=i(\mathfrak{h}_j,\mathfrak{g}), j=\overline{1,k}$.

(1) *Пусть* $\mathfrak{g}$ *– алгебра типа* A,B,D,E,F, $\operatorname{rk}\mathfrak{g}>2$, $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=W(\mathfrak{g})$ *и* $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=2\Lambda(\mathfrak{g})$ *(последнее условие существенно только для* $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{so}_{2l+1},F_4$*). Тогда алгебра* $\mathfrak{h}$ *полупроста. Найдутся целые положительные числа* $a_j, j=\overline{1,k}$*, для которых*

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^k a_j i_j=4,\\ &\sum_{j=1}^k a_j k_{\mathfrak{h}_j}=2k_{\mathfrak{g}}-16.\end{aligned}\tag{8.8}$$

(2) *Пусть* $\mathfrak{g}$ *– алгебра типа* $C_l, l>2, F_4$ *и* $\mathfrak{h}$ *–* Λ*-существенная подалгебра в* $\mathfrak{g}$*. Тогда* $\Lambda(\mathfrak{g},[\mathfrak{h},\mathfrak{h}])\neq\Lambda(\mathfrak{g})$*. Иными словами,* $\mathfrak{h}$ *содержит нетривиальный* Λ*-существенный полупрострой идеал. Предположим дополнительно, что* $\mathfrak{h}$ *– полупростая подалгебра. Тогда найдутся целые неотрицательные числа* $a_j, j=\overline{1,k}$*, для которых*

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^k a_j i_j=8,\\ &\sum_{j=1}^k a_j k_{\mathfrak{h}_j}=4k_{\mathfrak{g}}-16.\end{aligned}\tag{8.9}$$

Если же $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(2\Delta(\mathfrak{g})^{min}\cup\Delta(\mathfrak{g})^{max})$*, то* $a_j>0$ *для всех* j*, и* $\mathfrak{h}$ *содержит подалгебру, сопряженную с* $\mathfrak{so}_3\subset\mathfrak{sl}_3\cong\mathfrak{g}^{(\alpha_1,\alpha_2)},\alpha_1,\alpha_2\in\Delta(\mathfrak{g})^{min}$*, которая не содержится ни в каком собственном идеале в* $\mathfrak{h}$*.*

(3) *Если* $\mathfrak{g}$ *имеет тип* $A,C-F$*, то* $\mathfrak{h}$ *содержит элемент, сопряженный с* $\alpha^\vee,\alpha\in\Delta(\mathfrak{g})^{min}$*, и удовлетворяющий равенству (8.7), для которого подпространство* $\mathbb{C}\mathfrak{h}$ *включается в* $\mathfrak{sl}_2$*-тройку, которая проектируется нетривиально на каждый простой идеал в алгебре* $\mathfrak{h}$*.*

Доказательство. Из теоремы 7.1.2 следует, что $s_\alpha\in W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ при $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g})^{min}$ для $\mathfrak{g}=F_4,\mathfrak{sp}_{2l}$. Для $\mathfrak{g}\neq\mathfrak{so}_{2l+1}$ найдутся два корня $\alpha_1,\alpha_2\in\Delta(\mathfrak{g})^{min}$, для которых $\mathfrak{g}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\cong\mathfrak{sl}_3$, а для $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_{2l+1}, l>2,F_4$ такие корни α_1,α_2 можно взять из $\Delta(\mathfrak{g})^{max}$. Применяя предложение 8.3.4, мы видим, что $\widetilde{R}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\rightsquigarrow_{\mathfrak{g}}T^*(G/H)$. Обозначим подалгебру $\mathfrak{so}_3\subset\mathfrak{g}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ через $\mathfrak{s}$ и 5-мерный неприводимый $\mathfrak{s}$-модуль через U. По замечанию 7.3.2, $(\mathfrak{s},U)\rightsquigarrow_{\mathfrak{h}}\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Обозначим через $\mathfrak{h}_1$ идеал в $\mathfrak{h}$, порожденный подалгеброй $\mathfrak{s}$. Понятно, что $(\mathfrak{s},U)\rightsquigarrow_{\mathfrak{h}_1}\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$. Отсюда следует утверждение пункта 3. Применяя замечание 7.3.2 ещё раз, мы видим, что $\widetilde{R}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\rightsquigarrow_{\mathfrak{g}}T^*(G/H_1)$. В качестве числа a_j возьмем индекс Дынкина проекции алгебры $\mathfrak{s}$ на $\mathfrak{h}_j$. Согласно предложению 8.3.4, $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1)=2\Lambda(\mathfrak{g})$ в пункте 1, и $\operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(2\Delta(\mathfrak{g})^{min}\cup\Delta(\mathfrak{g})^{max})$ в пункте 2. Отсюда следует утверждение о положительности чисел a_j. В пункте 1 имеем $i(\mathfrak{s},\mathfrak{g})=4$, а в пункте 2 – $i(\mathfrak{s},\mathfrak{g})=8$, откуда, с учетом равенства (7.5), имеем первые равенства в (8.8), (8.9). Отметим, что имеет место изоморфизм $\mathfrak{s}$-модулей $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\cong\mathfrak{h}/\mathfrak{s}\oplus U$. Вторые равенства в (8.8), (8.9) получается сравнением следов элемента h^2, где h – двойственный корень в $\mathfrak{s}$, на этих модулях. □

Теперь мы получим некоторые результаты, касающиеся редуктивных подалгебр в классических алгебрах Ли содержащих элементы, сопряженные $\alpha^\vee$ для $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g})$.

Предложение 8.4.4. *Пусть $\mathfrak{g}$ – одна из классических алгебр, и $\mathfrak{h}$ – редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}$, которая содержит элемент h, сопряженный с $\alpha^\vee$ для некоторого корня $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})$ и не содержащийся ни в каком собственном идеале подалгебры $\mathfrak{h}$.*

(1) *Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ и подалгебра $\mathfrak{h}$ полупроста, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_k, \mathfrak{so}_k, \mathfrak{sp}_k$.*
(2) *Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$, и $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})^{max}$, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_k, \mathfrak{gl}_k, \mathfrak{spin}_8$.*
(3) *Предположим, что $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}_{2n}$, алгебра $\mathfrak{h}$ полупроста, а $\mathbb{C}h$ включается в $\mathfrak{sl}_2$-тройку в $\mathfrak{h}$. Тогда $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_k, \mathfrak{so}_k \oplus \mathfrak{so}_l, \mathfrak{sl}_k, \mathfrak{sp}_k, \mathfrak{spin}_7, G_2, \mathfrak{spin}_8$, или же алгебра $\mathfrak{h}$ изоморфна $\mathfrak{so}_k$ и вложена в $\mathfrak{g}$ через вложения $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{sl}_k \hookrightarrow \mathfrak{g}$.*
(4) *Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$, алгебра $\mathfrak{h}$ полупроста, а $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})^{min}$, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_{2k}, \mathfrak{sp}_{2k} \oplus \mathfrak{sp}_{2l}, \mathfrak{sl}_k, \mathfrak{so}_k$, или же алгебра $\mathfrak{h}$ изоморфна $\mathfrak{sp}_{2k}$ и вложена в $\mathfrak{sp}_{2n}$ через вложения $\mathfrak{sp}_{2k} \hookrightarrow \mathfrak{sl}_{2k} \hookrightarrow \mathfrak{g}$.*

Доказательство. Мы обозначим через V тавтологический $\mathfrak{g}$-модуль.

Шаг 1. Здесь мы опишем все полупростые подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$, которые содержат диагонализуемый эндоморфизм h удовлетворяющий следующим двум условиям:

(a) Элемент h полупрост и имеет собственные значения 1 и -1 кратности 1 каждое.
(b) Элемент h не содержится ни в каком собственном идеале алгебры $\mathfrak{h}$.

Поскольку для любого неприводимого $\mathfrak{h}$-модуля U и всех $\xi \in \mathfrak{h}$ верно равенство $\operatorname{tr}_U \xi = 0$, то $\mathfrak{h}$-модуль $V/V^{\mathfrak{h}}$ неприводим. Все неприводимые линейные алгебры $\mathfrak{h}$, содержащие элемент h были описаны в доказательстве предложения 8 из [Л3]: это $\mathfrak{sl}(V/V^{\mathfrak{h}}), \mathfrak{so}(V/V^{\mathfrak{h}})$ и $\mathfrak{sp}(V/V^{\mathfrak{h}})$ (последнее в случае, когда $\dim V/V^{\mathfrak{h}}$ – четное число).

Шаг 2. Здесь мы опишем все редуктивные подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(V)$, содержащие элемент h, удовлетворяющий условиям (a),(b). Если алгебра $\mathfrak{h}$ полупроста, то она совпадает с $\mathfrak{so}_k$ по шагу 1. Далее, аналогично шагу 1, алгебра $\mathfrak{h}$ не имеет собственного ортогонального подмодуля в $V/V^{\mathfrak{h}}$. Отсюда следует, что имеет место изоморфизм V-модулей $V/V^{\mathfrak{h}} = V_0 \oplus V_0^*$, где V_0^* – неприводимый $\mathfrak{h}$-модуль. Можем считать, что элемент h действует на V_0 как $diag(1, 0, \ldots, 0)$. Покажем, что $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{gl}(V_0)$.

Фиксируем картановскую подалгебру в $\mathfrak{h}$, содержащую h. Все веса $\mathfrak{h}$-модуля V_0, кроме одного, лежат в плоскости $h = 0$. Отметим, что векторы wh где w пробегает $W(\mathfrak{h})$ порождают $\mathfrak{t}$. Это следует из того, что $h \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{h}), [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Отсюда следует, что в множестве весов имеется единственная $W(\mathfrak{h})$-орбита, точки которой образуют симплекс. Отсюда $\dim V_0 = \operatorname{rk} \mathfrak{h}$, или, что эквивалентно, $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(V_0)$.

Шаг 3. Здесь мы классифицируем все неприводимые подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$, для которых $\mathfrak{h}$-модуль V самосопряжен и которые содержат элемент h, удовлетворяющий условиям (b) и

(a′) Элемент h полупрост и имеет собственные значения 1 и -1 кратности 2 каждое.

Выберем картановскую подалгебру $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$, содержащую h. Мы можем считать, что система положительных корней $\Delta(\mathfrak{h})_+$ выбрана так, чтобы $\langle \Delta(\mathfrak{h})_+, h\rangle \geqslant 0$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – все доминантные ненулевые попарно $W(\mathfrak{h})$-несопряженные веса $\mathfrak{h}$-модуля V, где λ_1 – старший вес. Покажем, что $k = 1$. Предположим противное. Заметим, что $\langle \lambda_i, h\rangle > 0$ для всех i. Действительно, будучи доминантным весом, h является суммой простых корней с положительными коэффициентами. Отсюда следует, что $k = 2$ и каждый из весов λ_1, λ_2 имеет кратность 1. Кроме того, $W(\mathfrak{h})\lambda_i = -W(\mathfrak{h})\lambda_i, i = 1, 2$. Для всех $\nu \in W(\mathfrak{h})\lambda_i, \nu \neq \pm\lambda_i$ имеет место равенство $\langle \nu, h\rangle = 0$. Как было показано в [Ви3], доказательство леммы 2, отсюда следует, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_n, \mathfrak{sp}_n$ и вес λ_i (с точностью до автоморфизма) пропорционален старшему весу тавтологического представления. Но λ_1 и λ_2 непропорциональны, т.к. $\langle \lambda_i, h\rangle = 1$. Отсюда следует, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_8$ и, с точностью до автоморфизма, $\lambda_1 = k\pi_1$, где $k > 1$. В этом случае у модуля V имеется старший вес $(k-2)\pi_1 + \pi_2$. Противоречие.

Таким образом, старший вес является единственным доминантным ненулевым весом $\mathfrak{h}$-модуля V.

Рассмотрим сначала случай, когда $V^{\mathfrak{t}} \neq 0$. В этом случае алгебра $\mathfrak{h}$ проста, и λ – это максимальный короткий корень.

Пусть $\mathfrak{h}$ имеет тип A, D, E, в этом случае $V = \mathfrak{h}$. Среди положительных корней имеются ровно два, спаривающиеся с h нетривиально: это максимальный корень δ и некоторый корень β. Понятно, что β – простой корень, и любой корень больший β является максимальным. Отсюда $\mathfrak{h} = A_2$.

В случае $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{so}_{2l+1}, l > 1$, $\mathfrak{h}$, очевидно, содержит требуемый элемент h.

Для $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{sp}_{2l}, l > 2, F_4$ – множество коротких корней есть система корней типа D_l, и требуемого элемента $h \in \mathfrak{t}$ нет по доказанному выше.

Наконец, пусть $\mathfrak{h} = G_2$. В этом случае множество коротких корней – это A_2, и требуемый элемент h существует.

Теперь пусть $V^{\mathfrak{t}} = 0$. В этом случае, λ_1 – микровес, т.е. для максимального корня $\delta^\vee$ двойственной системы корней выполняется равенство $\langle \lambda_1, \delta^\vee \rangle = 1$. Любой такой вес является фундаментальным, пусть π_m. В естественном порядке на множестве весов имеется наибольший вес меньший λ_1, а именно $\lambda_1 - \alpha_m$. Это дает нам возможность выписать систему на h, которая оказывается совместной лишь в следующих случаях:

1) $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n}$, V – тавтологический $\mathfrak{h}$-модуль (или изоморфный ему для $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_8$).

2) $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_7, \lambda_1 = \pi_3$.

Шаг 4. Завершим доказательство предложения. Утверждения пунктов 1 и 2 были доказаны на шагах 1 и 2, соответственно. Утверждения пунктов 3 и 4 для случая, когда представление алгебры $\mathfrak{h}$ в $V/V^{\mathfrak{h}}$ приводимо, где V – тавтологический $\mathfrak{g}$-модуль, также следуют из шагов 1 и 2. В случае, когда это представление неприводимо, образ $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{gl}(V/V^{\mathfrak{h}})$ – это одна из алгебр, найденных на шаге 3. Для всех из них, кроме $\mathrm{ad}(\mathfrak{sl}_3)$ выполняется условие на включение пространства $\mathbb{C}h$ в $\mathfrak{sl}_2$-тройку. □

Доказательство теоремы 8.1.2. Здесь через H обозначена связная подгруппа в G с касательной алгеброй $\mathfrak{h}$.

Случай $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_n$. Рассмотрим, во-первых, случай, когда $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \neq W(\mathfrak{g})$. Покажем, что в этом случае решетка $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ совпадает с решеткой Λ, порожденной всеми корнями α, для которых $s_\alpha \in W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Из предложения 2.5.7 следует включение $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \subset \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\Delta(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\perp})$. Для доказательства обратного включения мы должны проверить, что $\alpha \in \Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ для всех $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})$ с $s_\alpha \in W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Анализируя возможные группы $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, мы замечаем, что найдется корень $\alpha_1 \in \Delta(\mathfrak{g})$, удовлетворяющий условиям следствия 8.3.3. Применяя это следствие, получаем $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\Delta(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\perp})$.

Можем предположить, таким образом, что $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = W(\mathfrak{g})$. Согласно лемме 8.4.2, $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = 2\Lambda(\mathfrak{g})$. По лемме 8.4.1, алгебра $\mathfrak{h}$ содержит элемент, сопряженный с диагональной матрицей $diag(1,-1,0\ldots,0)$. По лемме 8.4.3, алгебра $\mathfrak{h}$ полупроста. Из предложения 8.4.4 теперь следует, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_k, \mathfrak{so}_k, \mathfrak{sp}_{2k}$.

Если $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_k$, то из условия $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \mathfrak{t}, W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = W(\mathfrak{g})$ следует, что $k \leqslant \frac{n}{2}$. Система (8.8) дает $k = \frac{n}{2} - 1$. Чтобы увидеть, что $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \Lambda(\mathfrak{g})$ в этом случае, достаточно заметить, что $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \subset \Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{sl}_{n/2})$ (см. предложение 2.5.2).

Если $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_{2k}$, то из условия $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \mathfrak{t}, W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = W(\mathfrak{g})$ следует, что $k \leqslant \frac{n}{2} - 1$. Система (8.8) переписывается в виде $k = \frac{n}{2} - 2$. Аналогично предыдущему случаю, из наличия включения $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sp}_{n-2}$ следует $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \Lambda(\mathfrak{g})$.

Наконец, пусть $\mathfrak{h}=\mathfrak{so}_k$. Тогда система (8.8) переписывается в виде $k=n$. Из [Krä], Tabelle 1, следует, что $\mathfrak{X}_{\mathrm{SL}_n,\mathrm{SL}_n/\mathrm{SO}_n}=\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(2\pi_1,\ldots,2\pi_{n-1})$. Поскольку $\mathfrak{X}_{\mathrm{SL}_n,\mathrm{SL}_n/\mathrm{SO}_n}\subset\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, то $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=2\Lambda(\mathfrak{g})$.

Случай $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_{2n+1}, n\geqslant 2$. Из леммы 8.4.1 следует, что $\mathfrak{h}$ содержит элемент h сопряженный с $diag(2,-2,0\ldots,0)$, и удовлетворяющий равенству (8.7). Имеет место равенство $\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\, h^2=16n-8$. Из пункта 2 предложения 8.4.4 мы видим, что элемент h содержится в идеале $\mathfrak{gl}_k$ или $\mathfrak{so}_k$. В первом случае $\mathrm{tr}_{\mathfrak{h}}\, h^2=8(k-1)$, во втором $\mathrm{tr}_{\mathfrak{h}}\, h^2=8(k-2)$. Отсюда следует, что идеал, порожденный элементом h в $\mathfrak{h}$, совпадает с $\mathfrak{gl}_n$ или $\mathfrak{so}_{n+1}$.

Предположим сначала, что $\mathfrak{h}$ содержит идеал $\mathfrak{gl}_n$. В этом случае $\mathfrak{h}=\mathfrak{gl}_n$. Из [Krä], Tabelle 1, следует, что $\mathfrak{X}_{\mathrm{SO}_{2n+1},\mathrm{SO}_{2n+1}/\mathrm{GL}_n}=\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{\varepsilon_i\}|_{i=\overline{1,n}}$. Считаем, что $G=\mathrm{SO}_{2n+1}$. Существует (единственный с точностью до пропорциональности, поскольку однородное пространство G/H сферическое) H-неподвижный вектор в $\bigwedge^i\mathbb{C}^{2n+1}=V(\sum_{j=1}^i\varepsilon_i)$ – это $\omega^{i/2}$, где $\omega=e_1\wedge e_{n+1}+e_2\wedge e_{n+2}+\ldots+e_{2n-1}\wedge e_{2n}$, для четного i и $e_{2n+1}\wedge\omega^{(i-1)/2}$ для нечетного i. Группа $N_G(H)/H$ имеет порядок 2. Неединичный элемент этой группы действует на H-неподвижном векторе в $\bigwedge^i\mathbb{C}^{2n+1}$ умножением на $(-1)^{n+[i/2]}$. Решетка $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ находится с помощью предложения 8.2.1.

Остается рассмотреть случай когда $\mathfrak{h}$ содержит идеал $\mathfrak{so}_{n+1}$. Во-первых, покажем, что $\Lambda(\mathfrak{so}_{2n+1},\mathfrak{so}_{n+1})$ имеет такой вид, как указано в таблице 8.1. Покажем прежде всего, что $\Lambda(\mathfrak{so}_{2n+1},\mathfrak{so}_{n+1})\neq 2\Lambda(\mathfrak{g})$. Это следует из леммы 8.4.3, т.к. система (8.8) переписывается в виде $4(4n-4)=2(8n-4)-16$.

Пусть $G=\mathrm{SO}_{2n+1}$. Обозначим через $\widetilde{H}$ прообраз центра группы $N_G(H)/H$ при каноническом эпиморфизме $N_G(H)\twoheadrightarrow N_G(H)/H$. По предложению 8.2.1, $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\mathfrak{X}_{G,G/\widetilde{H}}$. Достаточно доказать, что подгруппа $L_{0\,G,G/\widetilde{H}}$ нетривиальна. Как показано в [Kn1], Korollar 8.2, $L_{0\,G,G/\widetilde{H}}$ является стабилизатором общего положения для действия $G:T^*(G/\widetilde{H})$ (это также несложно следует из предложения 3.4.4 и следствия 5.3.1). Остается доказать, что для стабилизатор общего положения для действия $\widetilde{H}:\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ нетривиален. Это действие совпадает с действием $\mathrm{O}(n+1)$ на $(\mathbb{C}^{n+1})^{\oplus n}$. Стабилизатор общего положения является циклической группой порядка 2.

Пусть теперь $\mathfrak{h}$ – Λ-существенная подалгебра в $\mathfrak{g}$, содержащая собственный идеал $\mathfrak{h}_1=\mathfrak{so}_{n+1}$. В этом случае $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=2\Lambda(\mathfrak{g})$. Из пункта 1 леммы 8.4.3 следует, что алгебра $\mathfrak{h}$ полупроста. По лемме 8.4.1, найдется элемент $h\in\mathfrak{h}$, сопряженный с матрицей $diag(1,1,-1,-1,0\ldots,0)$ и такой, что

$$k_{\mathfrak{g}}=\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\, h^2=2\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{h}}\, h^2+8. \tag{8.10}$$

При этом, как было показано при доказательстве неравенства $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1)\neq 2\Lambda(\mathfrak{g})$, $h\notin\mathfrak{h}_1$. Отметим, далее, что h проектируется на $\mathfrak{h}_1$ ненулевым образом. В противном случае, $\mathrm{tr}_{\mathfrak{h}}\, h^2=\mathrm{tr}_{\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})}\, h^2$, и равенство (8.10) не может выполняться.

Покажем, что при $\mathfrak{h}\neq\widehat{\mathfrak{h}}:=\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)=\mathfrak{so}_n\oplus\mathfrak{so}_{n+1}$ имеет место неравенство $\mathrm{tr}_{\mathfrak{h}}\, h^2<\mathrm{tr}_{\widetilde{\mathfrak{h}}}\, h^2$. Действительно, в противном случае h тривиально действует на $\widehat{\mathfrak{h}}/\mathfrak{h}$. Таким образом, $\mathfrak{h}$ и $\widehat{\mathfrak{h}}$ имеют общий идеал, содержащий h. Поскольку $h\notin\mathfrak{h}_1$, то это невозможно. Таким образом, $\mathfrak{h}=\mathfrak{so}_{n+1}\oplus\mathfrak{so}_n$. Покажем, что в этом случае $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=2\Lambda(\mathfrak{g})$. Действительно, $N_G(H)=\mathrm{SL}_{2n+1}\cap(\mathrm{O}_n\times\mathrm{O}_{n+1})$, $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\mathfrak{X}_{G,G/N_G(H)}$, а последняя решетка несложным образом находится из [Krä], Tabelle 1.

Случай $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}_{2n}, n>2$.

Сначала мы найдем все полупростые Λ-существенные подалгебры $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$. Такие подалгебры полупросты по пункту 2 леммы 8.4.3. По лемме 8.4.1, $\mathfrak{h}$ содержит элемент, сопряженный с $diag(1,1,-1,-1,0,\ldots,0)$. По пункту 4 предложения 8.4.4, $\mathfrak{h}=$

$\mathfrak{sp}_{2k}, \mathfrak{sp}_{2k} \oplus \mathfrak{sp}_{2l}, \mathfrak{sl}_k, \mathfrak{so}_k$ или подалгебра $\mathfrak{h}$ изоморфна $\mathfrak{sp}_{2k}$ и вложена в $\mathfrak{g}$ посредством вложения $\mathfrak{sp}_{2k} \hookrightarrow \mathfrak{sl}_{2k}$. Отметим, что $\mathfrak{h}$ не содержит идеала $\mathfrak{sp}_{2k}$ с $k > \frac{n}{2}$ и $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{sp}_n \oplus \mathfrak{sp}_n$. В противном случае, $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \neq \mathfrak{t}$. Подалгебра $\mathfrak{sp}_{2k} \oplus \mathfrak{sp}_{2l}$ не удовлетворяет последнему требованию из пункта 2 леммы 8.4.3 (требуемая подалгебра есть $\mathfrak{so}_3 \subset \mathfrak{sp}_{2n}$). Из оставшихся подалгебр системе (8.9) удовлетворяют $\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sp}_{n-2}$.

Покажем, что $\Lambda(\mathfrak{sp}_{4m+2}, \mathfrak{sp}_{2m}) = \Lambda(\mathfrak{g})$. Положим $G = \mathrm{Ad}(\mathrm{Sp}_{4m+2})$. Центр группы $N_G(H)/H$ тривиален. Поэтому, согласно предложению 8.2.1, $\Lambda(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{X}_{G,G/H}$. Остается доказать, что стабилизатор общего положения для действия $H : \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ тривиален. Последнее действие совпадает с действием Sp_{2m} на $(\mathbb{C}^{2m})^{\oplus 2m+1}$. Стабилизатор общего положения тривиален уже для действия $\mathrm{Sp}_{2m} : (\mathbb{C}^{2m})^{\oplus 2m}$.

Пусть $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_n$. Покажем, что $\Lambda(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(2\Delta(\mathfrak{g})^{min} \cup \Delta(\mathfrak{g})^{max})$. Покажем сначала, что $\Lambda(\mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{gl}_n) = 2\Lambda(\mathfrak{g})$. Действительно, подалгебра $\mathfrak{gl}_n \subset \mathfrak{sp}_{2n}$ сферическая, а подгруппа $\mathrm{GL}_n \subset \mathrm{Sp}_{2n}$ имеет индекс 2 в своем нормализаторе. По предложению 8.2.1, $\Lambda(\mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{gl}_n)$ имеет такой же индекс в $\mathfrak{X}_{\mathrm{Sp}_{2n}, \mathrm{Sp}_{2n}/\mathrm{GL}_n}$. Требуемое равенство легко выводится из [Krä], Tabelle 1. Покажем теперь, что $\Lambda(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \neq 2\Lambda(\mathfrak{g})$. В противном случае, подалгебра $\mathfrak{h}$ содержала бы элемент, сопряженный с $diag(1, -1, 0, \ldots, 0)$ (см. лемму 8.4.1), что невозможно. Неравенство $\Lambda(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \neq \Lambda(\mathfrak{g})$ выводится теперь из пункта 2 леммы 8.4.3, а неравенство $\Lambda(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \neq 2\Lambda(\mathfrak{g})$ из того, что $\mathfrak{h}$ не содержит элемента, сопряженного с $\alpha^\vee, \alpha \in \Delta(\mathfrak{g})^{max}$.

Остается доказать, что $\mathfrak{gl}_n \subset \mathfrak{sp}_{2n}$ является единственной подалгеброй с $\Lambda(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = 2\Lambda(\mathfrak{g})$. Действительно, пусть $\mathfrak{h}$ подалгебра, удовлетворяющая последнему равенству. Тогда, по пункту 2 леммы 8.4.3, $\Lambda(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) \neq \Lambda(\mathfrak{g})$. Таким образом, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{sl}_n$.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}, n \geqslant 8$. Пусть $\mathfrak{h}$ – Λ-существенная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Согласно пункту 1 леммы 8.4.3, алгебра $\mathfrak{h}$ полупроста. По лемме 8.4.1, $\mathfrak{h}$ содержит элемент h, сопряженный с $diag(1, 1, -1, -1, 0 \ldots, 0)$ и удовлетворяющий равенству (8.7), а по пункту 3 леммы 8.4.3, мы можем считать, что некоторое кратное элемента h включается в $\mathfrak{sl}_2$-тройку, которая проектируется нетривиально на любой простой идеал в $\mathfrak{h}$. Согласно пункту 3 предложения 8.4.4, подалгебра $\mathfrak{h}$ – это $\mathfrak{so}_k, \mathfrak{so}_k \oplus \mathfrak{so}_l, \mathfrak{sl}_k, \mathfrak{sp}_k, \mathfrak{spin}_7, G_2$ или $\mathfrak{h}$ изоморфна $\mathfrak{so}_k$ и вложена в $\mathfrak{g}$ посредством вложения $\mathfrak{so}_k \hookrightarrow \mathfrak{sl}_k$. Отметим, что $\mathfrak{h}$ не содержит идеалов $\mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{so}_k$ с $k > n$, ибо $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{t}$.

Рассмотрим сначала случай $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_k \oplus \mathfrak{so}_l$, где, как было отмечено выше, $k, l \leqslant n$. В этом случае, проекция элемента h на каждый из идеалов $\mathfrak{so}_k, \mathfrak{so}_l$ сопряжена с $diag(1, -1, 0, \ldots, 0)$. Равенство (8.7) выполняется тогда и только тогда, когда $k = l = n$. Покажем, что в этом случае $\Lambda(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = 2\Lambda(\mathfrak{g})$. Действительно, положим $G = \mathrm{SO}_{2n}$. Однородное пространство G/H сферическое, и $\# N_G(H)/H = 2$. Поэтому $\Lambda(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{X}_{G,G/N_G(H)}$ имеет индекс 2 в $\mathfrak{X}_{G,G/H}$. Требуемое утверждение несложно выводится из таблиц в [Krä].

Из оставшихся подалгебр системе (8.8) удовлетворяют лишь $\mathfrak{sl}_{n-2} \subset \mathfrak{so}_{2n}$, $\mathfrak{spin}_7 \subset \mathfrak{so}_{12}, G_2 \subset \mathfrak{so}_{10}$. Покажем, что в этих случаях $\Lambda(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \Lambda(\mathfrak{g})$. Для $\mathfrak{sl}_{n-2}$ это следует из того, что эта подалгебра включается в $\mathfrak{sl}_{n-1}$. В двух других случаях возьмем в качестве G группу $\mathrm{Ad}(\mathrm{SO}_{2m})$. Заметим, что $N_G(H)/H \cong \mathrm{Ad}(\mathrm{SO}_k)$ для $k = 3, 4$. Из предложения 8.2.1 следует, что $\Lambda(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{X}_{G,G/H}$. Для доказательства равенства $\mathfrak{X}_{G,G/H} = \Lambda(\mathfrak{g})$ достаточно показать, что стабилизатор общего положения для действия $H : \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ тривиален. Это следует из классификации в [По1].

Случай $\mathfrak{g} = E_6$. В этом случае, по лемме 8.4.3, алгебра $\mathfrak{h}$ полупроста. Пусть $\mathfrak{h}_j, i_j, a_j, j = \overline{1, k}$, таковы, как в пункте 1 леммы 8.4.3. Будем считать, что $k_{\mathfrak{h}_1} \geqslant k_{\mathfrak{h}_2} \geqslant \ldots \geqslant k_{\mathfrak{h}_k}$. Отметим, что среди идеалов $\mathfrak{h}_i$ нет подалгебр D_5, A_5, B_4, F_4, ибо $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{t}$.

Система (8.8) переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^{k} a_j i_j = 4, \qquad \sum_{j=1}^{k} a_j k_{\mathfrak{h}_j} = 80. \tag{8.11}$$

Отсюда следует, что $k_{\mathfrak{h}_1} \geqslant 20$. Значит, $\mathfrak{h}_1$ есть одна из подалгебр $A_4, B_3, C_4, D_4 \subset E_6$.

Если $\mathfrak{h}_1 = D_4$, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$ (т.к. $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}_1)/\mathfrak{h}_1$ – коммутативная подалгебра). Это противоречит системе (8.11). Значит $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \Lambda(\mathfrak{g})$. Подалгебра $\mathfrak{h}_1 = B_3$ вкладывается в D_4, и $\mathfrak{h}_1 = [\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}_1), \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}_1)]$, поэтому здесь также $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \Lambda(\mathfrak{g})$.

Рассмотрим случай $\mathfrak{h}_1 = A_4$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}_1)/\mathfrak{h}_1 \cong \mathbb{C} \times \mathfrak{sl}_2$. Если $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}_1$, то $\mathfrak{h} = A_4 \times A_1$. В этом случае, однако, решений у системы (8.11) в положительных числах нет. Таким образом, $\mathfrak{h} = A_4$. В качестве G мы возьмем группу $\mathrm{Ad}(E_6)$. Подалгебра $\mathfrak{h}$ включается в D_5. Поэтому группа $N_G(\mathfrak{h})$ действует на $\mathfrak{h}$, как $\mathrm{Aut}(\mathfrak{h})$. Группа $N_G(H)^\circ$ является подгруппой Леви в G. Отсюда нетрудно вывести, что группа $N_G(H)$ имеет ровно две связные компоненты. Пусть σ – элемент с той из них, что не содержит 1. Обозначим через Z центр группы $(N_G(H)/H)^\circ$, а через F её коммутант. Элемент σ действует на $\mathfrak{z}$ умножением на -1. Отсюда следует, что при проекции $(N_G(H)/H)^\circ \to (N_G(H)/H)^\circ/F$ образ группы $Z(N_G(H)/H)$ является циклической группой порядка 2. С другой стороны, центр группы F тривиален, или имеет порядок 2. Таким образом, $\#Z(N_G(H)/H) \leqslant 4$. Обозначим через $\widetilde{H}$ прообраз группы $Z(N_G(H)/H)$ в $N_G(H)$. По предложению 8.2.1, $\mathfrak{X}_{G,G/\widetilde{H}} = \Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Если $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \neq \Lambda(\mathfrak{g})$, то группа $L_{0\,G,G/\widetilde{H}}$ изоморфна $2\Lambda(\mathfrak{g})/\Lambda(\mathfrak{g})$, т.е. $\mathbb{Z}_2^6$. Таким образом, стабилизатор общего положения для действия $\widetilde{H} : \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ изоморфен $\mathbb{Z}_2^6$. Отсюда следует, что стабилизатор общего положения для действия $H : \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ нетривиален. Несложно видеть, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cong (\bigwedge^2 \mathbb{C}^5 \oplus \bigwedge^2 \mathbb{C}^{5*} \oplus \mathbb{C})^{\oplus 2} \oplus \mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}^{5*}$. Из результатов работы [По1] следует, что стабилизатор общего положения тривиален.

Наконец, осталось рассмотреть случай $\mathfrak{h} = C_4$. В этом случае, несовпадение решеток $\mathfrak{X}_{G,G/H}$ и $\Lambda(\mathfrak{g})$ следует из [Krä], Tabelle 1.

Случай $\mathfrak{g} = E_7$. В этом случае, по лемме 8.4.3, алгебра $\mathfrak{h}$ полупроста. Пусть $\mathfrak{h}_j, i_j, a_j, j = \overline{1,k}$, таковы, как в пункте 1 леммы 8.4.3. Будем считать, что $k_{\mathfrak{h}_1} \geqslant k_{\mathfrak{h}_2} \geqslant \ldots \geqslant k_{\mathfrak{h}_k}$. Отметим, что среди идеалов $\mathfrak{h}_i$ нет подалгебр E_6, D_6, ибо $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \mathfrak{t}$. Система (8.8) переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^{k} a_j i_j = 4, \qquad \sum_{j=1}^{k} a_j k_{\mathfrak{h}_j} = 128. \tag{8.12}$$

Отсюда следует, что $k_{\mathfrak{h}_1} \geqslant 32$. Таким образом, $\mathfrak{h}$ можем быть лишь одной из подалгебр A_7, D_5, B_5, F_4. В случае, когда $\mathfrak{h}_1 = B_5, F_4$, $k_{\mathfrak{h}_1} = 36$. Отсюда $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}_1, a_1 \leqslant 3$, и $k_{\mathfrak{h}_2} \geqslant 20$. Несложно видеть, что это невозможно. В случае $\mathfrak{h}_1 = D_5$ имеет место равенство $k_{\mathfrak{h}_1} = 32$, откуда $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$. Но D_5 вкладывается в B_5, откуда $\Lambda(E_7, D_5) = \Lambda(\mathfrak{g})$. Наконец, в случае $\mathfrak{h} = A_7$ неравенство $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \neq \Lambda(\mathfrak{g})$ следует из [Krä], Tabelle 1.

Случай $\mathfrak{g} = E_8$. Алгебра $\mathfrak{h}$ опять же полупроста. Пусть $\mathfrak{h}_j, i_j, a_j, j = \overline{1,k}$ определены аналогично предыдущему случаю. Отметим, что среди идеалов алгебры $\mathfrak{h}$ нет E_7.

Система (8.8) переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^{k} a_j i_j = 4,$$
(8.13)
$$\sum_{j=1}^{k} a_j k_{\mathfrak{h}_j} = 224.$$

Таким образом, $k_{\mathfrak{h}_1} \geqslant 56$. Отсюда следует, что $\mathfrak{h}_1 = D_8$. То, что $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \neq \Lambda(\mathfrak{g})$ следует из [Krä], Tabelle 1.

Случай $\mathfrak{g} = F_4$. Найдем сначала все полупростые Λ-существенные подалгебры $\mathfrak{h} \subset F_4$. Пусть $a_j, i_j, k_{\mathfrak{h}_j}$ определены так же, как в случае $\mathfrak{g} = E_6$. Отметим, что $\mathfrak{h} \neq B_4, D_4$, т.к. $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \mathfrak{t}$. Система 8.9 переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^{k} a_j i_j = 8,$$
(8.14)
$$\sum_{j=1}^{k} a_j k_{\mathfrak{h}_j} = 128.$$

Отсюда следует, что $k_{\mathfrak{h}_1} \geqslant 16$. Таким образом, $\mathfrak{h} = A_3, C_3, B_3, G_2$. При $\mathfrak{h}_1 = A_3$ выполняется равенство $k_{\mathfrak{h}_1} = 16$. Поэтому $a_1 = 8$ и $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$. Подалгебра A_3 не содержит подалгебры $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{sl}_2$ индекса 8, поэтому A_3 не является Λ-существенной подалгеброй, см. пункт 2 леммы 8.4.3.

Пусть $\mathfrak{h}_1 = B_3$. Поскольку $k_{\mathfrak{h}_1} = 20$, то $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}_1$. Это, однако, невозможно, т.к $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}_1)/\mathfrak{h}_1$ – коммутативная алгебра. Значит $\Lambda(F_4, B_3) = \Lambda(\mathfrak{g})$. Для $\mathfrak{h}_1 = G_2$ выполняется равенство $k_{\mathfrak{h}_1} = 16$, поэтому в этом случае $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$. Но $\mathfrak{h}_1$ включается в B_3, поэтому $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1) = \Lambda(\mathfrak{g})$.

Наконец, рассмотрим случай $\mathfrak{h}_1 = C_3$. Поскольку $k_{\mathfrak{h}_1} = 16$, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$. Имеет место изоморфизм H-модулей $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cong V(\pi_3)^{\oplus 2}$. Как показано в работе [По1], стабилизатор общего положения для действия $\mathrm{Sp}(6) : V(\pi_3)^{\oplus 2}$ изоморфен $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Отсюда следует, что $L_{0\,G,G/H} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, откуда $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \neq \Lambda(\mathfrak{g})$. Отметим, что, по теореме 7.1.2, $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = W(\mathfrak{g})$. Поскольку для $\mathfrak{h}$ система (8.8) не имеет решения, то $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \neq 2\Lambda(\mathfrak{g})$.

Найдем теперь все подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, для которых $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = 2\Lambda(\mathfrak{g})$. По пункту 2 леммы 8.4.3, любая такая подалгебра $\mathfrak{h}$ содержит идеал $\mathfrak{h}_1$ с $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1) \neq \Lambda(\mathfrak{g})$. Отсюда следует, что C_3 является идеалом в $\mathfrak{h}$. В частности, $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = W(\mathfrak{g})$. По пункту 1 леммы 8.4.3, алгебра $\mathfrak{h}$ полупроста. Единственной возможностью является $\mathfrak{h} = C_3 \times A_1$. Равенство $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = 2\Lambda(\mathfrak{g})$ следует из [Krä], Tabelle 1.

Случай $\mathfrak{g} = G_2$. В этом случае $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = 2\Lambda(\mathfrak{g})$. Из леммы 8.4.1 следует, что $\mathfrak{h}$ содержит элемент h, сопряженные с коротким двойственным корнем в $\mathfrak{g}$, для которого

$$\mathrm{tr}_\mathfrak{h}\, h^2 = 4. \tag{8.15}$$

Отметим, что $\mathfrak{h} \neq A_2$, т.к. $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \mathfrak{t}$. Поскольку $\mathfrak{h}$ содержит элемент, сопряженный с длинным двойственным корнем, то можем предположить, что $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$. Перебрав элементы в $\mathfrak{t}$, сопряженные с h_1 (с точностью до знака их 3), мы видим, что для выполнения равенства (8.15) необходимо, чтобы $\mathfrak{h} = A_1 \times \widetilde{A}_1$. Для этой алгебры равенство $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = 2\Lambda(\mathfrak{g})$ следует из [Krä], Tabelle 1. □

8.5. **Доказательство теоремы 8.1.3.** Покажем сначала, что $H^{\mathfrak{X}-sat} \subset N_G(H)$. По лемме 2.4.4, $H^{\mathfrak{X}-sat}/\widehat{H} \subset Z(N_G(\widehat{H})/\widehat{H})$, где подгруппа $\widehat{H}$ была определена во введении перед теоремой 8.1.3. Очевидно, что $H \subset N_G(\widehat{H})$. Это дает требуемое. Отметим также, что отсюда следует, что $H_0 = H \cap H^{\mathfrak{X}-sat}$ является нормальной подгруппой в H.

Докажем теперь равенство $\mathfrak{X}_{G,G/H} = \mathfrak{X}_{G,G/H_0}$. Отметим, что по определению подгруппы H_0, $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0) = \Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{X}_{G,G/H} \subset \mathfrak{X}_{G,G/H_0}$. Остается доказать, что индексы подгруппы $\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ в $\mathfrak{X}_{G,G/H}, \mathfrak{X}_{G,G/H_0}$ совпадают. Включение $\mathfrak{X}_{G,G/H}/\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \hookrightarrow \mathfrak{X}_{G,G/H_0}/\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ соответствует эпиморфизму групп $\mathfrak{A}_{G,G/H_0} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}_{G,G/H}$ (см. предложение 2.5.4). Остается показать, что ядро этого гомоморфизма тривиально. По утверждению о единственности в предложении 2.5.4, гомоморфизм $\mathfrak{A}_{G,G/H_0} \to \mathrm{Aut}^G(G/H) \cong N_G(H)/H$ совпадает с $H^{\mathfrak{X}-sat}/H_0 \to N_G(H)/H$. Последний гомоморфизм инъективен, поскольку $H_0 = H \cap H^{\mathfrak{X}-sat}$.

Доказажем, что $\mathfrak{h}_0 = [\mathfrak{h}^{\mathfrak{X}-sat}, \mathfrak{h}^{\mathfrak{X}-sat}]$. Отсюда сразу будет следовать равенство $H_0^{\mathfrak{X}-sat} = H^{\mathfrak{X}-sat}$. Отметим, что $[\mathfrak{h}^{\mathfrak{X}-sat}, \mathfrak{h}^{\mathfrak{X}-sat}] = \widehat{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{h}$ по определению $H^{\mathfrak{X}-sat}$. Требуемое равенство следует из того, что $\widehat{\mathfrak{h}}$ – максимальная подалгебра в $\mathfrak{h}^{\mathfrak{X}-sat}$, для которой $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\widehat{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{t}$.

Перейдем к доказательству пункта 2. Единственным нетривиальным утверждением является вид двойственности для алгебр $\mathfrak{h}$ из таблицы 8.1. Из двойственности Фробениуса следует, что решетка $\mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}$ порождена такими λ, что $V(\lambda^*)^{\mathfrak{h}} \neq \{0\}$ (последнее, в силу редуктивности $\mathfrak{h}$, эквивалентно $V(\lambda)^{\mathfrak{h}} \neq \{0\}$). Кроме того, если $V(\lambda)^{\mathfrak{h}} \neq \{0\}$, то χ_λ совпадает с характером, которым $H^{\mathfrak{X}-sat}/H^\circ$ действует на $V(\lambda^*)^{\mathfrak{h}}$. Отсюда следует утверждение о значении χ_λ на подгруппе $Z(G)/(Z(G)\cap H^\circ)$.

Все подалгебры кроме NN2,4,7,11 являются сферическими и решетки $\mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}$ извлекаются из [Krä], Tabelle 1. В случаях 2,4 решетка $\mathfrak{X}_{G,G/H^\circ}$ совпадает с решеткой весов группы G (это легко видеть из замечания в предыдущем абзаце). В случае 7 решетка извлекается из работы [Pa3]. Наконец, в случае 11, как было показано при доказательстве теоремы 8.1.2, $L_{0\,G,G/H^\circ} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Поскольку $\mathfrak{X}_G/\Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, то $\mathfrak{X}_{G,G/H^\circ} = \Lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Во всех приведенных случаях $H^{\mathfrak{X}-sat}/H^\circ = Z(N_G(H^\circ))/H^\circ$. Нахождение образующей (типичного элемента в случаях 2,3) в последней группе не представляет сложности. Вычисление характера χ_λ производится с помощью замечания выше.

Утверждение пункта 3 следует непосредственно из определения двойственности.

8.6. **Нахождение выделенных компонент.** Точка с выделенной компоненты в многообразии $(G/H)^{L_{0\,G,G/H}}$ определяется из следующего предложения (ср. с предложением 6.1.3). Ниже в этом пункте $X_0 = G/H$, и $\underline{X_0}$ – выделенная компонента в $X_0^{L_{0\,G,X_0}}$.

Предложение 8.6.1. *Мы придерживаемся обозначений, введенных во введении к разделу.*

(1) *Пусть $H_0 = H \cap H^{\mathfrak{X}-sat}$, $\widetilde{X}_0 = G/H_0$, $\pi : \widetilde{X}_0 \to X_0$ – естественное отображение, и $\underline{\widetilde{X}}_0$ – выделенная компонента в $\widetilde{X}_0$. Тогда $\pi(\underline{\widetilde{X}}_0) \subset X_0$.*
(2) *Пусть $H \subset H^{\mathfrak{X}-sat}$, $\pi : G/H \to G/H^{\mathfrak{X}-sat}$. Пусть $\underline{X}_0'$ – выделенная компонента в $G/H^{\mathfrak{X}-sat}$. Тогда $\pi^{-1}(\underline{X}_0') \subset X_0'$.*
(3) *Пусть $G = G_1 \times G_2, H = H_1 \times H_2$. Тогда X_0 совпадает с произведением выделенных компонент многообразий $(G_i/H_i)^{L_{0\,G_i,G_i/H_i}}$.*
(4) *Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра, а $\mathfrak{h}$ – подалгебра из таблицы 8.1, вложенная так, как указано ниже. Тогда $eH^{\mathfrak{X}-sat}$ лежит в выделенной компоненте многообразия $(G/H^{\mathfrak{X}-sat})^{L_{0\,G,G/H^{\mathfrak{X}-sat}}}$.*

Опишем, какие вложения $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ мы рассматриваем. В случаях 1,5,8-10,12-15 мы вкладываем $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ как подалгебру неподвижных точек инволюции Вейля σ. Напомним, что под инволюцией Вейля понимается инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, оставляющий на месте $\mathfrak{t}$ и действующий на $\mathfrak{t}$ как -1. Эти требования определяют σ однозначно с точностью до сопряжения подходящим элементом из T.

В случаях 2,3 $\mathfrak{h}$ вкладывается в $\mathfrak{g}$ так, как описано в пункте 6.4.

В случае 4 мы вкладываем $\mathfrak{h}$ как аннулятор векторов $e_i + e_{2n+2-i}, i = \overline{1,n}$.

В случае 6 мы вкладываем $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ как стабилизатор пары изотропных подпространств $U_\pm$ натянутых на векторы вида $x \pm i\iota(x)$, где $x \in \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{2i}, i \leqslant i)$, а ι некоторое изометрическое вложение $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{2i})$ в $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{2i-1}, i \leqslant n+1)$.

В случае 7 мы вкладываем $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ как $\mathfrak{g}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n-1)}$.

В случае 11 подалгебра $\mathfrak{h}$ вкладывается в $\mathfrak{g}$ как $\mathfrak{g}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$.

Доказательство предложения 8.6.1. Доказательства пунктов 1-3 практически дословно повторяют доказательства соответствующих пунктов в предложении 6.1.3 (с заменой групп вида $L^\circ_{0\,\bullet,\bullet}$ на группы вида $L_{0\,\bullet,\bullet}$).

В случае, когда $\mathfrak{h}$ является подалгеброй неподвижных точек инволюции σ имеет место равенство $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}^\perp = \mathfrak{t}$. Отсюда следует, что $B \cap N_G(\mathfrak{h}) \subset T$, откуда $A_{G,G/N_G(\mathfrak{h})} \cong T/T \cap H$. Последнее равенство эквивалентно $T \cap H = L_{0\,G,G/H^{\mathfrak{X}-sat}}$ (напомним, что в этом случае $H^{\mathfrak{X}-sat} = N_G(\mathfrak{h})$). Поскольку B-орбита точки $eH^{\mathfrak{X}-sat}$ плотна в $G/H^{\mathfrak{X}-sat}$, то eH содержится в выделенной компоненте.

В случаях $2,3$ группа $L_{0\,G,G/H^{\mathfrak{X}-sat}}$ является одномерным тором, и требуемое следует из предложения 6.1.3.

Ниже мы считаем, что $H = H^{\mathfrak{X}-sat}$, и полагаем $L_0 := L_{0\,G,G/H^{\mathfrak{X}-sat}}$. Согласно предложению 6.3.5, нам достаточно проверить, что $L_0 \subset H$, что $\dim G - \dim N_G(L_0) = 2(\dim H - \dim N_H(L_0))$, и $N_G(L_0) = N_G(L_0)^\circ N_H(L_0)$.

В случае 4 $L_0 = \{diag(-1,\ldots,-1,1,-1,\ldots,-1)\}$ (здесь и в следующем случае мы считаем, что $G = \mathrm{SO}(2n+1)$). Отсюда $L_0 \subset H$. Далее, $N_G(L_0) \cong \mathrm{S}(\mathrm{O}_{2n} \times \mathrm{O}_1)$, $N_H(L_0) \cong \mathrm{S}(\mathrm{O}_n \times \mathrm{O}_1)$, что дает два оставшихся равенства.

В случае 6 $L_0 = \{diag(\pm1,\mp1,\ldots,-1,1,-1,\ldots,\mp1,\pm1)\}$. Нетривиальный элемент в L_0 переставляет $\mathrm{GL}(n)$-инвариантные изотропные подпространства, откуда $L_0 \subset H$. Далее, $N_G(L_0) \cong \mathrm{S}(\mathrm{O}_{n+1} \times \mathrm{O}_n)$. С другой стороны, вложим $\mathrm{O}_n \cong \mathrm{O}(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{2i}))$ в O_{2n+1}, так чтобы O_n действовала на $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{2i})$ исходным образом, на $\mathrm{im}\,\iota$ через изоморфизм ι и на ортгональном дополнении к сумме этих двух пространств тривиально. Тогда $\mathrm{O}(n) = N_{H^\circ}(L_0)$. Отсюда следует требуемые равенства.

В случае 7 $L_0 = diag(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\varepsilon_n,\ldots,\varepsilon_1)$, где $\varepsilon_i \in \{\pm1\}$ (мы рассматриваем $G = \mathrm{Sp}_{2n}$). Очевидно, что $L_0 \subset H$. Далее, $N_G(L_0)^\circ \cong \mathrm{SL}_2^n$, а $N_H(L_0)^\circ$ является максимальным тором в H. Группы $N_G(L_0)/N_G(L_0)^\circ, N_H(L_0)/N_H(L_0)^\circ$ действуют на L_0 как группа подстановок на n элементах.

В случае 11 группа L_0 порождена элементами $\exp(\pi i\alpha_1^\vee), \exp(\pi i\alpha_2^\vee)$. Имеет место равенства $\mathfrak{g}^{L_0} = D_4, \mathfrak{h}^{L_0} \cong \mathfrak{sl}_2^3$. Любая компонента группы $N_G(L_0)$ содержит элемент из $N_G(T)$. Осталось заметить, что подгруппа $W(D_4)$ нормальна в $W(\mathfrak{g})$ и что $W(\mathfrak{h})W(D_4) = W(\mathfrak{g})$. $\square$

9. Вычисление групп Вейля однородных пространств

9.1. **Введение.** В этом пункте мы завершим алгоритм для вычисления групп Вейля $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

Заметим, во-первых, что мы всегда можем свести вычисление к случаю, когда подалгебра $\mathfrak{h}$ обозрима. Напомним, что подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *обозримой*, если соответствующее однородное пространство G/H является квазиаффинным. Согласно критерию Суханова, [Су], подалгебра $\mathfrak{h}$ является обозримой, если она правильно вклдывается в некоторую параболическую подалгебру $\mathfrak{q}$ и, при этом, лежит в аннуляторе некоторого ненулевого вектора v из некоторого $\mathfrak{g}$-модуля, для которого $\mathfrak{q} = \{\xi \in \mathfrak{g} | \xi v \in \mathbb{C}v\}$. В частности, подалгебра $\mathfrak{h}$ обозрима, если её подалгебра Леви полупроста.

Любое однородное пространство G/H допускает главное G-эквивариантное $\mathbb{C}^\times$-расслоение, которое будет квазиаффинным многообразием. Заметим, что само расслоение является однородным пространством группы $\widetilde{G} := G \times \mathbb{C}^\times$. Алгоритм для построения стабильной подалгебры $\widetilde{\mathfrak{h}}$ этого однородного пространства будет дан в пункте 11.3. Связь между группами $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и $W(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{h}})$ была установлена в предложении 2.3.5. Ниже мы считаем, что подалгебра $\mathfrak{h}$ обозрима.

Напомним, что мы свели вопрос о вычислении групп $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ к случаю, когда $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{t}$ (теорема 5.1.3 и результаты раздела 6), а алгебра $\mathfrak{g}$ проста (предложения 5.4.7,5.4.8). Напомним также, что следствие 8.2.3 позволяет нам вычислить пространство $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$.

Окажется, см. пункт 9.4, что для алгебр $\mathfrak{g}$ типа A, D, E группа $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ определяется однозначно по $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$. Для оставшихся алгебр это уже неверно. Вычисление для алгебр $\mathfrak{so}_5, G_2$ приведено в пункте 9.2. Мы вычислим группы Вейля для всех подалгебр $\mathfrak{h}$, для которых $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{t}$, и которые не содержат унипотентного радикала параболической. Если же $\mathfrak{h}$ содержит унипотентный радикал параболической, то применение следствия 5.4.6 сводит дело к вычислению для алгебры ранга $\leqslant 1$, что не представляет сложности (для $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_2$ группа $W(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0)$ тривиальна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}_0$ содержит максимальную унипотентную подалгебру в $\mathfrak{g}_0$).

Для алгебр типов C, B, F и ранга большего 2 вычисление проведено в пунктах 9.5-9.7. При этом мы накладываем ещё одно ограничение на $\mathfrak{h}$: условие $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} = 0$. В противном случае, мы рассмотрим прообраз $\widetilde{\mathfrak{h}}$ полупростой части алгебры $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h})$ при каноническом эпиморфизме $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) \to \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$. Как следует из следствия 5.4.5, имеет место равенство (в смысле, указанном в этом следствии) $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = W(\mathfrak{g}, \widetilde{\mathfrak{h}})$. С другой стороны, $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \widetilde{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})^\perp}$ (следствие 8.2.3). Применение теоремы 5.1.3 сводит вычисление группы $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ к вычислению группы Вейля для алгебры, ранг полупростой части которой меньше ранга $\mathfrak{h}$.

Этот раздел содержит также пункт 9.3, имеющий вспомогательный характер. В нем мы получаем ограничения на возможные группы Вейля, играющие первостепенную роль в последующих пунктах.

Замечание 9.1.1. Вычисление групп $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ для B_2, G_2, A_n (в частности, для всех групп ранга 2) не использует классификации из [Wa]. Отметим, что сама классификация сферических однородных пространств ранга 2 не представляет сложности. Полученные выше результаты позволяют сводить вычисление групп Вейля для таких многообразий к случаю, когда группа G имеет ранг 2.

9.2. **Случай $\mathfrak{g}$ типов B_2, G_2.** Следующее предложение является основным для вычисления групп Вейля в указанных случаях. Кроме того, оно играет большую роль и в случаях $\mathfrak{g} = B_l, C_l, l > 2, F_4$.

Предложение 9.2.1. *Пусть G – связная редуктивная группа, $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_0$ – обозримые подалгебры в $\mathfrak{g}$ одной размерности, причем $\mathfrak{h}_0$ лежит в замыкании орбиты подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g}, \dim \mathfrak{h})$. Тогда $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0) = \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0) \subset W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.*

Доказательство. В два шага.

Шаг 1. Докажем, что $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0), c(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=c(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0)$. Заметим, что для любого старшего веса λ имеет место неравенство

$$\dim V(\lambda)^{\mathfrak{h}}\leqslant \dim V(\lambda)^{\mathfrak{h}_0}.$$

Это следует из теоремы о полунеприрывности слоев морфизмов алгебраических многообразий, примененной к морфизму $\rho: X_1\to X_2$, где X_2 – замыкание $\overline{G\mathfrak{h}}$ в соответствующем грассманиане, X_1 – замыкание подмножества $\{(\mathfrak{g}_0,v)\in X_2\times V(\lambda)|\mathfrak{g}_0\sim_G\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_v=\mathfrak{g}_0\}$, а ρ – ограничение проекции на первый множитель.

Пусть H,H_0 – связные подгруппы в G, соответствующие подалгебрам $\mathfrak{h},\mathfrak{h}_0$. Отметим, что множества $\mathbb{C}(G/H)^{(B)},\mathbb{C}(G/H_0)^{(B)}$ состоят в точности из частных регулярных полуинвариантных функций (ср. с доказательством теоремы 3.3 из [ВП]). Принимая во внимание двойственность Фробениуса видим, что $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\subset\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0)$. Из результатов работы [Kn1] (Sätze 7.1, 8.1, Korollar 8.2) следует, что

$$\begin{aligned}\dim T^*(G/H)&=2c(\mathfrak{g},\mathfrak{h})+2\dim\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})+\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))\\ \dim T^*(G/H_0)&=2c(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0)+2\dim\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0)+\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0)).\end{aligned}\tag{9.1}$$

Отметим, что $c(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\leqslant c(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0)$. Действительно, $c(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\min_{g\in G}\dim\mathfrak{g}/(\mathfrak{h}+\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{b})$, а последнее число не уменьшается при переходе к пределу. Из равенств (9.1) следует требуемое.

Шаг 2. Для доказательства предложения достаточно построить G-многообразие Y, для которого с.п.о.п совпадает с $\mathfrak{h}$, а стабильная подалгебра некоторой точки с $\mathfrak{h}_0$. Это следует из пункта 2 предложения 2.3.1. Выберем последовательность $g_n, n\in\mathbb{Z}_{>0}$, элементов из G, для которых $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Ad}(g_i)\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_0$. Для старшего веса λ мы полагаем $U_\lambda=\lim_{n\to\infty}V(\lambda)^{\mathrm{Ad}(g_i)\mathfrak{h}}$ (предел берется в соответствующем грассманиане). По соображениям неприрывности, $U_\lambda\subset V(\lambda)^{\mathfrak{h}_0}$.

Согласно основной теореме из [Ti1] найдется старший вес λ_1, для которого $\dim V(\lambda_1)^{\mathfrak{h}}$ $>\dim V(\lambda_1)^{\widetilde{\mathfrak{h}}}$ для любой подалгебры $\widetilde{\mathfrak{h}}\subset\mathfrak{g}$ с $c(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}})>c(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0)$. Выберем старшие веса $\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ так чтобы $V(\lambda_i)^{\mathfrak{h}}\neq\{0\}, i=\overline{2,k}$, а веса $\lambda_1^*,\ldots,\lambda_k^*$ порождали $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Положим $d=\dim V(\lambda_1)^{\mathfrak{h}}$, $V=V(\lambda_1)^{\oplus d}\oplus V(\lambda_2)\oplus\ldots\oplus V(\lambda_k)$, $Y=\overline{GV^{\mathfrak{h}}}$. Отметим, что из определения пространств U_{λ_i} следует, что $U:=U_{\lambda_1}^{\oplus d}\oplus U_{\lambda_2}\oplus\ldots\oplus U_{\lambda_k}\subset Y$ (базис в U_{λ_i} является пределом базисов в $V(\lambda_i)^{\mathrm{Ad}(g_j)\mathfrak{h}}$). Остается проверить, что стабильная подалгебра общего вектора из $V^{\mathfrak{h}}$ (соотв., из U) совпадает с $\mathfrak{h}$ (соотв. с $\mathfrak{h}_0$). Выберем вектор v в $V^{\mathfrak{h}}$ так, чтобы его проекции на d слагаемых $V(\lambda_1)^{\mathfrak{h}}$ были линейно независимыми, а на слагаемые $V(\lambda_i)^{\mathfrak{h}}, i>1$, ненулевыми. Аналогичным образом выберем элемент $u\in U$.

Очевидно, что $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}_v,\mathfrak{h}_0\subset\mathfrak{g}_u$ и что $\mathfrak{g}_v$ анулиует подпространство $V(\lambda_1)^{\mathfrak{h}}\subset V(\lambda_1)$, а $\mathfrak{g}_u$ – подпространство U_{λ_1}. Отсюда $\dim V(\lambda_1)^{\mathfrak{g}_v},\dim V(\lambda_1)^{\mathfrak{g}_u}\geqslant d$. Из выбора веса λ_1 следует, что $c(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_v),c(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_u)\leqslant c(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=c(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0)$. Значит, $c(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_v)=c(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_u)=c(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

Далее, поскольку веса $\lambda_1^*,\ldots,\lambda_k^*$ порождают $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, то $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_v),\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_u)\supset\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0)$ (ср. с доказательством включения $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\subset\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0)$ на шаге 1). Применив равенства (9.1) к $\mathfrak{g}_u,\mathfrak{g}_v$ вместо $\mathfrak{h},\mathfrak{h}_0$, делаем вывод, что $\dim\mathfrak{g}_u,\dim\mathfrak{g}_v\leqslant\dim\mathfrak{h}=\dim\mathfrak{h}_0$. Отсюда $\mathfrak{g}_v=\mathfrak{h},\mathfrak{g}_u=\mathfrak{h}_0$. □

Ниже в этом пункте $G=\mathrm{SO}_5,G_2$, через H обозначена подгруппа в G, для которой $\mathrm{rk}_G(G/H)=2$, и $\mathfrak{h}$ не содержит унипотеного радикала параболической.

Предложение 9.2.2. *Пусть $G=\mathrm{SO}_5$, а подгруппа H такова, как выше. Тогда следующие условия эквивалентны*

(1) $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\neq W(\mathfrak{g})$.
(2) $\mathfrak{h}$ *сопряжена с подалгебрами* $\mathfrak{sl}_2,\mathfrak{gl}_2$.

В этом случае группа $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ состоит из отражений, соотвествующих коротким корням.

Доказательство. Для редуктивных подалгебр $\mathfrak{h}$ группы $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ уже были посчитаны. Отсюда следует импликация (2)⇒(1). Предположим теперь, что $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \neq W(\mathfrak{g})$.

Положим $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{b}^- + \mathfrak{g}^{\varepsilon_1}, \mathfrak{q}_2 = \mathfrak{b}^- + \mathfrak{g}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$.

Используя следствие 5.4.5, мы сводим дело к случаю, когда подалгебра Леви в $\mathfrak{h}$ полупроста. Такая подалгебра $\mathfrak{h}$ обязательно обозрима.

Рассмотрим сначала случай, когда группа H унипотентна. Имеет место неравенство $\dim\mathfrak{h} \leqslant 4$. Поскольку подалгебра $\mathfrak{h}$ не совпадает с унипотентным радикалом параболической подалгебры, то $\dim\mathfrak{h} \leqslant 3$, а если $\dim\mathfrak{h} = 3$, то подалгебра $\mathfrak{h}$ сопряжена с $\widetilde{\mathfrak{h}} := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e^{-\varepsilon_1-\varepsilon_2}, e^{-\varepsilon_1}, e^{\varepsilon_2-\varepsilon_1} + e^{-\varepsilon_2})$. Замыкание орбиты $G\mathfrak{h}$ в $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g},3)$ содержит $G\,\mathrm{R}_u(\mathfrak{q}_i), i = 1,2$. Применяя следствие 5.4.6 и предложение 9.2.1, видим, что $s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2} \in W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

Рассмотрим случай $\dim\mathfrak{h} = 2$. Согласно предложению 9.2.1, можем считать, что орбита $G\mathfrak{h}$ замкнута, иными словами, что $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ – параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}$. Отсюда несложно вывести, что $\mathfrak{h} \sim_G \mathfrak{h}_0 := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e^{-\varepsilon_1-\varepsilon_2}, e^{-\varepsilon_1})$. Но $\mathfrak{h}_0$ сопряжена подалгебре в $\widetilde{\mathfrak{h}}$, откуда, по следствию 2.3.2, $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = W(\mathfrak{g})$.

Осталось рассмотреть случай, когда $\mathfrak{h}/\,\mathrm{R}_u(\mathfrak{h}) \cong \mathfrak{sl}_2$. Полупростота $\mathfrak{h}$ следует из требования $\mathrm{rk}_G(G/H) = 2$. □

Предложение 9.2.3. *Пусть $G = G_2$, а H удовлетворяет вышеуказанным условиям. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \neq W(\mathfrak{g})$.
(2) $\mathfrak{h}$ *сопряжена одной из подалгебр* $\mathfrak{h}_1 := \mathfrak{g}^{(\alpha_2)} \oplus \mathfrak{g}^{-3\alpha_1-\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}^{-3\alpha_1-2\alpha_2}$, $\mathfrak{h}_2 := \mathfrak{h}_1 + \mathbb{C}\alpha_1^\vee$, $\mathfrak{h}_3 := \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{g}^{-2\alpha_1-\alpha_2}$.

Для $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ группа Вейля $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ порождается отражениями, соответствущими коротким корням, а для $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_3$ – отражением $s_{\alpha_1+\alpha_2}$.

Доказательство. Опять же, полагаем $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{b}^- + \mathfrak{g}^{\varepsilon_1}, \mathfrak{q}_2 = \mathfrak{b}^- + \mathfrak{g}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$.

Подалгебра $\mathfrak{h}_1$ совпадает со с.п.о.п. для действия $G : G *_{A_2} \mathbb{C}^3$, и утверждение о $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1)$ следует из теоремы 7.1.2. В силу следствия 5.4.5, $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_2) = W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1)$. Положим теперь $\widetilde{\mathfrak{h}}_3 := \mathfrak{h}_3 + \mathbb{C}\alpha_1^\vee$. Видно, что $\widetilde{\mathfrak{h}}_3 \subset \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}_3)$. Подалгебра $\widetilde{\mathfrak{h}}_3$ правильно вложена в $\mathfrak{q}_2$. С помощью результатов пункта 2.6 мы вычисляем пространство $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}}_3)$, оно равно $\mathbb{C}(\alpha_1+\alpha_2)$. Поскольку $\widetilde{\mathfrak{h}}_3$ не содержит максимальной унипотентной подалгебры, $W(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}}_3) \neq \{1\}$. Требуемое равенство для $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_3)$ мы получаем из следствия 5.4.5.

Докажем, что сопряжен $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}] \sim_G \mathfrak{g}^{(\alpha_2)}$, где $\mathfrak{s}$ – подалгебра Леви $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{h}$. При этом, аналогично доказательству предложения 9.2.1, можем считать, что подалгебра $\mathfrak{s}$ полупроста. Покажем сначала, что из $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}] \not\sim_G \mathfrak{g}^{(\alpha_2)}$ следует $\mathfrak{s} = \{0\}$.

Действительно, $\mathfrak{s} \neq A_2$, поскольку $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \mathfrak{t}$. Значит, если $\mathfrak{s} \neq 0$, то $\mathfrak{s}$ соедржит идеал $\mathfrak{g}^{(\alpha_1)}$. В этом случае несложная проверка показывает, что $\mathfrak{h}$ сопряжена подалгебре в $\mathfrak{g}^{(\alpha_1)} \oplus \mathfrak{g}^{(3\alpha_1+2\alpha_2)}$. Для последней подалгебры соответствующая группа Вейля совпадает с $W(\mathfrak{g})$. Таким образом, $\mathfrak{s} = \{0\}$, иными словами, подалгебра $\mathfrak{h}$ унипотентна.

Имеет место неравенство $\dim\mathfrak{h} \leqslant 5$. Если $\dim\mathfrak{h} = 5$, то, поскольку $\mathfrak{h} \not\sim_G \mathrm{R}_u(\mathfrak{q}_1), \mathrm{R}_u(\mathfrak{q}_2)$, имеем $\mathfrak{h} \sim_G \widetilde{\mathfrak{h}} := [\mathfrak{b}^-,\mathfrak{b}^-] + \mathbb{C}(e^{-\alpha_1} + e^{-\alpha_2})$. Значит, замыкание орбиты $G\mathfrak{h}$ в $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g},5)$ содержит и $G\,\mathrm{R}_u(\mathfrak{q}_1)$, и $G\,\mathrm{R}_u(\mathfrak{q}_2)$. Применяя предложение 9.2.1, мы видим, что $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = W(\mathfrak{g})$.

Пусть теперь $\dim\mathfrak{h} \leqslant 4$. Нормализатор любой унипотентной подалгебры в $\mathfrak{u}^-$ не совпадает с самой подалгеброй, поэтому найдется унипотентная подалгебра размерности

4, содержащая $\mathfrak{h}$. В силу предложения 2.3.1, остается проверить, что $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = W(\mathfrak{g})$ при $\dim\mathfrak{h} = 4$. По предложению 9.2.1, достаточно это сделать в случае, когда G-орбита подалгебры $\mathfrak{h}$ замкнута, иными словами, когда $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ является параболической подалгеброй. В этом случае $\mathfrak{h}$ сопряжена подалгебре $[\mathfrak{b}^-,\mathfrak{b}^-]$, которая содержится в $\widetilde{\mathfrak{h}}$. Из предложения 2.3.1 следует, что $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = W(\mathfrak{g})$.

Таким образом, можем считать, что $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}^{(\alpha_2)}$. Из теоремы 7.1.2 следует, что подалгебра $\mathfrak{h}$ не редуктивна. Можем считать, что подалгебра $\mathfrak{h}$ правильно вложена в $\mathfrak{q}_2$. Список из трех подалгебр получается из требования $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \mathfrak{t}$. $\square$

9.3. **Ограничения на системы корней.** Этот пункт посвящен извлечению из работ [A],[Bri2],[Wa] ограничений на множество $\Pi_{G,G/H}$ сферических корней многообразия G/H для случая $\mathrm{rk}_G(G/H) = \mathrm{rk}\,G$.

Отметим, что отражения относительно элементов из $\Pi_{G,X}$ порождают группу $W_{G,X}$. Как было отмечено в начале пункта 2.3, $W_{G,X}$ является подфактором в $W(\mathfrak{g})$. Таким образом, если $\mathfrak{a}_{G,X} = \mathfrak{t}$, то любой элемент из $\Pi_{G,X}$ пропорционален единственному положительному корню из $\Delta(\mathfrak{g})$. Множество таких положительных корней мы обозначим через $\widehat{\Pi}_{G,X}$. Отметим, что множество $\widehat{\Pi}_{G,G/H}$ зависит лишь от пары $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, поэтому в дальнейшем мы пишем $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ вместо $\widehat{\Pi}_{G,G/H}$.

Следующее предложение является основным результатом пункта.

Предложение 9.3.1. *Пусть G – простая группа, отличная от G_2, а H – алгебраическая подгруппа в G.*

(1) *Элемент из $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ является одним из приведенных в таблице 9.1.*
(2) *Для любых двух различных элементов $\beta_1,\beta_2 \in \widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ тройка (Σ,β_1,β_2), где Σ – объединение носителей лучей, содержащих эти элементы, является одной из приведенных в таблице 9.2.*

Напомним, что под носителем некоторого элемента $\beta \in \mathfrak{t}$ называется наименьшее подмножество $\Sigma \subset \Pi(\mathfrak{g})$, для которого $\beta \in \mathrm{Span}_\mathbb{R}(\Sigma)$. Под носителем луча мы понимаем носитель любого из его ненулевых элементов.

В первом столбце таблицы 9.1 приведена алгебра $\mathfrak{g}$. Элементы, которые могут содержаться в $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ приведены во втором столбце.

Таблица 9.1: Элементы из $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$

$\mathfrak{g}$	элементы
$\mathfrak{sl}_n, n \geqslant 2$	$\{\varepsilon_i-\varepsilon_j, i<j\}$
$\mathfrak{so}_{2n+1}, n>1$	$\{\varepsilon_i-\varepsilon_j, \varepsilon_k, i<j\}$
$\mathfrak{sp}_{2n}, n>2$	$\{\varepsilon_i-\varepsilon_j, \varepsilon_k+\varepsilon_{k+1}, 2\varepsilon_n, i<j, k<n\}$
$\mathfrak{so}_{2n}, n>3$	$\{\varepsilon_i-\varepsilon_j, \varepsilon_k+\varepsilon_n, i<j, k<n\}$
E_6	$\{\varepsilon_i-\varepsilon_j, i<j\} \cup \{\alpha_6+\sum_{i=k}^l \alpha_i, k=3$ или $l=3\}$
E_7	$\{\varepsilon_i-\varepsilon_j, i<j\} \cup \{\alpha_7+\sum_{i=k}^l \alpha_i, k=4$ или $l=4\}$
E_8	$\{\varepsilon_i-\varepsilon_j, i<j\} \cup \{\alpha_8+\sum_{i=k}^l \alpha_i, k=5$ или $l=5\}$
F_4	$\{\varepsilon_i\} \cup \{\varepsilon_i-\varepsilon_j, 2\leqslant i<j\leqslant 4\} \cup \{\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2\pm(\varepsilon_3+\varepsilon_4))\}$ $\cup\{(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2\}$

В таблице 9.2 во втором столбце приведен тип системы корней, соответствующей подмножеству $\Sigma \subset \Pi_G$. В третьем и четвертом столбце указаны корни β_1,β_2, представленные в виде линейной комбинации простых корней из Σ. Пары элементов, для которых носитель Σ не связен легко восстанавливаются из таблицы 9.1. Поэтому мы останавливаемся на случае связного носителя. Если тройки отличаются друг от друга на диаграммный автоморфизм системы Σ, то мы приводим только одну из них. Простые корни занумерованы в обычном порядке (раздел 12).

Таблица 9.2: Пары элементов из $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ со связным Σ

N	Σ	β_1	β_2
1	A_n	$\sum_{i=1}^{l}\alpha_i$	$\sum_{i=l+1}^{n}\alpha_i$
2	A_3	$\alpha_1+\alpha_2$	$\alpha_2+\alpha_3$
4	B_2	α_1	α_2
5	$B_n, n>2$	$\sum_{i=1}^{l}\alpha_i$	$\sum_{i=l+1}^{n}\alpha_i$
6	B_2	$\alpha_1+\alpha_2$	α_2
7	B_3	$\alpha_1+\alpha_2$	$\alpha_2+\alpha_3$
8	$C_n, n\geqslant 3$	$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i, k<n$	$\alpha_{k+1}+\alpha_n+2\sum_{i=k+2}^{n-1}\alpha_i$
9	$C_n, n\geqslant 3$	α_1	$\alpha_1+\alpha_n+2\sum_{i=2}^{n-1}\alpha_i$
10	$C_n, n\geqslant 3$	$\alpha_1+\alpha_2$	$\alpha_2+\alpha_n+2\sum_{i=3}^{n-1}\alpha_i$
11	$D_n, n\geqslant 4$	$\alpha_n+\sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i$	$\alpha_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i$
12	F_4	$\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$	$\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$
13	F_4	α_1	$\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$
14	F_4	$\alpha_1+\alpha_2$	$\alpha_3+\alpha_4$

Доказательство предложения 9.3.1. Следствие 2.3.8 позволяет считать, что однородное пространство G/H является сферическим. Применяя следствие 5.4.5, мы видим, что множество прямых, содержащих элементы из $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ совпадает с множеством прямых, содержащих элементы из $\Pi_{G,G/N_G(\mathfrak{h})^\circ}$. Последнее, в силу следствия следствия 2.3.2, совпадает с множеством прямых, содержащих элементы из $\Pi_{G,G/\widetilde{H}}$, где $\widetilde{H}$ – подгруппа в G с $\widetilde{H}^\circ=N_G(\mathfrak{h})^\circ$, совпадающая со своим нормализатором. Однородное пространство $G/\widetilde{H}$ допускает замечательное вложение (предложение 2.8.2). Принимая во внимание предложение 2.8.3, видим, что утверждение пункта 1 извлекается, например, из [Wa], Table 1. Для доказательства утверждения пункта 2 надо заметить, что корень из $\Delta(\mathfrak{g})$, носитель которого содержится в Σ, является корнем и в системе, соответствующей Σ. После этого остается воспользоваться результатами из [Wa], Tables A-F. □

9.4. **Случай $\mathfrak{g}$ типов A,D,E.**

Предложение 9.4.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли типа A или D, а H – подгруппа в G с $\operatorname{rk}_G(G/H)=\operatorname{rk}G$. В этом случае $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=W(\mathfrak{g})\cap Z_G(\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})})/T$.*

Доказательство. Введем некоторые обозначения. Пусть I – некоторое конечное множество. Обозначим через V векторное пространство с базисом $\varepsilon_i, i\in I$. Через A_I (соотв. D_I) мы обозначим линейную группу, которая действует на V, как группа Вейля типа $A_{\#I}$ (соотв. $D_{\#I}$).

Случай $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{sl}_n$. Группа $W(\mathfrak{g})$ есть ни что иное, как группа подстановок $\mathfrak{S}_n$ на множестве из n элементов. Отражение есть транспозиция. Таким образом, группа $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ – это $\prod_{j=1}^{k}A_{I_j}$ для некоторого однозначно определенного разбиения $I_1,\ldots,I_k$ множества $\{1,\ldots,k\}$. Пространство $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$ порождено векторами $\sum_{i\in I_j}\varepsilon_i-\frac{\#I_j}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$. Отсюда легко следует требуемое.

Случай $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{so}_{2n}$. Отражениями в группе D_n являются транспозиции и композиции транспозии с заменой знака у двух переставляемых элементов. Пусть I – множество всех индексов i, для которых $\varepsilon_i\in\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\perp}$, $J=\{1,\ldots,n\}\setminus I$. Поскольку группа $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ порождена отражениями, то $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\Gamma_1\times\Gamma_2$, где $\Gamma_1\subset D_I,\Gamma_2\subset D_J$, $\Gamma_1=D_{I_1}\times\ldots D_{I_l}$ для некоторого разбиения $I_1,\ldots,I_l$ множества I, а $\Gamma_2=\{w\in D_J, w\xi=\xi$ для всех $\xi\in\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}\}$. Остается доказать, что $l=1$. Действительно, в противном случае $\varepsilon_{i_1}+\varepsilon_{i_2},\varepsilon_{i_3}+\varepsilon_{i_4}\in\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ для попарно различных $i_1,\ldots,i_4$. Это противоречит пункту 2 предложения 9.3.1. □

Остается рассмотреть случай $\mathfrak{g}=E_l, l=6,7,8$.

Лемма 9.4.2. *Пусть* $\Sigma\subset\Pi(\mathfrak{g})$. *Тогда* $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cap\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\Sigma)$ *имеет вид* $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g}^{(\Sigma)},\mathfrak{h}_0)$ *для некоторой подалгебры* $\mathfrak{h}_0\subset\mathfrak{g}^{(\Sigma)}$ *с* $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}^{(\Sigma)},\mathfrak{h}_0)=\mathfrak{t}\cap\mathfrak{g}^{(\Sigma)}$. *Кроме того, ортогональное дополнение к* $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cap\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\Sigma)$ *в* $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\Sigma)$ *совпадает с ортогональной проекцией* $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$.

Доказательство. Пусть M – стандартная подгруппа Леви, соответствующая Σ. Согласно предложению 5.4.2, $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=W_{M,Z_0}$ для некоторого M-многообразия Z с $\mathfrak{a}_{M,Z}=\mathfrak{t}$. Из предложения 5.4.8 следует, что $W_{M,Z_0}=W_{G^{(\Sigma)},Z_0}$. Для завершения доказательства первого утверждения остается применить пункт 4 предложения 2.3.1. Второе утверждение тривиально. □

Предложение 9.4.3. *Пусть* $\mathfrak{g}=E_l$, *и* H *– подгруппа в* G, *для которой* $\mathrm{rk}_G(G/H)=\mathrm{rk}\,G$. *Тогда верны следующие утверждения.*

(1) *Если* $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\sum_{i=1}^{l-1}\alpha_i,\alpha_l)$, *то* $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\{\sum_{i=1}^{l-1}\alpha_i,\alpha_l\}$.

(2) *Пусть* $\pi_1,\pi_{l-1}\not\in\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$, $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\not\subset\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\sum_{i=1}^{l-1}\alpha_i,\alpha_l)$. *Тогда* $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cap\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{l-2},\alpha_l))\cup(\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cap\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\alpha_2,\ldots,\alpha_l))$.

Доказательство. Из всех элементов, встречающихся в таблице 9.1, в $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\sum_{i=1}^{l-1}\alpha_i,\alpha_l)$ содержатся лишь $\alpha_l,\sum_{i=1}^{l-1}\alpha_i,\sum_{i=1}^{l}\alpha_i$. Из пункта 2 предложения 9.3.1 следует, что если $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ содержит последний элемент, то других элементов там нет.

В пункте 2 достаточно доказать, что в $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ нет элемента, носитель которого содержал бы и α_1, и α_{l-1}. Из пункта 1 предложения 9.3.1 следует, что такой элемент – это $\sum_{i=1}^{l-1}\alpha_i$ или $\sum_{i=1}^{l}\alpha_i$. Из пункта 2 предложения 9.3.1 следует, что в обоих случаях $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\subset\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\sum_{i=1}^{l-1}\alpha_i,\alpha_l)$. □

Замечание 9.4.4. Отметим, что предложение 9.4.3 и лемма 9.4.2 доставляют алгоритм вычисления $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ для $\mathfrak{g}$ типа E_l. Действительно, в случае, когда $\dim\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}=\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}-1$, то для $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ имеется одна возможность. Далее достаточно предполагать, что $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))$ отлично от пространства, указанного в пункте 1. Если $\pi_i\in\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$, то $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\subset\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$. В противном случае применение пункта 2 сводит дело к вычислению системы $\widehat{\Pi}_{\bullet,\bullet}$ для алгебры меньшего ранга. Для $i=1$ эта подалгебра типа D_{l-1}, для $i=l-1$ – E_{l-1} (D_5 для $l=6$). Предложение 9.3.1 позволяет находить множества $\widehat{\Pi}_{\bullet,\bullet}$ для алгебр типа D.

9.5. **Случай $\mathfrak{g}$ типа $C_l, l>2$.**

Предложение 9.5.1. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *– простая алгебра Ли типа* $B_n,C_n,n>2,F_4$, *а* H *– подгруппа в* G, *для которой* $\mathrm{rk}_G(G/H)=\mathrm{rk}\,G$. *Выберем корни* $\alpha,\beta\in\Delta(\mathfrak{g})$ *следующим образом:* $(\alpha,\beta)=(\varepsilon_{n-1},\varepsilon_n)$ *для* $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_{2n+1}$, $(\alpha,\beta)=(\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n,\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)$ *для* $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}_{2n}$, $(\alpha,\beta)=(\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ *для* $\mathfrak{g}=F_4$. *Предположим, что* $s_\alpha,s_\beta\in W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}),s_{\alpha+\beta}\not\in W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. *Тогда найдется подалгебра* $\mathfrak{s}\subset\mathfrak{g}$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) $\mathfrak{s}\sim_G \mathfrak{g}^{(\alpha+\beta)}$.

(2) *Нетривиальные части $\mathfrak{s}$-модулей $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{s}$, $\mathfrak{h}^{\oplus 2}\oplus(\mathbb{C}^2)^{\oplus 2}$ изоморфны (здесь через $\mathbb{C}^2$ обозначен двумерный неприводимый $\mathfrak{s}$-модуль).*

Доказательство. Для двух $\mathfrak{s}$-модулей V_1,V_2 мы пишем $V_1\sim V_2$, если $V_1/V_1^{\mathfrak{s}}\cong V_2/V_2^{\mathfrak{s}}$. Через Q,M мы обозначим стандартную параболическую подгруппу и стандартную подгруппу Леви, отвечающие простым корням $\beta,\alpha-\beta$. Положим $X_0=G/H$ и через Z_0 обозначим рациональный M-фактор для действия $\mathrm{R}_u(Q):X$. Согласно предложению 5.4.2, группа W_{M,Z_0} порождена отражениями s_α,s_β. По пункту 4 предложения 2.3.1, $W_{M,Z_0}=W(\mathfrak{m},\mathfrak{m}_z)$ для общей точки $z\in Z_0$. Из предложения 9.2.2 выводим, что подалгебра $\mathfrak{m}_z$ редуктивна, и что $\mathfrak{s}:=[\mathfrak{m}_z,\mathfrak{m}_z]\sim_M\mathfrak{m}^{(\alpha+\beta)}$. Напомним, что группа $\mathrm{R}_u(Q)$ действует локально свободно на G/H, поскольку $\mathrm{rk}_G(G/H)=\mathrm{rk}\,G$. Из того, что Z_0 – рациональный фактор для действия $\mathrm{R}_u(Q):X_0$ следует, что $\mathfrak{q}_x\sim_Q\mathfrak{g}^{(\alpha+\beta)}$ для $x\in X_0$ общего положения. Отсюда, в частности, следует, что найдется точка $x\in X_0$, для которой $\mathfrak{s}\subset\mathfrak{g}_x$ и $T_xX\sim\mathfrak{q}/\mathfrak{s}$. Можем считать, что $x=eH$. В этом случае $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\sim\mathfrak{q}/\mathfrak{s}\sim\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})+(\mathbb{C}^2)^{\oplus 2}$. Отметим, что $\mathfrak{g}\sim\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})^{\oplus 2}\oplus(\mathbb{C}^2)^{\oplus 2}\oplus\mathfrak{s}$. Подалгебра $\mathfrak{s}$ обладает требуемыми свойствами. □

Лемма 9.5.2. *Пусть алгебра $\mathfrak{g}$ такова как в предложении 9.5.1, H – подгруппа в G, для которой $\mathrm{rk}_G(G/H)=\mathrm{rk}\,G$. Предположим, что подалгебра $\mathfrak{s}\subset\mathfrak{h}$ удовлетворяет условиям 1,2 предложения 9.5.1. Пусть, далее, Q – параболическая подгруппа, в которую подгруппа H вложена правильно, а M – подгруппа Леви в Q, содержащая подгруппу Леви $H_0\subset H$, для которой $\mathfrak{s}\subset\mathfrak{h}_0$. Тогда найдется простой идеал $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{h}$, содержащий $\mathfrak{s}$, и простой идеал $\mathfrak{m}_1\subset\mathfrak{m}$, содержащий $\mathfrak{h}_1$, для которых $S^{\mathfrak{s}}\rightsquigarrow_{\mathfrak{h}_1}\mathfrak{m}_1/\mathfrak{h}_1\oplus\mathrm{R}_u(\mathfrak{m})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})\oplus(\mathrm{R}_u(\mathfrak{m})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h}))^*$.*

Доказательство. Отметим, что (в обозначениях предыдущего предложения) $\alpha+\beta$ является длинным корнем. Поэтому $\mathfrak{s}$ лежит в некотором простом идеале $\mathfrak{m}_1\subset\mathfrak{m}$ и $i(\mathfrak{s},\mathfrak{m}_1)=1$. Это следует из формулы (7.5). Отсюда, в свою очередь, следует, что $\mathfrak{s}\sim_M\mathfrak{m}^{(\gamma)}$ для некоторого корня $\gamma\in\Delta(\mathfrak{m})$ (см. лемму 7.3.3). Аналогично, $\mathfrak{s}$ лежит в некотором простом идеале $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{h}_0$.

Из условия 2 предыдущего предложения несложно следует, что нетривиальные части $\mathfrak{s}$-модулей $\mathfrak{m}/\mathfrak{h}_0\oplus V\oplus V^*$, где $V:=\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$, и $\mathfrak{h}_1/\mathfrak{s}\oplus(\mathbb{C}^2)^{\oplus 2}$ совпадают. Отсюда следует, см. доказательство леммы 7.3.5, что $l_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{m}/\mathfrak{h}_0\oplus V\oplus V^*)=1-\frac{4}{k_{\mathfrak{h}_1}}$. Отметим также, что $\mathfrak{h}_1$-модуль $\mathfrak{m}/\mathfrak{h}_0\oplus V\oplus V^*$ ортогонален, а его с.п.о.п тривиальна. Такие модули могут быть найдены, используя результаты работы [АВЭ]. Их нетривиальные части совпадают с приведенными в таблице 7.6, что и требовалось. □

Теперь мы готовы доказать предложение, которое позволяет вычислять группы $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ для $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{sp}_{2n}$.

Предложение 9.5.3. *Пусть $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{sp}_{2n},n>2$, а H – подгруппа в G с $\mathrm{rk}_G(G/H)=\mathrm{rk}\,G$ и $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}=\{0\}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\neq W(\mathfrak{g})$.

(2) *Если $\mathfrak{h}$ сопряжена подалгебре правильно вложенной в антистандартную параболическую подалгебру $\mathfrak{q}$, то $\mathfrak{g}^{(\alpha_{n-1},\alpha_n)}\subset\mathfrak{q}$. Если $\mathfrak{m}$ – стандартная подалгебра Леви в $\mathfrak{q}$, и подалгебра Леви $\mathfrak{h}_0\subset\mathfrak{h}$ содержится в $\mathfrak{m}$, то найдется простой идеал $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{h}_0$, содержащийся в идеале $\mathfrak{m}_1\subset\mathfrak{m}$ вида $\mathfrak{g}^{(\alpha_k,\ldots,\alpha_n)},k\leqslant n$, который является подалгеброй $\mathfrak{sp}_{2l}\subset\mathfrak{m}_1\cong\mathfrak{sp}_{2(n-k)}$ и для которого $\mathfrak{h}_1$-модуль $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ изоморфен $(\mathbb{C}^{2l})^{\oplus 4l-2(n-k)}$.*

В этом случае группа $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ порождена отражениями относительно коротких корней.

Доказательство. Отражением в группе $W(\mathfrak{g})$ является либо транспозиция базисных элементов $\varepsilon_i-\varepsilon_j$, либо транспозиция с заменой знака у переставляемых векторов, либо замена знака у одного из векторов ε_i. Поскольку группа $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ порождается оражениями и не имеет ненулевых неподвижных векторов, то найдется разбиение $I_1,\ldots,I_k$ множества $\{1,2,\ldots,n\}$, для которого $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\prod_{i=1}^k\Gamma_i$, где $\Gamma_j=D_{I_j}$ или C_{I_j}. Из пункта 2 предложения 9.3.1 следует, что $\widehat{\Pi}_{G,G/H}$ не содержит двух перпендикулярных элементов, каждый из которых имеет вид $\varepsilon_i+\varepsilon_j$ или $2\varepsilon_i$. Отсюда следует, что $k=1$. Импликация (2)$\Rightarrow$(1) следует из следствия 5.4.3, примененного к $\mathfrak{q}$, и вычисления групп Вейля аффинных однородных векторных расслоений. Пусть теперь $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\neq W(\mathfrak{g})$, т.е., как было показано выше, $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=D_n$. Мы находимся в условиях применимости предложения 9.5.1. Из него следует, во-первых, что $\mathfrak{h}_0$ содержит подалгебру, сопряженную с $\mathfrak{g}^{(\alpha_n)}$. Поскольку α_n – длинный корень, то любая подалгебра в $\mathfrak{m}$, сопряженная с $\mathfrak{g}^{(\alpha_n)}$, содержится в идеале $\mathfrak{m}_1=\mathfrak{g}^{(\alpha_k,\ldots,\alpha_n)}$. Импликация (1)$\Rightarrow$(2) следует теперь из леммы 9.5.2 и пункта 1 предложения 7.3.1. □

9.6. **Случай $\mathfrak{g}$ типа $B_l, l>2$.** В этом пункте $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_{2n+1}, n\geqslant 3$, а H – подгруппа в G, для которой $\operatorname{rk}_G(G/H)=\operatorname{rk}G$ и $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}=\{0\}$.

Лемма 9.6.1. *Если $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\neq W(\mathfrak{g})$, то $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=B_I\times B_J$, где I – одно из следующих множеств, и $J=\{1,\ldots,n\}\setminus I$:*

(1) $I=\{n,n-2,\ldots,n-2k\}, 0\leqslant k<\frac{n-1}{2}$.
(2) $I=\{n-1,\ldots,n-2k+1\}, 0<k<\frac{n}{2}$.

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 9.5.3, найдется разбиение $I_1,\ldots,I_l$ множества $\{1,2\ldots,n\}$, для которого $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\prod_{j=1}^l\Gamma_j$, где $\Gamma_j=B_{I_j}$ или D_{I_j}. Поскольку элемент вида $\varepsilon_{i_1}+\varepsilon_{i_2}$ не может содержаться в $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ (пункт 1 предложения 9.3.1), то $\Gamma_j=B_{I_j}$. Покажем, далее, что $l=2$. Действительно, в противном случае пара $\varepsilon_i,\varepsilon_n$ для $i<n$ содержится в $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, что невозможно по пункту 2 предложения 9.3.1. Отсюда следует, что $l=2$, причем множество I_1 содержит n, а множество I_2 – $n-1$. Пусть $i_1,\ldots,i_p$, соотв. $j_1,\ldots,j_q$, – элементы множества I_1, соотв. I_2, выписанные в порядке возрастания. Тогда $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\{\varepsilon_{i_r}-\varepsilon_{i_{r+1}},\varepsilon_{j_s}-\varepsilon_{j_{s+1}},\varepsilon_{n-1},\varepsilon_n\}$. Согласно пункту 2 предложения 9.3.1 не существует индексов r,s, для которых $i_r<j_s,j_{s+1}<i_{r+1}$ или $i_r>j_s,j_{s+1}>i_{r+1}$. Отсюда несложно выводится требуемое утверждение. □

Лемма 9.6.2. *Предположим, что $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли типа B_l,F_4, а группа $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ является максимальной собственной подгруппой в $W(\mathfrak{g})$, порожденной отражениями (для случая B_l это уже было проверено в лемме 9.6.1). Пусть $\mathfrak{q},\mathfrak{m},\mathfrak{h}_1,\mathfrak{m}_1$ таковы, как в лемме 9.5.2. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *Идеалы $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{h}$, $\mathfrak{m}_1\subset\mathfrak{m}$ определены однозначно.*
(2) *Обозначим через $\underline{\mathfrak{h}}$ подалгебру в $\mathfrak{h}$ порожденную $\mathfrak{h}_1$ и $[\mathfrak{h}_1,\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})]$. Имеет место равенство $W(\mathfrak{g},\underline{\mathfrak{h}})=W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.*

Доказательство. Из пункта 1 предложения 7.3.1 следует, что если различные пары $(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{h}_1),(\mathfrak{m}_2,\mathfrak{h}_2)$ удовлетворяют условиям леммы 9.5.2, то $\mathfrak{m}_1\neq\mathfrak{m}_2$. Отметим, что $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\subset W(\mathfrak{g},\underline{\mathfrak{h}})$, по следствию 2.3.2. Подалгебра $\underline{\mathfrak{h}}$ правильно вложена в $\mathfrak{q}$. Применяя следствие 5.4.3 к $\mathfrak{q}$ мы видим, что $W(\mathfrak{m}_2)\not\subset W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, $W(\mathfrak{m}_2)\subset W(\mathfrak{g},\underline{\mathfrak{h}})$. Это доказывает утверждение пункта 1. Аналогично, $W(\mathfrak{m}_1)\not\subset W(\mathfrak{g},\underline{\mathfrak{h}})$, поскольку $\mathfrak{h}_1$-модули

$\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h}), \mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\underline{\mathfrak{h}})$ отличаются на тривиальную часть. Отсюда следует утверждение пункта 2. □

Для индексов i_1, i_2 мы будем писать $i_1 \sim i_2$ если i_1, i_2 оба лежат в одном из множеств I, J.

Лемма 9.6.3. *Пусть подалгебра $\mathfrak{h}$ правильно вложена в антистандартную параболическую подалгебру $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$, а подалгебра Леви $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}$ содержится в стандартной подалгебре Леви $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$. Тогда*

(1) $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{g}^{(\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_l)}$, *где $n-2 \leqslant l \leqslant n$. В этом случае $i \sim j$ для $i,j \leqslant k$, а для $i,j \in \{k+1,k+2,\ldots,\min(l+1,n)\}$ условия $s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \in W(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{h}_1,\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h}))$ и $i \sim j$ эквивалентны.*

(2) *Пусть $m \in \{k+1,k+2,\ldots,\min(l+1,n)\}$ – индекс, для которого $m \sim m+1$. Тогда $1 \sim m$, и, с учетом пункта 1, это определяет множества I, J однозначно.*

Доказательство. Отметим, что группа $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ максимальна среди всех собственных подгрупп в $W(\mathfrak{g})$, порожденных отражениями. Это следует из леммы 9.6.1.

Пусть $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{g}^{(\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_l)}$. Подалгебра $\underline{\mathfrak{h}}$ правильно вкладывается в антистандартную параболическую подалгебру в $\underline{\mathfrak{q}} \subset \mathfrak{g}$, соответствующую простым корням $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}$, $\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_l,\alpha_{l+2},\ldots,\alpha_n$. Это следует из того, что $[\mathfrak{h}_1,\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})] \subset \mathrm{R}_u(\underline{\mathfrak{q}})$. Теперь оба пункта следуют из следствия 5.4.3, примененного к $\underline{\mathfrak{q}}$, и вида группы $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, указанного в лемме 9.6.1. □

Итак, при вычислении группы $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ мы можем предположить, что алгебра Леви $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$ проста, а подпространство $[\mathfrak{h}_1,\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})]$ порождает $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$. Пусть $\mathfrak{q}$ – антистандартная параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}$, отвечающая множеству $\Pi(\mathfrak{g}) \setminus \{\alpha_k,\alpha_{l+1}\}$, в которую правильно вложена подалгебра $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{m}$ – стандартная подалгебра Леви в $\mathfrak{q}$, и $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{g}^{(\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_l)}$. Мы можем дополнительно предположить, что $\mathfrak{h}_1$ не содержится ни в какой собственной подалгебре Леви идеала $\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{m}$. Как было показано в лемме 9.6.3, $l = n-2, n-1, n$.

Мы будем также предполагать в дальнейшем, что группа $W(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{h}_1,\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h}))$ не содержит элементов вида $s_{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}$. В противном случае группа $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ восстанавливается по лемме 9.6.3.

Предложение 9.6.4. *Пусть $\mathfrak{h},\mathfrak{h}_1,\mathfrak{q},\mathfrak{m},\mathfrak{m}_1$ удовлетворяют приведенному обсуждению. Неравенство $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \neq W(\mathfrak{g})$ имеет место в точности тогда, когда алгебра $\mathfrak{h}$ сопряжена одной из подалгебр из следующего списка:*

1) $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{g}^{(\alpha_{n-2},\alpha_{n-1},\alpha_n)} \cong \mathfrak{so}_7, \mathfrak{h}_1 = G_2$, а подалгебра $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ натянута на векторы e_α с $\alpha = -\varepsilon_i, i = \overline{1,n}, \pm\varepsilon_j - \varepsilon_i, j = n-2,n-1,n, i \leqslant n-4, -\varepsilon_i-\varepsilon_j, i,j \leqslant n-4$. В этом случае $I = \{n-1\}$.

2) $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{g}^{(\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_{n-1})}, \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{m}_1$. Подалгебра $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ натянута на векторы e_α с $\alpha = -\varepsilon_i-\varepsilon_j, 1 \leqslant i < j \leqslant k, -\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, i \leqslant k < j$. В этом случае $I = \{k+2,k+4,\ldots,k+2i,\ldots\}$.

3) $\mathfrak{h}$ состоит из блочных матриц следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{51} & x_{52} & \iota(x_{32}) & 0 & x'_{33} & 0 & 0 \\ x_{61} & 0 & x'_{52} & 0 & x'_{32} & 0 & 0 \\ x_{71} & x'_{61} & x'_{51} & 0 & x'_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

Размеры блоков (слева направо и сверху вниз): $k-1,1,3,1,3,1,k-1$. Через ι обозначен некоторый изоморфизм $\mathfrak{sl}_3$-модулей $\mathbb{C}^3$ и $\bigwedge^2\mathbb{C}^{3*}$. Через x'_{ij} обозначена матрица $-I_p x_{ij}^T I_q$, где I_p, I_q – матрицы соответствующих размеров с единицами на побочной диагонали и нулями на остальных позициях. Матрица x_{33} лежит $\mathfrak{sl}_3$, а x_{71} – в $\mathfrak{so}_{k-1}$. Здесь $I=\{n-1\}$.

4) $\mathfrak{m}_1=\mathfrak{g}^{(\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_{n-1})}\cong\mathfrak{sl}_r, \mathfrak{h}_1=\mathfrak{sp}_r$ ($r:=n-k$ четное число), подалгебра $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ натянута на $e_{\pm\varepsilon_i-\varepsilon_j}, i=\overline{k+1,k+r}, j=\overline{1,k}$, $e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j}, 1\leqslant i<j\leqslant k$ и нетривиальную часть $\mathfrak{h}_1$-модуля $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j}, k+1\leqslant i<j\leqslant k+r)$. Здесь $I=\{k+2,k+4,\ldots,n\}$.

5) $\mathfrak{h}$ имеет следующий блочный вид

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ x_{31}&x_{32}&x_{33}&0&0&0&0\\ x_{41}&x_{42}&\iota(x_{32})&0&0&0&0\\ x_{51}&x_{52}&x_{53}+x_{42}\omega&\iota(x_{32})'&x'_{33}&0&0\\ x_{61}&0&x'_{52}&x'_{42}&x'_{32}&0&0\\ x_{71}&x'_{61}&x'_{51}&x'_{41}&x'_{31}&0&0 \end{pmatrix} \tag{9.3}$$

Размеры блоков – $k-1,1,r,1,r,1,k-1$. Обозначения x'_{ij} имеют тот же смысл, что и в (9.2). Через ι обозначен изоморфизм между $\mathfrak{sp}_r$-модулями $\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^{*r}$. $x_{71}\in\mathfrak{so}_{k-1}, x_{33}\in\mathfrak{sp}_r$, x_{53} – лежит в нетривиальной части $\mathfrak{sp}_r$-модуля $\bigwedge^2\mathbb{C}^{r*}$, а ω – подходящий ненулевой элемент в $(\bigwedge^2\mathbb{C}^{r*})^{\mathfrak{h}_1}$. В этом случае $I=\{k+1,k+3,\ldots,n-1\}$.

Отметим, что во всех приведенных случаях равенство $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$ проверяется без особого труда с помощью следствия 8.2.3 (ср. с доказательством предложения 9.7.2 ниже).

Доказательство. Учитывая, что $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ является подмодулем в $\mathfrak{h}_1$-модуле $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})$, мы получаем следующий список возможных троек $(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{h}_1,\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/(\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})+\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})^{\mathfrak{h}_1}))$:

(1) $(\mathfrak{sl}_r,\mathfrak{sl}_r,\bigwedge^2\mathbb{C}^{r*}\oplus\mathbb{C}^{r*}), r\geqslant 3$.
(2) $(\mathfrak{sl}_r,\mathfrak{sl}_r,\bigwedge^2\mathbb{C}^{r*}\oplus\mathbb{C}^{r})$, четное $r\geqslant 4$.
(3) $(\mathfrak{sl}_r,\mathfrak{sp}_r,\mathbb{C}^r)$, четное $r\geqslant 2$.
(4) $(\mathfrak{so}_7, G_2, V(\pi_1))$.

Случай тройки $(\mathfrak{sl}_r,\mathfrak{sl}_r,\bigwedge^2\mathbb{C}^{r*}\oplus\mathbb{C}^{r})$. Покажем, что такая тройка встретиться не может. Поскольку $r>3$, то в $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})$ имеется единственный $\mathfrak{m}_1$-подмодуль, изоморфный $\bigwedge^2\mathbb{C}^{r*}$. Он натянут на векторы $e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j}$, $k+1\leqslant i\leqslant k+r$. С другой стороны, любой $\mathfrak{m}_1$-подмодуль в $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})$, изоморфный $\mathbb{C}^{*r}$ содержится в $\mathfrak{h}$. Векторы $[\xi,\eta]$, где ξ,η лежат в $\mathbb{C}^{r*}$-изотипной компоненте $\mathfrak{m}_1$-модуля $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})$, порождают подмодуль в $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})$ изоморфный $\bigwedge^2\mathbb{C}^{r*}$.

Случай тройки $(\mathfrak{so}_7,G_2,V(\pi_1))$. Здесь $\mathfrak{m}_1=\mathfrak{g}^{(\alpha_{n-2},\alpha_{n-1},\alpha_n)}$. Сопрягая подалгебру $\mathfrak{h}$ подходящим элементом из $G^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})}$, мы можем считать, что $\mathfrak{h}$ имеет вид, указанный в 1). В этом случае подалгебра $\mathfrak{h}$ правильно вложена в антистандартную параболическую подалгебру, соответствующую простым корням $\alpha_{n-3},\ldots,\alpha_n$. Применяя следствие 5.4.3 и используя теорему 7.1.2, мы видим, что группа $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cap W(\mathfrak{g}^{(\alpha_{n-3},\ldots,\alpha_n)})$ не содержит отражения $s_{\alpha_{n-3}}$. Отсюда $I=\{n-1\}$.

Случай тройки $(\mathfrak{sl}_r,\mathfrak{sl}_r,\bigwedge^2\mathbb{C}^{r*}\oplus\mathbb{C}^{r*}), r\geqslant 3$. Мы обозначим через V_0 $\mathfrak{m}_1$-подмодуль в $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})$, натянутый на векторы $e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j}$, $k+1\leqslant i\leqslant k+r$. Изотипная компонента типа $\mathbb{C}^{r*}$ в $\mathfrak{m}_1$-модуле $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})$ является прямой суммой подмодулей $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{-\varepsilon_i}, i=\overline{k+1,k+r})$, $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j}, i=\overline{k+1,k+r}), j\leqslant k$, $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{-\varepsilon_i\pm\varepsilon_j}), j>k+r$. Если $k+r=n-1$, то сопрягая алгебру $\mathfrak{h}$ элементом из $G^{(\alpha_n)}$, мы можем считать, что $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\varepsilon_{-i}, i=$

$\overline{k+1,k+r}) \subset \mathfrak{h}$. Отсюда, поскольку $\mathfrak{h}$ – подалгебра в $\mathfrak{g}$, следует, что $V_0 \subset \mathfrak{h}$. Отметим, что если $r > 3$, то V_0 является единственным подмодулем в $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})$, изоморфным $\bigwedge^2 \mathbb{C}^{r*}$. Таким образом, при $r > 3$ имеет место равенство $k+r=n$. Если $k+r=n$ и $V_0 \not\subset \mathfrak{h}$, то $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j}, i = \overline{k+1,k+r})$ является изотипной компонентой типа $\mathbb{C}^{r*}$ в $\mathfrak{h}_1$-модуле $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$. В противном случае коммутаторы элементов из изотипной $\mathbb{C}^{r*}$-комопненты в $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ порождают V_0.

Предположим, что подалгебра $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ такова, как в пункте 2. По доказанному в предыдущем абзаце, это всегда так при $r > 3$. Положим $\widetilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})} + \mathfrak{h} + V_0$. Согласно классификации в [Wa], $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\varepsilon_1,\varepsilon_{k+1})$, а $W(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}}) = B_{\{1,k+1\}}$. Применяя следствие 2.3.2, видим, что $s_{\varepsilon_1-\varepsilon_{k+1}} \subset W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, откуда $I = \{k+2,k+4,\ldots\}$.

Остается рассмотреть случай $r=3$. Можем считать, что подалгебра $\mathfrak{h}$ не сопряжена приведенной в пункте 2. Покажем, что $h := \sum_{i=k+1}^{k+3}\varepsilon_i \notin \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. В противном случае $V_0 \subset \mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$. Подалгебра $\mathfrak{m}_1 + \mathbb{C}h$ действует тривиально на $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})^{\mathfrak{m}_1}$, и как $\mathfrak{gl}_3$ на $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/(\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})+\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})^{\mathfrak{m}_1})$. Применяя предложение 2.6.4 к $\mathfrak{q}$, несложно получить, что ε_{k+2} лежит в ортогональном дополнении к $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}+\mathbb{C}h)$, откуда $\varepsilon_2 \in \mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$.

Таким образом, остается рассмотреть случай $k=n-3, r=3$, и $h \not\subset \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{R}_u(\mathfrak{h}))$. В этом случае, сопрягая $\mathfrak{h}$ элементом из $G^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})}$, мы можем считать, что $\mathfrak{h}$ является подалгеброй из пункта 3. Отметим, что для однопараметрической подгруппы $\tau(t) = diag(t,\ldots,t,1,\ldots,1,t^{-1},\ldots,t^{-1})$ (t встречается k раз) существует предел $\lim_{t\to 0}\tau(t)\,\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ совпадающий с подалгеброй из пункта 2. Применяя предложение 9.2.1, мы видим, что $I=\{n-1\}$.

Случай тройки $(\mathfrak{sl}_r,\mathfrak{sp}_r,\mathbb{C}^r)$*, r – четное число.* Введем некоторые обозначения. Положим $V_{21} := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}, i=\overline{k+1,k+r}, j=\overline{1,k})$, $V_{31} := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{-\varepsilon_j}, e_{-\varepsilon_j\pm\varepsilon_i}, j=\overline{1,k}, i > k+r)$, $V_{41} := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j}, i=\overline{k+1,k+r}, j=\overline{1,k})$, $V_{51} := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j}, 1 \leqslant i < j \leqslant k)$, $V_{32} := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{-\varepsilon_j}, e_{-\varepsilon_j\pm\varepsilon_i}, j=\overline{k+1,k+r}, i > k+r)$, $V_{42} := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j}, k+1 \leqslant i < j \leqslant k+r)$. Далее, через V_{42}^+, V_{42}^0 мы обозначаем нетривиальную и тривиальную, соответственно, части $\mathfrak{h}_1$-модуля V_{42}.

Очевидно, что имеет место разложение в прямую сумму

$$\mathrm{R}_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{q}) = V_{21} \oplus V_{31} \oplus V_{41} \oplus V_{51} \oplus V_{32} \oplus V_{42}. \tag{9.4}$$

Изотипная компонента типа $\mathbb{C}^r$ (соотв., типа $V(\pi_2)$, тривиальная) $\mathfrak{h}_1$-модуля $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})$ совпадает с $V_{21}\oplus V_{41}\oplus V_{32}$ (соотв., V_{42}^+, $V_{31}\oplus V_{51}\oplus V_{42}^0$). Таким образом, $V_{42}^+ \subset \mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$.

Отметим, что

$$\begin{aligned}
&[V'_{32},V'_{32}] = V_{42},\\
&[V'_{31},V'_{31}] = V_{51},\\
&[V_{21},V_{32}] = V_{31},\\
&[V_{21},V_{42}^0] = V_{41}\\
&[V_{21},V_{42}^+] = V_{41}, r > 2,\\
&[V_{21},V_{41}] = V_{51},\\
&[V_{32},V_{31}] = V_{41},\\
&[V_{ij},V_{pq}] = 0 \text{ для оставшихся } (i,j),(p,q).
\end{aligned} \tag{9.5}$$

В (9.5) через V'_{32} обозначен весь модуль V_{32} (для $k+r=n$), либо сумма любых двух неприводимых $\mathfrak{h}_1$- (соотв., $\mathfrak{g}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})}$) подмодулей в V_{32} (соотв., в V_{31}) (для $k+r=n-1$).

Предположим, что $h := \sum_{i=k+1}^{k+r}\varepsilon_k \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. В этом случае $V_{21} \subset \mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ или $V_{32}\oplus V_{41} \subset \mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$. Если $V_{42}^0 \subset \mathfrak{h}$, то нетривиальная часть $\mathfrak{h}_1+\mathbb{C}h$-модуля $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ не содержит тривиальный $\mathfrak{h}_1$-модуль. В этом случае $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}+\mathbb{C}h)\neq\mathfrak{t}$. Это выводится из предложения 2.6.4, примененного к параболической подалгебре $\mathfrak{q}$. Таким образом,

$$\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})\subset V_{21}\oplus V_{31}\oplus V_{41}\oplus V_{51}\oplus V_{32}\oplus V_{42}^{+}. \tag{9.6}$$

Предположим теперь, что выполнено (9.6). По (9.5), $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ проектируется тривиально на V_{32} (относительно разложения (9.4)), откуда $\mathfrak{h}$ является подалгеброй из пункта 4.

Докажем, что для такой подалгебры $\mathfrak{h}$ имеет место эквивалентность $1\sim k+1$. Для этого, в силу предложения 9.2.1 и вычисленного выше, достаточно показать, что $\mathfrak{h}\in\overline{G\mathfrak{h}^1}$, где $\mathfrak{h}^1$ – подалгебра из пункта 2. Возьмем ненулевой элемент $\xi\in V_{42}^0$. Тогда $\lim_{t\to\infty}\exp(t\xi)\mathfrak{h}^1=\mathfrak{h}$.

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда

$$\sum_{i=k+1}^{k+r}\varepsilon_i\notin\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \tag{9.7}$$

и (9.6) не выполняется.

Из условия (9.7) выводится, что коммутаторы элементов из $(V_{21}\oplus V_{32})\cap\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ порождают V_{31}, откуда

$$V_{31}\subset\mathrm{R}_u(\mathfrak{h}). \tag{9.8}$$

Из (9.5) выводится, что

$$V_{51}\oplus V_{41}\oplus V_{42}^{+}\subset\mathrm{R}_u(\mathfrak{h}). \tag{9.9}$$

Далее, если $k+r=n-1$, то нетрудно понять, что

$$V_{42}^0\subset\mathrm{R}_u(\mathfrak{h}). \tag{9.10}$$

Из (9.8)-(9.10) следует, что

$$\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\,\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})\cong\mathbb{C}^r. \tag{9.11}$$

Предположим, что выполнены соотношения (9.9)-(9.11). Отметим, что $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ содержит элемент $h_1:=2\sum_{i=1}^k\varepsilon_i+\sum_{i=k+1}^r\varepsilon_i$. Как и выше, можно проверить, что $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}+\mathbb{C}h_1)\neq\mathfrak{t}$, откуда $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}\neq\{0\}$.

Итак, $k+r=n$, $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ проектируется сюръективно на V_{32},V_{21},V_{42}^{+}, а, следовательно, и на V_{31}. Отсюда и из (9.9) выводится, что сопряжением на элемент из $G^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})}$ подалгебра $\mathfrak{h}$ приводится к виду, указанному в пункте 5.

Рассмотрим однопараметрическую подгруппу

$$\tau(t)=diag(1,\ldots,1,t,\ldots,t,1,t^{-1},\ldots,t^{-1},1,\ldots,1)$$

(t встречается r раз). Обозначим предел $\lim_{t\to0}\tau(t)\mathfrak{h}$ через $\mathfrak{h}^1$. Заметим, что $\mathfrak{h}^1$ правильно вкладывается в антистандартную параболическую подалгебру, соответствующую $\Pi(\mathfrak{g})\setminus\{\alpha_n,\alpha_{n-r-1}\}$. Применяя предложение 5.4.3 к этой подалгебре, и пользуясь теоремой 7.1.2, мы получаем, что $s_{\varepsilon_k-\varepsilon_{k+2}}\in W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^1)$. Согласно предложению 9.2.1, $k\sim k+2$, откуда $I=k+1,k+3,\ldots,n-1$. □

9.7. **Случай $\mathfrak{g}$ типа F_4.** В этом пункте через $\mathfrak{g}=F_4$, а через H обозначена подгруппа в G с $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\mathfrak{t},\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}=\{0\}$.

Сначала мы охарактеризуем возможные множества $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

Лемма 9.7.1. *Предположим, что $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\neq W(\mathfrak{g})$. Тогда $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_4\}$ или $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4\}$.*

Доказательство. Шаг 1. Докажем, что $\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3\notin\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Действительно, согласно таблице 9.2, в противном случае $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\subset\{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\}$, что противоречит условию $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}=\{0\}$.

Шаг 2. Докажем, что ровно один элемент из $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ содержит в своем носителе α_1. От противного, пусть найдутся два таких элемента. Просматривая таблицу 9.2, мы убеждаемся, что эти элементы – $\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_3+\alpha_3$, что невозможно по предыдущему шагу.

Шаг 3. Покажем, что $\alpha_1+\alpha_2\notin\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Предположим противное. Из таблицы 9.2 мы находим, что $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\subset\{\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_3+\alpha_4\}$. По лемме 9.4.2, множество $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cap\operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ имеет вид $\widehat{\Pi}(\widehat{\mathfrak{g}},\widehat{\mathfrak{h}})$, где $\widehat{\mathfrak{g}}=\mathfrak{sp}_6$. Из результатов пункта 9.5 следует, что либо $\alpha_2+\alpha_3$, либо α_3 не лежит в $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Если $\alpha_3\in\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, то $\dim\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=3$, что невозможно. Таким образом, $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\{\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4\}$. Последнее множество, однако, не может иметь вид $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, ибо группа, порожденная отражениями относительно его элементов, содержит $s_{\alpha_3},s_{\alpha_2}$, и, стало быть, совпадает с $W(\mathfrak{g})$.

Шаг 4. Таким образом, $\alpha_1\in\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, а остальные элементы лежат в $\operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. По лемме 9.4.2 и результатам пункта 9.6, возможно два случая: $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_4\}$ или $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4\}$. □

Обе возможные группы $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, отличные от $W(\mathfrak{g})$, являются максимальными среди собственных подгрупп в $W(\mathfrak{g})$, порожденных отражениями. Отсюда следует, что выполняется утверждение леммы 9.6.2. Заменяя подалгебру $\mathfrak{h}$ на $\underline{\mathfrak{h}}$, можем считать, что подалгебра Леви $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{h}$ проста, и что алгебра $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ порождается $[\mathfrak{h}_1,\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})]$. Сопрягая $\mathfrak{h}$, мы можем считать, что $\mathfrak{h}$ правильно вкладывается в антистандартную параболическую подалгебру $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{g}$, так чтобы $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{m}_1$, где $\mathfrak{m}_1$ – единственный простой идеал в стандартной подалгебре Леви $\mathfrak{m}\subset\mathfrak{q}$ (см. лемму 9.5.2). Можем считать, что $\mathfrak{h}_1$ не содержится в собственной подалгебре Леви в $\mathfrak{m}_1$. Если $\alpha_4\in\Delta(\mathfrak{m}_1)$, то выбор между двумя указанными системами корней осуществляется посредством равенства $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cap M_1/T=W(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{h}_1,\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h}))$. Поэтому в дальнейшем мы считаем, что $\alpha_4\notin\Delta(\mathfrak{m}_1)$.

Предложение 9.7.2. *Пусть $\mathfrak{h},\mathfrak{h}_1,\mathfrak{q},\mathfrak{m}_1$ удовлетворяют обсуждению выше. Тогда $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\neq W(\mathfrak{g})$ в точности в следующих случаях:*

1) $\mathfrak{h}_1=\mathfrak{g}^{(\alpha_2,\alpha_3)}$, подалгебра $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ натянута на векторы $e_\alpha,\alpha=-\varepsilon_1-\varepsilon_2,-\varepsilon_i,-\varepsilon_i\pm\varepsilon_j,i=1,2,j=3,4$. В этом случае $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4\}$.

2) $\mathfrak{h}_1=\mathfrak{g}^{(\alpha_3)}$, а нетривиальная часть $\mathfrak{h}_1$-модуля $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ натянута на векторы e_α с $\alpha=-\varepsilon_i\pm\varepsilon_j,i=1,2,j=3,4,(-\varepsilon_1-\varepsilon_2\pm\varepsilon_3\mp\varepsilon_4)/2$ а также на векторы $v_1:=x_1e_{-\varepsilon_3}+y_1e_{(-\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2},v_2:=x_2e_{-\varepsilon_4}+y_2e_{(-\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2}$, где $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ – ненулевые пары чисел, для которых $\operatorname{Span}_{\mathbb{C}}(v_1,v_2)$ является $\mathfrak{h}_1$-подмодуем в $\mathfrak{g}$. Здесь имеется три класса сопряженности подалгебр, соответствующием наборам x_i,y_i с $x_1=x_2=0$, $y_1=y_2=0$, $x_1x_2y_1y_2\neq0$. Для указанных подалгебр $\mathfrak{h}$ имеет место равенство $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_4\}$.

3) $\mathfrak{h}_1=\mathfrak{g}^{(\alpha_3)}$, а нетривиальная часть $\mathfrak{h}_1$-модуля $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ натянута на векторы e_α с $\alpha=-\varepsilon_1\pm\varepsilon_i,-\varepsilon_2-\varepsilon_i,i=3,4,(-\varepsilon_1-\varepsilon_2\pm\varepsilon_3\mp\varepsilon_4)/2$, а также на векторы $v_1:=e_{\varepsilon_4-\varepsilon_2}+x_1e_{-\varepsilon_3}+y_1e_{(-\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2}$, $v_2:=e_{\varepsilon_3-\varepsilon_2}+x_2e_{-\varepsilon_4}+y_2e_{(-\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_4+\varepsilon_3)/2}$, $u_1:=x_1'e_{-\varepsilon_3}+y_1'e_{(-\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2}$, $u_2:=x_2'e_{-\varepsilon_4}+y_2'e_{(-\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_4+\varepsilon_3)/2}$. Здесь $x_i,y_i,x_i',y_i',i=1,2$ – такие числа, что пары (x_1,y_1) и (x_1',y_1') линейно независимы, и $\operatorname{Span}_{\mathbb{C}}(v_1,v_2),\operatorname{Span}_{\mathbb{C}}(u_1,u_2)$ являются $\mathfrak{h}$ подмодулями. В этом случае также имеется три класса сопряженных *подалгебр, соответствующих наборам* x_i, y_i, x_i', y_i' *с* $x_1' = x_2' = 0$, $y_1' = y_2' = 0$, $x_1'x_2'y_1'y_2' \neq 0$. *Во всех случаях* $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4\}$

Доказательство. Из леммы 9.5.2 следует, что $\alpha_3 \in \Delta(\mathfrak{m}_1)$. Таким образом, нам остается рассмотреть следующие случаи:

(1) $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{g}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$.
(2) $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{g}^{(\alpha_2,\alpha_3)}$.
(3) $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{g}^{(\alpha_3)}$.

Отметим далее, что в первых двух случаях группа $W(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{h}_1, \mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})) = W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cap M_1/T$ порождена отражениями относительно всех коротких корней в $\Delta(\mathfrak{m}_1)$. Принимая во внимание теорему 7.1.2 и то, что $\mathfrak{h}_1$ не содержится в собственной подгруппе Леви в $\mathfrak{m}_1$, мы видим, что $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{m}_1$, а нетривиальная часть $\mathfrak{m}_1$-модуля $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ изоморфна прямой сумме r копий тавтологического представления алгебры $\mathfrak{m}_1 \cong \mathfrak{sp}_{2r}$.

В случае $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{g}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ нетривиальная часть $\mathfrak{m}_1$-модуля $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ совпадает с $V(\pi_3)$. Таким образом, этот случай отпадает.

Рассмотрим случай $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{g}^{(\alpha_2,\alpha_3)}$. В этом случае изотипная компонента типа $\mathbb{C}^4$ в $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})$ является прямой суммой двух неприводимых модулей. Отсюда выводится, $\mathfrak{h}$ – это подалгебра, указанная в пункте 1. Центр алгебры $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h})$ одномерен, его прообраз $\widetilde{\mathfrak{h}}$ в $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ натянут на $\mathfrak{h}$ и $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Применяя предложение 2.6.4, несложно получить, что $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{t}$. Воспользовавшись следствием 8.2.3, мы получаем, что $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} = \{0\}$.

Докажем теперь, что $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4\}$. Для этого, в силу теоремы 7.1.2 достаточно показать, что подалгебра $\mathfrak{h}$ лежит в замыкании G-орбиты подалгебры $\mathfrak{g}^{(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)}$. В самом деле, $\mathfrak{h} = \lim_{t\to\infty} \exp(te_{-\varepsilon_1-\varepsilon_2})\mathfrak{g}^{(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)}$.

Остается рассмотреть случай $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{g}^{(\alpha_3)}$. Положим $V_1 := \mathrm{Span}_\mathbb{C}(e_{-\varepsilon_3}, e_{-\varepsilon_4})$, $V_{2i}^{\pm} := \mathrm{Span}_\mathbb{C}(e_{-\varepsilon_i\pm\varepsilon_3}, e_{-\varepsilon_i\pm\varepsilon_4}), i = 1,2$, $V_3^{\pm} := \mathrm{Span}_\mathbb{C}(e_{(-\varepsilon_1\pm\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2}, e_{(-\varepsilon_1\pm\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2})$, $V_{21} := V_{21}^+ \oplus V_{21}^-, V_2^+ := V_{21}^+ \oplus V_{22}^+, V_{22} := V_{22}^+ \oplus V_{22}^-, V_2^- =: V_{21}^- \oplus V_{22}^-, V_2 := V_{21} \oplus V_{22}, V_3 := V_3^+ \oplus V_3^-$. Отметим, что изотипная компонента типа $\mathbb{C}^2$ в $\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})$ совпадает с $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

Нашей ближайшей целью является доказательство включений $e_{-\varepsilon_1-\varepsilon_2}, e_{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2}$, $e_{-\varepsilon_1} \in \mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$.

Имеют место следующие коммутационные соотношения

$$
\begin{aligned}
&[V_1, V_1] = \mathbb{C}e_{-\varepsilon_3-\varepsilon_4},\\
&[V_1, V_{2i}^+] = \mathbb{C}e_{-\varepsilon_i},\\
&[V_1, V_3^{\pm}] = \mathbb{C}e_{(-\varepsilon_1\pm\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2},\\
&[V_{21}^{\pm}, V_{22}^{\mp}] = [V_3^-, V_3^-] = \mathbb{C}e_{-\varepsilon_1-\varepsilon_2},\\
&[V_{22}^+, V_3^+] = \mathbb{C}e_{(-\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2},\\
&[V_{22}^-, V_3^+] = \mathbb{C}e_{(-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2},\\
&[V_3^+, V_3^+] = \mathbb{C}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_1},\\
&[V_3^+, V_3^-] = \mathbb{C}e_{-\varepsilon_1}.
\end{aligned}
\tag{9.12}
$$

Остальные коммутаторы равны 0.

Покажем, что $e_{-\varepsilon_1-\varepsilon_2} \in \mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$. Действительно, коммутатор на V_2 можно рассматривать как кососимметрическую форму. Согласно (9.12) эта форма невырождена. Остается заметить, что пересечение $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ с V_2 имеет размерность 6 и не может быть изотропно.

Покажем, теперь что $e_{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2}\in \mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$. Пересечение $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})\cap(V_1\oplus V_{22}^-\oplus V_3)$ имеет размерность не меньше 6. Из соотношений (9.12) следует, что достаточно рассмотреть случай, когда эта размерность равна 6 и проекция пространства $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})\cap(V_1\oplus V_{22}^-\oplus V_3)$ на каждый из четырех модулей $V_1, V_{22}^-, V_3^\pm$ нетривиальна. Если $V_{22}^-\subset \mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$, то коммутатор V_{22}^- с $\mathfrak{m}_1$-подмодулем, не содержащимся в $V_1\oplus V_{22}^-\oplus V_3^-$ содержит нужный элемент. Поэтому можем считать, что в $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})\cap(V_1\oplus V_{22}^-\oplus V_3^-)$ содержится подмодуль, который нетривиально проектируется на V_1, а в $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})\cap(V_{22}^-\oplus V_3^-)$ – подмодуль, нетривиально проектирующийся на V_3^-. Коммутатор таких подмодулей содержит вектор вида $e_{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2}+xe_{-\varepsilon_1-\varepsilon_2}$, и остается воспользоваться включением $e_{-\varepsilon_1-\varepsilon_2}\in \mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$.

Аналогично (рассматривая модуль $V_1\oplus V_{21}^+\oplus V_3$), убеждаемся, что $e_{-\varepsilon_1}\in \mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$.

Покажем, что $V_2^-\oplus V_{21}^+\oplus V_3^-\subset \mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$. В противном случае проекция $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ на $V_1\oplus V_{22}^+\oplus V_3^+$ совпадает со всем пространством. Заметим, что коммутаторы элементов из $V_1\oplus V_2\oplus V_3$ с элементами из $V_2^-\oplus V_{21}^+\oplus V_3^-\subset \mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ лежат в $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{-\varepsilon_1-\varepsilon_2}, e_{(-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2}, e_{-\varepsilon_1})$. Из (9.12) выводится, что пространство $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})^{\mathfrak{m}_1}$ натянуто на все правые части равенств (9.12). Отсюда и из условия на проекцию $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$ на $V_1\oplus V_{22}^+\oplus V_3^+$ выводится, что $V_1\oplus V_2\oplus V_3\subset \mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$. Противоречие.

Таким образом, $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})=V_{21}\oplus V_{22}^-\oplus V_3^-\oplus U$, где U – четырехмерный $\mathfrak{m}_1$-подмодуль в $V_1\oplus V_{22}^+\oplus V_3^+$. Отметим, что

$$[U,U]\subset V':=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_{-\varepsilon_3-\varepsilon_4}, e_{-\varepsilon_2}, e_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}, e_{(-\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2}, e_{(-\varepsilon_1\pm\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2}).$$

Заметим, что $\dim[U,U]=2$, если $V_{22}^+\subset U$ и 3 в противном случае. Алгебру $\mathfrak{h}$, соответствующую выбору подпространства U мы будем обозначать через $\mathfrak{h}_U$. Тор T_0, соответствующая подалгебре $\mathfrak{t}_0:=(\varepsilon_3-\varepsilon_4)^\perp\subset\mathfrak{t}$ действует на $V_1\oplus V_{22}^+\oplus V_3^+$ и на V'. Отметим, что если U,U_0 – четырехмерные $\mathfrak{m}_1$-подмодули в $V_1\oplus V_{22}^+\oplus V_3^+$, для которых $\dim[U,U]=\dim[U_0,U_0]$ и $U_0\in\overline{T_0U}$, то $\mathfrak{h}_{U_0}\in\overline{T_0\mathfrak{h}_U}$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{h}_U$ – регулярная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Обозначим через Σ_U множество всех корней β с $\mathfrak{g}^\beta\subset[V_1\oplus V_2\oplus V_3, V_1\oplus V_2\oplus V_3]\setminus \mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$. Для любого подмножества $\Sigma\subset\Sigma_U$ подпространство $\widetilde{\mathfrak{h}}:=\mathfrak{h}_U\oplus\bigoplus_{\beta\in\Sigma}\mathfrak{g}^\beta$ является регулярной подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Равенство $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}=\{0\}$ имеет место при условии, что $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}}+\mathfrak{t}_0)=\mathfrak{t}$ (следствие 8.2.3). Применяя предложение 2.6.4 к $\mathfrak{q}$, несложно показать, что это так тогда и только тогда, когда подпространство, натянутое на корни из $\Sigma_U\setminus\Sigma$ и $(-\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2$, имеет размерность 3.

Имеется 7 T_0-орбит подмодулей $U\subset V_1\oplus V_{22}^+\oplus V_3^+$. Мы будем обозначать их тройками (x_1,x_2,x_3), так чтобы $V_1\subset U$ (соотв. $V_{22}^+\subset U, V_3^+\subset U$) тогда и только тогда, когда на первом (соотв., втором, третьем) месте в тройке стоит 0. Соответствующую подалгебру $\mathfrak{h}$ мы будем обозначать через $\mathfrak{h}_{(x_1,x_2,x_3)}$. Орбита, отвечающая тройке (x_1,x_2,x_3), примыкает к отвечающей тройке (y_1,y_2,y_3), если и только если $x_i\leqslant y_i$. Рассмотрим имеющиеся случаи.

Случай $(1,0,0)$. Здесь подалгебра $\mathfrak{h}$ регулярна, и $\Sigma_U=\{-\varepsilon_3-\varepsilon_4, -\varepsilon_2, (-\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2\}$. Пользуясь замечанием выше, видим, что, действительно, $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}=\{0\}$. Покажем теперь, что $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_4\}$. Рассмотрим подалгебру $\widetilde{\mathfrak{h}}$, натянутую на $\mathfrak{h}$ и на $e_{(-\varepsilon_1+\varepsilon_2\pm(\varepsilon_3+\varepsilon_4))/2}$. Применяя предложение 2.6.4, мы видим, что $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}})=\mathfrak{t}$. Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{q}}$ антистандартную параболическую подалгебру, соответствующую корням $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$. Заметим, что $\mathrm{R}_u(\widetilde{\mathfrak{q}})\subset\widetilde{\mathfrak{h}}$. Поэтому $W(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}})=W(\mathfrak{g}^{(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)},\widetilde{\mathfrak{h}}/\mathrm{R}_u(\mathfrak{q}))$ (следствие 5.4.6). Последняя группа была посчитана в пункте 7.4, она порождается отражениями $s_{\alpha_2}, s_{\alpha_2+\alpha_3}, s_{\alpha_4}$. Остается напомнить, что $W(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}})\subset\overline{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$.

Случай $(1,0,1)$. В этом случае, как было замечено выше, $\mathfrak{h}_{(1,0,0)}\in\overline{T_0\mathfrak{h}}$. Отсюда следует, что $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_{(1,0,0)})$.

Случай $(0,0,1)$. Здесь $\mathfrak{h}\in\overline{T_0\mathfrak{h}_{(1,0,1)}}$. Пользуясь замечанием выше, мы видим, что $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}=\{0\}$ ($\Sigma_U=\{\varepsilon_2-\varepsilon_1,-\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2,(-\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2\}$).

Случай $(0,1,0)$. Здесь $\Sigma_U=\{-\varepsilon_2,(-\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2\}\}$, и $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}\neq\{0\}$.

Случай $(1,1,0)$. Подалгебра $\mathfrak{t}_1=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\varepsilon_1,2\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)$, содержится в $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$. С другой стороны, полупростых элементов в $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}+\mathfrak{t}_1)/(\mathfrak{h}+\mathfrak{t}_1)$ нет (т.к. $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{m}_1+\mathfrak{t}_1)=\mathfrak{m}_1+\mathfrak{t}$). Поэтому для доказательства того, что $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}=\{0\}$, достаточно проверить, что $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}+\mathfrak{t}_1)=\mathfrak{t}$. Это проверяется с помощью предложения 2.6.4. Докажем, что $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4\}$. Пусть $\widetilde{\mathfrak{q}}$ – антистандартная параболическая подалгебра, соответствующая простым корням $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$. Достаточно доказать, что подгруппа $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cap W(\mathfrak{g}^{(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)})$ не содержит отражения s_{α_4}. Из предложения 5.4.2 следует, что $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cap W(\mathfrak{g}^{(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)})=W_{G^{(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)},\widetilde{Q}/H}$. Достаточно, таким образом, показать, что $s_{\alpha_4}\notin W(\mathfrak{g}^{(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)},\mathfrak{g}^{(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)}\cap\mathfrak{h})$. Это следует из результатов пункта 9.6.

Случай $(1,1,1)$. $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4\}$. Это следует из того, что $\mathfrak{h}_{(1,1,0)}\in\overline{T_0\mathfrak{h}}$.

Случай $(0,1,1)$. Аналогично случаю $(1,1,0)$ доказывается, что $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}=\{0\}$. Имеет место равенство $\widehat{\Pi}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4\}$. Это следует из того, что $\mathfrak{h}\in\overline{T_0\mathfrak{h}_{(1,1,1)}}$. $\square$

10. Цветные векторы для сферических однородных пространств

10.1. **Введение.** В этом разделе G – связная редуктивная алгебраическая группа, а X – сферическое G-многообразие. Через $\mathcal{D}_{G,X},\mathcal{D}_{G,X}^G$ мы обозначаем множество всех простых B- (соотв. G-) дивизоров многообразия X. Для $D\in\mathcal{D}_{G,X}$ мы обозначаем через φ_D соответствующий вектор в $\mathfrak{a}_{G,X}(\mathbb{R})^*$ (см. пункт 1.1).

Основным результатом данного раздела является алгоритм для вычисления векторов $\varphi_D,D\in\mathcal{D}_{G,X}$ в случае, когда X – сферическое однородное пространство или сферическое аффинное однородное векторное расслоение. Отметим, что результаты этого раздела достаточно просты и практически наверняка не являются чем-то совсем новым и оригинальным.

В пункте 10.2 мы, на основании результатов работы [Lu4] (см. также [Lu5],§2), касающихся структуры множества $\mathcal{D}_{G,X}$ и соответствующих цветных векторов φ_D для сферического однородного пространства, установим связь между множествами $\mathcal{D}_{G,G/H}$ и $\mathcal{D}_{M,M*_{M\cap H}(\mathrm{R}_u(\mathfrak{q})/\mathrm{R}_u(\mathfrak{h}))}$ и соответствующими цветными векторами. Здесь, как обычно, Q – антистандартная параболическая подгруппа в G, M – её стандартная подгруппа Леви, и H правильно вложена в Q, причем $M\cap H$ – подгруппа Леви в H. В пункте 10.3 мы приведем алгоритм для вычисления векторов $\varphi_D,D\in\mathcal{D}_{G,X}$ для сферических аффинных однородных векторных расслоений.

10.2. **Переход от однородных пространств к аффинным однородным векторным расслоениям.** Пусть α – простой корень в $\Delta(\mathfrak{g})$. Обозначим через P_α параболическую подгруппу в G с касательной алгеброй $\mathfrak{p}_\alpha:=\mathfrak{b}+\mathfrak{g}^{-\alpha}$. Через $\mathcal{D}_{G,X}(\alpha)$ мы обозначим подмножество в $\mathcal{D}_{G,X}$, состоящее из всех P_α-нестабильных дивизоров. Очевидно, что $\mathcal{D}_{G,X}=\mathcal{D}_{G,X}^G\coprod\bigcup_{\alpha\in\Pi(\mathfrak{g})}\mathcal{D}_{G,X}(\alpha)$.

Лемма 10.2.1. *Пусть X – сферическое G-многообразие. Для $\alpha\in\Pi(\mathfrak{g})$ имеет место в точности одна из следующих возможностей:*

(a) $\mathcal{D}_{G,X}(\alpha)=\varnothing$.

(b) $\mathcal{D}_{G,X}(\alpha)$ *состоит из двух элементов. Это происходит в точности тогда, когда $\alpha\in\Pi_{G,X}$. Если $\mathcal{D}_{G,X}(\alpha)=\{D^+,D^-\}$, то $\varphi_{D^+}+\varphi_{D^-}=\alpha^\vee|_{\mathfrak{a}_{G,X}}$.*

(в) *Имеет место включение* $2\alpha \in \Pi_{G,X}$. *В этом случае* $\mathcal{D}_{G,X}(\alpha)$ *состоит из одного элемента* D *с* $\varphi_D = \frac{1}{2}\alpha^\vee|_{\mathfrak{a}_{G,X}}$.

(г) $\mathbb{R}\alpha \cap \Pi_{G,X} = \varnothing$. *В этом случае* $\mathcal{D}_{G,X}(\alpha)$ *состоит из одного элемента* D *с* $\varphi_{D(\alpha)} = \alpha^\vee|_{\mathfrak{a}_{G,X}}$.

Кроме того, для всех корней $\alpha \in \Pi(\mathfrak{g})$ *типов б),в) и всех* $D \in \mathcal{D}_{G,X} \setminus \mathcal{D}_{G,X}^G$ *имеет место неравенство* $\langle \alpha, \varphi_D \rangle \leqslant 1$, *и равенство выполняется в точности для* $D \in \mathcal{D}_{G,X}(\alpha)$.

Доказательство. Первое утверждение – это предложение 3.4 из [Lu4]. Перейдем ко второму. Достаточно доказать, что $\langle \varphi_D, \alpha^\vee \rangle \leqslant 0$ для $D \notin \mathcal{D}_{G,X}(\alpha)$. Во-первых, мы можем свести доказательство к случаю, когда X – замечательное многообразие. Это делается так же, как в предложении 3.2 из [Lu5]. Затем, используя процедуру локализации, описанную в [Lu5], пункт 3.2, можно свести доказательство к случаю, когда $D \in \mathcal{D}_{G,X}^G$. В этом случае остается использовать связь между конусом нормирований и сферическими корнями. $\square$

Далее в этом пункте X – сферическое однородное расслоение $G *_H U$ (подгруппа $H \subset G$ произвольна). Пусть Q, M таковы, как описано во введении, $X_0 = M *_S (V \oplus U)$, $S = M \cap H$, $V = \mathrm{R}_u(\mathfrak{q}) / \mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$. Обозначим через Q^- стандартную параболическую подгруппу, противоположенную к Q. Напомним, пример 2.2.2, что имеется открытое Q^--вложение $Q^- *_M X_0 \hookrightarrow X$. Дополнение к его образу состоит из $d = \mathrm{rk}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] - \mathrm{rk}[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]$ простых дивизоров, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами из $\Pi(\mathfrak{g}) \setminus \Delta(\mathfrak{m})$. При этом дивизор D_α, соответствующий простому корню $\alpha \in \Pi(\mathfrak{g}) \setminus \Delta(\mathfrak{m})$ устойчив относительно действия параболической группы P_β с $\beta \neq \alpha$. Иными словами, этот дивизор содержится в $\mathcal{D}_{G,X}(\alpha) \setminus \bigcup_{\beta \in \Pi(\mathfrak{g}), \beta \neq \alpha} \mathcal{D}_{G,X}(\beta)$.

Таким образом, $\mathcal{D}_{G,X} = \{D_\alpha, \alpha \in \Pi(\mathfrak{g}) \setminus \Delta(\mathfrak{m})\} \cup \mathcal{D}_{M,X_0}$. Отметим, что поскольку множества $\mathbb{C}(X_0)^{(M \cap B)}$ и $\mathbb{C}(X)^{(B)}$ T-эквивариантно изоморфны, то для дивизора $D \in \mathcal{D}_{M,X_0}$ вектор φ_D не зависит от того, рассматриваем мы D как дивизор на X или на X_0. Таким образом, осталось найти векторы φ_{D_α} для $\alpha \in \Pi(\mathfrak{g}) \setminus \Delta(\mathfrak{m})$. Это делается с помощью следующего замечания (с $\mathcal{D}_1 = \{D_\alpha, \alpha \in \Pi(\mathfrak{g}) \setminus \Delta(\mathfrak{m})\}, \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{M,X_0}$).

Замечание 10.2.2. Здесь X – сферическое G-многообразие. Пусть $\mathcal{D}_{G,X} = \mathcal{D}_1 \coprod \mathcal{D}_2$, и известны пространство $\mathfrak{a}_{G,X}$, группа $W_{G,X}$, векторы $\varphi_D, D \in \mathcal{D}_2$, и стабилизаторы элементов из $\mathcal{D}_1$. Предположим, что $\#\mathcal{D}_{G,X}(\alpha) \cap \mathcal{D}_1 \leqslant 1$ для всех $\alpha \in \Pi(\mathfrak{g})$. Тогда набор $\varphi_D, D \in \mathcal{D}_1$ определяется однозначно. Это делается так: если $D \in \mathcal{D}_{G,X}(\alpha) \cap \mathcal{D}_1$, и $\alpha \notin \mathfrak{a}_{G,X}$ или $\alpha \in \mathfrak{a}_{G,X}, s_\alpha \notin W_{G,X}$, то α является корнем типа д), и $\varphi_D = \alpha^\vee|_{\mathfrak{a}_{G,X}}$. Предположим теперь, что $\alpha \in \mathfrak{a}_{G,X}, s_\alpha \in W_{G,X}$. Тогда α имеет тип б) или в). Воспользуемся вторым утверждением леммы 10.2.1. Если в $\mathcal{D}_2$ найдется дивизор D', для которого $\langle \varphi_D, \alpha \rangle = 1$, то α имеет тип б), и $\varphi_D = \alpha^\vee|_{\mathfrak{a}_{G,X}} - \varphi_{D'}$. В противном случае, $\#\mathcal{D}_{G,X}(\alpha) = 1$, α имеет тип в), и $\varphi_D = \frac{1}{2}\alpha^\vee$.

10.3. **Вычисление для аффинных однородных расслоений.** В этом пункте мы опишем алгоритм вычисления векторов φ_D для сферических аффинных однородных векторных расслоений. Применяя этот алгоритм к каждому из вполне насыщенных неразложимых расслоений мы завершим вычисление векторов φ_D и в общем случае.

Мы предполагаем в этом пункте, что G – связная алгебраически односвязная редуктивная группа (алгебраическая односвязность означает, что G является прямым произведением тора и односвязной полупростой подгруппы). Сперва мы изучим поведение множества $\mathcal{D}_{G,X}$ и векторов φ_D при переходе к накрытию.

Лемма 10.3.1. *Пусть $X, \widetilde{X}$ – сферические G-многообразия, и $\pi : \widetilde{X} \to X$ – конечный этальный G-морфизм. Тогда простые корни типов а),г) для $X, \widetilde{X}$ совпадают, простой корень типа б) для X является таковым и для $\widetilde{X}$. Если корень $\alpha \in \Pi(\mathfrak{g})$ имеет одинаковый тип для X и $\widetilde{X}$, то дивизор $\widetilde{D} \in \mathcal{D}_{G,X}(\alpha)$ для $\widetilde{X}$ является прообразом соответствующего дивизора D для X, и $\varphi_{\widetilde{D}} = \varphi_D$. Наконец, если $\alpha \in \Pi(\mathfrak{g})$ имеет тип в) для X, но тип б) для $\widetilde{X}$, то $\pi^{-1}(D)$, где $D \in \mathcal{D}_{G,X}(\alpha)$, состоит из двух неприводимых компонент $\widetilde{D}_i \in \mathcal{D}_{G,\widetilde{X}}(\alpha), i = 1, 2$. Имеет место равенство $\varphi_{\widetilde{D}_i} = \alpha^\vee|_{\mathfrak{a}_{G,X}}/2$.*

Доказательство. Если D – дивизор на X и $\widetilde{D}$ – неприводимая компонента в $\pi^{-1}(D)$, то стабилизаторы D и $\widetilde{D}$ в G совпадают. Совпадение корней типа а) следует из совпадения стабилизатора открытой B-орбиты для X и $\widetilde{X}$, а корней типа г) – из равенства групп Вейля. То, что корень типа б) для X является таковым и для $\widetilde{X}$ следует из равенства $W_{G,X} = W_{G,\widetilde{X}}$ и включения $\mathfrak{X}_{G,X} \subset \mathfrak{X}_{G,\widetilde{X}}$. Далее, отметим, что для любого простого дивизора D на X, любой компоненты $\widetilde{D} \subset \pi^{-1}(D)$ и всех $f \in \mathbb{C}(X)$ имеет место равенство $\mathrm{ord}_D(f) = \mathrm{ord}_{\widetilde{D}}(\pi^*(f))$. Отсюда следует совпадение векторов $\varphi_\bullet$. Это завершает доказательство. □

Таким образом, зная группу $W_{G,X}$ и решетки $\mathfrak{X}_{G,X}, \mathfrak{X}_{G,\widetilde{X}}$ мы можем восстановить набор $\varphi_D, D \in \mathcal{D}_{G,X}$, по набору $\varphi_D, D \in \mathcal{D}_{G,\widetilde{X}}$, и обратно.

Каждому сферическому G-многообразию мы сопоставим подмоноид $\mathfrak{X}^+_{G,X} \subset \mathfrak{X}_{G,X}$, состоящий из весов элементов из $\mathbb{C}[X]^{(B)}$. Предположим, что многообразие X аффинно и факториально. Тогда имеется биекция между $\Xi := \mathfrak{X}^+_{G,X} \setminus \mathfrak{X}^+_{G,X} + \mathfrak{X}^+_{G,X}$ и $\mathcal{D}_{G,X}$, которая весу λ ставит в соответствие дивизор нулей D^λ ненулевой функции $f_\lambda \in \mathbb{C}[X]^{(B)}_\lambda$. Отметим, что для $\lambda \neq \mu \in \Xi$ имеет место равенство $\langle \varphi_{D^\lambda}, \mu \rangle = \mathrm{ord}_{D^\lambda}(f_\mu) = \delta_{\lambda,\mu}$. Таким образом, набор $\varphi_D, D \in \mathcal{D}_{G,X}$, восстанавливается по Ξ однозначно.

Важный случай факториального G-многообразия – это G-модуль. Сферические G-модули были классифицированы в [Le], там же были найдены соответствующие подмножества $\Xi \subset \mathfrak{X}_G$. Другой важный случай, специальный класс факториальных сферических однородных пространств, будет рассмотрен ниже.

Множество $\mathcal{D}_{G,X}$ разбивается в прямое объединение двух подмножеств: $\mathcal{D}^v_{G,X}$, состоящего из прообразов дивизоров на G/H при естественной проекции $G *_H V \to G/H$ ("вертикальных" дивизоров), и $\mathcal{D}^h_{G,X}$, состоящего из всех дивизоров проекция которых на G/H плотна, ("горизонтальных" дивизоров). Следующая лемма описывает структуру множества $\mathcal{D}^h_{G,X}$ и соответствующих векторов φ_D.

Лемма 10.3.2. *Пусть, как и прежде, $X = G *_H V$ – сферическое аффинное однородное векторное расслоение, и $\pi : G *_H V \to G/H$ – каноническая проекция. Положим $L_1 = L_{0\,G,G/H}$ и предположим, что подгруппа H выбрана таким образом, что eH лежит в выделенной компоненте многообразия $(G/H)^{L_1^\circ}$. Имеется взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{D}^h_{G,X}$ и $\mathcal{D}_{L_1^\circ,V}$, при котором $D \in \mathcal{D}_{L_1^\circ,\pi^{-1}(x)}$, где x – точка общего положения в выделенной компоненте, переходит в $\overline{BD}$. Векторы φ_D с $D \in \mathcal{D}^h_{G,X}$ лежат в $\mathfrak{a}^*_{L_1^\circ,V}$, причем $\varphi_D = \varphi_{\overline{BD}}$ для всех $D \in \mathcal{D}_{L_1^\circ,V}$.*

Доказательство. Обозначим через Z выделенную компоненту многообразия $(G/H)^{L_1}$. Отметим, что L_1°-модуль $\pi^{-1}(x)$ не зависит от точки x в выделенной компоненте многообразия $(G/H)^{L_1^\circ}$. Последняя содержит Z. Для точки x общего положения в Z орбита $(B \cap N_G(L_1, Z))x$ плотна в Z. Это следует из предложения 2.6.6, ибо, в, обозначениях этого предложения, T имеет плотную орбиту в S, что следует из сферичности X.

Кроме того, подгруппы B_x и $B\cap L_1$ сопряжены в B (это следует из доказательства предложения 2.6.8). Будем считать далее, что $B_x = B\cap L_1$. Напомним, что подмножество BZ плотно в X. Отсюда следует, что для любого дивизора $D\in\mathcal{D}_{L_1^\circ,\pi^{-1}(x)}$ подмногообразие $\overline{BD}\subset X$ проектируется на G/H доминантно и имеет размерность не менее $\dim X-1$. Докажем теперь, что $BD\cap\pi^{-1}(x)=D$. Это докажет, что отображение $D\mapsto\overline{BD}$ действительно индуцирует нужную биекцию. Действительно, если $bD\cap\pi^{-1}(x)\neq\varnothing, b\in B$, то $bx=x$. Остается показать, что для $b\in B_x=B\cap L_1$ имеет место равенство $bD=D$. Имеет место разложение $b=b_1b_2$, где $b_2\in B\cap L_1^\circ, b_1\in Z_{G_x}(L_1^\circ)$. Очевидно, что $b_2D=D$. С другой стороны, группа $\mathrm{GL}(\pi^{-1}(x))^{L_1^\circ}$ является тором, действующем на $\pi^{-1}(x)$ L_1°-автоморфизмами. Поэтому $\mathrm{GL}(\pi^{-1}(x))^{L_1^\circ}$ оставляет на месте открытую $B\cap L_1^\circ$-орбиту в $\pi^{-1}(x)$, а, стало быть, и D, откуда $b_1D=D$.

Отметим, что $\mathrm{ord}_D(\pi^*(f))=0$ для $D\in\mathcal{D}^h_{G,X}, f\in\mathbb{C}(G/H)$. Отсюда следует, что φ_D для таких D содержится в аннуляторе $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ в $\mathfrak{a}^*_{G,X}$. Последний, согласно предложению 2.6.8, отождествляется с $\mathfrak{a}^*_{L_1^\circ,V}$.

Рассмотрим морфизм $\psi: B*_{B\cap L_1^\circ}\pi^{-1}(x)\to X, [b,y]\mapsto by$. Он $B\times\mathbb{C}^\times$-эквивариантен и этален в точке $[e,0]$, а потому этален. Для $f\in\mathbb{C}(X)^{(B)}$ порядок на $\overline{BD}, D\in\mathcal{D}_{L_1^\circ,\pi^{-1}(x)}$ совпадает с порядком функции $\psi^*(f)$ на $B*_{B\cap L_1^\circ}D$. Отсюда следует равенство $\varphi_D=\varphi_{\overline{BD}}$. □

Используя таблицы из [Le] и предыдущую лемму, мы можем вычислить векторы φ_D для $D\in\mathcal{D}^h_{G,X}$.

Теперь мы перейдем к проблеме восстановления набора $\varphi_D, D\in\mathcal{D}^v_{G,X}$ по набору $\varphi_D, D\in\mathcal{D}^h_{G,X}$. Отметим, во-первых, что, воспользовавшись леммой 10.3.1, мы можем считать, что подгруппа H связна. Во-вторых, если H содержится в собственной подгруппе Леви $M\subset G$, мы можем применить редукцию, описанную в пункте 10.2. Таким образом, мы можем считать, что H не содержится ни в какой собственной подгруппе Леви в G. Поскольку группа H связна, это равносильно тому, что $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})\subset\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. В этом случае, найдется тор $T_0\subset Z(G)^\circ$, для которого $G=T_0\times(H(G,G))$. Заменив, G на $G_0:=(G,G)H$ и X на $G_0*_H V$, мы можем считать, что $Z(G)^\circ\subset H$. Можем также предполагать, что многообразие X *неразложимо*, т.е. не существует двух нормальных подгрупп $G_1,G_2\subset G$, для которых $H=H_1\times H_2, H_i:=G_i\cap H, V=V^{H_1}\oplus V^{H_2}$.

Отметим, что многообразие X является факториальными, поэтому набор $\varphi_D, D\in\mathcal{D}_{G,G/H}$ восстанавливается по множеству $\Xi=\mathfrak{X}^+_{G,G/H}\setminus\mathfrak{X}^+_{G,G/H}\cup\mathfrak{X}^+_{G,G/H}$.

Рассмотрим сначала случай $V=\{0\}$. Условие неразложимости влечет полупростоту группы G. В случае, когда G/H – симметрическое пространство, набор $\varphi_D, D\in\mathcal{D}_{G,G/H}$, был вычислен Вюстом. Он совпадает с набором $\frac{1}{2}\alpha^\vee$, где α пробегает систему простых корней симметрического пространства G/H. Отметим, что, в силу факториальности многообразия G/H, $\varphi_{D_1}\neq\varphi_{D_2}$ для $D_1\neq D_2\in\mathcal{D}_{G,X}$. Поскольку каждый вектор $\varphi|_D$ пропорционален ограничению $\alpha^\vee$ на $\mathfrak{a}_{G,X}$ для $\alpha\in\Pi(\mathfrak{g})$, мы видим, что корней типа б) нет.

Несимметрические пространства указанного вида (т.е. неразложимые аффинные сферические однородные пространства G/H с полупростыми группами $G, H=H^\circ$ и $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})=0$; мы будем называть их исключительными) приведены в следующей таблице с точностью до автоморфизма группы G.

Таблица 10.1: Исключительные однородные пространства G/H и соответствующие множества Ξ

N	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	Ξ
1	$\mathfrak{so}_9$	$\mathfrak{spin}_7$	π_1, π_4
2	$\mathfrak{so}_8$	G_2	π_1, π_3, π_4
3	$\mathfrak{so}_7$	G_2	π_3
4	G_2	A_2	π_1
5	$\mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sp}_{2m}$	$\mathfrak{sp}_{2n-2} \times \mathfrak{sl}_2^{[1,2]} \times \mathfrak{sp}_{2m-2}$	$\pi_2, \pi_2', \pi_1 + \pi_1'$
6	$\mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sp}_4$	$\mathfrak{sp}_{2n-4} \times \mathfrak{sp}_4^{[1,2]}$	$\pi_2, \pi_4, \pi_1 + \pi_1', \pi_2 + \pi_2',$ $\pi_3 + \pi_1', \pi_1 + \pi_3 + \pi_2'$
7	$\mathfrak{so}_{n+1} \times \mathfrak{so}_n$	$\mathfrak{so}_n^{[1,2]}$	$\pi_i + \pi_i', i = \overline{1, [\frac{n}{2}]},$ $\pi_i + \pi_{i-1}', i = \overline{1, [\frac{n+1}{2}]}$
8	$\mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sp}_{2m} \times \mathfrak{sp}_{2l}$	$\mathfrak{sp}_{2n-2} \times \mathfrak{sp}_{2m-2} \times \mathfrak{sp}_{2l-2} \times \mathfrak{sl}_2^{[1,2,3]}$	$\pi_2, \pi_2', \pi_2'', \pi_1 + \pi_1',$ $\pi_1 + \pi_1'', \pi_1' + \pi_1''$
9	$\mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sp}_4 \times \mathfrak{sp}_{2m}$	$\mathfrak{sp}_{2n-2} \times \mathfrak{sl}_2^{[1,2]} \times \mathfrak{sl}_2^{[2,3]} \times \mathfrak{sp}_{2m-2}$	$\pi_2, \pi_2', \pi_2'', \pi_1 + \pi_1'$ $\pi_1' + \pi_1'', \pi_1 + \pi_2' + \pi_1''$

Объясним использованные в таблице обозначения. В третьем столбце верхние индексы в квадратных скобках означают в какие из идеалов алгебры $\mathfrak{g}$ вложен данный идеал алгебры $\mathfrak{h}$ (если таких идеалов больше одного). Номер идеала здесь совпадает с его порядковым номером в столбце 2. Если идеалов у $\mathfrak{g}$ более одного, то π_i (соотв. π_i', π_i'') обозначает фундаментальный вес первого (соотв., второго и третьего) из них. В строке 6 вес π_4 для $n = 3$ должен быть опушен, а в строке 7 $\pi_0' = 0$.

Лемма 10.3.3. *Множества весов $\mathfrak{X}_{G,X}^+ \setminus \mathfrak{X}_{G,X}^+ + \mathfrak{X}_{G,X}^+$ для $X = G/H$ из таблицы 10.1 совпадают с множествами Ξ, приведенными в четвертом столбце.*

Доказательство. Отметим, что множество $\mathfrak{X}_{G,X}^+ \setminus \mathfrak{X}_{G,X}^+ + \mathfrak{X}_{G,X}^+$ в каждом случае состоит из $\mathrm{rk}_G(G/H)$ элементов. Действительно, в противном случае будет иметь место соотношение $\sum_{i \in I_1} n_i \lambda_i = \sum_{i \in I_2} n_i \lambda_i$, где $n_i > 0, \lambda_i \in \mathfrak{X}_{G,X}^+ \setminus \mathfrak{X}_{G,X}^+ + \mathfrak{X}_{G,X}^+$, а I_1, I_2 – непересекающиеся множества. Отсюда следует, что функции $\prod_{i \in I_j} f_{\lambda_i}^{n_i}, j = 1, 2$, пропорциональны, но имеют разные дивизоры нулей. Противоречие.

В случаях 1-4 утверждение леммы следует из [Krä], Tabelle 1. В оставшихся случаях, воспользовавшись двойственностью Фробениуса, можно проверить, что указанные элементы действительно лежат в $\mathfrak{X}_{G,X}^+ \setminus \mathfrak{X}_{G,X}^+ + \mathfrak{X}_{G,X}^+$. Остается отметить, что количество элементов каждый раз совпадает с $\mathrm{rk}_G(G/H)$. Это выводится из результатов работы [Lo2]. □

Рассмотрим теперь случай $X = G *_H V$. Как следует из результатов работы [KvS], однородное пространство G_0/H_0 является произведением пространств следующего вида:

(1) факториальное симметрическое пространство,
(2) одно из пространств NN 4,5 из таблицы 10.1.

Отсюда следует, что каждое непустое множество $\mathcal{D}_{G,G/H}(\alpha)$ содержит единственный элемент. Таким образом, подмножество $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_{G,X}^v, \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{G,X}^h$ удовлетворяют условиям замечания 10.2.2, что позволяет восстановить векторы $\varphi_D, D \in \mathcal{D}_{G,X}^v$.

11. Алгоритмы

Здесь собраны воедино алгоритмы вычисления картановских пространств, решеток весов и групп Вейля.

11.1. **Вычисление картановских пространств и выделенных компонент.** *Случай 1.* Пусть $X = G/H$, где H – редуктивная подгруппа в G. Применяя Theorem 1.3 из [Lo2], мы вычисляем картановское пространство $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Затем, используя предложение 6.1.3, мы находим точку с выделенной компоненты в $(G/H)^{L^\circ_{0\,G,G/H}}$. Используя предложение 6.1.1, мы восстанавливаем всю выделенную компоненту.

Случай 2. Здесь $X = G *_H V$ – аффинное однородное векторное расслоение и $\pi : G *_H V \to G/H$ – естественная проекция. Применяя алгоритм случая 1 к G/H, мы вычисляем пространство $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и находим точку x с выделенной компоненты многообразия $(G/H)^{L_{0\,G,G/H}}$. Применяя следующий алгоритм к группе $L_0 := L^\circ_{0\,G,G/H}$ и модулю $V = \pi^{-1}(x)$, мы вычисляем пространство $\mathfrak{a}_{L_0,V}$.

Алгоритм 11.1.1. Пусть $\widetilde{G}$ – почти связная группа, а V – $\widetilde{G}$-модуль. Положим $G_0 = \widetilde{G}, V_0 = V$. Пусть мы уже построили пару (G_i, V_i), где группа $G_i \subset G$ почти связна, с борелевской подгруппой $B_i \subset G_i^\circ$, содержащей T. Выберем $N_{G_i}(B_i)$-полуинвариантный вектор $\alpha \in V_i^*$. Положим $V_{i+1} = (\mathfrak{u}_i^- \alpha)^0$, где $\mathfrak{u}_i^-$ – максимальная унипотентная подалгебра в $\mathfrak{g}_i$, нормализуемая тором T и противоположенная к $\mathfrak{b}_i$, а верхний индекс ^{0} обозначает аннулятор. В качестве группы G_{i+1} мы возьмем централизатор в G_i веса ковектора α. Положим $\mathfrak{b}_{i+1} = \mathfrak{b}_i \cap \mathfrak{g}_{i+1}$. Группа G_{i+1} является почти связной, и $L_{0\,G_i,V_i} = L_{0\,G_{i+1},V_{i+1}}$. Отметим, что $\mathrm{rk}[\mathfrak{g}_{i+1}, \mathfrak{g}_{i+1}] \leqslant \mathrm{rk}[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i]$ и равенство достигается лишь в том случае, когда ковектор α $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i]$-инвариантен. Таким образом, если $V \neq V^{[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_i]}$, то мы можем выбрать ковектор α, для которого $\mathrm{rk}[\mathfrak{g}_{i+1}, \mathfrak{g}_{i+1}] < \mathrm{rk}[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i]$.

Последовательно строя пары (G_i, V_i) мы придем к ситуации, когда группа $(G_k, G_k)^\circ$ действует на V_k тривиально. Группа $L_{0\,\widetilde{G},V}$ совпадает с ядром неэффективности для действия $G_k : V_k$. Отметим, что $k \leqslant \mathrm{rk}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Если нас интересует лишь подгруппа $L^\circ_{0\,\widetilde{G},V}$, то мы можем применять алгоритм на уровне алгебр Ли.

Согласно предложению 2.6.8, $\mathfrak{a}_{G,X} = \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) + \mathfrak{a}_{L_0,V}$. Далее, пользуясь предложением 6.1.1, мы находим выделенную компоненту многообразия $X^{L^\circ_{0\,G,X}}$.

Случай 3. Пусть $X = G/H$, где H – нередуктивная алгебраическая подгруппа в G. Мы находим правильное вложение подгруппы H в некоторую параболическую подгруппу $Q \subset G$, пользуясь следующим алгоритмом.

Алгоритм 11.1.2. Положим $\mathfrak{n}_0 = \mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$. Если уже построена унипотентная подалгебра Ли $\mathfrak{n}_i \subset \mathfrak{g}$, то положим $\mathfrak{n}_{i+1} = \mathrm{R}_u(\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{n}_i))$. Понятно, что $\mathfrak{n}_i \subset \mathfrak{n}_{i+1}$. Известно, что если $\mathfrak{n}_i = \mathfrak{n}_{i+1}$, то $\mathfrak{n}_i$ является унипотентным радикалом некоторой параболической подалгебры $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$ ([Б], гл.8, §10, теорема 2). Очевидно, что $\mathrm{R}_u(H) \subset \mathrm{R}_u(Q)$. При этом, как следует из построения, $N_G(\mathfrak{n}_0) \subset Q$. В частности, $H \subset Q$.

Далее, мы выбираем подгруппу Леви $M \subset Q$, для которой $M \cap H$ является подгруппой Леви в H, и элемент $g \in G$, для которого gQg^{-1} является антистандартной параболической подгруппой, а gMg^{-1} – стандартной подгруппой Леви. Заменяем (Q, M, H) на $(gQg^{-1}, gMg^{-1}, gHg^{-1})$. Мы полагаем $X_0 = Q^-/H$. Пользуясь замечанием 2.6.3, мы строим изоморфизм M-многообразия X_0 с аффинным однородным векторным расслоением. По предложению 2.6.4, $\mathfrak{a}_{G,G/H} = \mathfrak{a}_{M,X_0}$. В случае, когда многообразие G/H квазиаффинно, в силу предложения 6.1.2, получаем точку в выделенной компоненте многообразия $(G/H)^{L_{0\,G,G/H}}$. Применяя предложение 6.1.1, мы восстанавливаем всю выделенную компоненту.

11.2. **Вычисление весовых решеток.** *Случай 1.* $X = G/H$, где H – редуктивная подгруппа в G, и $\mathrm{rk}_G(G/H) = \mathrm{rk}(G)$. Решетка $\mathfrak{X}_{G,G/H}$ вычисляется так, как указано в теореме 8.1.3. Выделенная компонента в $(G/H)^{L_{0\,G,G/H}}$ вычисляется в соответствии с предложением 8.6.1.

Случай 2. $X = G/H$, где H – редуктивная подгруппа в G. Вычисляем пространство $\mathfrak{a}_{G,G/H}$ и находим точку x с выделенной компоненту в $(G/H)^{L_{0\,G,G/H}}$ так, как указано в случае 1 предыдущего пункта. Считаем $x = eH$ и полагаем $L_0 = L^\circ_{0\,G,G/H}$, $\underline{G} = N_G(L_0)^\circ/L_0, \underline{H} = (H \cap N_G(L_0)^\circ)/L_0$. По предложению 6.1.1, выделенная компонента в X^{L_0} совпадает с $\underline{G}x \cong \underline{G}/\underline{H}$. Согласно теореме 5.1.3, $\mathfrak{X}_{G,G/H} = \mathfrak{X}_{\underline{G},\underline{G}/\underline{H}}$, а выделенная компонента в $X^{L_{0\,G,G/H}}$ совпадает с выделенной компонентой в $(\underline{G}/\underline{H})^{L_{0\,\underline{G},\underline{G}/\underline{H}}}$. Остается перейти к предыдущему случаю.

Случай 3. $X = G *_H V$, где H – редуктивная подгруппа в G, а V – H-модуль. Пользуясь алгоритмом предыдущего случая, мы вычисляем подгруппу $L_1 := L_{0\,G,G/H}$ и точку с выделенной компоненты в $(G/H)^{L_{0\,G,G/H}}$, пусть это eH. Пользуясь алгоритмом 11.1.1, мы вычисляем группу $L_{0\,L_1,V}$. Согласно предложению 2.6.8, последняя подгруппа совпадает с $L_{0\,G,G/H}$.

Случай 4. Пусть $X = G/H$, где H — алгебраическая нередуктивная подгруппа в G. Алгоритм совершенно аналогичен алгоритму случая 3 из предыдущего пункта.

11.3. **Вычисление групп Вейля.** *Случай 1.* Пусть $X = G *_H V$, где H – редуктивная подгруппа в G, а V – H-модуль, причем $\mathrm{rk}_G(X) = \mathrm{rk}(G)$. Пусть $G = Z(G)^\circ G_1 \ldots G_k$ – разложение в локально-прямое произведение центра и простых нормальных подгрупп. Положим $H_i = G_i \cap H$. По предложениям 5.4.7,5.4.8 имеет место равенство $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V) = \prod_{i=1}^k W(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i, V)$. Вычисление групп $W(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i, V)$ производится в соответствии с теоремой 7.1.2.

Случай 2. Пусть $X = G *_H V$, где H — редуктивная подгруппа в G, а V — H-модуль. Находим пространство $\mathfrak{a}_{G,X}$ и точку с выделенной компоненты многообразия $\underline{X} \subset X^{L_0}$, где $L_0 = L^\circ_{0\,G,X}$, лежащую в G/H. Это делается так, как указано в случае 2 пункта 11.1. В дальнейшем мы считаем, что eH лежит в выделенной компоненте. Полагаем $\underline{G} = (N_G(L_0)^\circ N_H(L_0))/L_0, \underline{H} = N_H(L_0)/L_0, \underline{V} = V^{L_0}$. Как $\underline{G}$-многообразие, $\underline{X} \cong \underline{G} *_{\underline{H}} \underline{V}$ (предложение 6.1.1). Положим $\Gamma = N_{\underline{G}}(\underline{B}, \underline{T})/\underline{T}$, где $\underline{B}, \underline{T}$ — выделенные борелевская подгруппа и максимальный тор в $\underline{G}$. По теореме 5.1.3 и предложению 5.4.1, $\mathfrak{a}_{G,X} = \underline{\mathfrak{t}} = \mathfrak{a}_{\underline{G}^\circ,\underline{X}}, W_{G,X} = W_{\underline{G}^\circ,\underline{X}} \leftthreetimes \Gamma$, что сводит вычисление группы $W_{G,X}$ к предыдущему случаю.

Случай 3. $X = G/H$ — квазиаффинное однородное пространство с $\mathrm{rk}_G(G/H) = \mathrm{rk}(G)$. Пусть $G = Z(G)^\circ G_1 G_2 \ldots G_k$ — разложение в локально прямое произведение центра и простых нормальных подгрупп. Положим $H_i := G_i \cap H$. Тогда, см. предложения 5.4.7, 5.4.8, $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \prod W(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$. Таким образом, мы сводим задачу к случаю, когда G — простая группа.

Если G имеет тип A_1, то группа Вейля тривиальна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}$ одномерная унипотентная подалгебра.

Если G имеет тип B_2 или G_2, и подалгебра $\mathfrak{h}$ не содержит унипотентного радикала параболической подалгебры, то группа Вейля вычисляется с помощью предложений 9.2.2, 9.2.3. Если же $\mathfrak{h}$ содержит унипотентный радикал параболической, то применение следствия 5.4.6, мы сводим дело к вычислению группы Вейля для алгебры, у которой не более одного простого идеала, и этим идеалом может быть только $\mathfrak{sl}_2$.

Далее предполагается, что $\mathfrak{g}$ отлична от $\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{so}_5, G_2$.

Строим по $\mathfrak{h}$ подалгебру $\widetilde{\mathfrak{h}}$, совпадающую с прообразом полупростой части подалгебры $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h})$ при каноническом эпиморфиме $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \twoheadrightarrow \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$. Вычисляем пространство $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}})$. Согласно следствию 8.2.3, имеет место равенство $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$.

Если G имеет тип A, D, E, то мы восстанавливаем $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ используя предложение 9.4.1 (для типов A, D) или же замечание 9.4.4 для случая E.

Пусть теперь G имеет тип $B_l, C_l, l \geqslant 3, F_4$. Напомним, предложение 5.4.5, что $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ отождествляется с $W(\mathfrak{g},\underline{\mathfrak{h}})$. Если $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \neq \{0\}$, то $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{h}}) \neq \mathfrak{t}$ и мы переходим к случаю 5. При этом, при редукции случая 4 к случаю 3 ранг полупростой части алгебры $\mathfrak{g}$ уменьшится, поэтому зацикливания не произойдет. Поэтому в дальнейшем мы считаем, что $\mathfrak{t}^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} = \{0\}$.

Правильно вложим подалгебру $\mathfrak{h}$ в параболическую подалгебру $\mathfrak{q}$ (см. алгоритм 11.1.2). Далее сопрягая $(\mathfrak{q},\mathfrak{h})$ в G, полагаем, что $\mathfrak{q}$ является антистандартной параболической подалгеброй в $\mathfrak{g}$, и что для стандартной подалгебры Леви $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{q}$ подалгебра $\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$ является подалгеброй Леви в $\mathfrak{q}$.

В случае C_l вычисление производится с помощью предложения 9.5.3. В оставшихся случаях мы, пользуясь таблицей 7.6, найдем простые идеалы $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_0, \mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{m}$, удовлетворяющие предположениям леммы 9.5.2. Рассмотрим подалгебру $\underline{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$, порожденную $\mathfrak{h}_1$ и нетривиальной частью $\mathfrak{h}_1$-модуля $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$. Согласно лемме 9.6.3, с учетом лемм 9.6.1 и 9.7.1, $W(\mathfrak{g},\underline{\mathfrak{h}}) = W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Вычисление группы $W(\mathfrak{g},\underline{\mathfrak{h}})$ для группы G типа B_l производится в пункте 9.6, см. предложение 9.6.4 и предшествующее ему обсуждение. Случай $G = F_4$ разобран в пункте 9.7 (предложение 9.7.2 и предшествующее ему обсуждение).

Случай 4. $X = G/H$ – однородное пространство. Находим параболическую подгруппу $Q \subset G$, в которую H вкладывается правильно. Выберем теперь подгруппу $P_0 \subset P$, которая является стабилизатором некоторого P-полуинвариантного вектора v в некотором G-модуле V (если P — стандартная параболическая подгруппа, то можно взять старший вес подходящего неприводимого модуля). Пусть $\chi \in \mathfrak{X}(P)$ — характер, которым P действует на v. Если $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}_0$, то однородное пространство G/H квазиаффинно, по критерию Суханова, [Су]. В противном случае, положим $\widetilde{G} = G \times \mathbb{C}^\times$, и вложим P в $\widetilde{G}$ посредством мономорфизма $\iota : p \mapsto (p, \chi(p)^{-1})$. Имеем естественное представление $\widetilde{G}$ в V, при котором $\widetilde{G}_v = \iota(P)$. Таким образом, однородное пространство $\widetilde{G}/\iota(H^\circ)$ квазиаффинно. Далее, имеем G-эквивариантное главное $\mathbb{C}^\times$-расслоение $\widetilde{G}/\iota(H^\circ) \to G/H^\circ$. Из предложения 2.3.5 следует, что $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = W(\widetilde{\mathfrak{g}},\iota(\mathfrak{h}))$. Таким образом, переходя от пары $G, G/H$ к паре $\widetilde{G}, \widetilde{G}/\iota(H)$, мы можем считать, что однородное пространство G/H квазиаффинно.

Найдем картановское пространство $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ и выделенную компоненту $\underline{X} \subset X^{L_0}$, где $L_0 := L^\circ_{0\,G,G/H}$. Положим $\underline{G} := (N_G(L_0)^\circ N_H(L_0))/L_0, \underline{H} := N_H(L_0)/L_0$. Пусть $\underline{\mathfrak{b}}, \underline{\mathfrak{t}}$ – выделенные борелевская и картановская подалгебры в $\underline{\mathfrak{g}}$, а Γ означает то же, что в случае 2. Согласно предложению 6.1.1, $\underline{X} \cong \underline{G}/\underline{H}$. Применяя теорему 5.1.3 и предложение 5.4.1, мы получаем $\mathfrak{a}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \underline{\mathfrak{t}} = \mathfrak{a}(\underline{\mathfrak{g}},\underline{\mathfrak{h}}), W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = W(\underline{\mathfrak{g}},\underline{\mathfrak{h}}) \leftthreetimes \Gamma$.

12. Обозначения и соглашения

Если алгебраическая группа обозначена прописной латинской буквой, то её алгебра Ли обозначается соответствующей строчной готической буквой. Например, алгебра Ли группы $\widetilde{L}_0$ обозначается через $\widetilde{\mathfrak{l}}_0$.

Под унипотентной алгеброй Ли мы понимаем алгебру Ли унипотентной алгебраической группы.

H-морфизмы, H-подмногообразия и т.д. Если H – алгебраическая группа, то префикс H- перед подмножеством в H-многообразии означает, что это подмножество устойчиво относительно H, а перед морфизмом H-многообразий — его эквивариантность (или инвариантность) относительно H. Термин "H-расслоение" означает главное расслоение со структуроной группой H.

Борелевские подгруппы и максимальные торы. Рассматривая редуктивную группу G мы всегда фиксируем в ней борелевскую подгруппу B и максимальный тор $T \subset B$. В соответствии с этим выбором, мы определяем систему корней $\Delta(\mathfrak{g})$ и систему простых корней $\Pi(\mathfrak{g})$ в $\mathfrak{g}$. Борелевскую подгруппу, содержащую T, и соответствующую системе отрицательных корней мы обозначаем через B^-.

Если G_1, G_2 – редуктивные группы с фиксированными борелевскими подгруппами $B_i \subset G_i$ и максимальными торами $T_i \subset B_i$, то в группе $G_1 \times G_2$ фиксированной борелевской подгруппой является $B_1 \times B_2$, а фиксированным максимальным тором $T_1 \times T_2$.

Если G_1 – некоторая редуктивная подгруппа, алгебра которой отождествляется с такой подалгеброй $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$, что $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1)$, то $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_1$ является картановской, а $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}_1$ – борелевской подалгеброй в $\mathfrak{g}_1$. Мы фиксируем борелевскую подгруппу и максимальный тор в G_1, касательными алгебрами которых являются $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{t}_1$, соответственно.

Гомоморфизмы и представления. Все гомоморфизмы редуктивных алгебраических алгебр Ли (к примеру, представления) считаются дифференциалами гомоморфизмов соответствующих редуктивных алгебраических групп.

Простые корни и фундаментальные веса. Если $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли, то α_i обозначает её i-ый простой корень, и π_i — соответствующий фундаментальный вес. Для корней и весов мы используем обозначения из [ВО].

Параболические подгруппы и подгруппы Леви. Под *стандартной* (соотв., *антистандартной*) параболической подгруппой в G мы понимаем параболическую подгруппу, которая содержит B (соотв., B^-). Как известно, каждая параболическая подгруппа сопряжена единственной стандартной (или антистандартной). Стандартные (и антистандартные) параболические подгруппы находятся во взаимно-однозначном соответствии с подмножествами в $\Pi(\mathfrak{g})$. Подмножеству $\Sigma \subset \Pi(\mathfrak{g})$ соответствует стандартная (соотв., антистандартная) параболическая подгруппа, касательная алгебра которой порождена $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ для $\alpha \in \Sigma$ (соотв., противоположенной борелевской подалгеброй $\mathfrak{b}^-$ и $\mathfrak{g}^{\alpha}, \alpha \in \Sigma$).

Под *стандартной* подгруппой Леви в G мы понимаем подгруппу Леви в стандартной (или антистандартной) параболической подгруппе, которая содержит T.

Подалгебры в полупростых алгебрах Ли. Теперь объясним обозначения для подалгебр в полупростых алгебрах. Для исключительных алгебр Ли мы используем обозначения из [Д].

Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, то под $\mathfrak{sl}_k, \mathfrak{so}_k, \mathfrak{sp}_k$ мы подразумеваем подалгебры, которые аннулируют некоторое подпространство размерности $n-k$ в $\mathbb{C}^n$ и сохраняют соответствующую форму на его дополнении (для $\mathfrak{so}_k, \mathfrak{sp}_k$).

Подалгебры $\mathfrak{so}_k \subset \mathfrak{so}_n, \mathfrak{sp}_k \subset \mathfrak{sp}_n$ определены аналогично. Подалгебра $\mathfrak{gl}_k$ вложена в $\mathfrak{so}_n, \mathfrak{sp}_n$ прямой суммой представлений τ, τ^* и тривиального представления (где τ обозначает тавтологическое представление алгебры $\mathfrak{gl}_k$). Вложения $\mathfrak{sl}_k, \mathfrak{sp}_k$ в $\mathfrak{so}_n$ (соотв. $\mathfrak{sl}_k, \mathfrak{so}_k$) суть композиции описанных вложений $\mathfrak{gl}_k \hookrightarrow \mathfrak{so}_n$ и вложений $\mathfrak{sp}_k \hookrightarrow \mathfrak{gl}_k, \mathfrak{sl}_k \hookrightarrow \mathfrak{gl}_k, \mathfrak{so}_k \hookrightarrow \mathfrak{gl}_k$. Подалгебра G_2 (соотв., $\mathfrak{spin}_7$) в $\mathfrak{so}_n$ — это образ G_2 (соотв., $\mathfrak{so}_7$) при прямой сумме 7-мерного неприводимого (соотв., спинорного) и тривиального представлений.

Данное выше описание определяет подалгебры с точностью до сопряженности в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Ниже мы приводим, некоторые обозначения, которые мы используем в тексте.

$A^{(B)}$	подмножество в G-алгебре A, состоящее из всех B-полуинвариантных функций.
$A^{\times}$	подгруппа всех обратимых функций в алгебре A.
$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ (соотв., $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$)	группа всех (соотв., внутренних) внутренних автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$.
(G,G) (соотв., $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$)	коммутант группы G (соотв., алгебры Ли $\mathfrak{g}$)
G°	связная компонента единицы алгебраической группы G.
$G *_H V$	однородное расслоение со слоем V над G/H.
$[g,v]$	представитель пары (g,v) в $G *_H V$.
G_x	стабилизатор точки $x \in X$ под действием $G : X$.
$\mathfrak{g}^{\alpha}$	корневое подпространство в $\mathfrak{g}$, соответствующее корню α.
$\mathfrak{g}^{(A)}$ (соотв. $G^{(A)}$)	подалгебра в $\mathfrak{g}$, порожденная подпространствами $\mathfrak{g}^{\alpha}$ с $\alpha \in A \cup -A$ (соотв., соответствующая связная подгруппа в G).
$N_G(H)$, (соотв., $N_G(\mathfrak{h}), \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$)	нормализатор алгебраической подгруппы H в алгебраической группе G (соотв., подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ в алгебраической группе G, подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$).
$\mathrm{Quot}(A)$	поле частных алгебры A.
$\mathrm{rk}(G)$	ранг алгераической группы G.
$R(\lambda)$	неприводимое представление редуктивной группы (редуктивной алгебры Ли), соответствующее старшему весу λ.
$\mathrm{R}_u(H)$ (соотв. $\mathrm{R}_u(\mathfrak{h})$)	унипотентный радикал алгебраической группы H (соотв., алгебраической алгебры Ли $\mathfrak{h}$).
$\mathrm{tr.deg}\, A$	степень трансцендентности алгебры A.
$V^{\mathfrak{g}}$	$= \{v \in V \mid \mathfrak{g}v = 0\}$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а V — $\mathfrak{g}$-модуль.
$V(\lambda)$	неприводимый модуль старшего веса λ над редуктивной алгебраической группой или редуктивной алгеброй Ли.
$W(\mathfrak{g})$	группа Вейля алгебры Ли $\mathfrak{g}$.
$\mathfrak{X}(G)$	решетка характеров алгебраической группы G.
$\mathfrak{X}_G$	решетка весов связной редуктивной группы G.
X^G	множество неподвижных точек для действия группы G на X.
$X/\!/G$	категорный фактор для действия $G : X$, где G – редуктивная группа, а X – аффинное G-многообразия.
X/G	рациональный фактор для действия алгебраической группы G на алгебраическом многообразии X.

$\#X$	количество элементов конечного множества X.
$Z(G)$(соотв. $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$)	центр алгебраической группы G (соотв. алгебры Ли $\mathfrak{g}$).
$Z_G(H)$, (соотв., $Z_G(\mathfrak{h}), \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$)	централизатор алгебраической подгруппы H в алгебраической группе G (соотв., подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ в алгебраической группе G, подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$).
$\alpha^\vee$	двойственный корень к корню α.
$\Delta(\mathfrak{g})$	система корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$.
λ^*	двойственный старший вес к старшему весу λ.
$\Lambda(\mathfrak{g})$	решетка корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$.
$\mu_{G,X}$	отображение моментов для гамильтонова G-многообразия X.
$\Pi(\mathfrak{g})$	система простых корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$.
$\pi_{G,X}$	морфизм (категорной) факторизации $X \to X//G$.
$\varphi//G$	морфизм факторов, индуцированный G-морфизмом φ.
с.о.п.	стабилизатор общего положения.
с.п.о.п.	стабильная подалгебра общего положения.

Литература

[АВЭ] Е.М. Андреев, Э.Б. Винберг, А.Г. Элашвили, *Орбиты наибольшей размерности полупростых линейных групп Ли.* Функц. анал. и прил. т.1(1967), N1, 3-7.

[Б] Н. Бурбаки. *Группы и алгебры Ли.* М.:Мир, гл. 4-6: 1972; гл. 7-8: 1978.

[Ве] Б.Ю. Вейсфеллер. *Об одном классе унипотентных подгрупп в полупростых алгебраических группах.* УМН т.22(1966), N2, с. 222-223.

[Ви1] Э.Б. Винберг. *Инвариантные линейные связности на однородном пространстве.* Труды ММО, 9(1960), 191-210.

[Ви2] Э.Б. Винберг. *Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия.* УМН, т.56(2001), N1, с. 3-62.

[Ви3] Э.Б. Винберг. *Коммутативные однородные пространства гейзенбергова типа.* Труды ММО, 64(2003).

[ВО] Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.* М: Наука, 1988.

[ВП] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов. *Теория инвариантов.* Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр., т. 55. М: ВИНИТИ, 1989, с. 137-309.

[Д] Е.Б. Дынкин. *Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли.* Мат. сборник (нов. сер.) т.30(1952), с. 349-462.

[Кр] Х. Крафт. *Геометрические методы в теории инвариантов.* М: Мир, 1987.

[Л1] И.В. Лосев. *Коизотропные представления редуктивных групп.* Труды ММО, 66(2005), с. 157-181.

[Л2] И.В. Лосев. *Симплектические слайсы для редуктивных групп.* Мат. сборник, т.197(2006), N2, с. 75-86.

[Л3] И.В. Лосев. *О комплексных слабо-коммутативных однородных пространствах.* Труды ММО, 67(2006), с. 228-255.

[Па1] Д.И. Панюшев. *О пространствах орбит конечных и связных линейных групп.* Изв. АН СССР, сер. мат., т. 47(1982), N1, с. 95-99.

[Па2] Д.И. Панюшев. *Ранг и сложность в теории инвариантов.* Диссертация на соискание степени доктора физ.-мат. наук.

[По1] А.М. Попов. *Конечные стационарные подгруппы общего положения простых линейных групп Ли.* Труды ММО, т.48(1985), с. 7-59.

[По2] В.Л. Попов. *Критерий стабильности для действия полупростой алгебраической группы на факториальном многообразии.* Изв. АН СССР, сер. мат., т.34(1970), N3, с. 523-531.

[См] А.В. Смирнов. *Квази-замкнутые орбиты в проективных представлениях полупростых комплексных групп Ли.* Труды ММО, 64(2003), 193-247.

[Су] А.А. Суханов. *Описание наблюдаемых подгрупп в линейных алгебраических группах.* Мат. сборник, 137(1988), N1, с. 90-102.

[Ти] Д.А. Тимашев. *Классификация G-многообразий сложности 1.* Изв. РАН, сер. мат., т. 61(1997), N2, 127-162.

[Эл1] А.Г. Элашвили. *Каноническая форма и стационарные подалгебры точек общего положения для простых линейных групп Ли.* Функц. анализ и его прил. т.6(1972), N1, с. 51-62.

[Эл2] А.Г. Элашвили. *Стационарные подалгебры общего положения для неприводимых линейных групп Ли.* Функц. анализ и его прил. т.6(1972), N2, с. 65-78.

[A] D.N. Akhiezer. *Equivariant completion of homogeneous algebraic varieties by homogeneous divisors.* Ann. Global Anal. Geom. v1(1983), 49-78.

[BLV] M. Brion, D. Luna, T. Vust. *Espaces homogènes sphériques.* Invent. Math. 84(1986), 617-632.

[Bra] P. Bravi. *Wonderful varieties of type D.* Ph. D. thesis, Università di Roma "La Sapienza", 2003.

[Bri1] M. Brion. *Groupe de Picard et nombres charactéristic des variétés sphériques.* Duke Math. J., 58(1989), n.2, p. 397-424.

[Bri2] M. Brion. *On spherical varieties of rank 1.* Group actions and invariant theory, CMS. Conf. Proc., v.10, 1989, p. 31-41.

[Bri3] M. Brion. *Vers une généralisation des espaces symmétriques.* J. Algebra, 134(1990), 115-143.

[Bri4] M. Brion. *Variétés sphériques.* Notes de la session de la S.M.F. "Opérations hamiltoniennes et opérations de groupes algébriques", Grenoble, 1997. www-fourier.ujf-grenoble.fr/ mbrion/spheriques.ps.

[Ca] E. Cartan. *Sur certaines formes rimanniennes remarquable des géométries à groupe fondamentale simple.* Ann. Ec. Norm. Supp. (3), 44(1927), 345-467.

[Ch] C. Chevalley. *Foundaments de la géométrie algébrique.* Paris, 1958.

[Gr] F. Grosshans. *Constructing invariant polynomials via Tschirnhaus transformations.* Lect. Notes Math. vol. 1278, pp. 95-102. Berlin, Heidelberg, New York. Springer 1987.

[GS] V. Guillemin, Sh. Sternberg, *Symplectic techniques in physics.* Cambridge University Press, 1984.

[I] S. Iitaka. *On logarithmic Kodaira dimension of algebraic varieties.* Complex analysis and algebraic geometry, p. 175-189. Iwanami Shoten, Tokyo, 1977.

[Kn1] F. Knop. *Weylgruppe und Momentabbildung.* Invent. Math. 1990. V. 99. p. 1-23.

[Kn2] F. Knop. *The Luna-Vust theory of spherical embeddings.* Proceedings of the Hydebarad conference on algebraic groups. Madras: Manoj Prokashan 1991.

[Kn3] F. Knop. *Über Bewertungen, welche unter einer reductiven Gruppe invariant sind.* Math. Ann., 295(1993), p. 333-363.

[Kn4] F. Knop. *The assymptotic behaviour of invariant collective motion.* Invent. Math. 1994. V.114. p. 309-328.

[Kn5] F. Knop. *On the set of orbits for a Borel subgroup.* Comment. Math. Helv., v.70(1995), N2.

[Kn6] F. Knop. *Automorphisms, root systems and compactifications.* J. Amer. Math. Soc. 9(1996), n.1, p. 153-174.

[Kn7] F. Knop. *Weyl groups of Hamiltonian manifolds, I.* Preprint (1997). dg-ga/9712010.

[Kn8] F. Knop. *Some remarks on multiplicity free spaces.* Proc. NATO Adv. Study Inst. on Representation Theory and Algebraic Geometry (A. Broer, G. Sabidussi, eds.). Nato ASI Series C, v. 514, Dotrecht: Kluwer, 1998, p. 301-317.

[Kn9] F. Knop. *Classification of multiplicity free symplectic representations.* Preprint (2005), arXiv: math.SG/0505268.

[Kn10] F. Knop. *Invariant functions on symplectic representations.* Preprint (2005), arXiv:math.AG/0506171.

[KvS] F. Knop, B. van Steirteghem. *Classification of smooth affine spherical varieties.* Preprint (2005), arXiv:math.AG/0505102, v.2.

[Krä] M. Krämer. *Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen.* Compos. Math. 38 (1979), 129-153.

[Le] A.S. Leahy. *A classification of multiplicity free representations.* J. Lie Theory, v.8(1998), p. 367-391.

[Lo1] I.V. Losev. *Algebraic Hamiltonian actions.* Preprint (2006), arXiv:math.AG/0601023.

[Lo2] I.V. Losev. *Computation of the Cartan spaces of affine homogeneous spaces.* Preprint(2006), arXiv:math.AG/0606101.

[LR] D. Luna, R.W. Richardson. *A generalization of the Chevalley restriction theorem.* Duke Math. J., v.46(1980), N3, p. 487-496.

[Lu1] D. Luna. *Sur les orbites fermées des groupes algébriques reductifs.* Invent. Math. 16(1972),1-5.
[Lu2] D. Luna. *Slices ètales.* Bull. Soc. Math. France, 33(1973),p. 81-105.
[Lu3] D. Luna. *Toute variété magnifique est sphérique.* Transform. Groupes, v.1(1996), n.3, p. 249-258.
[Lu4] D. Luna. *Grosses cellules pour les variétés sphériques.* Austr. Math. Soc. Lect. Ser., v.9, 267-280. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
[Lu5] D. Luna. *Variétés sphériques de type A.* IHES Publ. Math., 94(2001), 161-226.
[LV] D. Luna, T. Vust. *Plongements d'espaces homogènes.* Comment. Math. Helv., 58(1983), 186-245.
[McG] W. McGovern. *The adjoint representation and the adjoint action.* Encyclopaedia of mathematical sciences, 131. Invariant theory and algebraic transformation groups, II, Springer Verlag, Berlin, 2002.
[Pa1] D.I. Panyushev. *Complexity of nilpotent orbits.* Manuscripta Math., 83(1994), p.223-237.
[Pa2] D.I. Panyushev. *A restriction theorem and Poincare series for U-invariants.* Math. Annalen, 301(1995), p. 655-675.
[Pa3] D.I. Panyushev. *On homogeneous spaces of rank 1.* Indag. Math. 6(1995), 315-325.
[Pe] G. Pezzini. *Wonderful varieties of type C.* Ph. D. thesis, Università di Roma "La Sapienza", 2003.
[Sch1] G.W. Schwarz. *Representations of simple groups with a free module of covariants.* Invent. Math., 50(1978), p.1-12.
[Sch2] G.W. Schwarz. *Lifting smooth homotopies of orbit spaces.* Publ. Math. IHES, N51(1980), pp. 37-135.
[Su] H. Sumihiro, *Equivariant completion.* J. Math. Kyoto Univ., 14, N1.
[Ti1] D.A. Timashev, *Complexity of homogeneous spaces and growth of multiplicities.* Transform. Groups, 9(2004), N1, p. 65-72.
[Ti2] D.A. Timashev, *Equivariant symplectic geometry of cotangent bundles II.* Preprint (2004), arXiv:math.AG/0502284.
[Ti3] D.A. Timashev, *Homogeneous spaces and equivariant embeddings.* Preprint (2006), arXiv:math.AG/0602228.
[Vi] E.B. Vinberg. *Equivariant symplectic geometry of cotangent bundles.* Moscow Math. J. 1(2001), no. 2, 287-299.
[Vu1] Th. Vust. *Opération de groupes réductifs dans un type de cônes presque homogènes.* Bull. Soc. Math. France, 102(1974), 317-334.
[Vu2] Th. Vust. *Plongement d'espaces symmétriques algébriques: une classification.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Ser. IV, 17(1990), 165-194.
[Wa] B. Wasserman. *Wonderful variety of rank two.* Transform. Groups, v.1(1996), no. 4, p. 375-403.
[We] H. Weyl. *Theoie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher durch lineare Transformationen.* Math. Zeitschrift 23(1925), 271-309; 24(1926), 328-395, 789-791.

Индекс обозначений