Решение проблемы описания минимальных многообразий Зейферта

А.А. Перфильев

1 Введение и основные теоретические сведения

Данная работа посвящена полному решению проблемы К. Хайат-Легран, Ш. Вонга и Х. Цишанга состоящей в следующем: требуется перечислить множество минимальных (в смысле отображений степени 1) многообразий Зейферта.

Вопрос существования отображения степени 1 между двумя данными многообразиями Зейферта M и P был поставлен К. Хайат-Легран, Ш. Вонгом, Х. Цишангом в [3] и решён ими для всех пар M, P, кроме случая, когда M есть многообразие Зейферта с базой сфера и тремя особыми слоями или с базой тор и одним особым слоем, а P — пространство додекаэдра S^3/P_{120} (гомологическая сфера Пуанкаре). В данной работе, основываясь на технике вычисления степени отображения, предложенной К. Хайат-Легран, С. Матвеевым и Х. Цишангом, мы исследуем проблемные случаи и покажем, что ни в одном из них не возникает отображений степени 1.

1.1 Степень отображения

Пусть M и P — замкнутые связные ориентированные трёхмерные многообразия. Тогда любое отображение $f : M \to P$ индуцирует гомоморфизм групп гомологий $\varphi : H_3(M) \to H_3(P)$. Так как $H_3(M) \cong H_3(P) \cong \mathbb{Z}$, то гомоморфизм φ есть умножение на целое число.

Определение 1. *Степенью отображения f называется целое число $degf = \varphi(1)$.*

Степень является гомотопическим инвариантом отображения, т. е. степени гомотопных отображений равны. Степень также обладает мультипликативным свойством: степень суперпозиции отображений равна произведению их степеней, причём степень тождественного отображения всегда равна 1, а степень отображения в точку равна 0.

1.2 Минимальные многообразия Зейферта

Напомним, что многообразием Зейферта называется трёхмерное многообразие, разбитое на слои (гомеоморфные окружностям) так, что каждый слой имеет окрестность, послойно гомеоморфную тривиально расслоенному полноторию (полноторию $D^2 \times S^1$, разбитому на слои вида $\{*\} \times S^1$). Конструктивное определение многообразия Зейферта $M(F; (\alpha_i, \beta_i), i = 1, \ldots, n)$, где F — замкнутая ориентируемая поверхность, и (α_i, β_i) — пары взаимно простых чисел, можно дать следующим образом. Удалим из поверхности F внутренности n непересекающихся дисков (полученную поверхность назовём F'). Многообразие $F' \times S^1$ имеет на краю n торов. Выберем на каждом из них систему координат: параллель — кривая $\{*\} \times S^1$, меридиан — соответствующая компонента края поверхности F'. Приклеим к i-ой ($i = 1, \ldots, n$) компоненте края полноторие по такому гомеоморфизму края, чтобы край меридионального диска полнотория переходил в кривую (α_i, β_i) на краевом торе многообразия $F' \times S^1$. Полученное таким образом замкнутое многообразие и есть многообразие Зейферта $M(F; (\alpha_i, \beta_i), i = 1, \ldots, n)$. Осевые окружности вклеенных полноторий называются особыми слоями, а числа (α_i, β_i) — параметрами особых слоёв. Более подробную информацию о многообразиях Зейферта можно найти, например, в [1].

К. Хайат-Легран, Ш. Вонг и Х. Цишанг рассматривают следующее отношение частичного порядка на множестве замкнутых ориентируемых трёхмерных многообразий (см. [3]). Пусть M и P — два таких многообразия. Будем говорить, что $M \geq P$, если существует отображение степени 1 из M в P.

Замечание 1. Любое замкнутое ориентируемое трёхмерное многообразие M допускает отображение степени 1 на себя и на сферу S^3, то есть, $M \geq M$ и $M \geq S^3$.

Определение 2. *([3]) Многообразие Зейферта M называется минимальным многообразием Зейферта, если оно допускает отображения степени 1 только на те многообразия Зейферта, которые гомеоморфны M или S^3.*

В работе [3] было перечислено множество многообразий Зейферта, среди которых содержатся все минимальные, причём для всех многообразий из этого множества, кроме перечисленных в следующей теореме, была доказана минимальность. Открытой осталась проблема минимальности этих многообразий.

Теорема 1. *(Hayat-Legrand, Wang, Zieschang, 1997, [3]) Многообразия следующих четырёх серий не допускают отображений степени 1 ни на какие другие многообразия Зейферта, кроме себя, S^3 и, возможно, гомологической сферы Пуанкаре S^3/P_{120}:*
(d1) многообразия Зейферта $M(T^2; (a, \pm 1))$, где a делится на 3, 4 или 5.
(d2) многообразия Зейферта $M(S^2; (2^k\alpha_1; \beta_1); (2^k\alpha_2; \beta_2); (2^k\alpha_3; \beta_3))$, где $k > 1$, все a_i нечётны, $\alpha_1\alpha_2\beta_3 + \alpha_1\alpha_3\beta_2 + \alpha_2\alpha_3\beta_1 = \pm 1$, и есть пара i, j $(1 \leq i \neq j \leq 3)$, что $3|\alpha_i, 5|\alpha_j$.
(d3) многообразия Зейферта $M(S^2; (2\alpha_1; \beta_1); (2\alpha_2; \beta_2); (2\alpha_3; \beta_3))$ с теми же ограничениями, что в (d2) и следующим условием: если $n > 1$ — делитель числа $2\alpha_i$, то уравнение $2x^2(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \equiv \pm 1 \; mod \; 4n$ не имеет решений в целых числах.
(d4) Гомологические сферы $M(S^2; (2\alpha_1; \beta_1); (3\alpha_2; \beta_2); (5\alpha_3; \beta_3))$, где
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq \pm 1(\; mod \; 120)$ и $49\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq \pm 1(\; mod \; 120)$.

Проблема 1. *Являются ли многообразия серий (d1), (d2), (d3) и (d4) минимальными многообразиями Зейферта?*

В 1999 году К. Хайат-Легран, С. Матвеевым и Х. Цишангом в ходе компьютерного эксперимента (см. [4]) была замечена периодическая зависимость между параметрами особых слоёв многообразий Зейферта и множествами возможных степеней их отображений на сферу Пуанкаре. В работах [5] (для случая многообразий Зейферта с базой сфера) и [6] (для случая многообразий Зейферта с базой тор) были впервые сформулированы и доказаны теоремы о периодичности. Сами по себе эти теоремы позволяют свести решение проблемы 1 к перебору конечного (хотя и очень большого) числа случаев. В настоящей работе на основе способа вычисления степеней отображений, предложенного К. Хайат-Легран, С. Матвеевым и Х. Цишангом и техники, использованной для доказательства периодичности степеней отображений (см. [5, 6]), мы решаем проблему 1 положительно с помощью конечного компьютерного перебора в случаях d1 и d3 и явно в случаях d2 и d4, причём для случая d4 выведена явная арифметическая формула зависимости степени отображения от параметров многообразия-прообраза.

1.3 Краткая структура настоящей работы

В п. 2. описывется идея алгоритма вычисления степени отображения, используемого нами для решения проблемы 1. В п. 2.1 подробно излагается построение модульной структуры на группах цепей накрывающего пространства. В пп. 2.2 и 2.3 даются определения необходимых для построения алгоритма понятий (граничный цикл, индуцированное отображение двумерных цепей, характеристическая коцепь) и приводится формула степени отображения (теорема 2), согласно [4].

В п. 3.1 (теоремы 3, 4) приводятся формулы граничных циклов многообразий Зейферта с базой сфера, тор. В п. 3.2 приводится алгоритм вычисления индуцированного отображения двумерных цепей. В пп. 3.3 и 3.4 с помощью конструкции двойственного копредставления фундаментальной группы объясняется схема вычисления характеристической коцепи (утверждение 1) и доказывается её полезное свойство (утверждение 2).

В п. 4 описывается гомологическая сфера Пуанкаре S^3/P_{120}, её фундаментальная группа (п. 4.1), построение её характеристической коцепи (п. 4.2) и операция вычисления индуцированного отображения цепей для неё (п. 4.3).

В п. 5.1 кратко описывается компьютерная программа, использованная для осуществления конечного перебора в доказательстве минимальности некоторых многообразий. В п. 5.2 доказывается (на основе утверждения 2) важный вспомогательный результат (лемма 4, следствие 1) и даётся определение аналогичных отображений. Проблема 1 решается в пунктах 5.3 — 5.6. Для доказательства используются теоремы 2, 3, 4 и лемма 4. В п. 5.3 доказывается минимальность многообразий серии d1 (лемма 5, утверждение 3). В п. 5.4 доказывается минимальность многообразий серии d2 (теорема 5). П. 5.5 посвящён доказательству минимальности многообразий серии d3 (следствие 2), а п. 5.6 — минимальности многообразий серии d4 (теорема 10).

2 Вычисление степени отображения

2.1 Модульная структура на группах цепей накрывающего пространства

Пусть M — замкнутое ориентированное связное трёхмерное многообразие, снабжённое клеточным разбиением, в котором присутствует ровно одна вершина v, все клетки ориентированы. Тогда универсальное накрытие $p : \tilde{M} \to M$ индуцирует клеточное разбиение многообразия $\tilde{M}$, в котором клетками являются компоненты связности прообразов клеток многообразия M. Таким образом, каждой клетке многообразия M соответствуют столько клеток в накрывающем пространстве $\tilde{M}$, каков порядок фундаментальной группы $\pi_1(M)$, причём имеет место изоморфизм групп цепей:

$$C_*(\tilde{M}; \mathbb{Z}) \cong C_*(M; \mathbb{Z}[\pi_1(M)]).$$

Вершины многообразия $\tilde{M}$ можно сопоставить элементам фундаментальной группы $\pi_1(M)$ так, что путь из вершины, соответствующей единичному элементу в вершину, соответствующую некоторому элементу g отображается накрытием в петлю, соответствующую элементу g. Рёбра клеточного разбиения многообразия $\tilde{M}$, являющиеся прообразами одного и того же ребра a, будем сопоставлять элементам группы $\pi_1(M)$ по следующему правилу: прообраз ребра, соответствует тому же элементу фундаментальной группы, что и его начальная вершина. Если для каждой двумерной клетки R многообразия M фиксирован порядок обхода рёбер её граничной кривой, то прообразом клетки R, соответствующим элементу g, будем считать тот прообраз, обход граничной кривой которого начинается из вершины, соответствующей элементу g.

Пусть $< a_1, a_2, ..., a_n | R_1, R_2, ..., R_m >$ — геометрическое копредставление группы $\pi_1(M)$, соответствующее заданному на многообразии M клеточному разбиению. Это означает следующее:

1. Задано биективное соответствие между образующими $a_1, a_2, ..., a_n$ и рёбрами многообразия M.

2. Задано биективное соответствие между соотношениями $R_1, R_2, ..., R_m$ и двумерными клетками многообразия M.

3. На граничной кривой каждой двумерной клетки задана такая базисная точка, что, если начать в ней обход кривой, то последовательность рёбер (с учётом направления прохода) будет совпадать с последовательностью образующих в соответствующем соотношении.

В дальнейшем мы не будем различать клетки и соответствующие им элементы геометрических копредставлений. Клетки же накрывающего многообразия будем обозначать следующим образом: ga_i (или $g\overline{a_i}$, чтобы не путать элементы и образующие) — прообраз ребра a_i, соответствующий элементу g фундаментальной группы; gR_i — прообраз клетки R_i, соответствующий элементу g фундаментальной группы.

Лемма 1. *Пусть γ_1 и γ_2 — петли в многообразии M, начинающиеся в вершине и проходящие по рёбрам, и пусть петля γ_1 представляет некоторый элемент g_1 фундаментальной группы. Обозначим $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma \in C_1(\tilde{M}; \mathbb{Z})$ одномерные цепи, отвечающие поднятиям петель $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1\gamma_2$ соответственно из вершины, отвечающей единичному элементу группы $\pi_1(M)$. Тогда $\Gamma = \Gamma_1 + g_1\Gamma_2$.*

Доказательство. Петля γ_1 реализует элемент g_1 фундаментальной группы. По нашему построению это означает, что пройдя по её поднятию, мы окажемся в вершине, соответствующей элементу g_1. Если из этой вершины пройти вдоль рёбер по пути, реализующему некоторый элемент g, то мы окажемся в вершине, соответствующей элементу g_1g; это значит, что цепь, соответствующая поднятию петли γ_2 из вершины с номером g_1, будет иметь вид $g_1\Gamma_2$, а вся цепь $\Gamma = \Gamma_1 + g_1\Gamma_2$. □

Пусть $w = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} ... a_{i_l}^{\varepsilon_l}$ — слово в образующих фундаментальной группы $\pi_1(M)$. (Все ε_i равны ± 1.) Обозначим v_j, $j = 1, ..., l$ такие элементы группы $\pi_1(M)$, что

1. $v_1 = 1$, если $\varepsilon_1 = 1$, и $v_1 = a_{i_1}^{-1}$, если $\varepsilon_1 = -1$.
2. Если $j > 1$, то
   $v_j = \prod_{k=1}^{j-1} a_{i_k}^{\varepsilon_k}$, если $\varepsilon_j = 1$, и $v_j = \prod_{k=1}^{j} a_{i_k}^{\varepsilon_k}$, если $\varepsilon_j = -1$.

Лемма 2. *Пусть путь γ в многообразии M с началом в вершине проходит по рёбрам в последовательности, заданной словом $a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} ... a_{i_l}^{\varepsilon_l}$ в образующих, и пусть $\Gamma \in C_1(\tilde{M}; \mathbb{Z})$ — одномерная цепь, соответствующая поднятию этого пути из вершины, соответствующей единичному элементу. Тогда $\Gamma = \sum_{j=1}^{l} \varepsilon_{i_j} v_j \overline{a_{i_j}}$.*

Доказательство. Прямо следует из предыдущей леммы. □

Теперь определим оператор d, отображающий множество слов в образующих группы $\pi_1(M)$ в группу цепей $C_1(M; \mathbb{Z}(\pi_1(M)))$ и сопоставляющий каждому слову $w = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} ... a_{i_l}^{\varepsilon_l}$ цепь $dw = \sum_{j=1}^{l} \varepsilon_{i_j} v_j \overline{a_{i_j}}$. По лемме 2, этот оператор реализует поднятие пути, проходящего по рёбрам многообразия M как одномерную цепь из группы $C_1(\tilde{M}; \mathbb{Z})$. Оператор d обладает следующими очевидными свойствами:

1. Пусть w_1 и w_2 — слова в образующих, причём слово w_1 реализует некоторый элемент g_1 фундаментальной группы, тогда $d(w_1w_2) = d(w_1) + g_1dw_2$.
2. Пусть слово w реализует некоторый элемент g фундаментальной группы. Тогда $d(w^{-1}) = -g^{-1}dw$.

В дальнейшем нам будет нужно сопоставление элементам фундаментальной группы прообразов трёхмерных клеток многообразия M при накрытии. Сделаем это следующим образом; пусть B — трёхмерная клетка многообразия M, и пусть x — точка внутри клетки B. Пусть дуга γ (без самопересечений) с началом в вершине v и концом в точке x пересекает двумерный скелет многообразия M только в точке v. Прообраз по накрытию клетки B, соответствующий элементу g фундаментальной группы — это трёхмерная клетка многообразия $\tilde{M}$, которая содержит точку $\tilde{x}$, являющуюся концом поднятия дуги γ из начала в прообразе вершины v, соответствующем элементу g.

Итак, каждой клетке многообразия $\tilde{M}$ мы поставили в соответствие элемент группы $\pi_1(M)$.

Замечание 2. По построению, элементы, поставленные в соответствие каждой клетке, полностью определяются тем, какой из вершин многообразия $\tilde{M}$ сопоставлен единичный элемент.

Далее, говоря о модульной структуре на группах $C_*(M;\mathbb{Z}[\pi_1(M)])$, мы будем иметь в виду, что каждый элемент g группы $\pi_1(M)$ действует на цепь, умножая все её коэффициенты на элемент g слева. Очевидно, такое действие группы задаёт на группах цепей структуру левого модуля, причём указанное левое действие группы $\pi_1(M)$ коммутирует с её общепринятым стандартным правым действием: $f(gR) = (gf)R$, где $f, g \in \pi_1(M)$.

2.2 Определения основных понятий

Авторами работы [4] был разработан алгоритм вычисления степени отображения одного замкнутого трёхмерного многообразия на другое, использующий понятия *граничный цикл*, *характеристическая коцепь* и *индуцированное отображение цепей*.

2.2.1 Граничный цикл

Пусть M — замкнутое ориентированное связное трёхмерное многообразие, в клеточном разбиении которого присутствует ровно одна вершина, и пусть $p : \tilde{M} \to M$ – универсальное накрытие. Как уже было сказано, накрытие p индуцирует клеточное разбиение многообразия $\tilde{M}$, в котором клетками являются компоненты связности прообразов клеток многообразия M. Пусть $B \subset M$ — трёхмерная клетка многообразия M, тогда её граничным циклом $\partial\tilde{B} \in C_2(\tilde{M};\mathbb{Z})$ называется граница одного из её прообразов $\tilde{B} \subset \tilde{M}$.

Замечание 3. Граничный цикл трёхмерной клетки вычисляется неоднозначно, с точностью до умножения слева на любой элемент фундаментальной группы, т. к. позволяется выбрать любой прообраз клетки в накрывающем пространстве.

Определение 3. *Граничным циклом $\partial\tilde{\beta}_M \in C_2(\tilde{M};\mathbb{Z})$ многообразия M называется сумма граничных циклов всех его трёхмерных клеток, взятых с коэффициентом 1, если ориентация клетки совпадает с ориентацией многообразия M, и с коэффициентом -1 в противном случае.*

2.2.2 Характеристическая коцепь

Определение 4. *Пусть в клеточном разбиении многообразия M есть ровно одна трёхмерная клетка. Характеристическая коцепь $\xi_M : C^2(\tilde{M}; \mathbb{Z}_n) \to \mathbb{Z}_n$ есть линейный функционал, принимающий значение 1 на каждом граничном цикле $\partial\tilde{\beta}_M$.*

Другими словами ξ_M — такая коцепь, кограница которой $\delta\xi_M$ равна 1 на каждой 3-клетке.

2.2.3 Индуцированное отображение цепей

Отображение двумерных цепей, индуцировнное отображением f — это модульный гомоморфизм $\tilde{f}_* : C_2(M; \mathbb{Z}[\pi_1(M)]) \to C_2(P; \mathbb{Z}[\pi_1(P)])$. (Естественно, отображение f должно быть клеточным).

В силу линейности, индуцированное отображения цепей задаётся образами всех 2-клеток многообразия M. Индуцированное отображение цепей нужно для того, чтобы найти образ граничного цикла $\partial\tilde{\beta}_M$ в $\tilde{P}$ как двумерную цепь.

2.3 Вычисление степени отображения

Пусть $f_* : \pi_1(M) \to \pi_1(P)$ — гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением $f : M \to P$. Тогда степень отображения f взятая по модулю n, где $n = |\pi_1(P)|$, зависит только от гомоморфизма f_*. В то же время, любое отображение можно изменить внутри некоторого шара так, что степень отображения изменится на $\pm n$. Поэтому в дальнейшем нас будет интересовать не сама степень, а её вычет по модулю n.

Пусть $f : M \to P$ — клеточное отображение между двумя замкнутыми трёхмерными многообразиями, причём фундаментальная группа $\pi_1(P)$ конечна и имеет порядок n.

В работе [4] была доказана следующая формула для вычисления степени такого отображения.

Теорема 2. *([4], теорема 2.1) Степень отображения $f : M \to P$ можно вычислить по формуле*

$$deg f \equiv \xi_P(\tilde{f}_*(\partial\tilde{\beta}_M)) \ mod \ n.$$

Доказательство. Если представить $\tilde{f}_*(\partial\tilde{\beta}_M)$ в виде суммы граничных циклов в многообразия P, то количество слагаемых (с учётом знака) будет степенью отображения f. Предположим теперь, что на группе двумерных цепей $C_2(\tilde{P})$ задан такой линейный функционал $\xi_P : C_2(\tilde{P}) \to \mathbb{Z}_n$, что на любом граничном цикле в $\tilde{P}$ он принимает значение 1. Тогда (в силу его линейности) его значение на цепи $\tilde{f}_*(\partial\tilde{\beta}_M)$ и будет этим числом слагаемых, то есть степенью отображения. □

3 Алгоритм вычисления степени отображения

3.1 Граничный цикл многообразия Зейферта

Для вычисления граничного цикла многообразия Зейферта, следуя работе [4], сначала рассмотрим клеточный комплекс, реализующий копредставление $\langle a, t | R_1, R_2 \rangle$. Здесь $R_1 = at^{-1}a^{-1}t$, $R_2 = w_{\alpha,\beta}(a,t)$, где α и β — пара взаимно простых чисел ($\alpha \geq 0$), а $w_{\alpha,\beta}(a,t)$ — слово в образующих a и t, реализующее замкнутую кривую без самопересечений на торе, образованном клеткой R_1, проходящую α раз вдоль ребра a и β раз вдоль ребра t. В общем случае мы не можем сказать, что $w_{\alpha,\beta}(a,t) = a^\alpha t^\beta$, так как копредставление может оказаться негеометрическим.

Для вычисления слова $w_{\alpha,\beta}$ можно использовать следующее рекурсивное правило:

$$w_{1,0}(a,t) = a; w_{0,\pm 1}(a,t) = t^{\pm 1};$$
$$w_{\alpha+\beta,\beta}(a,t) = w_{\alpha,\beta}(a, at);$$
$$w_{\alpha,\alpha+\beta}(a,t) = w_{\alpha,\beta}(at, t).$$

В работе [4] была доказана следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть K — клеточный комплекс, реализующий копредставление $\langle a, t | R_1, R_2 \rangle$, где $R_1 = at^{-1}a^{-1}t$, $R_2 = w_{\alpha,\beta}(a,t)$. Пусть M — полноторие, полученное приклеиванием трёхмерной клетки B к комплексу K, тогда $\partial\tilde{\beta}_M = -R_1 + (1 - a^x t^y)R_2$, где $\alpha y - \beta x = -1$.*

Мы будем считать, что многообразие Зейферта M с базой сфера и тремя особыми слоями разбито на клетки в соответствии с геометрическим копредставлением:

$$\pi_1(M) \cong \langle a_1, a_2, a_3, t | R_j, 1 \leq j \leq 7 \rangle,$$

где $R_{2i-1} = a_i t^{-1} a_i^{-1} t$, $R_{2i} = w_{\alpha_i,\beta_i}(a,t)$, $i = 1, 2, 3$, $R_7 = a_1 a_2 a_3$. В таком разбиении присутствует одна вершина и четыре трёхмерные клетки, три из которых соответствуют окрестностям особых слоёв и устроены также, как клетка B в лемме 3, а одна — окрестности регулярного слоя. Образующая t соответствует регулярному слою.

В работе [4] была получена следующая формула для вычисления граничного цикла. (Мы приводим её с доказательством, чтобы по аналогии доказать теорему 4)

Теорема 3. *Пусть M — многообразие Зейферта с базой сфера и тремя особыми слоями: $M = M(S^2; (\alpha_1, \beta_1); (\alpha_2, \beta_2); (\alpha_3, \beta_3))$, тогда его граничный цикл*

$$\partial\tilde{\beta}_M = \sum_{i=1}^{3} (-R_{2i-1} + (1 - a_i^{x_i} t^{y_i}) R_{2i}) + (R_1 + a_1 R_3 + a_1 a_2 R_5 - (1 - t^{-1}) R_7).$$

(Целые числа x_i и y_i таковы, что $\alpha_i y_i - \beta_i x_i = -1$).

Доказательство. Граничный цикл многообразия M есть, по определению, сумма граничных циклов его трёхмерных клеток. Первые три слагаемых — это граничные циклы клеток, соответствующих окрестностям особых слоёв, вычисленные в соответствии с леммой 3. Четвёртое слагаемое — граничный цикл клетки, соответствующей окрестности регулярного слоя. □

Рассмотрим теперь многообразие Зейферта с базой тор и одним особым слоем: $M = M(T^2; (\alpha_1, \beta_1))$. Клеточное разбиение, которое мы будем использовать, соответствует геометрическому копредставлению $\langle a_1, t, u, h | R_j, 1 \leq j \leq 5\rangle$, где $R_1 = a_1 t^{-1} a_1^{-1} t$, $R_2 = w_{\alpha_1,\beta_1}(a_1, t)$, $R_3 = ht^{-1}h^{-1}t$, $R_4 = ut^{-1}u^{-1}t$, $R_5 = hu^{-1}h^{-1}ua_1$. В таком разбиении присутствует одна вершина и две трёхмерные клетки, одна из которых соответствует окрестности особого слоя, а другая — окрестности регулярного: $(T^2 \backslash D^2) \times S^1$. Более точно: ребро a_1 — меридиан тора $\partial D^2 \times S^1$, t — регулярный слой $\{*\} \times S^1$, u и h — параллель и меридиан проколотого тора $(T^2 \backslash D^2) \times \{*\}$. Из клетки R_1 склеивается тор $\partial D^2 \times S^1$, клетка R_2 — меридиональный диск вклеиваемого полнотория, из клетки R_3 склеивается тор $h \times S^1$, из R_4 — тор $u \times S^1$, из R_5 — проколотый тор $(T^2 \backslash D^2) \times \{*\}$.

Теорема 4. *Пусть M — многообразие Зейферта с базой тор и одним особым слоем: $M = M(T^2; (\alpha_1, \beta_1))$, тогда его граничный цикл*

$$\partial\tilde{\beta}_M = (-R_1 + (1 - a_1^x t^y)R_2) + (R_1 + (a_1 - u^{-1})R_3 + (u^{-1} - u^{-1}h)R_4 - (1 - t^{-1})R_5).$$

(Целые числа x и y таковы, что $\alpha_1 y - \beta_1 x = -1$).

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей теоремы, первое слагаемое граничного цикла получается по лемме 3, а второе — граничный цикл клетки, соответствующей окрестности регулярного слоя. □

Небольшие отличия формул лемме 3 и теоремах 3, 4 от аналогичных формул в работах [4, 5, 6], обусловлены некоторой разницей в обозначениях: разным выбором ориентации рёбер и двумерных клеток. Обозначения, принятые в настоящей работе, представляются автору наиболее последовательными.

В дальнейшем, говоря о копредставлении фундаментальной группы многообразия Зейферта, мы будем придерживаться обозначений, введённых в двух предыдущих теоремах:

$$\pi_1(M) \cong \langle a_1, a_2, a_3, t | R_j, 1 \leq j \leq 7\rangle,$$

где $R_{2i-1} = a_i t^{-1} a_i^{-1} t$, $R_{2i} = w_{\alpha_i,\beta_i}(a,t)$, $i = 1, 2, 3$, $R_7 = a_1 a_2 a_3$ — для многообразия Зейферта с базой сфера и тремя особыми слоями, и

$$\pi_1(M) \cong \langle a_1, t, u, h | R_j, 1 \leq j \leq 5\rangle,$$

где $R_1 = a_1 t^{-1} a_1^{-1} t$, $R_2 = w_{\alpha_1,\beta_1}(a_1, t)$ $R_3 = ht^{-1}h^{-1}t$, $R_4 = ut^{-1}u^{-1}t$, $R_5 = hu^{-1}h^{-1}ua_1$ — для многообразия Зейферта с базой тор и одним особым слоем.

3.2 Вычисление индуцированного отображения двумерных цепей

Пусть $< a_1, ...a_q | R_1, ...R_r >$ и $< b_1, ...b_s | Q_1, ...Q_t >$ – геометрические представления фундаментальных групп $\pi_1(M)$ и $\pi_1(P)$ соответственно. Предположим, что гомоморфизм $f_* : \pi_1(M) \to \pi_1(P)$ задан набором слов h_i в образующих b_j, представляющих элементы $f_*(a_i)$ группы $\pi_1(P)$, $1 \leq i \leq r$. Пусть R – одно из соотношений R_i. Чтобы вычислить образ $f_*(R) \in C_2(P, \mathbb{Z}[\pi_1(P)])$ соответствующей 2-клетки, можно воспользоваться следующим алгоритмом:

1. Заменим в R каждое a_i на h_i и a_i^{-1} на h_i^{-1}. Получим некоторое слово w в образующих b_j, представляющее нейтральный элемент.

2. Представим w в виде $w = \prod_k v_k Q_{i_k}^{\varepsilon_k} v_k^{-1}$, где $\varepsilon_k = \pm 1$, v_k – слова в свободной группе, порождённой образующими b_j.

3. $f_*(R)$ получим в виде "логарифма"
$$\log(w) = \sum_k \varepsilon_k \hat{v}_k Q_{i_k},$$
где $\hat{v}_k$ — образ слова v_k в группе $\pi_1(P)$.

Второй шаг алгоритма, вообще говоря, неоднозначен, так как слово w можно представить в виде указанного произведения разными способами.

3.3 Двойственные образующие фундаментальной группы

Пусть замкнутое ориентированное многообразие M с конечной фундаментальной группой $\pi_1(M)$ порядка n снабжено клеточной структурой, в которой присутствует ровно одна вершина v и ровно одна трёхмерная клетка B. Пусть $\langle a_1, \ldots, a_k | R_1, \ldots, R_k \rangle$ — геометрическое копредставление фундаментальной группы $\pi_1(M)$, соответствующее данному клеточному разбиению. Зафиксируем точку x внутри клетки B и рассмотрим такие проходящие через неё петли u_i, $i = 1, \ldots, k$, что каждая петля u_i пересекает двумерный скелет многообразия M в единственной точке, лежащей внутри двумерной клетки R_i, причём пересечение положительно.

Замечание 4. Петли u_i порождают фундаментальную группу $\pi_1(M; x)$.

Действительно, рассмотрим петлю, представляющую произвольный элемент группы $\pi_1(M; x)$ и приведённую в общее положение по отношению к клеточному разбиению многообразия M. Каждый участок петли между двумя её последовательными пересечениями с двумерными клетками можно изотопно продеформировать так, чтобы он проходил через точку x. После этого данную петлю можно представить как произведение петель, каждая из которых проходит через точку

x и пересекает двумерный скелет многообразия M в единственной точке, лежащей внутри одной из двумерных клеток, а все такие петли реализуют элементы u_i или u_i^{-1}.

Петли u_i, $i = 1, \ldots, k$ и соответствующие им элементы фундаментальной группы $\pi_1(M; v)$ мы будем называть *двойственными образующими*. Если такая петля положительно пересекает двумерную клетку R_i, то будем говорить, что она *двойственна к клетке* R_i.

3.4 Вычисление характеристической коцепи

Характеристическую коцепь можно построить например следующим образом. Пусть на трёхмерном многообразии P с конечной фундаментальной группой $\pi_1(P)$ порядка n задана клеточная структура с одной 3-клеткой, и пусть $p : \tilde{P} \to P$ — универсальное накрытие, тогда единственной 3-клетке в P соответствуют n 3-клеток в $\tilde{P}$. Возьмём одну точку x внутри единственной 3-клетки многообразия P. В накрывающем пространстве ей соответствуют n прообразов. Один из них (назовём его базисной точкой) соединим со всеми остальными прообразами дугами, трансверсальными к двумерному скелету многообразия $\tilde{P}$. Получившаяся "метёлка" (объединение дуг) задаёт функционал на 2-клетках $\tilde{P}$, равный на каждой клетке индексу пересечения "метёлки" и данной клетки. Продолжив этот функционал по линейности на всю группу двумерных цепей $C_2(\tilde{P})$, получим характеристическую коцепь ξ_P, так как легко показать, что на каждом граничном цикле в $\tilde{P}$ он принимает значение 1. Действительно: для каждой 3-клетки, кроме содержащей базисную точку, только одна из дуг заканчивается внутри неё, а все остальные либо вообще не пересекают её, либо пересекают с индексом 0 (то есть, входят и выходят). Из базисной клетки выходит $n-1$ дуг, то есть, значение функционала на её границе равно $-(n-1) \equiv 1 \bmod n$.

Заметим, что "метёлка" может быть аппроксимирована одномерной цепью в двойственном клеточном разбиении $\tilde{P}$. Обозначим рёбра двойственного клеточного разбиения многообразия P (и соответствующие им двойственные образующие группы $\pi_1(P)$) u_i, $i = 1, \ldots, s$, где u_i — двойственное ребро, пересекающее клетку Q_i с индексом 1.

Замечание 5. Двойственное клеточное разбиение мы понимаем в следующем смысле. Исходному клеточному разбиению многообразия соответствует разбиение на ручки (каждой клетке размерности i соответствует ручка индекса i, $0 \leq i \leq 3$). В этом разбиении заменяем каждую ручку индекса i на ручку индекса $3-i$, $0 \leq i \leq 3$. (Фактически, само разбиение не меняется, меняются только индексы ручек). Теперь от полученного нового разбиения на ручки переходим снова к разбиению на клетки, которое считаем двойственным к исходному. Естественно, рёбра двойственного клеточного разбиения реализуют двойственные образующие фундаментальной группы многообразия. Конструкция двойственного клеточного разбиения может быть найдена, например, в [2], глава X.

Утверждение 1. *Пусть слова $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ в двойственных образующих u_i реализуют без повторения все элементы группы $\pi_1(P)$. Тогда $\xi_P = \sum_{i=0}^{n-1} dw_i$.*

Доказательство. Каждая дуга построенной выше "метёлки" является поднятием композицией петель, соответствующих двойственным образующим группы $\pi_1(P)$. Чтобы перечислить все дуги "метёлки", достаточно представить все элементы фундаментальной группы в виде слов в двойственных образующих.

Объединение дуг, задаваемых словами w_i и есть построенная выше "метёлка", а $\sum_{i=0}^{n-1} dw_i$ — её клеточная аппроксимация в двойственном разбиении (по лемме 2). □

Утверждение 2. *Если L — граница в $C_2(\tilde{P})$, то $\xi_P(vL) = \xi_P(L)$ для всех $v \in \pi_1(P)$.*

Доказательство. Пусть K — граница некоторой 3-клетки многообразия $\tilde{P}$, тогда, по определению характеристической коцепи, $\xi_P(vK) = \xi_P(K) = 1$. Таким образом, в силу аддитивности функционала ξ_P на группе цепей $C_2(P; \mathbb{Z}_n[\pi_1(P)])$, для любой границы L выполняется равенство $\xi_P(vL) = \xi_P(L)$. □

4 Гомологическая сфера Пуанкаре

4.1 Фундаментальная группа

Напомним, что гомологическая сфера Пуанкаре S^3/P_{120} — это факторпространство сферы по действию группы движений додекаэдра. Кроме того, это многообразие Зейферта $M(S^2; (2,-1); (3,1); (5,1))$. Его фундаментальная группа — $P_{120} \cong SL_2(\mathbb{Z}_5) \cong \langle x, y | x^2 = y^3 = (xy)^5 \rangle$. Нас будет интересовать геометрическое копредставление $P_{120} \cong \langle a, c | Q_1, Q_2 \rangle$, где $Q_1 = c^5 a^{-2}$, $Q_2 = aca^{-1}ca^{-1}c$. (Таким же копредставлением пользуются авторы работы [4]; в частности, они приводят соответствующую диаграмму Хегора многообразия S^3/P_{120}). Двойственные образующие: $u_1 = c$ (соответствует соотношению Q_1) и $u_2 = c^{-1}a$ (соответствует соотношению Q_2).

Все вычисления в этой группе легко выполняются, если рассматривать её как $SL_2(\mathbb{Z}_5)$, причём $a = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; (в дальнейшем мы будем придерживаться таких обозначений). Порядок элемента a равен 4, а порядок элемента c равен 10. В группе присутствуют элементы порядков 1, 2 (только один), 3, 4, 5, 6 и 10. Центр группы состоит из двух элементов (единичный и элемент порядка 2). Все элементы группы как слова в образующих можно перечислить, например, так: c^i, c^iac^j, $c^iac^2ac^j$, $c^iac^2ac^{-2}a$, где $i = 0, \ldots, 9$, $j = 0, \ldots, 4$.

4.2 Характеристическая коцепь для S^3/P_{120}

В соответствии с утверждением 1, характеристическую коцепь можно найти по формуле $\xi = \xi_{S^3/P_{120}} = \sum_{i=0}^{119} dw_i$, где w_i — слова в двойственных образующих

u_1 и u_2, представляющие все элементы группы P_{120}. Слова w_i можно выбрать следующим образом:

1. $w_i = u_1^i$, $i = 1, \ldots, 10$;
2. $w_{10+5i+j} = u_1^{i+1} u_2 u_1^j$, $i = 0, \ldots, 9$, $j = 0, \ldots, 4$;
3. $w_{60+5i+j} = u_1^{i+1} u_2 u_1^3 u_2 u_1^j$, $i = 0, \ldots, 9$, $j = 0, \ldots, 4$;
4. $w_{110+i} = u_1^{i+1} u_2 u_1^3 u_2 u_1^{-1} u_2$, $i = 0, \ldots, 9$.

4.3 Операция логарифмирования в случае S^3/P_{120}

Напомним, что операция логарифмирования слова в образующих некоторой группы, представляющего единичный элемент, это сопоставление слову $w = \prod_k v_k Q_{i_k}^{\varepsilon_k} v_k^{-1}$ $(\varepsilon_k = \pm 1)$, представленному в виде произведения сопряжённых соотношений группы, суммы
$\log(w) = \sum_k \varepsilon_k \hat{v}_k Q_{i_k}$ где $\hat{v}_k$ — значение слова v_k в группе.

В работе [4] построен алгоритм логарифмирования произвольного слова, представляющего единичный элемент в группе P_{120} с образующими a, c и соотношениями $Q_1 = c^5 a^{-2}$, $Q_2 = aca^{-1}ca^{-1}c$. Алгоритм основан на использовании следующего набора правил:

1. $\log(v_1 aca v_2) = \log(v_1 c^4 ac^{-1} v_2) + \hat{v}_1 \lambda_0$, где $\lambda_0 = \log(aca(c^4 ac^{-1})^{-1})$;
2. $\log(v_1 ac^{-1} a v_2) = \log(v_1 cac v_2) + \hat{v}_1 \lambda_1$, где $\lambda_1 = \log(ac^{-1}a(cac)^{-1})$;
3. $\log(v_1 ac^{-2} a v_2) = \log(v_1 c^{-4} ac^2 ac v_2) + \hat{v}_1 \lambda_2$, где $\lambda_2 = \log(ac^{-2}a(c^{-4}ac^2ac)^{-1})$;
4. $\log(v_1 ac^2 ac^2 a v_2) = \log(v_1 c^4 ac^2 ac^{-1} v_2) + \hat{v}_1 \lambda_3$, где $\lambda_3 = \log(ac^2ac^2a(c^4ac^2ac^{-1})^{-1})$;
5. $\log(v_1 ac^2 ac^{-2} ac^{-1} v_2) = \log(v_1 cac^2 ac^{-2} a v_2) + \hat{v}_1 \lambda_4$,
   где $\lambda_4 = \log(ac^2ac^{-2}ac^{-1}(cac^2ac^{-2}a))^{-1})$;
6. $\log(c^{10}) = \lambda_5$, $\log(c^{-10}) = -\lambda_5$.
   Здесь v_1, v_2 — слова в образующих a и c, $\hat{v}_1$ — значение слова v_1.

Алгоритм заключается в следующем: с помощью последовательного применения преобразований, описанных в правилах (1)-(5), исходное слово приводится к виду c^{10n}, $n \in \mathbb{Z}$. (Это всегда возможно; после каждого преобразования слово продолжает представлять единичный элемент. Порядок элемента c в группе равно 10, поэтому, в конце концов получается слово c^{10n}.) Логарифм слова c^{10n} вычисляется как $n\lambda_5$. В результате логарифм исходного слова w находится как $\sum_{i=0}^{5} n_i e_i \lambda_i$, где $n_i \in \mathbb{Z}$, $e_i \in P_{120}$, $i = 0, \ldots, 5$.

5 Минимальность многообразий Зейферта

5.1 Компьютерный эксперимент

Ряд дальнейших результатов, касающихся минимальности многообразий Зейферта частично опирается на результаты компьютерного эксперимента. Автором была составлена компьютерная программа, реализующая описанный выше алгоритм вычисления степени отображения многообразия Зейферта на гомологическую сферу Пуанкаре. Программа написана на языке C++ и состоит из трёх модулей:

1. Вычисление граничного цикла многообразия Зейферта типа $M(S^2;(\alpha_1,\beta_1);(\alpha_2,\beta_2);(\alpha_3,\beta_3))$ или $M(T^2;(\alpha,\beta))$ в соответствии с теоремами 3 и 4.

2. Вычисление индуцированного отображения двумерных цепей $\tilde{f}_* : C_2(M;\mathbb{Z}[\pi_1(M)]) \to C_2(S^3/P_{120};\mathbb{Z}[P_{120}])$, где M — многообразие Зейферта с известным граничным циклом, а S^3/P_{120} — гомологическая сфера Пуанкаре. Вычисление опирается на операцию логарифмирования, описанную в пункте 4.3.

3. Перебор всех возможных гомоморфизмов фундаментальной группы исходного многообразия Зейферта в группу P_{120} и вычисление степеней соответствующих отображений.

Аналогичная программа была написана ранее авторами работы [4] на языке PASCAL. В частности, все результаты, полученные с её помощью, совпали с результатами работы новой программы.

Следует, однако, отметить, что при доказательстве минимальности многообразий Зейферта программа применялась только в тех случаях, когда задача проверки минимальности уже была сведена к конечному перебору, который и выполнялся при помощи компьютера.

5.2 Вспомогательные результаты

Напомним, что для доказательства минимальности многообразий Зейферта серий d1, d2, d3 и d4 (см. теорему 1), достаточно доказать для них отсутствие отображений степени 1 на гомологическую сферу Пуанкаре.

Для доказательства свойств степеней отображений многообразий серий d1 и d2 потребуются несколько вспомогательных результатов.

Лемма 4. *Пусть v — некоторый элемент порядка k в группе $\pi_1(P)$, и пусть слово ω в образующих той же группы реализует элемент v. Тогда значение $\xi_P((v-1)\log(\omega^k))$ кратно числу $\frac{|\pi_1(P)|}{k}$.*

Доказательство. Вначале покажем, что цепь $(v-1)\log(\omega^k)$ является циклом. Напомним, что если представить замкнутый путь, реализующий слово ω и проходящий по рёбрам многообразия $\tilde{P}$, как одномерную цепь $l \in C_1(\tilde{P})$, то логарифм слова ω — это некоторая двумерная цепь, границей которой является цепь l. Зафиксируем цепь $L = \log(\omega^k)$ и вычислим логарифм другим способом: $\log(\omega^k) = \log(\omega \cdot \omega^k \cdot \omega^{-1}) = v\log(\omega^k) = vL$. Таким образом, $(v-1)L = vL - L$ - это разность двух цепей, являющихся логарифмами одного и того же слова, а значит, имеющих одинаковые границы. Поэтому $\partial((v-1)L) = 0$, и цепь $(v-1)L$ является циклом.
Так как универсально накрывающее пространство $\tilde{P}$ является гомологической сферой, то цепь $(v-1)L$, будучи циклом, является и границей. По утверждению 2, $\xi_P(v^i(v-1)L) = \xi_P((v-1)L), i = 0, \ldots, k-1$. В то же время $\sum_{i=0}^{k-1} \xi_P(v^i(v-1)L) = \xi_P(\sum_{i=0}^{k-1} v^i(v-1)L) = \xi_P((v^k-1)L) = 0$. (Напомним, что вычисления производятся по модулю $|\pi_1(P)|$.) Итак, $k\xi_P((v-1)L \equiv 0 \mod (|\pi_1(P)|)$, поэтому $\xi_P((v-1)L$ кратно $\frac{|\pi_1(P)|}{k}$. □

Следствие 1. *Пусть v — некоторый элемент порядка k в группе $\pi_1(P)$, и пусть слово ω в образующих той же группы реализует элемент v; $x \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Тогда значение $\xi_P((v^x-1)\log(\omega^k))$ кратно числу $\frac{|\pi_1(P)|}{k}$.*

Доказательство. Очевидно следует из предыдущей леммы, если представить $v^x - 1$ как $\sum_{i=0}^{x-1} v^i(v-1)$. □

Определение 5. *Пусть фундаментальные группы многообразий M_1 и M_2 имеют фиксированные копредставления с одинаковым числом образующих: $\pi_1(M_1) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_k | R_1, R_2, \ldots\rangle$, $\pi_1(M_2) = \langle x'_1, x'_2, \ldots, x'_k | Q_1, Q_2, \ldots\rangle$. (Наборы образующих упорядочены.) Будем говорить, что отображения $f_1 : M_1 \to P$ и $f_2 : M_2 \to P$ в некоторое многообразие P* аналогичны, *если $(f_1)_*(x_i) = (f_2)_*(x'_i)$ для всех $i = 1, \ldots, k$.*

5.3 Минимальность многообразий серии d1

Лемма 5. *Пусть многообразия Зейферта $M = M(T^2; (\alpha_1, \varepsilon))$ и $M' = M'(T^2; (\alpha'_1, \varepsilon))$ таковы, что α_1 и α'_1 делятся на k, где $k = 3$ или 5, и $\varepsilon = \pm 1$. Пусть отображения $f : M \to S^3/P_{120}$ и $f' : M' \to S^3/P_{120}$ аналогичны. Тогда разность $\deg f' - \deg f$ - чётна.*

Будем считать, что для каждого многообразия Зейферта $M = M(T^2; (\alpha_1; \beta_1))$ зафиксировано геометрическое копредставление его фундаментальной группы: $\pi_1(M) = \langle a_1, h, u, t | R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\rangle$, где $R_1 = a_1 t^{-1} a_1^{-1} t$, $R_2 = w_{\alpha_1, \beta_1}(a_1, t)$, $R_3 = ht^{-1}h^{-1}t$, $R_4 = ut^{-1}u^{-1}t$, $R_5 = a_1 h u^{-1} h^{-1} u$ (см. п. 3.1).

Доказательство. Вычислим степень отображения f:

$$\deg f = \xi_{S^3/P_{120}}[\tilde{f}_*(\partial\tilde{\beta}_{1M})] =$$

$$= \xi_{S^3/P_{120}}[\tilde{f}_*((1 - a_1^x t^y)R_2 + (u^{-1} - a_1)R_3 + (u^{-1} - u^{-1}h)R_4 - (1 - t^{-1})R_5)] =$$

$$= \xi_{S^3/P_{120}}[(f_*(1-a_1^x t^y))\tilde{f}_*(R_2) + (f_*(u)^{-1} - f(a_1))\tilde{f}_*(R_3) +$$
$$+ (f_*(u)^{-1} - f_*(u^{-1}h))\tilde{f}_*(R_4) - (1 - f_*(t)^{-1})\tilde{f}_*(R_5)].$$

Числа x и y должны удовлетворять условию $\alpha_1 y - \varepsilon x = -1$. Можно, например, выбрать решение $x = \varepsilon$, $y = 0$, тогда $f(a_1^x t^y) = f_*(a_1)^\varepsilon$. Теперь, чтобы вычислить все $\tilde{f}_*(R_i)$, нужно для каждого из элементов $f_*(a_1)$, $f_*(u)$, $f_*(h)$, $f_*(t)$ выбрать слово в образующих группы P_{120}, реализующее данный элемент. Сделаем это следующим образом:

- для элементов $f_*(u)$, $f_*(h)$ выберем произвольные реализующие их слова v_u и v_h;
- для элемента $f_*(a_1)$ выберем слово $v_{a_1} = v_u^{-1} v_h v_u v_h^{-1}$;
- для элемента $f_*(t)$ выберем тривиальное слово, если $f_*(t) = 1$, или слово $v_t = v_{a_1}^{\varepsilon k}$ в противном случае.

При таком выборе,

$$\tilde{f}_*(R_5) = \log(v_u^{-1} v_h v_u v_h^{-1} v_h v_u^{-1} v_h^{-1} v_u) = \log(1) = 0;$$

$$\tilde{f}_*(R_2) = \log(v_{a_1}^{\alpha_1 + ks}) = \log(v_{a_1}^{k(\frac{\alpha_1}{k} + s)}),$$

где $s = \begin{cases} 0, & f_*(a_1)^k = 1 \\ 1, & f_*(a_1)^k \neq 1 \end{cases}$, и тогда $\deg f =$

$$\xi_{S^3/P_{120}}[(1 - f_*(a_1)^\varepsilon)\log(v_{a_1}^{k(\frac{\alpha_1}{k}+s)}) + (f_*(u)^{-1} - f(a_1))L_3 + (f_*(u)^{-1} - f_*(u^{-1}h))L_4],$$

где $L_3 = \log(v_h v_t^{-1} v_h^{-1} v_t)$, и $L_4 = \log(v_h v_t^{-1} v_h^{-1} v_t)$.

Поскольку отображения f и f' аналогичны, $f'_*(a'_1) = f_*(a_1)$, $f'_*(h') = f_*(h)$, $f'_*(u') = f_*(u)$, $f'_*(t') = f_*(t)$, и эти элементы мы можем представить теми же словами v_{a_1}, v_h, v_u и v_t соответственно. Тогда $\deg f' =$

$$= \xi_{S^3/P_{120}}[(1 - f_*(a_1)^\varepsilon)\log(v_{a_1}^{k(\frac{\alpha'_1}{k}+s)}) + (f_*(u)^{-1} - f(a_1))L_3 + (f_*(u)^{-1} - f_*(u^{-1}h))L_4],$$

и $\deg f' - \deg f =$

$$= \xi_{S^3/P_{120}}[(1 - f_*(a_1)^\varepsilon)\log(v_{a_1}^{k(\frac{\alpha'_1}{k}+s)}) - \xi_{S^3/P_{120}}[(1 - f_*(a_1)^\varepsilon)\log(v_{a_1}^{k(\frac{\alpha_1}{k}+s)}).$$

По лемме 4, оба слагаемых делятся на $\frac{120}{\mathrm{ord}\ (f_*(a_1))}$, где $\mathrm{ord}\ (f_*(a_1))$ - порядок элемента $f_*(a_1)$ в группе P_{120}, который может быть равен либо k, либо $2k$. В обоих случаях число $\frac{120}{\mathrm{ord}\ f_*(a_1)}$ — чётное, следовательно, и вся разность чётна.

□

Утверждение 3. *Для многообразий $M(T^2;(3,\pm 1))$ и $M(T^2;(5,\pm 1))$ все степени отображений на S^3/P_{120}, индуцирующих сюръективные гомоморфизмы фундаментальных групп, имеют чётные степени.*

С помощью компьютерной программы были вычислены степени всех отображений многообразий $M(T^2;(3,\pm 1))$ и $M(T^2;(5,\pm 1))$ на гомологическую сферу Пуанкаре. Среди полученных степеней присутствуют все чётные числа от 0 до 118 (по модулю 120), но нет ни одного нечётного, в том числе и единицы. Вместе с теоремой 5 это означает минимальность всех многообразий серии d1.

5.4 Минимальность многообразий серии d2

Теорема 5. *Пусть M — многообразие Зейферта с базой S^2 и с тремя особыми слоями $((2^k\alpha_1,\beta_1);(2^k\alpha_2,\beta_2);(2^k\alpha_3,\beta_3))$, где $3|\alpha_2$ и $5|\alpha_3$, и $k>1$. Тогда степень любого отображения $f: M\to S^3/P_{120}$ чётна.*

Доказательство. Будем пользоваться введённым ранее копредставлением фундаментальной группы многообразия M: $\pi_1(M)=\langle a_1,a_2,a_3,t|R_j,1\leq j\leq 7\rangle$, где $R_{2i-1}=a_it^{-1}a_i^{-1}t$, $R_{2i}=w_{\alpha_i,\beta_i}(a,t)$, $i=1,2,3$, $R_7=a_1a_2a_3$. Вспомним, что $a_1^{2^k\alpha_1}t^{\beta_1}=1$, а β_1 нечётно. Элемент t — центральный, поэтому его образ $f_*(t)$ должен быть центральным. В группе P_{120} всего два центральных элемента: единица и $\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$, причём уравнение $x^4=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$ решений не имеет. Поэтому $f_*(t)=1$. Для представление элемента $f_*(t)$ мы выберем, естественно, тривиальное слово. Для представления элементов $f_*(a_1)$, $f_*(a_2)$ и $f_*(a_3)$ — слова v_1, v_2 и v_3 соответственно. Тогда

$$\deg f=\xi_P((1-f_*(a_1)^{x_1})\log(v_1^{2^k\alpha_1})+(1-f_*(a_2)^{x_2})\log(v_2^{2^k\alpha_2})+(1-f_*(a_3)^{x_3})\log(v_3^{2^k\alpha_3}))=$$

$$=\xi_P((1-f_*(a_1)^{x_1})\log(v_1^{2^k\alpha_1}))+\xi_P((1-f_*(a_2)^{x_2})\log(v_2^{2^k\alpha_2}))+\xi_P((1-f_*(a_3)^{x_3})\log(v_3^{2^k\alpha_3})).$$

По лемме 4, первое слагаемое делится на $\frac{120}{\mathrm{ord}\ f_*(a_1)}$, второе — на $\frac{120}{\mathrm{ord}\ f_*(a_2)}$, третье — на $\frac{120}{\mathrm{ord}\ f_*(a_3)}$. В группе P_{120} есть элементы порядков 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 10. В каждом из этих случаев числа $\frac{120}{\mathrm{ord}\ f_*(a_i)}$ — чётны ($i=1,2,3$), следовательно, и вся сумма чётна. Таким образом, степень любого отображения многообразия M на многообразие S^3/P_{120} чётна, и, следовательно, M минимально. □

5.5 Минимальность многообразий серии d3

Теорема 6. *Пусть M — многообразие Зейферта с базой S^2 и с тремя особыми слоями $((2\alpha_1,\beta_1);(2\alpha_2,\beta_2);(2\alpha_3,\beta_3))$, где $3|\alpha_2$, $5|\alpha_3$ и все α_i нечётны. Тогда для каждого отображения $f: M\to S^3/P_{120}$ верно по крайней мере одно из утверждений:*

1. *степень deg f чётна*

2. *гомоморфизм* $f_* : \pi_1(M) \to P_{120}$ *переводит образующие* a_1, a_2 *и* a_3 *в элементы порядка* 4.

Доказательство. Вспомним, что $(a_2^6)^{\frac{\alpha_2}{3}} t^{\beta_2} = 1$. Если $f_*(t) = 1$, то доказательство чётности степени отображения в точности повторяет доказательство предыдущей теоремы.

Рассмотрим случай, когда $f_*(t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Так как число α_2 нечётно, $f_*(a_2)^6 = f_*(t)$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что $f_*(a_3)^{10} = f_*(t)$ и $f_*(a_1)^2 = f_*(t)$. Это возможно только в том случае, если $\operatorname{ord} f_*(a_1) = \operatorname{ord} f_*(a_2) = \operatorname{ord} f_*(a_3) = 4$. □

Попробуем вывести явную формулу для степеней отображений многообразий серии d3 на гомологическую сферу Пуанкаре. Напомним, что все многообразия серии d3 являются многообразиями Зейферта вида $M(S^2; (2p_1, \beta_1), (6p_2, \beta_2), (10p_3, \beta_3))$ с нечётными p_i и β_i, $i = 1, 2, 3$. Нас будут интересовать только те отображения, которые индуцируют гомоморфизмы фундаментальных групп, переводящие элементы a_1, a_2, a_3 в элементы порядка 4, так как, в соответствии с теоремой 6, только они могут иметь нечётные степени.

Для каждого многообразия $M = M(S^2; (2p_1, \beta_1), (6p_2, \beta_2), (10p_3, \beta_3))$ (все p_i и β_i нечётны) зафиксируем такой гомоморфизм $f_* : \pi_1(M) \to P_{120}$, что $f_*(a_i) = e_i$, $i = 1, 2, 3$, и $\operatorname{ord} e_i = 4$, $i = 1, 2, 3$. Пусть отображение $f : M \to S^3/P_{120}$ индуцирует гомоморфизм f_*, тогда можно доказать следующие утверждения.

Лемма 6. *deg* $f \equiv \frac{p_1+\beta_1}{2}\xi((1 - e_1^{\beta_1}) \log(e_1^4)) + F(p_2, \beta_2, p_3, \beta_3)(\mod 120)$, *где* F *— некоторая целочисленная функция.*

Доказательство. Выберем слова в образующих группы P_{120}, реализующие элементы $f(t)$, $e_i = f(a_i)$, $i = 1, 2, 3$ следующим образом:
слова h_{a_1}, h_{a_2}, h_{a_3} выбираются произвольным образом, а $h_t = h_1^2$.
Тогда из теоремы 2 следует, что
$\deg f \equiv \xi((1 - e_1^{x+2y}) \log(h_1^{2p_1+2\beta_1})) + F(p_2, \beta_2, p_3, \beta_3)(\mod 120)$, где $2p_1 y - \beta_1 x = -1$. Элемент e_1^{x+2y} определён однозначно: $x + 2y \equiv \beta_1(\mod 4)$, и $e_1^{x+2y} = e_1^{\beta_1}$. Слово h_1^4 реализует единичный элемент, поэтому
$\xi((1 - e_1^{x+2y}) \log(h_1^{2p_1+2\beta_1})) \equiv \frac{p_1+\beta_1}{2}\xi((1 - e_1^{\beta_1}) \log(h_1^4))(\mod 120)$. □

Следующие две леммы аналогичны, поэтому приводим их без доказательств.

Лемма 7. *deg* $f \equiv \frac{3p_2+\beta_2}{2}\xi((1 - e_2^{\beta_2}) \log(e_2^4)) + G(p_1, \beta_1, p_3, \beta_3)(\mod 120)$, *где* G *— некоторая целочисленная функция.*

Лемма 8. *deg* $f \equiv \frac{5p_3+\beta_3}{2}\xi((1 - e_3^{\beta_3}) \log(e_3^4)) + H(p_1, \beta_1, p_2, \beta_2)(\mod 120)$, *где* H *— некоторая целочисленная функция.*

Утверждения трёх предыдущих лемм можно объединить в одно:

Теорема 7. *Пусть* $M = M(S^2; (2p_1, \beta_1), (6p_2, \beta_2), (10p_3, \beta_3))$ *(все* p_i *и* β_i *нечётны), и отображение* $f : M \to S^3/P_{120}$ *таково, что элементы* $e_i = f_*(a_i)$, $i = 1, 2, 3$ *имеют порядок 4 в группе* P_{120}. *Тогда* $deg\ f \equiv \frac{p_1+\beta_1}{2}\xi((1-e_1^{\beta_1})\log(e_1^4)) + \frac{3p_2+\beta_2}{2}\xi((1-e_2^{\beta_2})\log(e_2^4)) + \frac{5p_3+\beta_3}{2}\xi((1-e_3^{\beta_3})\log(e_3^4)) + n(\ mod\ 120)$, *где* n *— некоторая константа (вообще говоря, зависящая от* e_1, e_2 *и* e_3, *но не зависящая от параметров многообразия* M*).*

Доказательство. Прямо следует из трёх предыдущих лемм. □

Утверждение 4. *Для любого элемента* $e_i \in P_{120}$ *порядка 4 число* $\xi((1-e_i)\log(e_i^4))$ *делится на 30.*

В группе P_{120} тридцать элементов порядка 4, и простая проверка показывает справедливость этого утверждения.

Утверждение 5. *Существует ровно 120 корректно определённых сюръективных гомоморфизмов из* $\pi_1(M)$ *в* P_{120}, *обладающих свойством: все элементы* $f_*(a_i) \in P_{120}$ *имеют порядок 4.*

Небольшое количество возможных гомоморфизмов позволяет перебрать их все для какого-нибудь конкретного многообразия M. Этот перебор был проделан и дал следующий результат:

Утверждение 6. *Константа* n *из теоремы 7 делится на 15 для любых элементов* e_1, e_2 *и* e_3, *удовлетворяющих условию теоремы.*

Следствие 2. *Все многообразия серии d3 не имеют отображений степени 1 на гомологическую сферу Пуанкаре.*

Доказательство. Все многообразия серии d3 являются многообразиями вида $M = M(S^2; (2p_1, \beta_1), (6p_2, \beta_2), (10p_3, \beta_3))$. По теореме 6 степени их отображений на S^3/P_{120}, индуцирующих эпиморфизмы фундаментальных групп, либо чётны, либо, в соответствии с теоремой 7 и утверждением 6, делятся на 15. □

5.6 Минимальность многообразий серии d4

Будем рассматривать многообразия Зейферта вида
$M(S^2; (2p_1, \beta_1); (3p_2, \beta_2); (5p_3, \beta_3))$, где все p_i и β_i нечётны. (Этим условиям удовлетворяют все многообразия серии d4). Отображениям таких многообразий на гомологическую сферу Пуанкаре была посвящена работа [4], где, в частности было показано, что все сюръективные гомоморфизмы фундаментальных групп $\varphi : M \to P_{120}$ в некотором смысле сводятся к некоторому стандартному гомоморфизму.

Определение 6. *Будем называть стандартным гомоморфизмом такой гомоморфизм* $\varphi_0 : \pi_1(M) \to P_{120}$, *что* $\varphi_0(t) = a^2$, $\varphi_0(a_1) = a$, $\varphi_0(a_2) = a^{-1}c$, $\varphi_0(a_3) = c^{-1}$.
Отображение из M *в* S^3/P_{120} *будем называть стандартным, если оно индуцирует стандартный гомоморфизм фундаментальных групп.*

"Универсальность" стандартного гомоморфизма, доказанную в [4], можно сформулировать так:

Теорема 8. *Любой сюръективный гомоморфизм* $\varphi : \pi_1(M) \to P_{120}$ *может быть представлен, как* $\varphi = \psi \circ \varphi_0$, *где* ψ *— это биективный автоморфизм группы* P_{120}, *а* φ_0 *— стандартный гомоморфизм.*

Замечание 6. Все отображения гомологической сферы Пуанкаре на себя, индуцирующие биективные автоморфизмы фундаментальной группы, имеют степени 1 или 49 $(\bmod 120)$. Это означает, что для любого отображения степени n из M в S^3/P_{120} можно построить отображение степени $49n$. Знак степени отображения можно сменить, если сменить ориентацию многообразия-прообраза.

В той же работе была предложена (но не доказана) сложная эмпирическая формула для степени стандартного отображения. Наша цель — вывести и доказать теоретическую формулу. Для этого сначала докажем три вспомогательные леммы.

Лемма 9. *Пусть многообразия* $M(S^2; (2p_1, \beta_1); (3p_2, \beta_2); (5p_3, \beta_3))$
и $M'(S^2; (2p'_1, \beta'_1); (3p_2, \beta_2); (5p_3, \beta_3))$ *таковы, что все* p_i, β_i, p'_1, β'_1 *нечётны,* $p_1 \equiv p'_1(\bmod 8)$ *и* $\beta_1 \equiv \beta'_1(\bmod 8)$. *Пусть* $f : M \to S^3/P_{120}$ *и* $f' : M' \to S^3/P_{120}$ *— стандартные отображения. Тогда* $deg\, f \equiv deg\, f'(\bmod 120)$.

Доказательство. Выберем слова в образующих группы P_{120}, реализующие элементы $f_*(t)$, $f_*(a_i)$, $i = 1, 2, 3$, $f'_*(t')$, $f'_*(a'_i)$ $i = 1, 2, 3$ следующим образом: a^2 для $f_*(t)$ и $f'_*(t')$, a для $f_*(a_1)$ и $f'_*(a'_1)$, $a^{-1}c$ для $f_*(a_2)$ и $f'_*(a'_2)$, c для $f_*(a_3)$ и $f'_*(a'_3)$. Тогда из теоремы 2 следует, что $\deg f - \deg f' \equiv \xi((1 - a^{x+2y})(\log(a^{2p_1+2\beta_1}))) - \xi((1 - a^{x'+2y'})(\log(a^{2p'_1+2\beta'_1}))(\bmod 120)$, где числа x, y, x', y' удовлетворяют условиям $2p_1y - \beta_1x = -1$ и $2p'_1y' - \beta'_1x' = -1$.

Покажем сначала, что $a^{x+2y} = a'^{(x'+2y')}$ (или, другими словами, $x + 2y \equiv x' + 2y'(\bmod 4)$, т.к. порядок элемента a равен 4). Для этого просто переберём все возможные вычеты чисел p_1 и β_1 по модулю 4 (напомним, что оба числа — нечётны). Результат этого перебора можно представить в виде сравнения: $x' + 2y' \equiv x + 2y \equiv \beta_1(\bmod 4)$.

Итак, $\deg f - \deg f' \equiv$
$\equiv \xi((1 - a^{\beta_1 \bmod 4})(\log(a^{2p_1+2\beta_1}))) - \xi((1 - a^{\beta_1 \bmod 4})(\log(a^{2p'_1+2\beta'_1}))(\bmod 120)$. Так как $a^4 = 1$, $\log(a^{4n}) = n\log(a^4)$ $(n \in \mathbb{Z})$, поэтому $\deg f - \deg f' \equiv (\frac{p_1+\beta_1}{2})\xi((1 - a^{\beta_1 \bmod 4})(\log(a^4))) - (\frac{p'_1+\beta'_1}{2})\xi((1 - a^{\beta_1 \bmod 4})(\log(a^4))(\bmod 120)$.

Значения слагаемых вычислены: $\xi(\log(a^4)) = 40, \xi(a\log(a^4)) = 10, \xi(a^3\log(a^4)) = 70$, поэтому $\xi((1-a^{\beta_1 \bmod 4})(\log(a^4)) \equiv \pm 30(\bmod 120)$, в зависимости от $\beta_1 \bmod 4$. Коротко можно записать: $\deg f - \deg f' \equiv \pm 30(\frac{p_1+\beta_1}{2} - \frac{p_1'+\beta_1'}{2})(\bmod 120)$. Заметим, что, так как $p_1 \equiv p_1'(\bmod 8)$ и $\beta_1 \equiv \beta_1'(\bmod 8)$, $\frac{p_1+\beta_1}{2} \equiv \frac{p_1'+\beta_1'}{2}(\bmod 4)$, поэтому $\pm 30(\frac{p_1+\beta_1}{2} - \frac{p_1'+\beta_1'}{2}) \equiv 0(\bmod 120)$. □

Замечание 7. Фактически доказано, что $\deg f \equiv 30(\beta_1 \bmod 4)(\frac{p_1+\beta_1}{2} \bmod 4) + F(p_2,\beta_2,p_3,\beta_3)(\bmod 120)$, где F — некоторая целочисленная функция.

Лемма 10. *Пусть $M(S^2;(2p_1,\beta_1);(3p_2,\beta_2);(5p_3,\beta_3))$ и $M'(S^2;(2p_1,\beta_1);(3p_2',\beta_2');(5p_3,\beta_3))$ таковы, что все p_i, β_i, p_2', β_2' нечётны, $p_2 \equiv p_2'(\bmod 12)$ и $\beta_2 \equiv \beta_2'(\bmod 12)$. Пусть $f : M \to S^3/P_{120}$ и $f' : M' \to S^3/P_{120}$ — стандартные отображения. Тогда $\deg f \equiv \deg f'(\bmod 120)$.*

Доказательство. Выберем слова в образующих группы P_{120}, реализующие элементы $f_*(t)$, $f_*(a_i)$, $i = 1,2,3$, $f'_*(t')$, $f'_*(a_i')$ $i = 1,2,3$ следующим образом: $(a^{-1}c)^3$ для $f_*(t)$ и $f'_*(t')$, a для $f_*(a_1)$ и $f'_*(a_1')$, $a^{-1}c$ для $f_*(a_2)$ и $f'_*(a_2')$, c для $f_*(a_3)$ и $f'_*(a_3')$. Из теоремы 2 следует, что $\deg f - \deg f' \equiv$
$\equiv \xi((1-(a^{-1}c)^{x+3y})(\log((a^{-1}c)^{3p_2+3\beta_2}))) -$
$- \xi((1-(a^{-1}c)^{x'+3y'})(\log((a^{-1}c)^{3p_2'+3\beta_2'}))(\bmod 120)$, где $3p_2y - \beta_2x = -1$ и $3p_2'y' - \beta_2'x' = -1$. Выражение $x + 3y \bmod 6$ зависит только от вычетов параметров p_2 и β_2 по модулю 6 следующим образом: $x+3y \equiv x'+3y' \equiv \beta_2(\bmod 6)$. Это можно проверить, перебрав все возможные вычеты параметров p_2 и β_2 по модулю 6. (Напомним, что оба параметра — нечётные, и не могут делиться на 3). То есть, $(a^{-1}c)^{x'+3y'} = (a^{-1}c)^{x+3y} = (a^{-1}c)^{\beta_2 \bmod 6}$, т.к. $\beta_2' \equiv \beta_2(\bmod 6)$.

Итак, $\deg f - \deg f' \equiv$
$\equiv \frac{p_2+\beta_2}{2}\xi((1-(a^{-1}c)^{\beta_2 \bmod 6})\log((a^{-1}c)^6)) -$
$- \frac{p_2'+\beta_2'}{2}\xi((1-(a^{-1}c)^{\beta_2' \bmod 6})(\log(a^{-1}c)^6))(\bmod 120)$. Значения слагаемых вычислены: $\xi(\log((a^{-1}c)^6)) = 63$, $\xi(a^{-1}c\log((a^{-1}c)^6)) = 43$, $\xi((a^{-1}c)^{-1}\log((a^{-1}c)^6)) = 83$, поэтому $\xi((1-(a^{-1}c)^{\beta_2 \bmod 6})\log((a^{-1}c)^6) \equiv \pm 20(\bmod 120)$, в зависимости от $\beta_2 \bmod 6$, и, так как $p_1 \equiv p_2'(\bmod 12)$ и $\beta_2 \equiv \beta_2'(\bmod 12)$, $\deg f - \deg f' \equiv 0(\bmod 120)$. □

Замечание 8. Фактически доказано, что $\deg f \equiv 20(\beta_2 \bmod 6)(\frac{p_2+\beta_2}{2} \bmod 6) + G(p_1,\beta_1,p_3,\beta_3)(\bmod 120)$, где G — некоторая целочисленная функция.

Лемма 11. *Пусть $M(S^2;(2p_1,\beta_1);(3p_2,\beta_2);(5p_3,\beta_3))$ и $M'(S^2;(2p_1,\beta_1);(3p_2,\beta_2);(5p_3',\beta_3'))$ таковы, что все p_i, β_i, p_3', β_3' нечётны, $p_3 \equiv p_3'(\bmod 20)$ и $\beta_3 \equiv \beta_3'(\bmod 20)$. Пусть $f : M \to S^3/P_{120}$ и $f' : M' \to S^3/P_{120}$ — стандартные отображения. Тогда $\deg f \equiv \deg f'(\bmod 120)$.*

Доказательство. Выберем слова в образующих группы P_{120}, реализующие элементы $f_*(t)$, $f_*(a_i)$, $i = 1,2,3$, $f'_*(t')$, $f'_*(a_i')$ $i = 1,2,3$ следующим образом: c^{-5} для $f_*(t)$ и $f'_*(t')$, a для $f_*(a_1)$ и $f'_*(a_1')$, $a^{-1}c$ для $f_*(a_2)$ и $f'_*(a_2')$, c для $f_*(a_3)$ и $f'_*(a_3')$. Из теоремы 2 следует, что $\deg f - \deg f' \equiv$

$\xi((1-c^{-x-5y})\log(c^{-5p_3-5\beta_3}))-\xi((1-c^{-x'-5y'})\log(c^{-5p'_3+5\beta'_3}))(\mod 120)$, где $5p_3y-\beta_3x=-1$ и $5p'_3y'-\beta'_3x'=-1$. Выражение $x+5y \bmod 10$ (так же, как и в предыдущих леммах) зависит только от вычета параметра β_3 по модулю 10 следующим образом: $x+5y\equiv x'+5y'\equiv \beta_3^3(\mod 10)$. Это можно проверить, перебрав все возможные вычеты параметров p_3 и β_3 по модулю 10.(Напомним, что оба параметра p_3 и β_3 — нечётные, и не могут делиться на 5). Можно сказать, что $x+5y\equiv\beta_3^3(\mod 10)$.

Итак, $\deg f-\deg f'\equiv$
$\frac{-p_3-\beta_3}{2}\xi((1-c^{-\beta_3^3})\log(c^{10}))-\frac{-p'_3-\beta'_3}{2}\xi((1-c^{-\beta_3^3})\log(c^{10}))(\mod 120)$. Значения слагаемых вычислены: $\xi(\log(c^{10}))=100$,
$\xi(c\log(c^{10}))=88$,
$\xi(c^3\log(c^{10}))=64$,
$\xi(c^7\log(c^{10}))=16$,
$\xi(c^9\log(c^{10}))=112$.
Коротко можно записать: $\xi((1-c^{-\beta_3^3})\log(c^{10})\equiv 12(-\beta_3^3 \bmod 10)(\mod 120)$. Так как $p_3\equiv p'_3(\mod 20)$ и $\beta_3\equiv\beta'_3(\mod 20)$, $\frac{p_3+\beta_3}{2}\equiv\frac{p'_3+\beta'_3}{2}(\mod 10)$, и $\deg f-\deg f'\equiv$
$\frac{-p_3-\beta_3}{2}12(-\beta_3^3 \bmod 10)(\mod 120)-\frac{-p'_3-\beta'_3}{2}12(-\beta_3^3 \bmod 10)(\mod 120)\equiv 0(\mod 120)$.
□

Замечание 9. Фактически доказано, что $\deg f\equiv 12(\beta_3^3 \bmod 10)(\frac{p_3+\beta_3}{2} \bmod 10)+H(p_1,\beta_1,p_2,\beta_2)(\mod 120)$, где H — некоторая целочисленная функция.

По результатам трёх предыдущих лемм (учитывая соответствующие замечания), можно сформулировать следующую явную формулу степени стандартного отображения многообразия серии d4 на гомологическую сферу Пуанкаре.

Теорема 9. *Пусть $M(S^2;(2p_1,\beta_1);(3p_2,\beta_2);(5p_3,\beta_3))$ — многообразие серии d4, и пусть $f: M\to S^3/P_{120}$ — стандартное отображение. Тогда*
$deg\ f\equiv 30(\beta_1\ mod\ 4)(\frac{p_1+\beta_1}{2}\ mod\ 4)+$
$+20(\beta_2\ mod\ 6)(\frac{p_2+\beta_2}{2}\ mod\ 6)+$
$+12(\beta_3^3\ mod\ 10)(\frac{p_3+\beta_3}{2}\ mod\ 10)-31(\ mod\ 120)$.

Доказательство. По предыдущим трём леммам (точнее, по соответствующим замечаниям), $\deg f\equiv 30(\beta_1 \bmod 4)(\frac{p_1+\beta_1}{2} \bmod 4)+$
$+20(\beta_2 \bmod 6)(\frac{p_2+\beta_2}{2} \bmod 6)+$
$+12(\beta_3^3 \bmod 10)(\frac{p_3+\beta_3}{2} \bmod 10)+n(\mod 120)$, где n — некоторая константа, которую можно определить экспериментально, рассмотрев, например, $M\cong S^3/P_{120}$. В этом случае $\deg f=1$, как степень тождественного отображения, $p_1=p_2=p_3=\beta_2=\beta_3=1$, $\beta_1=-1$. Находим $n=-31$. □

Теперь, используя явную формулу для степени отображения, можно доказать минимальность многообразий серии d4. Напомним, что многообразия серии d4 — это гомологические сферы (т. е. $|6p_1p_2\beta_3+10p_1p_3\beta_2+15p_2p_3\beta_1|=1$) с условием: $p_1p_2p_3\neq\pm1$ и $\pm49(\mod 120)$.

Теорема 10. *Все многообразия серии d4 являются минимальными многообразиями Зейферта.*

Доказательство. Достаточно показать, что стандартные отображения всех многообразий серии d4 имеют степени не равные ± 1 и $\pm 49 (\bmod 120)$. Итак, пусть $M = M(S^2; (2p_1, \beta_1); (3p_2, \beta_2); (5p_3, \beta_3))$ — многообразие серии d4. Это означает, в частности, что все параметры p_i и β_i нечётны и $|6p_1p_2\beta_3 + 10p_1p_3\beta_2 + 15p_2p_3\beta_1| = 1$. Заметим, что при смене всех знаков чисел β_i на противоположные мы получим многообразие, гомеоморфное M, поэтому можно считать, что $6p_1p_2\beta_3 + 10p_1p_3\beta_2 + 15p_2p_3\beta_1 = 1$. Из этого равенства и из условий на параметры p_i и β_i $(i = 1, 2, 3)$ следует, что:
1) числа $2p_1$, $3p_2$, $5p_3$ попарно взаимно просты;
2) $p_2p_3\beta_1 \equiv -1 (\bmod 4)$, т. е. $\beta_1 \equiv -p_2p_3 (\bmod 4)$;
3) $p_1p_3\beta_2 \equiv 1 (\bmod 6)$, т. е. $\beta_2 \equiv p_1p_3 (\bmod 6)$;
4) $p_1p_2\beta_3 \equiv 1 (\bmod 10)$, т. е. $\beta_3^3 \equiv p_1p_2 (\bmod 10)$.
Исходя из этих сравнений, можно переписать формулу степени стандартного отображения $f : M \to S^3/P_{120}$ так: $\deg f \equiv 30(-p_2p_3 \bmod 4)(\frac{p_1+\beta_1}{2} \bmod 4) +$
$+ 20(p_1p_3 \bmod 6)(\frac{p_2+\beta_2}{2} \bmod 6) + 12(p_1p_2 \bmod 10)(\frac{p_3+\beta_3}{2} \bmod 10) - 31 (\bmod 120)$.
По другому:
$\deg f \equiv 15(-p_2p_3 \bmod 4)((p_1 + \beta_1) \bmod 8) + 10(p_1p_3 \bmod 6)((p_2 + \beta_2) \bmod 12) +$
$+ 6(p_1p_2 \bmod 10)((p_3 + \beta_3) \bmod 20) - 31 (\bmod 120)$. Очевидно, что сравнение не изменится, если все взятия по модулям 4, 8, 6, 12, 10, 20 заменить на взятие по модулю 120, поэтому

$$\deg f \equiv -15p_2p_3(p_1 + \beta_1) + 10p_1p_3(p_2 + \beta_2) + 6p_1p_2(p_3 + \beta_3) - 31 (\bmod 120).$$

Раскроем скобки: $\deg f \equiv p_1p_2p_3 - 15p_2p_3\beta_1 + 10p_1p_3\beta_2 + 6p_1p_2\beta_3 - 31 \equiv$
$\equiv p_1p_2p_3 + 1 - 30p_2p_3\beta_1 - 31 (\bmod 120)$.
Вспомним теперь, что $p_2p_3\beta_1 \equiv -1 (\bmod 4)$:

$$\deg f \equiv p_1p_2p_3 (\bmod 120).$$

Из последнего равенства видно, что многообразие серии d4 не может иметь стандартного отображения степени ± 1 или ± 49. $\square$

Список литературы

[1] *Orlik P.* Seifert manifolds, Lecture Notes in Mathematics, 291. // Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[2] *Г. Зейферт, В. Трельфалль* Топология, РХД, Москва-Ижевск, 2001.

[3] *Hayat-Legrand C., Wang S., Zieschang H.* Minimal Seifert manifolds. // Math. Ann. 1997. V. 308. No. 4. P. 673-700.

[4] *Hayat-Legrand C., Matveev S., Zieschang H.* Computer calculation of the degree of maps into the Poincaré homology sphere. // Experimental Mathematics, 10(2001), No. 4, P. 497-508.

[5] *Матвеев С.В., Перфильев А.А.* Периодичность степеней отображений между многообразиями Зейферта. // Доклады Академии Наук, 2004, т. 395, № 4, с. 449-451.

[6] *Перфильев А. А.* Отображения степени 1 зейфертовых многообразий на гомологическую сферу Пуанкаре. // Фундаментальная и прикладная математика, 2005, Т. 11, №4, с. 173-183.