Мотивные интегралы и функциональные уравнения.

Е. Горский *

1 Введение

Мотивное интегрирование, введённое М. Концевичем, является мощным методом для изучения пространства формальных кривых на заданном многообразии. Мотивные интегралы являются производящими функциями для мотивных мер множеств уровня инвариантов этих кривых. Известны примеры явного вычисления мотивных интегралов (см., напр., [1]). В более общей ситуации значения интегралов неизвестны, однако некоторые из них удовлетворяют функциональным уравнениям после введения дополнительных переменных.

В настоящей работе при помощи формулы замены переменных Денёфа-Лозера ([1]) получено функциональное уравнение на мотивный интеграл, дающий производящую функцию, соответствующую числу Милнора плоской кривой. Его решение единственно с точностью до умножения на константу, причём коэффициенты решения могут быть алгоритмически вычислены по начальным данным. Например, это означает, что решение должно удовлетворять некоторым уравнениям в частных производных. Полученное уравнение также дает возможность вычислить мотивную меру (и, следовательно, многочлен Ходжа-Делиня) страта $\{\mu = const\}$ в пространстве ростков плоских кривых. Некоторые примеры вычислений рассмотрены в разделе 4.

Та же идея дает и другие уравнения, например, на интеграл, соответствующий индексу пересечения на пространстве пар кривых. Более того, используя понятие степенной структуры на кольце Гротендика ([2]), вводится мотивная мера на пространстве неупорядоченных наборов дуг. В этом случае также получено уравнение на интеграл, соответствующий индексу пересечения.

Некоторые производящие функции со значениями в кольце Гротендика квазипроективных алгебраических многообразий $K_0(Var_{\mathbb{C}})$ (или в кольце Гротендика мотивов Чжоу) удовлетворяют функциональным уравнениям, аналогичным функциональным уравнениям для дзета-функции Хассе-Вейля. Эти уравнения, полученные М.Капрановым ([3]) и Ф. Хейнлот ([4]), вытекают из теории двойственности на кривых и абелевых многообразиях. Отметим, что они имеют другую природу.

*Работа поддержана грантом НШ-4719.2006.1.

Рассмотрим пространство $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathbb{C}^2,0}$ ростков аналитических кривых в начале координат на плоскости. Это множество пар $(x(t), y(t))$ формальных степенных рядов (без свободного члена). Пусть $\mathcal{L}^N = \mathcal{L}^N_{\mathbb{C}^2,0}$ – пространство N–струй кривых, и π_N – соответствующая проекция.

Через $K_0(Var_{\mathbb{C}})$ будем обозначать кольцо Гротендика квазипроективных алгебраических многообразий. Оно порождено классами изоморфных комплексных квазипроективных алгебраических многообразий по модулю соотношений вида $[X] = [Y] + [X \setminus Y]$, где Y – замкнутое по Зарисскому подмножество X. Умножение задается формулой $[X] \cdot [Y] = [X \times Y]$. Через $\mathbb{L} \in K_0(Var_{\mathbb{C}})$ будем обозначать класс аффинной прямой.

Рассмотрим кольцо $K_0(Var_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$ со следующей фильтрацией на нем: F_k порождено элементами вида $[X] \cdot [\mathbb{L}^{-n}]$ с $n - \dim X \geq k$. Пусть $\mathcal{M}$ – пополнение $K_0(Var_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$ по этой фильтрации.

Назовем множество $A \subset \mathcal{L}$ цилиндрическим, если для некоторого N существует конструктивное подмножество $A_N \subset \mathcal{L}^N$ такое, что $A = \pi_N^{-1}(A_N)$. Для цилиндрических множеств определим мотивную меру формулой

$$\chi_g(A) = [A_N] \cdot \mathbb{L}^{-2N} \in K_0(Var_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}].$$

На некотором пополнении алгебры цилиндрических подмножеств подмножеств Денеф и Лозер ([1]) (с помощью идей М. Концевича) построили счетно-аддитивную меру χ_g, принимающую значения в кольце $\mathcal{M}$. Эта мера позволяет определить мотивный интеграл для простых функций на $\mathcal{L}$ ([1]).

В дальнейшем часто будут использоваться простые функции $v_x = Ord_0 x(t), v_y = Ord_0 y(t)$ и $v = \min\{v_x, v_y\}$, определённые для кривой $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Пусть $h : Y \to X$ – собственный бирациональный морфизм гладких алгебраических многообразий размерности d. Пусть $J = h^* K_X - K_Y$ – относительный канонический дивизор на Y (локально – множество нулей якобиана отображения). Он определяет функцию ord_J на пространстве кривых на Y – индекс пересечения кривой с дивизором. Например, для сигма-процесса в начале координат на плоскости J совпадает со вклеенной проективной прямой. Тогда имеет место следующая формула замены переменных в мотивном интеграле ([1]).

Теорема 1 *Пусть A – измеримое подмножество в пространстве кривых на X, α – простая функция. Тогда*

$$\int_A \alpha d\chi_g = \int_{h^{-1}(A)} (h^*\alpha) \mathbb{L}^{-ord_J}.$$

3 Функциональное уравнение для числа Милнора

Число Милнора особенности плоской кривой $\{f = 0\}$ определяется как коразмерность идеала, порождённого частными производными $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

Мы будем использовать следующее утверждение.

ова равно μ, а порядок её касания с исключительным дивизором равен p. Тогда число Милнора кривой равно

$$\mu + p(p-1).$$

Положим

$$I(t,a,b,c,d,f) = \int_{\mathcal{L}} t^{\mu} a^{v_x} b^{v_y} c^{v_x^2} d^{v_x v_y} f^{v_y^2} d\chi_g,$$

Теорема 2 *Имеет место функциональное уравнение:*

$$I(t,a,b,c,d,f) = I(t, t^{-1}ab\mathbb{L}^{-1}, b, tcdf, df^2, f) + I(t, t^{-1}ab\mathbb{L}^{-1}, a, tcdf, dc^2, c) +$$

$$+ I(t, t^{-1}ab\mathbb{L}^{-1}, 1, tcdf, 1, 1) \cdot (\mathbb{L} - 1).$$

Доказательство. Пусть

$$A(t,a,b,c,d,f) = \int_{\{v_y > v_x\}} t^{\mu} a^{v_x} b^{v_y} c^{v_x^2} d^{v_x v_y} f^{v_y^2} d\chi_g.$$

Заметим, что

$$\int_{\{v_x > v_y\}} t^{\mu} a^{v_x} b^{v_y} c^{v_x^2} d^{v_x v_y} f^{v_y^2} d\chi_g = A(t,b,a,f,d,c),$$

Вычислим аналогичный интеграл по $\{v_x = v_y\}$. Для этого заметим, что при $v_x = v_y$

$$y = \lambda x + \widetilde{y}, \lambda \neq 0, v(\widetilde{y}) > v(y).$$

При фиксированном λ $\mu(x(t), y(t)) = \mu(x(t), \widetilde{y}(t))$, поэтому

$$\int_{\{v_x = v_y\}} t^{\mu} a^{v_x} b^{v_y} c^{v_x^2} d^{v_x v_y} f^{v_y^2} d\chi_g = \int_{\{v_x = v_y\}} t^{\mu} (ab)^{v_x} (cdf)^{v_x^2} d\chi_g =$$

$$(\mathbb{L} - 1) \int_{\{v_x < v_{\widetilde{y}}\}} t^{\mu} (ab)^{v_x} (cdf)^{v_x^2} d\chi_g = A(t, ab, 1, cdf, 1, 1) \cdot (\mathbb{L} - 1).$$

Следовательно,

$$I(t,a,b,c,d,f) = A(t,a,b,c,d,f) + A(t,b,a,f,d,c) + A(t,ab,1,cdf,1,1,1) \cdot (\mathbb{L} - 1).$$

Проведём сигма-процесс. Если $v_y > v_x$, то $y(t) = x(t)\theta(t), \theta(0) = 0$, то есть соответствующие модификации кривых проходят через фиксированную точку p_0 исключительного дивизора. Тогда

$$\sigma^* \mu = \mu + v_x(v_x - 1), \sigma^* v_x = v_x, \sigma^* v_x^2 = v_x^2,$$

$$\sigma^* v_y = v_y + v_\theta, \sigma^* v_x v_y = v_x^2 + v_x v_\theta, \sigma^* v_y^2 = v_x^2 + 2 v_x v_\theta + v_\theta^2.$$

По формуле замены переменных Денефа-Лозера имеем:

$$A(t,a,b,c,d,f) = \int_{\{v_y > v_x\}} t^{\mu} a^{v_x} b^{v_y} c^{v_x^2} d^{v_x v_y} f^{v_y^2} d\chi_g =$$

$$\int_{\mathcal{L}} t^{\mu}(t^{-1}ab\mathbb{L}^{-1})^{v_x} b^{v_\theta}(tcdf)^{v_x^2}(df^2)^{v_x v_\theta} f^{v_\theta^2} d\chi_g = I(t, t^{-1}ab\mathbb{L}^{-1}, b, tcdf, df^2, f).$$

Таким образом,

$$I(t,a,b,c,d,f) = I(t,t^{-1}ab\mathbb{L}^{-1},b,tcdf,df^2,f)+I(t,t^{-1}ab\mathbb{L}^{-1},a,tcdf,dc^2,c)+ \\ +I(t,t^{-1}ab\mathbb{L}^{-1},1,tcdf,1,1)\cdot(\mathbb{L}-1). \qquad (1)$$

□

Кроме того, ясно, что

$$I(t,a,b,c,d,f) = I(t,b,a,f,d,c) \qquad (2)$$

и из дифференцирования под знаком интеграла видно, что

$$-c\frac{\partial I}{\partial c} = [-a\frac{\partial}{\partial a}]^2 I, -d\frac{\partial I}{\partial d} = [a\frac{\partial}{\partial a}]\circ b\frac{\partial}{\partial b}I,\ -f\frac{\partial I}{\partial f} = [-b\frac{\partial}{\partial b}]^2 I. \qquad (3)$$

Теорема 3 *Функция $I(a,b,c,d,f)$, делящаяся на $abcdf$ и удовлетворяющяя функциональному уравнению (1) и условию симметрии (2), единственна с точностью до умножения на константу.*

Перед тем, как доказать теорему 3, рассмотрим сначала более простой пример аналогичного функционального уравнения на мотивный интеграл. Пусть

$$f(a,b) = \int_{\mathcal{L}} a^{v_x} b^{v_y} d\chi_g = \frac{ab\mathbb{L}^{-2}(\mathbb{L}-1)^2}{(1-a\mathbb{L}^{-1})(1-b\mathbb{L}^{-1})}.$$

Легко видеть, что из аналогичных приведённым выше соображений и формулы замены переменной вытекает функциональное уравнение

$$f(a,b) = f(ab\mathbb{L}^{-1},a) + f(ab\mathbb{L}^{-1},b) + f(ab\mathbb{L}^{-1},1)\cdot(\mathbb{L}-1). \qquad (4)$$

Опишем его решения. Отметим, что из определения $f(a,b)$ вытекает, что $f(a,b) = f(b,a)$, $f(0,b) = 0$.

Пусть $f(a,b) = \sum_{i,j} f_{ij}a^i b^j$. Тогда функциональное уравнение (4) переписывается в виде

$$\sum_{i,j} f_{ij}a^i b^j = \sum_{i,j} f_{ij}\mathbb{L}^{-i}a^{i+j}b^i + \sum_{i,j} f_{ij}\mathbb{L}^{-i}a^i b^{i+j} + (\mathbb{L}-1)\sum_{i,j} f_{ij}\mathbb{L}^{-i}a^i b^i =$$

$$\sum_{i\geq j} f_{j,i-j}\mathbb{L}^{-j}a^i b^j + \sum_{i\leq j} f_{i,j-i}\mathbb{L}^{-i}a^i b^j + (\mathbb{L}-1)\sum_{i,j} f_{ij}\mathbb{L}^{-i}a^i b^i.$$

Учитывая условия $f_{ij} = f_{ji}, f_{i0} = 0$, получим систему рекуррентных соотношений на коэффициенты f:

$$\begin{cases} f_{ij} = \mathbb{L}^{-j} f_{i-j,j}, i > j \\ f_{ii} = \mathbb{L}^{-i}(\mathbb{L}-1)\sum_{j=1}^{\infty} f_{ij}. \end{cases} \qquad (5)$$

$$\begin{cases} f_{ij} = \varepsilon_j f_{i-j,j}, i > j, \\ f_{ii} = C\varepsilon_i \sum_{j=1}^{\infty} f_{ij}. \end{cases} \tag{6}$$

Лемма 2 *Пусть* $1 - \varepsilon_i - C\varepsilon_i \neq 0, C \neq 0, \varepsilon_i \neq 0, \varepsilon_i \neq 1$ *для всех* i. *Тогда система уравнений (6) имеет не тождественно нулевое решение, однозначно определённое с точностью до умножения на константу, для которого* $f_{i,j} = f_{j,i}$ *и* $f_{i,0} = 0$.

Доказательство. Из первого уравнения (6) получаем, что

$$\sum_{j>i} f_{ij} = \varepsilon_i \sum_{j>i} f_{i,j-i} = \varepsilon_i \sum_{j>0} f_{i,j}.$$

С другой стороны, $f_{ii} = C\varepsilon_i \sum_{j>0} f_{ij}$, поэтому $f_{ii} = C \sum_{j>i} f_{ij}$, откуда

$$\sum_{0<j<i} f_{ij} = \sum_{j>0} f_{ij} - f_{ii} - \sum_{j>i} f_{ij} = f_{ii}(\frac{1}{C\varepsilon_i} - 1 - \frac{1}{C}),$$

поэтому

$$f_{ii} = \frac{C\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i - C\varepsilon_i} \sum_{0<j<i} f_{ij}.$$

Пусть f_{11} – произвольное ненулевое число. Вычислим f_{ij}. Если $i \neq j$, то воспользуемся первым уравнением (6), а если $i = j$, то предыдущим равенством. В любом случае f_{ij} будет выражено через какие-то $f_{k,l}$ с $k + l < i + j$, поэтому рано или поздно этот процесс закончится, и f_{ij} будет выражено через f_{11}. Поэтому решение единственно.

Нетрудно показать, что описанный алгоритм действительно дает решение (6). □

Вернёмся к доказательству теоремы 3. Рассмотрим уравнение (1). Пусть

$$I(t, a, b, c, d, f) = \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5} g_{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3} d^{k_4} f^{k_5}.$$

Тогда

$$\sum_{\underline{k}} g_{\underline{k}} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3} d^{k_4} f^{k_5} = \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5} g_{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5} (t^{-1}\mathbb{L}^{-1}ab)^{k_1} b^{k_2} (tcdf)^{k_3} (df^2)^{k_4} f^{k_5} +$$

$$\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5} g_{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5} (t^{-1}\mathbb{L}^{-1}ab)^{k_1} a^{k_2} (tcdf)^{k_3} (dc^2)^{k_4} c^{k_5} +$$

$$(\mathbb{L} - 1) \cdot \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5} g_{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5} (t^{-1}\mathbb{L}^{-1}ab)^{k_1} (tcdf)^{k_3}$$

Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} g_{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5} = t^{k_3-k_1}\mathbb{L}^{-k_1} g_{k_1,k_2-k_1,k_3,k_4-k_3,k_5-2k_4+k_3}, k_2 \geq k_1, k_4 \geq k_3, k_5 \geq 2k_4 - k_3 \\ g_{k_1,k_1,k_3,k_3,k_3} = t^{k_3-k_1}\mathbb{L}^{-k_1}(\mathbb{L} - 1) \sum_{k_2,k_4,k_5} g_{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5} \\ g_{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5} = g_{k_2,k_1,k_5,k_4,k_3}. \end{cases} \tag{7}$$

творяет неравенствам

$$k_2 \geq k_1, k_4 \geq k_3, k_5 \geq 2k_4 - k_3$$

или

$$k_1 \geq k_2, k_4 \geq k_5, k_3 \geq 2k_4 - k_5.$$

Аналогично доказательству леммы 2 можно проверить, что каждый коэффициент может быть выражен через $g_{1,1,1,1,1}$, поэтому решение единственно.

Так как по теореме 2 $\int_{\mathcal{L}} t^{\mu} a^{v_x} b^{v_y} c^{v_x^2} d^{v_x v_y} f^{v_y^2} d\chi_g$ удовлетворяет уравнению (1), каждое решение этого уравнения пропорционально этому.

Следовательно,

$$I(t,a,b,c,d,f) = \sum G_{i,j}(t) a^i b^j c^{i^2} d^{ij} e^{j^2}.$$

Таким образом, из (7) вытекают дифференциальные уравнения (3).

Вычислим $g_{1,1,1,1,1}$. Если $v_x = v_y = 1$, то $\mu = 0$, поэтому

$$g_{1,1,1,1,1} = \chi_g\{v_x = v_y = 1\} = (\mathbb{L}-1)^2 \mathbb{L}^{-2}.$$

4 Примеры

Напомним, что

$$G_{i,j}(t) = \int_{v_x = i, v_y = j} t^{\mu} d\chi_g.$$

Можно проверить, что система (7) дает систему уравнений для $G_{i,j}(t)$ вида (6) с

$$\varepsilon_k = t^{k^2-k} \mathbb{L}^{-k}, C = (\mathbb{L}-1).$$

Поэтому из доказательства леммы 2 получаем

$$\begin{cases} G_{i,j}(t) = t^{j^2-j} \mathbb{L}^{-j} G_{i-j,j}, \ j < i \\ G_{i,i}(t) = \frac{(\mathbb{L}-1) t^{i^2-i} \mathbb{L}^{-i}}{1 - t^{i^2-i} \mathbb{L}^{1-i}} \sum_{j<i} G_{i,j}(t). \\ G_{1,1}(t) = (\mathbb{L}-1)^2 \mathbb{L}^{-2}. \end{cases}$$

Тогда $G_{1,n}(t) = \mathbb{L}^{-1} G_{1,n-1}$, откуда

$$G_{1,n}(t) = (\mathbb{L}-1)^2 \mathbb{L}^{-1-n}.$$

Это соответствует тому факту, что кривая с $v_x = 1$ гладкая, поэтому $\mu = 0$.

Далее, $G_{2,n}(t) = t^2 \mathbb{L}^{-2} G_{2,n-2}(t)$ для $n > 2$, поэтому

$$G_{2,2n-1} = t^{2n-2} \mathbb{L}^{2-2n} G_{2,1} = (\mathbb{L}-1)^2 t^{2n-2} \mathbb{L}^{-1-2n}.$$

Число Милнора кривой с $v_x = 2$ и нечётным v_y равно $v_y - 1$, так как особенность имеет тип $A_{v_y - 1}$.

$$G_{2,2n}(t) = t^{2n-2}\mathbb{L}^{2-2n}G_{2,2} = t^{2n}\mathbb{L}^{-2n}\frac{(\mathbb{L}-1)}{1-t^2\mathbb{L}^{-1}}G_{1,2}(t) =$$

$$\frac{t^{2n}\mathbb{L}^{-2n-3}(\mathbb{L}-1)^3}{1-t^2\mathbb{L}^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2(n+k)}\mathbb{L}^{-2n-3-k}(\mathbb{L}-1)^3.$$

Объясним этот ответ. После замены переменной можно считать, что $x(t) = t^2$. Пусть

$$y(t) = a_{2n}t^{2n} + \ldots + a_{2m+1}t^{2m+1} + \ldots,$$

где a_{2m+1} – первый ненулевой коэффициент с нечётным индексом. Уравнение такой кривой имеет вид

$$F(x,y) = x^{2m+1} + (y - a_{2n}x^n - \ldots - a_{2m}x^m)^2 + \ldots = 0,$$

поэтому число Милнора равно $2m$. Положим $k = m - n$. Для фиксированного $x(t)$ мера множества рядов $y(t)$ с данным m равняется

$$(\mathbb{L}-1)^2\mathbb{L}^{-2n-(m-n+1)} = (\mathbb{L}-1)^2\mathbb{L}^{-2n-k-1},$$

а мера множества рядов $x(t)$ порядка 2 равняется $(\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-2}$. Перемножая эти выражения, получим нужную формулу.

Лемма 3 *Пусть a – наибольший общий делитель чисел i и j. Тогда*

$$G_{i,j}(t) = t^{(i-1)(j-1)-(a-1)^2}\mathbb{L}^{2a-i-j}G_{a,a}(t).$$

Доказательство. Для $i = j$ формула очевидна. Предположим, что она выполнена для $i - j$ и j $(i > j)$. Тогда

$$G_{i,j}(t) = t^{j^2-j}\mathbb{L}^{-j}G_{i-j,j} = t^{(i-j-1)(j-1)-(a-1)^2+j(j-1)}\mathbb{L}^{2a-(i-j)-j-j}G_{a,a}(t).$$

Теперь утверждение леммы следует из алгоритма Евклида. $\square$

Аналогично дискуссии выше можно получить следующие ответы:

a	1	2	3	4
$G_{a,a}(t)$	$(\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^2$	$\frac{(\mathbb{L}-1)^3t^2\mathbb{L}^{-5}}{1-t^2\mathbb{L}^{-1}}$	$\frac{(\mathbb{L}-1)^3t^6\mathbb{L}^{-7}(1+t^2\mathbb{L}^{-1})}{1-t^6\mathbb{L}^{-2}}$	$\frac{(\mathbb{L}-1)^3t^{12}\mathbb{L}^{-9}(1-t^2\mathbb{L}^{-1}+t^6\mathbb{L}^{-1}-t^8\mathbb{L}^{-3})}{(1-t^{12}\mathbb{L}^{-3})(1-t^2\mathbb{L}^{-1})}$

Эта таблица вместе с леммой 3 дает значения $G_{i,j}(t)$ для случая НоД$(i,j) \leq 4$.

Утверждение. Пусть $a =$ НоД(i,j). $G_{ij}(t)$ – степенной ряд по переменной t, коэффициенты которого являются многочленами Лорана от $\mathbb{L}$. Если $a = 1$, то

$$G_{i,j}(t) = (\mathbb{L}-1)^2t^{(i-1)(j-1)}\mathbb{L}^{-i-j},$$

$$G_{i,j}(t) = (\mathbb{L}-1)^3 t^{(i-1)(j-1)+a-1}\mathbb{L}^{-i-j-1} + \text{члены более высокой степени по } t.$$

Доказательство. Первое утверждение легко доказывается по индукции. Случай $a = 1$ вытекает из леммы 3. Докажем формулу для случая $a > 1$. Имеем:

$$G_{a,a}(t) = \frac{(\mathbb{L}-1)t^{a^2-a}\mathbb{L}^{-a}}{1 - t^{a^2-a}\mathbb{L}^{1-a}}(G_{a,1}(t) + \mathrm{O}(t)) =$$

$$(\mathbb{L}-1)t^{a^2-a}\mathbb{L}^{-a}(1+\mathrm{O}(t))((\mathbb{L}-1)^2\mathbb{L}^{-a-1}+\mathrm{O}(t)) = (\mathbb{L}-1)^3 t^{a^2-a}\mathbb{L}^{-2a-1}+\mathrm{O}(t^{a^2-a+1}).$$

Теперь утверждение следует из леммы 3. $\square$

5 Функциональное уравнение для индексов пересечения.

Пусть

$$J(t,a,b,c,d,p,q,r,s) = \int_{\mathcal{L}^{(1)}\times\mathcal{L}^{(2)}} t^{\gamma_1\circ\gamma_2} a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} b^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}} c^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}} d^{v_y^{(1)}v_y^{(2)}} p^{v_x^{(1)}} q^{v_y^{(1)}} r^{v_x^{(2)}} s^{v_y^{(2)}} d\chi_g,$$

$$B(t,a,b,c,d,p,q,r,s) = \int_{\{v_y^{(1)}>v_x^{(1)},v_y^{(2)}>v_x^{(2)}\}} t^{\gamma_1\circ\gamma_2} a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} b^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}} c^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}} d^{v_y^{(1)}v_y^{(2)}} p^{v_x^{(1)}} q^{v_y^{(1)}} r^{v_x^{(2)}} s^{v_y^{(2)}} d\chi_g,$$

Заметим, что

$$\sigma(\gamma_1)\circ\sigma(\gamma_2) = \gamma_1\circ\gamma_2 + v_1v_2,$$

поэтому, если после сигма-процесса кривые пересекают исключительный дивизор в разных точках, то их индекс пересечения равен произведению кратностей.

Разделим $\mathcal{L}^{(1)}\times\mathcal{L}^{(2)}$ на части в зависимости от знаков сравнений между $v_y^{(1)}$ и $v_x^{(1)}$, а также $v_y^{(2)}$ и $v_x^{(2)}$.

1)$v_y^{(1)} > v_x^{(1)}, v_y^{(2)} > v_x^{(2)}$. По определению, интеграл равен

$$B(t,a,b,c,d,p,q,r,s).$$

2)$v_y^{(1)} > v_x^{(1)}, v_y^{(2)} < v_x^{(2)}$. После раздутия кривые касаются исключительного дивизора в разных точках, поэтому интеграл равен

$$\int_{\{v_y^{(1)}>v_x^{(1)},v_y^{(2)}<v_x^{(2)}\}} t^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}} a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} b^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}} c^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}} d^{v_y^{(1)}v_y^{(2)}} p^{v_x^{(1)}} q^{v_y^{(1)}} r^{v_x^{(2)}} s^{v_y^{(2)}} d\chi_g =$$

$$(v_x^{(1)} = i, v_y^{(1)} = j, v_y^{(2)} = k, v_x^{(2)} = l) =$$

$$\sum_{i<j,k<l} a^{il}(bt)^{ik}c^{jl}d^{jk}p^iq^jr^ls^k(\mathbb{L}-1)^4\mathbb{L}^{-i-j-k-l} =$$

где функция Φ определена равенством

$$\Phi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\pi,\kappa,\rho,\sigma)=\sum_{i<j,k<l}\alpha^{ik}\beta^{il}\gamma^{jk}\delta^{jl}\pi^i\kappa^j\rho^k\sigma^l.$$

3)$v_y^{(1)}>v_x^{(1)}, v_y^{(2)}=v_x^{(2)}$. Касание в разных точках, поэтому интеграл равен

$$\int_{\{v_y^{(1)}>v_x^{(1)},v_y^{(2)}=v_x^{(2)}\}} t^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}b^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}c^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}}d^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}}p^{v_x^{(1)}}q^{v_y^{(1)}}r^{v_x^{(2)}}s^{v_x^{(2)}}d\chi_g=$$

$$\sum_{i<j,k}(tab)^{ik}(cd)^{jk}p^iq^j(rs)^k(\mathbb{L}-1)^4\mathbb{L}^{-i-j-2k}=(\mathbb{L}-1)^4\Psi(tab,cd,p\mathbb{L}^{-1},q\mathbb{L}^{-1},rs\mathbb{L}^{-2}),$$

где функция Ψ определена равенством

$$\Psi(\alpha,\beta,\pi,\kappa,\rho)=\sum_{i<j,k}\alpha^{ik}\beta^{jk}\pi^i\kappa^j\rho^k.$$

4)$v_y^{(1)}<v_x^{(1)}, v_y^{(2)}>v_x^{(2)}$.

$$\int_{\{v_y^{(1)}<v_x^{(1)},v_y^{(2)}>v_x^{(2)}\}} t^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}}a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}b^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}}c^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}}d^{v_y^{(1)}v_y^{(2)}}p^{v_x^{(1)}}q^{v_y^{(1)}}r^{v_x^{(2)}}s^{v_y^{(2)}}d\chi_g=$$

$$\sum_{i<j,k<l}a^{jk}b^{jl}(ct)^{ik}d^{il}p^jq^ir^ks^l(\mathbb{L}-1)^4\mathbb{L}^{-i-j-k-l}=$$

$$(\mathbb{L}-1)^4\Phi(ct,d,a,b,q\mathbb{L}^{-1},p\mathbb{L}^{-1},r\mathbb{L}^{-1},s\mathbb{L}^{-1}).$$

5)$v_y^{(1)}<v_x^{(1)}, v_y^{(2)}<v_x^{(2)}$. Из симметрии видно, что этот интеграл равен

$$\int_{\{v_y^{(1)}>v_x^{(1)},v_y^{(2)}>v_x^{(2)}\}} t^{\gamma_1\circ\gamma_2}a^{v_y^{(1)}v_y^{(2)}}b^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}}c^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}}d^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}p^{v_y^{(1)}}q^{v_x^{(1)}}r^{v_y^{(2)}}s^{v_x^{(2)}}d\chi_g=B(t,d,b,c,a,q,p,s,r).$$

6)$v_y^{(1)}<v_x^{(1)}, v_y^{(2)}=v_x^{(2)}$.

$$\int_{\{v_y^{(1)}<v_x^{(1)},v_y^{(2)}=v_x^{(2)}\}} t^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}}a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}b^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}c^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}}d^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}}p^{v_x^{(1)}}q^{v_y^{(1)}}r^{v_x^{(2)}}s^{v_x^{(2)}}d\chi_g=$$

$$\sum_{i<j,k}(tcd)^{ik}(ab)^{jk}p^jq^i(rs)^k(\mathbb{L}-1)^4\mathbb{L}^{-i-j-2k}=(\mathbb{L}-1)^4\Psi(tcd,ab,q\mathbb{L}^{-1},p\mathbb{L}^{-1},rs\mathbb{L}^{-2}).$$

7)$v_y^{(1)}=v_x^{(1)}, v_y^{(2)}>v_x^{(2)}$.

$$\int_{\{v_y^{(1)}=v_x^{(1)},v_y^{(2)}>v_x^{(2)}\}} t^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}b^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}}c^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}d^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}}p^{v_x^{(1)}}q^{v_x^{(1)}}r^{v_x^{(2)}}s^{v_y^{(2)}}d\chi_g=$$

$$\sum_{i<j,k}(tbd)^{ik}(ac)^{jk}(pq)^kr^is^j(\mathbb{L}-1)^4\mathbb{L}^{-i-j-2k}=(\mathbb{L}-1)^4\Psi(tac,bd,r\mathbb{L}^{-1},s\mathbb{L}^{-1},pq\mathbb{L}^{-2}).$$

8)$v_y^{(1)}=v_x^{(1)}, v_y^{(2)}<v_x^{(2)}$.

$$\int_{v_y^{(1)}=v_x^{(1)},v_y^{(2)}<v_x^{(2)}} t^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}b^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}}c^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}d^{v_x^{(1)}v_y(2)}p^{v_x^{(1)}}q^{v_x^{(1)}}r^{v_x^{(2)}}s^{v_y^{(2)}}d\chi_g=$$

9)$v_y^{(1)}=v_x^{(1)}, v_y^{(2)}=v_x^{(2)}$. В этом случае

$$\begin{cases} y^{(1)}=\lambda_1 x^{(1)}+\widetilde{y}^{(1)}, v_{\widetilde{y}}^{(1)}>v_x^{(1)} \\ y^{(2)}=\lambda_2 x^{(2)}+\widetilde{y}^{(2)}, v_{\widetilde{y}}^{(2)}>v_x^{(2)}, \end{cases}$$

$\lambda_1\neq 0, \lambda_2\neq 0$.

а)$\lambda_1\neq\lambda_2$. В этом случае

$$[\{\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}^*|\lambda_1\neq\lambda_2\}]=[\mathbb{C}^*]^2-[\{\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}^*|\lambda_1=\lambda_2\}]=(\mathbb{L}-1)^2-(\mathbb{L}-1)=(\mathbb{L}-1)(\mathbb{L}-2),$$

а интеграл при фиксированных (λ_1,λ_2) равен

$$\int_{\{v_{\widetilde{y}}^{(1)}>v_x^{(1)}, v_{\widetilde{y}}^{(2)}>v_x^{(2)}\}} t^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} b^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} c^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} d^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} p^{v_x^{(1)}} q^{v_x^{(1)}} r^{v_x^{(2)}} s^{v_x^{(2)}} d\chi_g=$$

$$\sum_{i<j,k<l}(tabcd)^{ik}(pq)^i(rs)^k(\mathbb{L}-1)^4\mathbb{L}^{-i-j-k-l}=$$

$$(\mathbb{L}-1)^4\Phi(tabcd,1,1,1;\mathbb{L}^{-1}pq,\mathbb{L}^{-1},\mathbb{L}^{-1}rs,\mathbb{L}^{-1}).$$

Тогда вклад страта $\{v_x^{(1)}=v_y^{(1)}, v_x^{(2)}=v_y^{(2)}, \lambda_1\neq\lambda_2\}$ равен

$$(\mathbb{L}-1)^5(\mathbb{L}-2)\Phi(tabcd,1,1,1;\mathbb{L}^{-1}pq,\mathbb{L}^{-1},\mathbb{L}^{-1}rs,\mathbb{L}^{-1}).$$

б)$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$. Тогда при аффинной замене координат на плоскости $(x,y)\mapsto(x,y-\lambda x)$ индексы пересечения не изменятся, поэтому интеграл равен (при фиксированном λ)

$$\int_{\{v_{\widetilde{y}}^{(1)}>v_x^{(1)}, v_{\widetilde{y}}^{(2)}>v_x^{(2)}\}} t^{\gamma_1\circ\gamma_2} a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} b^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} c^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} d^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} p^{v_x^{(1)}} q^{v_x^{(1)}} r^{v_x^{(2)}} s^{v_x^{(2)}} d\chi_g=$$

$$B(t,abcd,1,1,1,pq,1,rs,1),$$

то есть полный вклад этого страта в интеграл равен

$$(\mathbb{L}-1)B(t,abcd,1,1,1,pq,1,rs,1).$$

Итак, получаем, что

$$\begin{gathered} J(t,a,b,c,d,p,q,r,s)=B(t,a,b,c,d,p,q,r,s)+(\mathbb{L}-1)^4\Phi(bt,a,d,c;\mathbb{L}^{-1}p,\mathbb{L}^{-1}q,\mathbb{L}^{-1}s,\mathbb{L}^{-1}r)+ \\ (\mathbb{L}-1)^4\Psi(tab,cd,p\mathbb{L}^{-1},q\mathbb{L}^{-1},rs\mathbb{L}^{-2})+(\mathbb{L}-1)^4\Phi(ct,d,a,b,q\mathbb{L}^{-1},p\mathbb{L}^{-1},r\mathbb{L}^{-1},s\mathbb{L}^{-1})+ \\ B(t,d,c,b,a,q,p,s,r)+(\mathbb{L}-1)^4\Psi(tcd,ab,q\mathbb{L}^{-1},p\mathbb{L}^{-1},rs\mathbb{L}^{-2})+ \\ (\mathbb{L}-1)^4\Psi(tbd,ac,s\mathbb{L}^{-1},r\mathbb{L}^{-1},pq\mathbb{L}^{-2})+(\mathbb{L}-1)^4\Psi(tac,bd,r\mathbb{L}^{-1},s\mathbb{L}^{-1},pq\mathbb{L}^{-2})+ \\ (\mathbb{L}-1)^5(\mathbb{L}-2)\Phi(tabcd,1,1,1;\mathbb{L}^{-1}pq,\mathbb{L}^{-1},\mathbb{L}^{-1}rs,\mathbb{L}^{-1})+(\mathbb{L}-1)B(t,abcd,1,1,1,pq,1,rs,1). \end{gathered} \tag{8}$$

Проведем сигма-процесс. Если $v_y>v_x$, то $y(t)=x(t)\theta(t)$, тогда

$$\sigma^*(\gamma_1\circ\gamma_2)=\gamma_1\circ\gamma_2+v_x^{(1)}v_x^{(2)}, \sigma^* v_x^{(1)}=v_x^{(1)},$$

Тогда по формуле замены переменных Денефа-Лозера

$$B(t,a,b,c,d,p,q,r,s)=\int_{\mathcal{L}^{(1)}\times\mathcal{L}^{(2)}} t^{\gamma_1\circ\gamma_2+v_x^{(1)}v_x^{(2)}} a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} b^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}+v_x^{(1)}v_\theta^{(2)}} c^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}+v_\theta^{(1)}v_x^{(2)}}\times$$

$$\times d^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}+v_\theta^{(1)}v_x^{(2)}+v_x^{(1)}v_\theta^{(2)}+v_\theta^{(1)}v_\theta^{(2)}} p^{v_x^{(1)}} q^{v_x^{(1)}+v_\theta^{(1)}} r^{v_x^{(2)}} s^{v_x^{(2)}+v_\theta^{(2)}} \mathbb{L}^{-v_x^{(1)}-v_x^{(2)}} d\chi_g =$$

$$J(t,tabcd,bd,cd,d,pq\mathbb{L}^{-1},q,rs\mathbb{L},s).$$

Подставив эти значения для $B(\cdot)$ в формулу (8), получим следующее уравнение.

Лемма 4 *Функция J удовлетворяет следующему функциональному уравнению:*

$$J(t,a,b,c,d,p,q,r,s)=J(t,tabcd,bd,cd,d,pq\mathbb{L}^{-1},q,rs\mathbb{L}^{-1},s)+$$

$$(\mathbb{L}-1)^4\Phi(bt,a,d,c,\mathbb{L}^{-1}p,\mathbb{L}^{-1}q,\mathbb{L}^{-1}s,\mathbb{L}^{-1}r)+(\mathbb{L}-1)^4\Psi(tab,cd,p\mathbb{L}^{-1},q\mathbb{L}^{-1},rs\mathbb{L}^{-2})+$$

$$(\mathbb{L}-1)^4\Phi(ct,d,a,b,q\mathbb{L}^{-1},p\mathbb{L}^{-1},r\mathbb{L}^{-1},s\mathbb{L}^{-1})+J(t,tabcd,ac,ab,a,pq\mathbb{L}^{-1},p,rs\mathbb{L}^{-1},r)+$$

$$(\mathbb{L}-1)^4\Psi(tcd,ab,q\mathbb{L}^{-1},p\mathbb{L}^{-1},rs\mathbb{L}^{-2})+(\mathbb{L}-1)^4\Psi(tbd,ac,s\mathbb{L}^{-1},r\mathbb{L}^{-1},pq\mathbb{L}^{-2})+$$

$$(\mathbb{L}-1)^4\Psi(tac,bd,r\mathbb{L}^{-1},s\mathbb{L}^{-1},pq\mathbb{L}^{-2})+(\mathbb{L}-1)^5(\mathbb{L}-2)\Phi(tabcd,1,1,1;\mathbb{L}^{-1}pq,\mathbb{L}^{-1},\mathbb{L}^{-1}rs,\mathbb{L}^{-1})+$$

$$(\mathbb{L}-1)J(t,tabcd,1,1,1,pq\mathbb{L}^{-1},1,rs\mathbb{L}^{-1},1).$$

6 Степенные структуры.

Понятие степенной структуры на (полу)кольце было введено С. М. Гусейн-Заде, И. Луэнго и А. Мелле-Эрнандесом в [2].

Определение: Степенной структурой на кольце R называется отображение

$$(1+tR[[t]])\times R\to 1+tR[[t]]:(A(t),m)\mapsto (A(t))^m,$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1.$(A(t))^0=1$,
2.$(A(t))^1=A(t)$,
3.$((A(t)\cdot B(t))^m=((A(t))^m\cdot((B(t))^m$,
4.$(A(t))^{m+n}=(A(t))^m\cdot(A(t))^n$,
5.$(A(t))^{mn}=((A(t))^n)^m$,
6.$(1+t)^m=1+mt+$ члены большей степени,
7.$(A(t^k))^m=((A(t))^m)|_{t\to t^k}$.

Степенная структура называется конечноопределённой, если для любого $N>0$ существует такое $M>0$, что N – струя ряда $(A(t))^m$ однозначно определяется M – струей ряда $A(t)$.

В [2] доказано, что конечноопределённая степенная структура задана, если задано правило, описывающее $(1-t)^{-m}$ для каждого $m\in R$, причем $(1-t)^{-m-n}=(1-t)^{-m}\cdot(1-t)^{-n}$. Кроме того, на кольце Гротендика квазипроективных алгебраических многообразий определена степенная структура, для которой

$$(1-t)^{-[X]}=1+[S^1X]t+[S^2X]t^2+\dots,$$

Например, при $j \geq 0$

$$(1-t)^{-\mathbb{L}^j} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbb{L}^{kj} = (1 - t\mathbb{L}^j)^{-1}.$$

Для $X \in K_0(Var_{\mathbb{C}})$ и $k > 0$ положим

$$(1-t)^{-\mathbb{L}^{-k}X} = (1-u)^{-X}|_{u=\mathbb{L}^{-k}t}.$$

Следующее утверждение определяет степенную структуру на кольце $\mathcal{M}$.

Лемма 5 *Отображение* $K_0(Var_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}] \to 1 + tK_0(Var_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}][[t]]$, $Z \mapsto (1-t)^{-Z}$ *корректно определено, переводит сумму в произведение и непрерывно по отношению к фильтрации* F_k.

Построим мотивную меру на симметрической степени $S^k\mathcal{L}$. Для цилиндрического множества $A = \pi_n^{-1}(A_n)$ положим $\chi_g(S^kA) = \mathbb{L}^{-2nk}[S^kA_n]$. Эта конструкция согласована со степенной структурой на кольце $\mathcal{M}$, так что

$$\sum_k \chi_g(S^kA)t^k = (1-t)^{-\chi_g(A)}.$$

Пусть B_i – непересекающиеся цилиндрические подмножества $\mathcal{L}$, а k_i – неотрицательные целые числа с $\sum k_i = n$. Для естественного вложения

$$S^{k_1}B_1 \times S^{k_2}B_2 \times \ldots \to S^n\mathcal{L}$$

положим $\chi_g(\prod_i S^{k_i}B_i) = \prod_i \chi_g(S_{k_i}B_i)$. Рассмотрим алгебру множеств, порождённую таким произведениями симметрических степеней цилиндрических множеств. Продолжение χ_g задает корректно определённую аддитивную меру на этой алгебре.

Лемма 6 *Пусть* f *– простая функция на* $\mathcal{L}$. *Определим функцию* F *на* $\sqcup_k S^k\mathcal{L}$ *соотношением* $F(\gamma_1,\ldots,\gamma_k) = \prod_i f(\gamma_i)$. *Тогда*

$$\int_{\sqcup_k S^k\mathcal{L}} F d\chi_g = \int_{\mathcal{L}} (1-f)^{-d\chi_g}.$$

Здесь $d\chi_g$ *стоит в показателе степени, чтобы подчеркнуть, что* $1-f$ *рассматривается как элемент абелевой группы по умножению.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L} = \sqcup_j B_j$, $f|_{B_j} = f_j$. Тогда

$$S^k\mathcal{L} = \sqcup_{k_1+k_2+\ldots=k} S^{k_1}B_1 \times S^{k_2}B_2 \times \ldots,$$

и

$$F|_{S^{k_1}B_1\times S^{k_2}B_2\times\ldots} = f_1^{k_1}\cdot f_2^{k_2}\cdot\ldots.$$

Поэтому

$$\int_{\sqcup_k S^k\mathcal{L}} = \sum_k \sum_{\sum k_i = k} \chi_g(S^{k_1}B_1 \times S^{k_2}B_2 \times \ldots) f_1^{k_1} f_2^{k_2} \ldots =$$

$$\prod_j (1 + \chi_g(S^1B_j)f_j + \chi_g(S^2B_j){f_j}^2 + \ldots) = \prod_j (1-f_j)^{-\chi_g(B_j)} = \int_{\mathcal{L}} (1-f)^{-d\chi_g}.$$

$\square$

$\sqcup_k S^k \mathcal{L}$.

Рассмотрим производящую функцию:

$$I(t,a,b,c,d,p,q,r,s,u)=\int_{\mathcal{L}\times\sqcup_k S^k\mathcal{L}} t^{\gamma_1\circ\gamma_2} a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} b^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}} c^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}} d^{v_y^{(1)}v_y^{(2)}} p^{v_x^{(1)}} q^{v_y^{(1)}} r^{v_x^{(2)}} s^{v_y^{(2)}} u^k d\chi_g.$$

В этом параграфе будет получено функциональное уравнение на функцию I.

Пусть

$$\prod_{k\geq l}(1-x^k y^l u)^{-(\mathbb{L}-1)^2}=\sum_{k_1,k_2}\varepsilon_{k_1,k_2}(u)x^{k_1}y^{k_2}$$

и

$$\prod_{k<l}(1-(xy)^k z^l u)^{-(\mathbb{L}-1)^2}\prod_{k>l}(1-x^k(yz)^l u)^{-(\mathbb{L}-1)^2}\prod_{k<l}(1-(xyz)^k\mathbb{L}^{-l}u)^{-(\mathbb{L}-2)(\mathbb{L}-1)^2}=$$

$$\sum_{k_1,k_2,k_3}\alpha_{k_1,k_2,k_3}(u)x^{k_1}y^{k_2}z^{k_3}.$$

Положим

$$J_{\gamma_1}(t,a,b,c,d,r,s,u)=\int_{\sqcup_k S^k\mathcal{L}} t^{\gamma_1\circ\gamma_2} a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} b^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}} c^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}} d^{v_y^{(1)}v_y^{(2)}} r^{v_x^{(2)}} s^{v_y^{(2)}} u^k d\chi_g=$$

$$\int_{\mathcal{L}^{(2)}}(1-t^{\gamma_1\circ\gamma_2} a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} b^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}} c^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}} d^{v_y^{(1)}v_y^{(2)}} r^{v_x^{(2)}} s^{v_y^{(2)}} u)^{-d\chi_g^{(2)}},$$

тогда

$$I(t,a,b,c,d,p,q,r,s,u)=\int_{\mathcal{L}^{(1)}} p^{v_x^{(1)}} q^{v_y^{(1)}} J_{\gamma_1}(t,a,b,c,d,r,s,u)d\chi_g^{(1)}.$$

Если $v_y^{(1)}>v_x^{(1)}$, то

$$J_{\gamma_1}(t,a,b,c,d,r,s,u)=\int_{\{v_y^{(2)}>v_x^{(2)}\}}(1-t^{\gamma_1\circ\gamma_2} a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} b^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}} c^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}} d^{v_y^{(1)}v_y^{(2)}} r^{v_x^{(2)}} s^{v_y^{(2)}} u)^{-d\chi_g^{(2)}}\times$$

$$\int_{\{v_y^{(2)}\leq v_x^{(2)}\}}(1-t^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}} a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}} b^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}} c^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}} d^{v_y^{(1)}v_y^{(2)}} r^{v_x^{(2)}} s^{v_y^{(2)}} u)^{-d\chi_g^{(2)}}.$$

Проведём раздутие в начале координат. По формуле Денёфа-Лозера $d\chi_g^{(2)}\mapsto \mathbb{L}^{-v_x^{(2)}}d\chi_g^{(2)}$, поэтому первый интеграл равен

$$\int_{\mathcal{L}^{(2)}}(1-t^{\sigma^{-1}(\gamma_1)\circ\gamma_2}(tabcd)^{\widetilde{v_x}^{(1)}v_x^{(2)}}(bd)^{\widetilde{v_x}^{(1)}v_y^{(2)}}(cd)^{\widetilde{v_y}^{(1)}v_x^{(2)}}d^{\widetilde{v_y}^{(1)}v_y^{(2)}}(rs)^{v_x^{(2)}}s^{v_y^{(2)}}u)^{-\mathbb{L}^{-v_x^{(2)}}d\chi_g^{(2)}}=$$

$$J_{\sigma^{-1}(\gamma_1)}(t,tabcd,bd,cd,d,rs\mathbb{L}^{-1},s,u).$$

Второй интеграл равен

$$\prod_{k\leq l}(1-a^{lv_x^{(1)}}(bt)^{kv_x^{(1)}}c^{lv_y^{(1)}}d^{kv_y^{(1)}}r^l s^k u)^{-\mathbb{L}^{-k-l}(\mathbb{L}-1)^2}=\prod_{k\leq l}(1-a^{lv_x^{(1)}}(bt)^{kv_x^{(1)}}c^{lv_y^{(1)}}d^{kv_y^{(1)}}(\mathbb{L}^{-1}r)^l(\mathbb{L}^{-1}s)^k u)^{-(\mathbb{L}-1)^2}=$$

Следовательно,

$$J_{\gamma_1}(t,a,b,c,d,r,s,u)=J_{\sigma^{-1}(\gamma_1)}(t,tabcd,bd,cd,d,rs\mathbb{L}^{-1},s,u)\times$$

$$(\sum_{k_1,k_2}\varepsilon_{k_1,k_2}(u)(\mathbb{L}^{-1}r)^{k_1}(\mathbb{L}^{-1}s)^{k_2}a^{k_1v_x^{(1)}}(bt)^{k_2v_x^{(1)}}c^{k_1v_y^{(1)}}d^{k_2v_y^{(1)}}).$$

Таким образом, получаем

$$E(t,a,b,c,d,p,q,r,s,u)=\int_{\{v_y^{(1)}>v_x^{(1)}\}}t^{\gamma_1\circ\gamma_2}a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}b^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}}c^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}}d^{v_y^{(1)}v_y^{(2)}}p^{v_x^{(1)}}q^{v_y^{(1)}}r^{v_x^{(2)}}s^{v_y^{(2)}}u^kd\chi_g=$$

$$\int_{\{v_y^{(1)}>v_x^{(1)}\}}J_{\gamma_1}(t,a,b,c,d,r,s,u)p^{v_x^{(1)}}q^{v_y^{(1)}}d\chi_g^{(1)}=\sum_{k_1,k_2}\varepsilon_{k_1,k_2}(u)(\mathbb{L}^{-1}r)^{k_1}(\mathbb{L}^{-1}s)^{k_2}\times$$

$$\int_{\{v_y^{(1)}>v_x^{(1)}\}}J_{\sigma^{-1}(\gamma_1)}(t,tabcd,bd,cd,d,rs\mathbb{L}^{-1},s,u)a^{k_1v_x^{(1)}}(bt)^{k_2v_x^{(1)}}c^{k_1v_y^{(1)}}d^{k_2v_y^{(1)}}p^{v_x^{(1)}}q^{v_y^{(2)}}d\chi_g^{(1)}=$$

$$\sum_{k_1,k_2}\varepsilon_{k_1,k_2}(u)(\mathbb{L}^{-1}r)^{k_1}(\mathbb{L}^{-1}s)^{k_2}\int_{\{v_y^{(1)}>v_x^{(1)}\}}J_{\sigma^{-1}(\gamma_1)}(t,tabcd,bd,cd,d,rs\mathbb{L}^{-1},s,u)\times$$

$$(a^{k_1}(bt)^{k_2}p)^{v_x^{(1)}}(c^{k_1}d^{k_2}q)^{v_y^{(1)}}d\chi_g^{(1)}=\sum_{k_1,k_2}\varepsilon_{k_1,k_2}(u)(\mathbb{L}^{-1}r)^{k_1}(\mathbb{L}^{-1}s)^{k_2}\times$$

$$\int_{\mathcal{L}^{(1)}}J_{\gamma_1}(t,tabcd,bd,cd,d,rs\mathbb{L}^{-1},s,u)((ac)^{k_1}(bdt)^{k_2}pq\mathbb{L}^{-1})^{v_x^{(1)}}(c^{k_1}d^{k_2}q)^{v_y^{(1)}}d\chi_g^{(1)}=$$

$$\sum_{k_1,k_2}\varepsilon_{k_1,k_2}(u)(\mathbb{L}^{-1}r)^{k_1}(\mathbb{L}^{-1}s)^{k_2}I(t,tabcd,bd,cd,d,(ac)^{k_1}(bdt)^{k_2}pq\mathbb{L}^{-1},c^{k_1}d^{k_2}q,rs\mathbb{L}^{-1},s,u).$$

Ясно, что аналогичный интеграл по $\{v_x^{(1)}<v_y^{(1)}\}$ равен $E(t,d,c,b,a,q,p,s,r,u)$.

Вычислим интеграл по $\{v_x^{(1)}=v_y^{(1)}\}$. Пусть $y^{(1)}=\lambda_1x^{(1)}+\widetilde{y}^{(1)}$. Тогда

$$J_{\gamma_1}(t,a,b,c,d,r,s,u)=\int_{\{v_x^{(2)}<v_y^{(2)}\}}(1-t^{\gamma_1\circ\gamma_2}a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}b^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}}c^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}}d^{v_y^{(1)}v_y^{(2)}}r^{v_x^{(2)}}s^{v_y^{(2)}}u)^{-d\chi_g^{(2)}}\times$$

$$\int_{\{v_x^{(2)}>v_y^{(2)}\}}(1-t^{\gamma_1\circ\gamma_2}a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}b^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}}c^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}}d^{v_y^{(1)}v_y^{(2)}}r^{v_x^{(2)}}s^{v_y^{(2)}}u)^{-d\chi_g^{(2)}}\times$$

$$\int_{\{v_x^{(2)}=v_y^{(2)}\}}(1-t^{\gamma_1\circ\gamma_2}a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}b^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}}c^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}}d^{v_y^{(1)}v_y^{(2)}}r^{v_x^{(2)}}s^{v_y^{(2)}}u)^{-d\chi_g^{(2)}}=$$

$$\prod_{k<l}(1-(tac)^{kv_x^{(1)}}(bd)^{lv_x^{(1)}}r^ks^lu)^{-\mathbb{L}^{-k-l}(\mathbb{L}-1)^2}\cdot\prod_{k>l}(1-(ac)^{kv_x^{(1)}}(tbd)^{lv_x^{(1)}}r^ks^lu)^{-\mathbb{L}^{-k-l}(\mathbb{L}-1)^2}\times$$

$$\int_{\{v_x^{(2)}<v_{\widetilde{y}}^{(2)}\}}(1-t^{\gamma_1\circ\gamma_2}a^{v_x^{(1)}v_x^{(2)}}b^{v_x^{(1)}v_y^{(2)}}c^{v_y^{(1)}v_x^{(2)}}d^{v_y^{(1)}v_y^{(2)}}r^{v_x^{(2)}}s^{v_y^{(2)}}u)^{-d\chi_g^{(2)}}.$$

Последний интеграл можно разложить в произведение интегралов по $\{\lambda_2\neq\lambda_1\}$ and $\{\lambda_2=\lambda_1\}$. Интеграл по $\{\lambda_2\neq\lambda_1\}$ равен

$$[\prod_{k<l}(1-(tabcd)^{kv_x^{(1)}}(rs)^ku)^{-\mathbb{L}^{-k-l}(\mathbb{L}-1)^2}]^{(\mathbb{L}-2)}.$$

Если $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, то можно провести аффинную замену координат $A_\lambda:(x,y)\mapsto(x,y-\lambda x)$, поэтому интеграл равен

$$\int_{\{v_{\widetilde{y}}^{(2)}>v_x^{(2)}\}}(1-t^{A_\lambda(\gamma_1)\circ\gamma_2}(abcd)^{v_x^{(1)}}(rs)^{v_x^{(2)}}u)^{-d\chi_g^{(2)}}=J_{\sigma^{-1}(A_\lambda(\gamma_1))}(t,tabcd,1,1,1,rs\mathbb{L}^{-1},1,u).$$

Произведение оставшихся множителей равняется

$$\prod_{k<l}(1-(t^{v_x^{(1)}}\cdot(ac)^{v_x^{(1)}}r\mathbb{L}^{-1})^k((bd)^{v_x^{(1)}}s\mathbb{L}^{-1})^lu)^{-1}\times\prod_{k>l}(1-((ac)^{v_x^{(1)}}r\mathbb{L}^{-1})^k(t^{v_x^{(1)}}\cdot(bd)^{v_x^{(1)}}s\mathbb{L}^{-1}u)^l)^{-1}\times$$

$$\sum_{k_1,k_2,k_3} \alpha_{k_1,k_2,k_3}(u) t^{k_1 v_x^{(1)}} (ac)^{k_2 v_x^{(1)}} (r\mathbb{L}^{-1})^{k_2} (bd)^{k_3 v_x^{(1)}} (s\mathbb{L}^{-1})^{k_3},$$

поэтому

$$\int_{\{v_x^{(1)}=v_y^{(1)}\}} J_{\gamma_1}(t,a,b,c,d,r,s,u) p^{v_x^{(1)}} q^{v_x^{(1)}} d\chi_g^{(1)} =$$

$$\int_{\mathbb{C}^*} d\chi_g(\lambda) \int_{\{y^{(1)}=\lambda x^{(1)}+\widetilde{y}^{(1)}\}} \sum_{k_1,k_2,k_3} \alpha_{k_1,k_2,k_3}(u)(r\mathbb{L}^{-1})^{k_2}(s\mathbb{L}^{-1})^{k_3} \times$$

$$\times J_{\sigma^{-1}(A_\lambda(\gamma_1))}(t,tabcd,1,1,1,rs\mathbb{L}^{-1},1,u)(t^{k_1}(ac)^{k_2}(bd)^{k_3}pq)^{v_x^{(1)}} d\chi_g^{(1)} =$$

$$(\mathbb{L}-1)\int_{\{v_{\widetilde{y}}^{(1)}>v_x^{(1)}\}} \sum_{k_1,k_2,k_3} \alpha_{k_1,k_2,k_3}(u)(r\mathbb{L}^{-1})^{k_2}(s\mathbb{L}^{-1})^{k_3} \times$$

$$\times J_{\sigma^{-1}(\gamma_1)}(t,tabcd,1,1,1,rs\mathbb{L}^{-1},1,u)(t^{k_1}(ac)^{k_2}(bd)^{k_3}pq)^{v_x^{(1)}} d\chi_g^{(1)} =$$

$$(\mathbb{L}-1)\int_{\mathcal{L}^{(1)}} \sum \alpha_{k_1,k_2,k_3}(u)(r\mathbb{L}^{-1})^{k_2}(s\mathbb{L}^{-1})^{k_3} \times$$

$$\times J_{\gamma_1}(t,tabcd,1,1,1,rs\mathbb{L}^{-1},1,u)(t^{k_1}(ac)^{k_2}(bd)^{k_3}pq\mathbb{L}^{-1})^{v_x^{(1)}} d\chi_g^{(1)} =$$

$$(\mathbb{L}-1)\sum \alpha_{k_1,k_2,k_3}(u)(r\mathbb{L}^{-1})^{k_2}(s\mathbb{L}^{-1})^{k_3} I(t,tabcd,1,1,1,t^{k_1}(ac)^{k_2}(bd)^{k_3}pq,1,rs\mathbb{L}^{-1},1,u).$$

Объединяя эти интегралы, получаем следующее утверждение.

Теорема 4

$$I(t,a,b,c,d,p,q,r,s,u) =$$

$$\sum_{k_1,k_2} \varepsilon_{k_1,k_2}(u)(\mathbb{L}^{-1}r)^{k_1}(\mathbb{L}^{-1}s)^{k_2} I(t,tabcd,bd,cd,d,(ac)^{k_1}(bdt)^{k_2}pq\mathbb{L}^{-1},c^{k_1}d^{k_2}q,rs\mathbb{L}^{-1},s,u)+$$

$$\sum_{k_1,k_2} \varepsilon_{k_1,k_2}(u)(\mathbb{L}^{-1}s)^{k_1}(\mathbb{L}^{-1}r)^{k_2} I(t,tabcd,ac,ab,a,(bd)^{k_1}(act)^{k_2}pq\mathbb{L}^{-1},b^{k_1}a^{k_2}p,rs\mathbb{L}^{-1},r,u)+$$

$$(\mathbb{L}-1)\sum \alpha_{k_1,k_2,k_3}(u)(\mathbb{L}^{-1}r)^{k_2}(\mathbb{L}^{-1}s)^{k_3} I(t,tabcd,1,1,1,t^{k_1}(ac)^{k_2}(bd)^{k_3}pq,1,rs\mathbb{L}^{-1},1,u).$$

Благодарности

Автор благодарен С. М. Гусейн-Заде за постановку задачи, постоянное внимание и многочисленные обсуждения, результатом которых и стала эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Denef, F. Loeser. Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration. Inventiones Math. 135 (1999), no.1, 201–232.

[2] S. M. Gusein-Zade, I. Luengo, A. Melle-Hernández. A power structure over the Grothendieck ring of varieties. Math. Res. Lett. 11(2004), no.1, 49–57.

series for Kac-Moody groups, arXiv: math.AG/[illegible]

[4] F. Heinloth. A note on functional equations for zeta functions with values in Chow motives. arXiv: math.AG/0512237

[5] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений. - М.: Наука, 1984.

Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова,
механико-математический факультет.
E.mail: gorsky@mccme.ru