Работа на конкурс А.Мебиуса в номинации "студенты".

Автор — Гайфуллин Сергей Александрович.

Научный руководитель — Аржанцев Иван Владимирович.

МГУ им. М.В.Ломоносова. 4 курс.

Адрес: 140186, Московская область, город Жуковский, набережная Циолковского, дом 18, квартира 176.

e-mail: sergaifu@mccme.ru

телефон: 89262908940, (496-48)-2-06-55.

АФФИНЫЕ ТОРИЧЕСКИЕ SL(2)**-ВЛОЖЕНИЯ**

СЕРГЕЙ А. ГАЙФУЛЛИН

Аннотация. В теории аффинных SL(2)-вложений, построенной В.Л. Поповым (1973), локально транзитивное действие группы SL(2) на нормальном аффинном трехмерном многообразии X определяется парой $(\frac{p}{q}, r)$, где $0 < \frac{p}{q} \leq 1$ – рациональное число, записанное в виде несократимой дроби и называемое высотой действия, а r — натуральное число, являющееся порядком стабилизатора типичной точки. В работе показано, что многообразие X является торическим, т.е. допускает локально транзитивное действие алгебраического тора, тогда и только тогда, когда число r делится на $q - p$. В обосновании этого результата ключевую роль играет конструкция Д. Кокса из торической геометрии.

Введение

Все рассматриваемые в работе алгебраические многообразия и действия определены над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики.

В этой работе изучаются трехмерные нормальные аффинные многообразия с регулярным локально транзитивным действием группы SL(2) на них. Напомним, что *аффинным $SL(2)$-вложением* называют нормальное аффинное трехмерное многообразие X с заданным на нем регулярным локально транзитивным и локально свободным действием группы SL(2). Аффинные SL(2)-вложения были изучены в работе [2] (см. также [1, Гл.III, § 4]). Там же показано, что при локально транзитивном, но не транзитивном, регулярном действии группы SL(2) на трехмерном нормальном аффинном многообразии X стабилизатор типичной точки в X есть циклическая подгруппа, порядок которой мы будем обозначать буквой r. В этом случае многообразие X называется *аффинным $SL(2)/\mathbb{Z}_r$-вложением.* Алгебра U-инвариантов такого действия есть мономиальная подалгебра в алгебре многочленов от двух переменных, которая определяет рациональное число $0 < \frac{p}{q} \leq 1$ (*высота* действия). Далее мы будем считать числа p и q взаимно простыми. Один из основных результатов теории В.Л. Попова утверждает, что имеется биективное соответствие между парами $(\frac{p}{q}, r)$, $0 < \frac{p}{q} \leq 1$, $r \in \mathbb{N}$, и аффинными $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложениями X, определенными с точностью до SL(2)-эквивариантного изоморфизма. Естественно описывать геометрические свойства данного класса многообразий в терминах определяющей его пары. Мы будем интересоваться следующим вопросом: для каких пар $(\frac{p}{q}, r)$ многообразие X является торическим ?

Нормальное алгебраическое многообразие X называется *торическим*, если оно допускает локально транзитивное действие некоторого алгебраического тора T. Далее мы будем считать, что действие T на X фиксировано. В этом

14M25, 14R20

случае теория торических многобразий (см.,например, [8]) сопоставляет аффинному торическому многообразию выпуклый рациональный полиэдральный конус, который определяет многобразие с точностью до T-эквивариантного изоморфизма. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть X — трехмерное нормальное аффинное многообразие, и на X задано локально транзитивное* $\mathrm{SL}(2)$*-действвие. Тогда X — торическое в том и только том случае, когда X — это* $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$*-вложение с высотой $\frac{p}{q}$, $(p,q)=1$ и r делится на $q-p$.*

В разделе 7 мы также вычисляем конуса, отвечающие торическим $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложениям.

Как следует из работы Д. Кокса [7], аффинное торическое многообразие может быть реализовано как категорный фактор по действию квазитора на векторном пространстве. Более того, данное векторное пространство есть спектр так называемого *кольца Кокса.* С другой стороны несложно показать, что многообразие, возникающее в качестве категорного фактора для линейного действия диагонализуемой группы на векторном пространстве, является торическим.

Основная идея работы состоит в том, чтобы доказать, что аффинное $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложение X является торическим тогда и только тогда, когда X есть категорный фактор $V/\!\!/H$ некоторого 4-мерного $(\mathrm{SL}(2)\times H)$-модуля V по H-действию, где H есть прямое произведение группы $\mathbb{K}^*$ и некоторой конечной циклической группы. Для этого мы "поднимаем" $\mathrm{SL}(2)$-действие на X до $(\mathrm{SL}(2)\times H)$-действия на спектре кольца Кокса. Линейность последнего действия следует из результатов работы [11]. После этого нам остается установить, в каком случае $\mathrm{SL}(2)$-действие на $V/\!\!/H$ локально транзитивно, и определить пару, отвечающую такому действию.

Я искренне благодарен моему научному руководителю Аржанцеву И.В., который предложил мне эту задачу, и в сотрудничестве с которым были получены описанные здесь результаты.

1. Необходимые сведения о торических многообразиях

Определение 1. Аффинное торическое многообразие — это нормальное аффинное многообразие X с заданным вложением некоторого тора T в X, как плотного открытого подмножества, и алгебраическим действием T на X, которое при ограничении на T совпадает с естественным действием тора на себе.

Рассмотрим аффинное торическое многообразие X. Решетку характеров $\mathfrak{X}(T)$ тора T обозначим M. Каждому вектору m из M соответствует характер $\chi^m\colon T\to\mathbb{K}^*$. Решетку, двойственную M, обозначим N. Она реализуется как решетка однопараметрических подгрупп в T. Для векторов $m\in M$ и $v\in N$ определено спаривание $M\times N\to\mathbb{Z}$, $(m,v)\mapsto\langle m,v\rangle$. Многообразию X соответствует строго выпуклый полиэдральный конус σ в пространстве $N_{\mathbb{Q}}=N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. Пусть $\widehat{\sigma}$ — двойственный конус в $M_{\mathbb{Q}}=M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. Тогда $\mathbb{K}[X]$ — это полугрупповая алгебра для полугруппы $M\cap\widehat{\sigma}$.

Пусть $\Delta(1)$ — множество одномерных граней конуса σ. В [8, Гл.3, § 3] доказано, что каждая одномерная грань ρ из $\Delta(1)$ соответствует Т-инвариантному простому дивизору D_ρ в X, и любой Т-инвариантный простой дивизор — это D_ρ для некоторого $\rho\in\Delta(1)$.

В [8, Гл.3, § 4] приводится следующее утверждение. Так как оно просто доказывается, мы приведем его доказательство.

Лемма 1. *Любой дивизор в X линейно эквивалентен T-инвариантному дивизору.*

Доказательство. Так как алгебра $\mathbb{K}[T]$ факториальна, любой дивизор в T — главный. Пусть D — простой дивизор в X. Тогда $D \cap T$ — простой дивизор в T. Следовательно, $D \cap T = (f)$ — дивизор рациональной функции f на T. Значит, $D - (f)$ — дивизор с носителем, лежащим целиком вне T. Но вне T может находиться лишь конечное число простых дивизоров. При действии тора они не могут нетривиально переставляться, иначе получится нетривиальный гомоморфизм $T \to S_n$, чего не может быть, вследствии связности T. Значит, все дивизоры с носителем из дополнения к T являются T-инвариантными. Поэтому, каждый дивизор в X линейно эквивалентен T-инвариантному дивизору. □

Введем обозначение: n_ρ — примитивный вектор, порождающий $\rho \in \Delta(1)$. Пусть $m \in M$. Тогда $\chi^m : T \to \mathbb{K}^*$ — регулярная функция на T и рациональная функция на X. Как доказано в [8, Гл.3, § 3], главный дивизор функции χ^m — это дивизор $\sum \langle m, n_\rho \rangle D_\rho$.

2. Тотальное координатное кольцо

Определение 2. Группа классов дивизоров многообразия X — это фактор-группа группы дивизоров Вейля многообразия X по группе главных дивизоров.

Будем обозначать группу классов дивизоров многообразия X через $Cl(X)$.

Следующая конструкция описана в [7].

Определение 3. Кольцо Кокса $Cox(X)$ аффинного торического многообразия X — это кольцо многочленов от τ переменных, где τ — количество одномерных граней в σ, индексированных элементами из $\Delta(1)$:

$$Cox(X) = \mathbb{K}[x_\rho \mid \rho \in \Delta(1)].$$

Моном $\prod x_\rho^{a_\rho}$ соответствует T-инвариантному дивизору $D = \sum a_\rho D_\rho$. Обозначим этот моном x^D. Градуируем $Cox(X)$ с помощью $Cl(X)$ следующим образом: каждому моному x^D приписываем степень $[D] \in Cl(X)$. Понятно, что если $D_1 = \sum a_\rho D_\rho$, а $D_2 = \sum b_\rho D_\rho$, то

$$\deg\left(x^{D_1} x^{D_2}\right) = \deg \prod x_\rho^{a_\rho + b_\rho} = \left[\sum (a_\rho + b_\rho) D_\rho\right] = [D_1] + [D_2] = \deg x^{D_1} + \deg x^{D_2}.$$

Значит, градуировка определена корректно. Два монома имеют одинаковую степень, если они равны $\prod x_\rho^{a_\rho}$ и $\prod x_\rho^{a_\rho + \langle m, n_\rho \rangle}$ соответственно, для некоторого m из M. Однородная компонента выглядит так:

$$Cox(X)_\alpha = \bigoplus_{D,\ [D] = \alpha \in Cl(X)} \mathbb{K} x^D.$$

Для произвольного алгебраического многообразия X и дивизора D на нем введем обозначение:

$$H^0(X, D) = \{f \in \mathbb{K}(X) | (f) + D \geq 0\},$$

где (f) — дивизор функции f. Если X — торическое, а $D = \sum a_\rho D_\rho$ — T-инвариантный дивизор, то

$$H^0(X, D) = \bigoplus_{m \in P_D} \mathbb{K}\chi^m,$$

где $P_D = \{m \in M \mid \forall \rho \in \Delta(1) : \langle m, n_\rho \rangle \geq -a_\rho\}$.

Пусть X — произвольное нормальное аффинное многообразие. Предположим, что $Cl(X)$ — свободная конечно порожденная группа. Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ — базис в ней. Зафиксируем некоторый дивизор D_{α_i} такой, что $[D_{\alpha_i}] = \alpha_i$. Если $\alpha \in Cl(X)$, то $\alpha = \sum l_i \alpha_i$, $l_i \in \mathbb{Z}$. Положим $D_\alpha = \sum l_i D_{\alpha_i}$ Так как $Cl(X)$ свободна, $D_{\alpha+\beta} = D_\alpha + D_\beta$. Получим алгебру, градуированную группой $Cl(X)$:

$$S(X) = \bigoplus_{\alpha \in Cl(X)} H^0(X, D_\alpha).$$

Действительно, определим умножение в $S(X)$ таким образом: если $f \in H^0(X, D_\alpha)$, $g \in H^0(X, D_\beta)$, то их произведением в $S(X)$ назовем их произведение в $\mathbb{K}(X)$, помещенное в $H^0(X, D_{\alpha+\beta})$. На остальных элементах умножение вводится по дистрибутивности. Кольцо $S(X)$ называется *тотальным координатным кольцом* многообразия X. Оно с точностью до изоморфизма не зависит от выбора базиса в $Cl(X)$ (см. [6, 9]).

Если X — аффинное торическое многообразие, то D_{α_i} можно выбирать T-инвариантными.

Следующую лемму можно найти в [7].

Лемма 2. *Пусть X — торическое многообразие такое, что в $\mathbb{K}[X]$ нет обратимых элементов, кроме констант. Тогда существует изоморфизм градуированных алгебр $\psi : S(X) \to Cox(X)$, что $\psi|_{H^0(X,D_\alpha)} : H^0(X, D_\alpha) \to Cox(X)_\alpha$, где $\alpha \in Cl(X)$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение φ_α из P_{D_α} в $Cox(X)_\alpha$: $m \mapsto x^{D_\alpha + (\chi^m)}$. Так как в $\mathbb{K}[X]$ нет обратимых элементов, кроме констант, разным m соответствуют разные (χ^m), а значит, φ_α — вложение. Если $\deg(x^{D_1}) = \deg(x^{D_\alpha})$, то $D_1 - D_\alpha$ — главный дивизор. Пусть $D_\alpha = \sum a_\rho D_\rho$, $D_1 = \sum b_\rho D_\rho$. Тогда $b_\rho - a_\rho = \langle m_0, n_\rho \rangle$ для некоторого $m_0 \in M$, но нас интересуют только неотрицательные b_ρ, так как $x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$ — многочлен из $Cox(X)$. Следовательно, $\langle m_0, n_\rho \rangle \geq -a_\rho$, т.е. $m_0 \in P_D$. Положив $\psi_\alpha(\chi^m) = \varphi_\alpha(m)$ и продолжив ψ_α по линейности, получим $\psi_\alpha : H^0(X, D_\alpha) \to Cox(X)_\alpha$ — изоморфизм векторных пространств. Но если $f \in H^0(X, D_\alpha)$, $g \in H^0(X, D_\beta)$, то

$$\psi_\alpha(f)\psi_\beta(g) = \psi_{\alpha+\beta}(fg).$$

Объединяя все ψ_α в $\psi : S(X) \to Cox(X)$, получаем изоморфизм алгебр. □

Следствие 1. *Для аффинного торического многообразия X алгебра $S(X)$ свободна.*

Лемма 3. *Пусть на нормальном аффинном многообразии X регулярно действует полупростая алгебраическая группа G с открытой орбитой. Тогда в $\mathbb{K}[X]$ нет обратимых функций, кроме констант.*

Доказательство. Для доказательства этого достаточно доказать, что в $\mathbb{K}[G]$ нет нетривиальных обратимых элементов, т.к. $\mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathbb{K}[G]$. По теореме Розенлихта (см. [10]), если G — связная алгебраическая группа, то любая регулярная функция $f : G \to \mathbb{K}^*$, равная 1 в единице в G, является характером. Так как G полупроста, то любая такая функция — тождественно единица. □

Далее нас интересует задача подъема действия алгебраической группы G на многообразии X до регулярного действия на спектре кольца $S(X)$. В этом контексте удается получить частичное обращение следствия 1.

Предложение 1. *Пусть G — односвязная полупростая алгебраическая группа, H — связная полупростая алгебраическая подгруппа. Пусть на нормальном аффинном многообразии X задано действие G и $G/H \hookrightarrow X$ — открытое эквивариантное вложение. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) многообразие X торическое;

2) существует G-модуль V и линейное действие тора $\widehat{T} : V$, коммутирующее с действием G такие, что $X \overset{G}{\cong} V /\!\!/ \widehat{T}$;

3) алгебра $S(X)$ свободна.

Доказательство. 1)⇒ 3) Уже доказано в следствии 1.

3)⇒ 2) Группа G действует на $\mathbb{K}(X)$: $g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x)$. Обозначим $D_1, D_2 \ldots D_s$ все простые дивизоры из $X \backslash (G/H)$. Так как G полупроста, получаем, что $\mathfrak{X}(G) = 0$, и следовательно, все дивизоры D_i являются G-инвариантными. Пусть $D = \sum a_i D_i$, $f \in H^0(X, D)$.

$$(f) + D \geq 0;$$

$$g \cdot (f) + g \cdot D \geq g \cdot 0$$

$$(g \cdot f) + D \geq 0 \Rightarrow g \cdot f \in H^0(X, D),$$

т.е. $H^0(X, D)$ — это G-модуль. Действие G, очевидно, согласовано с умножением в $S(X)$.

По теореме, доказанной В.Л.Поповым, см. [3, теорема 4], если G — односвязная полупростая алгебраическая группа, а H — связная полупростая подгруппа, то $Cl(G/H) \cong \mathrm{Pic}(G/H) \cong \mathfrak{X}(H) = 0$. Значит, $Cl(X)$ порождается G-инвариантными дивизорами, т.е. дивизорами вида $\Sigma a_i D_i$. Но если $c_1 D_1 + \ldots + c_s D_s = (f)$, то, в силу G-инвариантности D_i, f — G-полуинвариант, а т.к. G полупроста, то $\mathfrak{X}(G) = 0$ и f — G-инвариант, значит, $f = const$. Следовательно, $Cl(X)$ порождается этими дивизорами свободно. Но тогда

$$S(X) = \bigoplus_{\alpha \in Cl(X)} H^0(X, D_\alpha) = \bigoplus_{D = a_1 D_1 + \ldots + a_s D_s} H^0(X, D).$$

Рассмотрим s-мерный тор $\widehat{T}$. Его действие на $H^0(X, D)$ определяется следующим образом. Пусть $t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_s) \in \widehat{T}$. Тогда $t \cdot f = (t_1^{a_1} \ldots t_s^{a_s}) f$, где $f \in H^0(X, D)$, $D = a_1 D_1 + \ldots + a_s D_s$. Действия G и $\widehat{T}$ на $S(X)$ перестановочны. Получаем:

$$(\widehat{T} \times G) : \mathrm{Spec}\, S(X).$$

Инварианты в $S(X)$ относительно действия $G \times \widehat{T}$ — только константы. Действительно:

$$S(X)^{\widehat{T} \times G} = (S(X)^{\widehat{T}})^G.$$

Но
$$S(X)^{\widehat{T}} = H^0(X,0) \cong \mathbb{K}[X].$$
А, так как G действует на X с открытой орбитой, то $\mathbb{K}[X]^G = \mathbb{K}$. Так как $S(X)$ свободна, $\operatorname{Spec} S(X) \cong \mathbb{K}^\tau$. По теореме Крафта-Попова, см. [11], если редуктивная группа действует на $\mathbb{K}^\tau$, и регулярные функции, инвариантные относительно этого действия — это только константы, то данное действие эквивалентно линейному. А так как $\widehat{T}$ — тор, и G редуктивна, то $\widehat{T}\times G$ — редуктивная группа. Следовательно, наше действие эквивалентно линейному. Остается в качестве V взять $(\widehat{T} \times G)$-модуль $\operatorname{Spec} S(X)$.
2)⇒ 1) Так как $\widehat{T}$ действует на V линейно, все его элементы диагонализуемы одновременно, т.е. существует тор $\overline{T} : V$, что $\dim\overline{T} = \dim V$, $T \subset \overline{T}$. Тор $\overline{T}$ состоит из всех операторов, диагонализуемых в том базисе, в котором диагонализуем $\widehat{T}$. Тогда действие $T = \overline{T}/\widehat{T} : V/\!\!/\widehat{T}$ — это действие с открытой орбитой. Действительно, раз в V была открытая орбита $\mathcal{O}$, то ее замыкание — это все пространство: $\overline{\mathcal{O}} = V$. Пусть $\pi\colon V \to X$ — морфизм факторизации. В силу непрерывности π получаем: $\pi^{-1}(\overline{\pi(\mathcal{O})}) \supset \overline{\mathcal{O}} = V$. Отсюда: $\overline{\pi(\mathcal{O})} = X$, то есть $\pi(\mathcal{O})$ — это открытая орбита в X. Фактор тора по любой подгруппе — это тор. Можно рассмотреть действие фактортора T по стабилизатору типичной точки. Получим, что X — торическое.

□

3. Поднятие действия

Как следует из доказательства предложения 1, в случае $\mathfrak{X}(H) = 0$ действие группы G на X может быть поднято до действия на спектре тотального координатного кольца. В этом разделе мы определим аналог тотального координатного кольца и рассмотрим задачу подъема действия в случае конечной группы $\mathfrak{X}(H)$.

Предложение 2. *Пусть X — аффинное торическое многообразие, на котором регулярно действует односвязная полупростая алгебраическая группа G, алгебраическая подгруппа $H \subset G$ такова, что $\mathfrak{X}(H)$ — конечная группа, задано открытое эквивариантное вложение $G/H \hookrightarrow X$. Тогда существует действие группы G на кольце Кокса $Cox(X)$, сохраняющее однородные компоненты и совпадающее на $Cox(X)_0 \cong \mathbb{K}[X]$ с обычным G-действием на $\mathbb{K}[X]$.*

Доказательство. Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — все простые дивизоры на X, лежащие вне G/H. Так как G полупроста, эти дивизоры G-инвариантны. Как доказано в [3, теорема 4], $Cl(G/H) \cong \mathfrak{X}(H)$. Дивизоры $E_1, \ldots, E_n$ порождают свободную подгруппу $\mathbb{Z}^n$ в $Cl(X)$. Любой дивизор на X можно изменить на линейную комбинацию $E_1, \ldots, E_n$ так, что его носитель попадет в G/H. Значит, факторгруппа $Cl(X)/\mathbb{Z}^n$ — конечна. Следовательно,
$$Cl(X) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n} \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{k_s}.$$
Элемент $\alpha \in Cl(X)$ записывается в виде $\alpha = (\beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, где $\beta_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}_{k_j}$. Рассмотрим T-инвариантные дивизоры $\widetilde{E}_1 \ldots \widetilde{E}_n$ и $W_1 \ldots W_s$ такие, что $[\widetilde{E}_i] = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где 1 стоит на месте i, $[W_j] = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где 1 стоит на месте $n + j$.

Введем обобщение тотального координатного кольца. Рассмотрим векторное пространство

$$R = \bigoplus_{\lambda_i \in \mathbb{Z},\ \mu_j = 0,1,\ldots,k_j} H^0(X, \sum \lambda_i \widetilde{E}_i + \sum \mu_j W_j).$$

Выберем рациональные функции $F_1, \ldots, F_s$ такие, что $k_s W_s = (F_s)$. Определим умножение $*$ на R следующим образом. Если $f \in H^0(X, \sum a_i \widetilde{E}_i + \sum b_j W_j)$ и $g \in H^0(X, \sum c_i \widetilde{E}_i + \sum d_j W_j)$, то

$$f * g = fg \prod F_j^{[\frac{b_j+d_j}{k_j}]} \in H^0\left(X, \sum (a_i + c_i)\widetilde{E}_i + \sum \left\{\frac{b_j + d_j}{k_j}\right\} k_j W_j\right),$$

где $[x]$ — это целая часть числа x, а $\{x\}$ — это дробная часть числа x.

Проверим, что $fg \prod F_j^{[\frac{b_j+d_j}{k_j}]}$ действительно лежит в

$$H^0\left(X, \sum (a_i + c_i)\widetilde{E}_i + \sum \left\{\frac{b_j + d_j}{k_j}\right\} k_j W_j\right).$$

Это следует из цепочки неравенств:

$$(f) + \sum a_i \widetilde{E}_i + \sum b_j W_j \geq 0;$$

$$(g) + \sum c_i \widetilde{E}_i + \sum d_j W_j \geq 0;$$

$$(fg \prod F_j^{[\frac{b_j+d_j}{k_j}]}) + \sum (a_i + c_i)\widetilde{E}_i + \sum \left\{\frac{b_j + d_j}{k_j}\right\} k_j W_j = \\ = (fg) + \sum (a_i + c_i)\widetilde{E}_i + \sum (b_j + d_j) W_j \geq 0.$$

Коммутативность и ассоциативность этого умножения на прямых слагаемых R очевидна. Имеет место также и дистрибутивность, если мы складываем два элемента из одного прямого слагаемого. Значит, продолжив $*$ по дистрибутивности, мы введем на R структуру коммутативного кольца.

Лемма 4. *Алгебры R и $Cox(X)$ изоморфны.*

Доказательство. Возьмем дивизор $D = \sum a_i \widetilde{E}_i + \sum b_j W_j$. Рассмотрим отображение $\varphi_D \colon P_D \to Cox(X)_{[D]}$, которое переводит $m \in P_D$ в $x^{D+(\chi^m)}$. Так как в $\mathbb{K}[X]$ обратимы только константы, разным m соответствуют разные (χ^m), следовательно, φ_D — вложение. Если D_1 — T-инвариантный дивизор, и $[D_1] = [D]$, то $D_1 - D$ — главный дивизор. Если $D = \sum \alpha_\rho D_\rho$, а $D_1 = \sum \beta_\rho D_\rho$, то $\beta_\rho - \alpha_\rho = \langle m_0, n_\rho \rangle$ для некоторого $m_0 \in M$. Но $x_1^{\beta_{\rho_1}} \ldots x_n^{\beta_{\rho_d}}$ — моном из $Cox(X)$, значит, $\beta_{\rho_i} \geq 0$. Следовательно, $\langle m_0, n_\rho \rangle \geq -\alpha_\rho$, то есть m_0 лежит в P_D. Получаем, что φ_D — сюръекция на множество мономов в $Cox(X)_{[D]}$. Теперь определим отображение $\psi_D \colon H^0(X, D) \to Cox(X)_{[D]}$. Напомним, что

$$H^0(X, D) = \bigoplus_{m \in P_D} \mathbb{K}\chi^m.$$

Положим $\psi_D(\chi^m) = \varphi_D(m)$, и продолжим это отображение до отображения всего $H^0(X, D)$ по линейности. Получим изоморфизм $H^0(X, D)$ и $Cox(X)_{[D]}$, как векторных пространств. Все отображения $\psi_{(\sum a_i \widetilde{E}_i + \sum b_j W_j)}, a_i \in \mathbb{Z}, b_j = 0, \ldots, l-1$ можно объединить в изоморфизм векторных пространств $\psi \colon R \to$

$Cox(X)$. Докажем, что ψ — изоморфизм алгебр. Для этого нужно проверить, что для любых f и g из R выполнено равенство: $\psi(f*g)=\psi(f)\psi(g)$. В силу дистрибутивности достаточно проверить это равенство лишь для $f=\chi^m\in H^0(X,\sum a_i\widetilde{E}_i+\sum b_jW_j)$ и $g=\chi^n\in H^0(X,\sum c_i\widetilde{E}_i+\sum d_jW_j)$. Тогда

$$f*g=fg\prod F_j^{[\frac{b_j+d_j}{k_j}]}\in H^0\left(X,\sum(a_i+c_i)\widetilde{E}_i+\sum\left\{\frac{b_j+d_j}{k_j}\right\}k_jW_j\right);$$

$$\begin{aligned}\psi(f*g)=\psi(\chi^m*\chi^n)=\psi(\chi^{m+n}\prod F_j^{[\frac{b_j+d_j}{k_j}]})=\\ =x^{\sum(a_i+c_i)\widetilde{E}_i+\sum\{\frac{b+d}{k_j}\}k_jW_j+(\chi^m)+(\chi^n)+\sum[\frac{b_j+d_j}{k_j}](F_j)}=\\ =x^{\sum(a_i+c_i)\widetilde{E}_i+\sum\{\frac{b+d}{k_j}\}k_jW_j+(\chi^m)+(\chi^n)+\sum[\frac{b_j+d_j}{k_j}]k_jW_j}=\\ =x^{\sum(a_i+c_i)\widetilde{E}_i+\sum(b_j+d_j)W_j+(\chi^m)+(\chi^n)}=\\ =x^{\sum a_i\widetilde{E}_i+\sum b_jW_j+(\chi^m)}x^{\sum c_i\widetilde{E}_i+\sum d_jW_j+(\chi^n)}=\psi(\chi^m)\psi(\chi^n)=\psi(f)\psi(g).\end{aligned}$$

□

Заметим, что $Cl(G)=0$, то есть на G все дивизоры главные. Рассмотрим морфизм факторизации: $\pi\colon G\to G/H$. Пусть D — простой дивизор на G/H. В силу непрерывности π прообраз $\pi^{-1}(D)=E$ — замкнутое подмногообразие в G. Все слои π имеют одинаковую размерность. Значит, E — дивизор на G. Следовательно, $E=(f)$ для некоторой функции $f\in\mathbb{K}(X)$. Пусть порядок $[D]\in Cl(G/H)$ равен k. Тогда $kD=(h)$, где h лежит в $\mathbb{K}(G/H)$. Но $kD=\pi(kE)=\pi(k(f))$. Отсюда получаем: $kE=(f^k)=(\pi^*(h))$. Так как π — сюръекция, π^* — вложение. Отождествляя $\mathbb{K}[G/H]$ с подалгеброй в $\mathbb{K}[G]$, не будем различать $h\in\mathbb{K}[G/H]$ и $\pi^*(h)\in\mathbb{K}[G]$.

Так как любой дивизор — это линейная комбинация простых, отображение π^{-1} можно продолжить по линейности до отображения из группы дивизоров Вейля на G/H в группу дивизоров Вейля на G.

Мы знаем, что $k_jW_j=(F_j)$. Значит, $k_j(W_j\cap(G/H))=(F_j|_{G/H})$. Пусть $W_j\cap(G/H)=Q_j$ — дивизор в G/H. Тогда $\pi^{-1}(Q_j)=K_j=(f_j)$ — дивизор в G. Следовательно, $(F_j|_{G/H})=\pi((f_j^{k_j}))$. Значит, так как на G нет обратимых функций, кроме констант, $F_j=cf_j^{k_j}$. Но $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле, следовательно, существует $z\in\mathbb{K}$ такое, что $z^{k_j}=c$. Изменим f_j на z так, чтобы стало верным равенство: $F_j=f_j^{k_j}$. При фиксированном F_j такое f_j не единственно, все они отличаются друг от друга на корень из 1 степени k_j. Зафиксируем раз и навсегда одно такое f_j.

Итак, мы получили $f_j\in\mathbb{K}(G)$ такое, что $f_j^{k_j}\in\mathbb{K}(X)$ и $kW_j=(f_j^{k_j})$.

Определим действие $\bullet$ группы G на $H^0(X,D)$, где $D=\sum u_iE_i+\sum v_jW_j$, $u_i,v_j\in\mathbb{Z}$.

Пусть $g\in G$. Тогда $g^{-1}\cdot D=\sum u_iE_i+\sum v_j(g^{-1}\cdot W_j)$. Так как $k_jW_j=(f_j^{k_j})$, имеем: $k_j(g^{-1}\cdot W_j)=g^{-1}\cdot(k_jW_j)=g^{-1}\cdot(f_j^{k_j})=(g^{-1}\cdot f_j^{k_j})=(f_j^{k_j})+\left(\frac{g^{-1}\cdot f_j^{k_j}}{f_j^{k_j}}\right)$.

Рассмотрим действие H на G правыми сдвигами. Тогда H действует и на $\mathbb{K}(G)$ и $\mathbb{K}(G/H)=\mathbb{K}(G)^H$. Возьмем $h\in H$. Раз $f_j^{k_j}\in\mathbb{K}(G/H)$, то $h\cdot f_j=\varepsilon f_j$, где $\varepsilon^{k_j} = 1$. Тогда $h \cdot \frac{g^{-1}\cdot f_j}{f_j}(g') = \frac{f_j(gg'h^{-1})}{f_j(g'h^{-1})} = \frac{\varepsilon f_j(gg')}{\varepsilon f_j(g')} = \frac{g^{-1}\cdot f_j}{f_j}(g')$. Значит, $\frac{g^{-1}\cdot f_j}{f_j} \in \mathbb{K}(G)^H$.

Положим по определению, что $g\bullet f = g\cdot(\prod\left(\frac{f_j}{g^{-1}\cdot f_j}\right)^{v_j} f)$, где $f \in H^0(X,D)$, а действие в правой части равенства — обычное действие в $\mathbb{K}(X)$. Проверим, что $g\bullet f$ лежит в $H^0(X,D)$. Действительно, верно неравенство:$(f)+D \geq 0$. Значит, $\left(f\prod\left(\frac{f_j}{g^{-1}\cdot f_j}\right)^{v_j}\right)+g^{-1}D \geq 0$. Отсюда получаем: $g\cdot\left(f\prod\left(\frac{f_j}{g^{-1}\cdot f_j}\right)^{v_j}\right)+D \geq 0$, то есть $g\bullet f \in H^0(X,D)$. Проверим, что $\bullet$ — это действие. Для этого необходимо показать, что

$$(gh)\bullet f = g\bullet(h\bullet f).$$

Это следует из цепочки равенств:

$$\begin{aligned}(gh)\bullet f = (gh)\left(f\prod\left(\frac{f_j}{(gh)^{-1}f_j}\right)^{v_j}\right) = \\ = g\cdot\left(h\cdot\left(f\prod\left(\frac{f_j}{h^{-1}\cdot f_j}\right)^{v_j}\prod\left(\frac{h^{-1}\cdot f_j}{h^{-1}\cdot(g^{-1}\cdot f_j)}\right)^{v_j}\right)\right) = \\ = g\cdot\left(h\bullet f\left(\frac{f_j}{g^{-1}\cdot f_j}\right)^{v_j}\right) = g\bullet(h\bullet f).\end{aligned}$$

Заметим, что при $(v_1,\ldots,v_s)=(0,\ldots,0)$ введенное нами действие совпадает с обычным действием на $\mathbb{K}(X)$.

Заметим, что при $v=0$ введенное нами действие совпадает с обычным действием на $\mathbb{K}(X)$.

Пусть D и E — два эквивалентных дивизора, то есть $D = E+(F)$. Пусть, кроме того, на $H^0(X,D)$ задано действие $\bullet$ группы G. Тогда можно задать действие $\circ$ группы G на $H^0(X,E)$ следующим образом. Пусть $f \in H^0(X,E)$. Тогда

$$g\circ f = (g\bullet(f/F))F.$$

Действительно, раз f лежит в $H^0(X,E)$, то f/F лежит в $H^0(X,D)$, значит, определено $g\bullet(f/F) \in H^0(X,D)$, и $(g\bullet(f/F))F \in H^0(X,E)$. Проверим, что это действие:

$$\begin{aligned}(gh)\circ f = ((gh)\bullet(f/F))F = (g\bullet(h\bullet(f/F)))F = \\ = (g\bullet((h\bullet(f/F))F/F))F = (g\bullet((h\circ f)/F))F = g\circ(h\circ f).\end{aligned}$$

Так как действие $\bullet$ определено на $H^0(X,\sum u_iE_i+\sum v_jW_j)$ для любых u_i и v_j, и группа классов дивизоров многообразия X порождается элементами $[E_i]$ и $[W_j]$, действие $\circ$ определено на $H^0(X,D)$ для любого D. В частности, действие $\circ$ определено на $H^0(X,\sum\lambda_i\widetilde{E}_i+\sum\mu_jW_j)$, где $\lambda_i\in\mathbb{Z}, \mu_j = 0,\ldots,k_j-1$. Причем для разных наборов λ_i и μ_j можно выбирать рациональную функцию F согласованно, то есть если $\widetilde{E}_k = \sum a_{ki}E_i+\sum b_{kj}W_j+(J_k)$, то

$$\sum_i\lambda_i\widetilde{E}_i+\sum_j\mu_jW_j = \sum_i\left(\sum_k\lambda_ka_{ki}\right)E_i+\sum_j\left(\sum_k\lambda_kb_{kj}+\mu_j\right)W_j+\left(\prod_k J_k^{\lambda_k}\right).$$

Таким образом, можно определить по линейности действие $\circ$ на R. Причем, на $H^0(X,0)$ это действие совпадает с обычным действием G на $\mathbb{K}(X)$.

Докажем, что $\circ$ — действие автоморфизмами алгебры R. Для этого нужно доказать, что для любого g из G и для любых f и f' из R верно равенство: $g\circ(f*f')=(g\circ f)*(g\circ f')$. В силу линейности $\circ$ можно проверять равенство $g\circ(\chi^m*\chi^n)=(g\circ\chi^m)*(g\circ\chi^n)$, где $\chi^m\in H^0(X,\sum a_i\widetilde{E}_i+\sum b_jW)$, $\chi^n\in H^0(X,\sum c_i\widetilde{E}_i+\sum d_jW)$. Пусть $\sum a_i\widetilde{E}_i+\sum b_jW=\sum m_iE_i+\sum n_jW_j-(F)$, $\sum c_i\widetilde{E}_i+\sum d_jW=\sum u_iE_i+\sum v_jW_j-(J)$. Тогда

$$\chi^m*\chi^n=\chi^m\chi^n\prod F_j^{[\frac{b_j+d_j}{k_j}]}\in H^0\left(X,\sum(a_i+c_i)\widetilde{E}_i+\left\{\frac{b_j+d_j}{k_j}\right\}k_jW_j\right).$$

Имеют место равенства:

$$g\circ\chi^m=(g\bullet(\chi^m/F))F;$$
$$g\circ\chi^n=(g\bullet(\chi^n/J))J;$$
$$\sum(a_i+c_i)\widetilde{E}_i+\left\{\frac{b_j+d_j}{k_j}\right\}k_jW_j=\sum(m_i+u_i)E_i+\sum(n_j+v_j)W_j-(F)-(J)-\left(\prod F_j^{[\frac{b_j+d_j}{k_j}]}\right);$$

$$g\circ(\chi^m*\chi^n)=(g\bullet(\chi^m\chi^n\prod F_j^{[\frac{b_j+d_j}{k_j}]}/(FJ\prod F_j^{[\frac{b_j+d_j}{k_j}]})))FJF_j^{[\frac{b_j+d_j}{k_j}]}=$$
$$=(g\bullet(\chi^m\chi^n/(FJ)))FJ\prod F_j^{[\frac{b_j+d_j}{k_j}]}.$$

Осталось доказать, что

$$((g\bullet(\chi^m/F))F)*((g\bullet(\chi^n/J))J)=(g\bullet(\chi^m\chi^n/(FJ)))FJ\prod F_j^{[\frac{b_j+d_j}{k_j}]}.$$

Это эквивалентно равенству

$$((g\bullet(\chi^m/F))F)((g\bullet(\chi^n/J))J)=(g\bullet(\chi^m\chi^n/(FJ)))FJ.$$

Сокращая на FJ, получаем:

$$(g\bullet(\chi^m/F))(g\bullet(\chi^n/J))=g\bullet(\chi^m\chi^n/(FJ)).$$

Введем обозначения:$f=\chi^m/F\in H^0(X,\sum m_iE_i+\sum n_jW_j)$, $h=\chi^n/J\in H^0(X,\sum u_iE_i+\sum v_jW_j)$, $g\in G$. По определению действия $\bullet$ получаем:

$$g\bullet f=g\cdot\left(f\prod\left(\frac{f_j}{g^{-1}f_j}\right)^{n_j}\right);$$
$$g\bullet h=g\cdot\left(f\prod\left(\frac{f_j}{g^{-1}f_j}\right)^{v_j}\right);$$
$$g\bullet fh=g\cdot\left(f\prod\left(\frac{f_j}{g^{-1}f_j}\right)^{n_j+v_j}\right).$$

Так как действие G на $\mathbb{K}(X)$ согласовано с умножением, получаем, что

$$(g\bullet f)(g\bullet h)=g\bullet fh.$$

Таким образом мы доказали, что $\circ$ — действие автоморфизмами алгебры R.

Ранее мы построили изоморфизм градуированных алгебр R и $Cox(X)$. Действие $\circ$ на $H^0(X,0)\cong\mathbb{K}[X]$ совпадает с обычным действием на регулярных функциях $\mathbb{K}[X]$. Пользуясь изоморфизмом между R и $Cox(X)$, получаем действие G на $Cox(X)$, причем на нулевой компоненте $Cox(X)_0\cong\mathbb{K}[X]$ оно эквивалентно обычному действию на $\mathbb{K}[X]$. $\square$

Лемма 5. *Действие $\circ$ на $Cox(X)$ индуцирует регулярное действие G на $\operatorname{Spec} Cox(X)$.*

Доказательство. Необходимо доказать, что $Cox(X)$ — рациональный G-модуль. Докажем, что $H^0(X,D)$ — рациональный G-модуль относительно действия $\bullet$, где $D=\sum a_iE_i+\sum b_jW_j$. Если $f\in H^0(X,D)$, то

$$f\in H^0(G/H, D\cap(G/H)).$$

Прообраз дивизора $D\cap(G/H)$ при отображении π — это главный дивизор (J) на G. Имея ввиду отождествление $\pi^*(f)=f$, получаем: $f\in H^0(G,(J))$, то есть $fJ\in\mathbb{K}[G]$.

Действие $\bullet$ на $H^0(X,D)$ задается формулой:

$$g\bullet f = g\cdot\left(f\prod\left(\frac{f_j}{g^{-1}f_j}\right)^{b_j}\right)=\frac{g\cdot(f\prod f_j^{b_j})}{\prod f_j^{b_j}}.$$

Но, по определению, $\pi^{-1}(W_j\cap(G/H))=(f_j)$. Значит, $\pi^{-1}(D\cap(G/H))=(\prod f_j^{b_j})$, то есть можно считать $J=\prod f_j^{b_j}$. Тогда $g\bullet f=\frac{g\cdot(fJ)}{J}$. Но, как уже доказано, $fJ\in\mathbb{K}[G]$. Как известно, $\mathbb{K}[G]$ — рациональный G-модуль. Следовательно, $H^0(X,D)$ — рациональный G-модуль, относительно действия $\bullet$.

Рассмотрим теперь $H^0(X,E)$, как G-модуль относительно действия $\circ$, где $D=E+(F)$. Это действие определяется так:

$$g\circ f=(g\bullet(f/F))F.$$

Здесь $f/F\in H^0(X,D)$. Так как $H^0(X,D)$ относительно $\bullet$ — рациональный модуль, то и $H^0(X,E)$ относительно $\circ$ — рациональный G-модуль. □

4. Необходимые сведения о $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$ - вложениях

Результаты, упомянутые в этом разделе, можно найти в [1, глава 3].

Нормальное аффинное $\mathrm{SL}(2)$ - вложение X однозначно, с точностью до изоморфизма, задается своей высотой. Высота — это рациональное число, определяемое следующим образом. Рассмотрим $\mathrm{SL}(2)$ - эквивариантное открытое вложение $\varphi\colon \mathrm{SL}(2)\hookrightarrow X$. Ему соответствует вложение $\varphi^*\colon\mathbb{K}[X]\hookrightarrow\mathbb{K}[\mathrm{SL}(2)]=\mathbb{K}[\alpha,\beta,\gamma,\delta]/(\alpha\delta-\beta\gamma-1)$. Здесь α,β,γ и δ — вычисления соответствующих матричных элементов: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$. Рассмотрим унипотентную подгруппу в $\mathrm{SL}(2)$: $U=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ * & 1\end{pmatrix}\right\}$. Она действует на $\mathrm{SL}(2)$ умножениями слева. Алгебра U-инвариантных функций на $\mathrm{SL}(2)$ — это $\mathbb{K}[\mathrm{SL}(2)]^U=\mathbb{K}[\alpha,\beta]$. Ограничение φ^* на $\mathbb{K}[X]^U$ имеет вид: $\varphi^*:\mathbb{K}[X]^U\hookrightarrow\mathbb{K}[\mathrm{SL}(2)]^U=\mathbb{K}[\alpha,\beta]$.

Предложение 3. *Образ $\varphi^*(\mathbb{K}[X]^U)$ — это мономиальная подалгебра в $\mathbb{K}[\alpha,\beta]$, имеющая вид: $\langle\alpha^i\beta^j \mid j/i\le h\rangle$.*

Рациональное число h называют *высотой* X.

Для любого $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложения X существует единственное, с точностью до изоморфизма, нормальное аффинное $\mathrm{SL}(2)$-вложение Y такое, что $X\cong Y/\!\!/\mathbb{Z}_r$, где действие $\mathbb{Z}_r$ на Y — это продолжение действия $\mathbb{Z}_r\subset\mathrm{SL}(2)$ на $\mathrm{SL}(2)$

справа. *Высотой* $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложения X называют высоту соответствующего $\mathrm{SL}(2)$-вложения Y, а *степенью* вложения X называют порядок стабилизатора типичной орбиты. Таким образом, нормальное аффинное $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложение однозначно, с точностью до изоморфизма, определяется своими высотой $h \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ и степенью $r \in \mathbb{N}$.

Предложение 4. *Вне открытой орбиты в нормальном аффинном* $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$*-вложении лежит только один простой дивизор.*

Следствие 2. *Группа классов нормального аффинного* $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$*-вложения изоморфна* $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_l$.

5. Критерий торичности для аффинных G/H-вложений, где G — односвязная полупростая группа, и группа $\mathfrak{X}(H)$ конечна

Предложение 5. *Пусть G — односвязная полупростая алгебраическая группа, H — алгебраическая подгруппа такая, что $\mathfrak{X}(H)$ — конечная группа. Пусть на нормальном аффинном многообразии X задано действие G и $G/H \hookrightarrow X$ — открытое эквивариантное аффинное вложение. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) многообразие X торическое;

2) существует G-модуль V и линейное действие квазитора $\widehat{T} : V$, коммутирующее с действием G такие, что $X \overset{G}{\cong} V /\!\!/ \widehat{T}$;

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 1). Доказательство дословно совпадает с доказательством соответствующей импликации в предложении 1.

1)$\Rightarrow$ 2) Рассмотрим алгебру $Cox(X)$. Она градуирована группой $Cl(X) \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{k_s}$. По предложению 2 можно ввести действие G автоморфизмами кольца $Cox(X)$, которое сохраняет однородные компоненты и совпадает на $Cox(X)_{(0,\ldots,0)} \cong \mathbb{K}[X]$ с обычным действием. Рассмотрим квазитор $\widehat{T} = \widetilde{T} \times \mathbb{Z}_{k_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{k_s}$, где $\widetilde{T}$ — это n-мерный тор. Определим действие $\widehat{T}$ на $Cox(X)$ следующим образом: пусть $f \in S_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\mu_1,\ldots,\mu_s)}$, где $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, $\mu_j = 0, 1, \ldots, k_j - 1$. Пусть $t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) \in \widetilde{T}$, $\varepsilon_j \in \mathbb{Z}_{k_j} \subset \mathbb{K}^*$. Тогда $(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \cdot f = \prod t_i^{\lambda_i} \prod \varepsilon_j^{\mu_j} f$. Очевидно, что это действие, причем оно перестановочно с действием G на $Cox(X)$, так как G оставляет на месте однородные компоненты $Cox(X)$, а $\widehat{T}$ действует на каждой однородной компоненте скалярно. Получаем, что $G \times \widehat{T}$ действует на $Cox(X)$, а значит, по лемме 5, и на $V = \operatorname{Spec} Cox(X)$. Так как $Cox(X)$ — свободная алгебра, V — векторное пространство. Причем, $Cox(X)^{G\times\widehat{T}} = (Cox(X)^{\widehat{T}})^G = Cox(X)^G_{(0,0)} = \mathbb{K}[X]^G = \mathbb{K}$. Последнее равенство выполнено вследствии того, что G действует на X с открытой орбитой. Вновь, по теореме Крафта-Попова, если редуктивная группа действует на векторном пространстве, и регулярные функции, инвариантные относительно этого действия — это только константы, то данное действие эквивалентно линейному. А так как $\widehat{T}$ — квазитор, и G редуктивна, то $G \times \widehat{T}$ — редуктивная группа. Значит действие $G \times \widehat{T}$ на V эквивалентно линейному. Заметим, что $Cox(X)^{\widehat{T}} \cong \mathbb{K}[X]$, причем, раз действие G на $Cox(X)_{(0,0)} \cong \mathbb{K}[X]$ совпадает с обычным, то $Cox(X)^{\widehat{T}} = Cox(X)_{(0,0)} \overset{G}{\cong} \mathbb{K}[X]$. Отсюда получаем: $V /\!\!/ \widehat{T} \overset{G}{\cong} X$.

□

Замечание 1. Из доказательств предложений 2 и 5 следует, что n — это количество простых дивизоров вне G/H, а s не превосходит количества циклических слагаемых в любом, наперед фиксированном, разложении $\mathfrak{X}(H)$.

6. Описание трехмерных торических многообразий с локально транзитивным SL(2)-действием на них

Предложение 6. *Пусть G — односвязная полупростая алгебраическая группа, H — алгебраическая подгруппа такая, что $\mathfrak{X}(H)$ — конечная группа. Пусть на нормальном аффинном многообразии X, не являющемся точкой, задано действие G и $G/H \hookrightarrow X$ — открытое эквивариантное аффинное вложение. Тогда не может оказаться, что G-действие на X транзитивно.*

Доказательство. По предложению 5, $X \overset{G}{\cong} V/\!\!/L$, где V — векторное пространство, а L — группа, действующая на V линейно. Но тогда образ $0 \in V$ при морфизме факторизации — это неподвижная точка, что противоречит транзитивности действия на X. □

Следствие 3. *Не существует трехмерных торических многообразий, на которых возможно транзитивное действие группы* SL(2).

Пусть теперь действие SL(2) на трехмерном нормальном аффинном многообразии X локально транзитивно, но не транзитивно. Тогда X — это $\mathrm{SL}(2)/\!\!/\mathbb{Z}_r$-вложение.

Рассмотрим пространство $R_d = \langle x^d, x^{d-1}y, \ldots, y^d\rangle$ бинарных форм степени d. На нем действует SL(2) таким образом: при

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

имеем: $g \cdot x = dx - by$; $g \cdot y = -cx + ay$. Это представление SL(2) неприводимо, имеет размерность $d+1$, и любой неприводимый SL(2)-модуль размерности $d+1$ изоморфен R_d.

Будем рассматривать торическое аффинное $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложение X, в котором SL(2) имеет открытую орбиту $O(x)$ и $St_x \cong \mathbb{Z}_r$. Тогда $Cl(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_l$ для некоторого натурального l. Многообразию X соответствует конус σ в пространстве $N_{\mathbb{Q}}$.

Лемма 6. *Количество τ одномерных ребер в σ равно* 4.

Доказательство. По лемме 1, любой дивизор на X эквивалентен T-инвариантному. Любой T-инвариантный дивизор на X имеет вид $\sum a_\rho D_\rho$. Отсюда, группа T-инвариантных дивизоров Вейля многообразия X имеет ранг τ. Главными являются те T-инвариантные дивизоры, которые имеют вид $\sum\langle m, n_\rho\rangle D_\rho$ для некоторого $m \in M$. Но решетка M трехмерна, так как X трехмерно. Значит группа главных T-инвариантных дивизоров на X трехмерна. Следовательно, группа классов дивизоров имеет ранг $\tau - 3$. То есть $\tau = 4$. □

Как было доказано ранее, существует пространство $V \cong \mathbb{K}^\tau = \mathbb{K}^4$ и линейное действие $\mathrm{SL}_2 \times \widehat{T}$ на V такое, что $X \cong V/\!\!/\widehat{T}$. По замечанию 1, $\widehat{T} = \widetilde{T} \times \mathbb{Z}_l$, где $\widetilde{T}$ — одномерный тор.

Пусть $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, где V_i — весовые подподпространства в V относительно действия тора $\widetilde{T}$. Тогда каждое V_i — это $\mathrm{SL}(2)$-модуль.

Существует 5 случаев разбиения V на неприводимые $\mathrm{SL}(2)$-модули:

1)$V = R_0 \oplus R_0 \oplus R_0 \oplus R_0$.
2)$V = R_0 \oplus R_0 \oplus R_1$.
3)$V = R_0 \oplus R_2$.
4)$V = R_1 \oplus R_1$.
5)$V = R_3$.

Проанализируем, какие случаи могут реализовываться, как разбиения V на весовые подпространства действия $\widetilde{T}\colon V$.

На R_0 группа $\mathrm{SL}(2)$ действует тривиально, следовательно, в случаях 1) и 2) в X нет трехмерной орбиты.

В R_2 есть орбиты: $\{0\},\ Orb\,(x^2),\ Orb\,(\alpha xy)$.

Если $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$, то $g \in St_{\alpha xy}$.

Если $g = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $g \in St_{x^2}$.

Значит, открытой орбиты $O(x) \subset R_2$ нет. Следовательно, в случае 3) в X не существует открытой орбиты.

Случай 5) не может иметь места, так как $V/\!\!/\widetilde{T}$ должно быть трехмерным.

Остается случай 4): $V = R_1 \oplus R_1$. Чтобы $V/\!\!/\widetilde{T}$ было трехмерным, необходимо, чтобы веса $\widetilde{T}$-действия на этих пространствах были противоположного знака.

Имеем:

$$V = \mathbb{K}^2 \oplus \mathbb{K}^2 = V_1 \oplus V_2.$$
$$\widetilde{T} : V_1 \qquad t \cdot v_1 = t^{np} v_1,\ p \in \mathbb{N},\ v_1 \in V_1;$$
$$\widetilde{T} : V_2 \qquad t \cdot v_2 = t^{-nq} v_2,\ q \in \mathbb{N},\ v_2 \in V_2,\ n \in \mathbb{N}, (p,q) = 1.$$

Введем обозначения:

$$Z = V/\!\!/\widetilde{T};$$
$$Y = \{\underbrace{v_1 \otimes \ldots \otimes v_1}_{q} \otimes \underbrace{v_2 \otimes \ldots \otimes v_2}_{p}\} \subset V_1^{\otimes q} \otimes V_2^{\otimes p}.$$

Предложение 7. *Существует* $\mathrm{SL}(2)$*-эквивариантный изоморфизм алгебраических многообразий:* $Y \cong Z$.

Доказательство. Подмножество Y замкнуто в $V_1^{\otimes q} \otimes V_2^{\otimes p}$, так как задается равенством некоторых координат. Покажем это. Координаты в $V_1^{\otimes q} \otimes V_2^{\otimes p}$ — это

$$h_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{p+q}} = z_1^{\alpha_1} w_1^{1-\alpha_1} \ldots z_{p+q}^{\alpha_{p+q}} w_{p+q}^{1-\alpha_{p+q}},$$

где (z_i, w_i) — координаты на i-ом множителе, и α_i равно 0 или 1. Множество Y задается уравнениями:

$$h_{\alpha_1,\ldots,1,\ldots,0,\ldots,\alpha_{p+q}} = h_{\alpha_1,\ldots,0,\ldots,1,\ldots,\alpha_{p+q}}.$$

Строки индексов совпадают везде, кроме двух мест, причем, если места, где они не совпадают — это i и j, то либо $i, j \leq q$, либо $i, j > q$.

На Y имеем: $z_1 = \ldots = z_q = x_1$, $w_1 = \ldots = w_q = x_2$, $z_{q+1} = \ldots = z_{p+q} = y_1$, $w_{q+1} = \ldots = w_{p+q} = y_2$, где x_1, x_2 — координаты на V_1, а y_1, y_2 — на V_2. Тогда $\mathbb{K}[Y] = \mathbb{K}[x_1^m x_2^{q-m} y_1^l y_2^{p-l} \mid m = 0, \ldots, q;\ l = 0, \ldots, p]$. Но несложно понять, что

$\mathbb{K}[Z] = \mathbb{K}[x_1^m x_2^{q-m} y_1^l y_2^{p-l} \mid m = 0, \ldots, q;\ l = 0, \ldots, p]$, где x_1, x_2, y_1, y_2 те же. Значит $Y \overset{\mathrm{SL}(2)}{\cong} Z$. □

Далее не будем различать Z и Y, и будем использовать обозначение Y.

Любое нормальное $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложение однозначно определяется своей высотой h. Установим высоты торических $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложений.

Возьмем в Y такую SL(2)-орбиту:

$$\mathcal{O} = Orb(u),\ u = \underbrace{e_1 \otimes \ldots \otimes e_1}_{q} \otimes \underbrace{e_2 \otimes \ldots \otimes e_2}_{p},$$

где $e_1 \neq e_2$, если отождествить V_1 и V_2 как SL(2)-модули. Стабилизатор точки u имеет вид: $St_u = \left\{\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}\right\}$, где $\varepsilon^{|q-p|} = 1$. При $p \neq q$, St_u — конечная группа, значит, $Orb(u)$ — трехмерна и, следовательно, открыта. Отсюда $r = |q-p|$. Если же $p = q$, то в стабилизаторе любой точки лежит тор $\left\{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\right\}$, значит, нет открытой орбиты. Далее считаем $q > p$.

В многообразии $Y = V/\!\!/\widetilde{T}$ есть открытая SL(2) - орбита. То, что Y — нормально, следует из того, что $\mathbb{K}[V]$ целозамкнуто в $\mathbb{K}(V)$, а значит, $\mathbb{K}[Y] = \mathbb{K}[V]^{\widetilde{T}}$ целозамкнуто в $\mathbb{K}(Y)$. Следовательно, для Y выполняется условие 2) предложения 5. Значит, Y — торическое $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложение.

Группа SL(2) действует на себе левыми сдвигами. Поскольку действие $\mathbb{Z}_r$ на SL(2) справа коммутирует с действием SL(2) на себе слева, имеем SL(2)-действие на $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$. Рассмотрим SL(2)-эквивариантный доминантный морфизм

$$\varphi\colon\ \mathrm{SL}(2) \to Y;\ g \overset{\varphi}{\mapsto} g \cdot u.$$

Ему соответствует SL(2)-эквивариантное вложение

$$\varphi^* : \mathbb{K}[Y] \hookrightarrow \mathbb{K}[\mathrm{SL}(2)] = \mathbb{K}[\alpha, \beta, \gamma, \delta]/(\alpha\delta - \beta\gamma - 1).$$

Координаты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ можно выбрать так, чтобы при $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2)$,

$$g \cdot e_1 = ae_1 + ce_2,\ g \cdot e_2 = be_1 + de_2.$$

Отметим, что

$$g \cdot \alpha = d\alpha - b\gamma, g \cdot \gamma = a\gamma - c\alpha, g \cdot \beta = d\beta - b\delta, g \cdot \delta = a\delta - c\beta.$$

Тогда

$$\varphi^*(x_1^m x_2^{q-m} y_1^l y_2^{p-l})(g) = x_1^m x_2^{q-m} y_1^l y_2^{p-l}(\varphi(g)) =$$
$$= x_1^m x_2^{q-m} y_1^l y_2^{p-l}(\underbrace{g \cdot e_1 \otimes \ldots \otimes g \cdot e_1}_{q} \otimes \underbrace{g \cdot e_2 \otimes \ldots \otimes g \cdot e_2}_{p}) =$$
$$= x_1^m x_2^{q-m} y_1^l y_2^{p-l}(\underbrace{(ae_1 + ce_2) \otimes \ldots \otimes (ae_1 + ce_2)}_{q} \otimes \underbrace{(be_1 + de_2) \otimes \ldots \otimes (be_1 + de_2)}_{p}) =$$
$$= a^m c^{q-m} b^l d^{p-l} = \alpha^m \gamma^{q-m} \beta^l \delta^{p-l}(g).$$

Итак, получаем: $\varphi^*(x_1^m x_2^{q-m} y_1^l y_2^{p-l}) = \alpha^m \gamma^{q-m} \beta^l \delta^{p-l}$.

Рассмотрим унипотентную подгруппу в SL(2): $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Алгебра U-инвариантных функций на SL(2) — это $\mathbb{K}[\mathrm{SL}(2)]^U = \mathbb{K}[\alpha, \beta]$. Ограничение φ^* на $\mathbb{K}[Y]^U$ имеет вид: $\varphi^* : \mathbb{K}[Y]^U \hookrightarrow \mathbb{K}[\mathrm{SL}(2)]^U = \mathbb{K}[\alpha, \beta]$. Для того, чтобы найти высоту Y, надо определить, каким максимально возможным может быть отношение w/t, где $\alpha^t\beta^w \in \mathrm{Im}\varphi^*|_{\mathbb{K}[Y]^U} = \mathrm{Im}\varphi^* \cap \mathbb{K}[\alpha, \beta]$. Действительно, пусть W — это торическое SL(2)-вложение такое, что $Y = W /\!\!/ \mathbb{Z}_s$. Тогда имеем доминантные морфизмы:

$$\mathrm{SL}(2) \xrightarrow{\psi} W \xrightarrow{\pi} Y,$$

где $\varphi = \pi\psi$. Отсюда получаем:

$$\mathbb{K}[Y]^U \overset{\pi^*|_{\mathbb{K}[W]^U}}{\hookrightarrow} \mathbb{K}[W]^U \overset{\psi^*|_{\mathbb{K}[\mathrm{SL}(2)]^U}}{\hookrightarrow} \mathbb{K}[\alpha, \beta].$$

Если $\alpha^t\beta^w \in \mathrm{Im}(\varphi^*) \cap \mathbb{K}[\alpha, \beta]$, то $\alpha^t\beta^w \in \mathrm{Im}(\psi^*) \cap \mathbb{K}[\alpha, \beta]$. Значит, высота W, она же и высота Y, не меньше, чем w/t. Если высота W равна h, то в $\mathrm{Im}(\psi^*) \cap \mathbb{K}[\alpha, \beta]$ есть моном $\alpha^\xi\beta^\eta$, где $\eta/\xi = h$. Но тогда $\alpha^\xi\beta^\eta = \psi^*(f)$, где $f \in \mathbb{K}[W]^U$. Пусть группа $\mathbb{Z}_s$ порождена элементом $\zeta = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$. Положим

$$\widetilde{f} = f(\zeta \cdot f)(\zeta^2 \cdot f) \dots (\zeta^{s-1} \cdot f) \in \mathbb{K}[Y]^U.$$

Несложно убедиться, что $\varphi^*(\widetilde{f}) = \alpha^{s\xi}\beta^{s\eta}$. Но $\frac{s\eta}{s\xi} = \frac{\eta}{\xi} = h$. Итак, высота Y — это максимальное значение w/t.

Предложение 8. *Если моном $\alpha^t\beta^w$ лежит в образе φ^*, то $w/t \le p/q$.*

Доказательство. Пусть

$$\varphi^*(\sum z_i {x_1}^{m_i} {x_2}^{q-m_i} {y_1}^{r_i} {y_2}^{p-r_i}) = \alpha^t\beta^w, z_i \in \mathbb{K}.$$

Тогда

$$\sum z_i \alpha^{m_i} \gamma^{q-m_i} \beta^{r_i} \delta^{p-r_i} = \alpha^t\beta^w + (\alpha\delta - \beta\gamma - 1)F(\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

(Это равенство уже в $\mathbb{K}[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$.) Подставим $\delta = 0$:

$$\sum z_i \alpha^{m_i} \gamma^{q-m_i} \beta^p = \alpha^t\beta^w + (\beta\gamma - 1)\widetilde{F}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Теперь у нас есть линейная комбинация мономов $\alpha^{m_i}\gamma^{q-m_i}\beta^p$ и соотношение $\beta\gamma = 1$, и мы получили $\alpha^t\beta^w$. Это соотношение затрагивает лишь один моном, значит можно считать, что мы применяли только операцию $\beta\gamma \to 1$, ведь мы получили моном только от α и β. Получаем:

$$\sum z_i \alpha^{q-m_i} \beta^{p-m_i} = \alpha^t\beta^w.$$

Следовательно, в сумме участвует только один моном $\alpha^{q-m}\beta^{p-m}$ с коэффициентом 1, т.е.

$$t = q - m; w = p - m; w/t = (p - m)/(q - m) \le p/q.$$

□

Заметим, что равенство $w/t = p/q$ достигается, так как $\alpha^q\beta^p = \varphi^*(x_1^q y_1^p)$. Значит, высота Y — это p/q. Но по определению высота Y равна высоте W, а та в свою очередь равна высоте X. Следовательно, высота X равна p/q. Вспомним, что $Y = V /\!\!/ \widetilde{T}$ — это $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_{q-p}$-вложение, а $X = (V /\!\!/ \widetilde{T}) /\!\!/ \mathbb{Z}_l = Y /\!\!/ \mathbb{Z}_l$.

Значит, порядок стабилизатора точки открытой SL(2)-орбиты в X обязательно делится на $q-p$.

Удостоверимся, что торическими являются все $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_{(q-p)j}$-вложения с высотой p/q для любого натурального j. Действительно,

$$Y = \mathbb{K}^4 /\!\!/ \widetilde{T} = \{v_1 \otimes \ldots \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_2\}$$

является торическим $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_{q-p}$-вложением с высотой $q-p$, то есть Y соответствует $j=1$. Рассмотрим $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_{(q-p)j}$ - вложение X с высотой p/q. Оно представляется в виде $X = W /\!\!/ \mathbb{Z}_{(q-p)j} = (W /\!\!/ \mathbb{Z}_{(q-p)}) /\!\!/ \mathbb{Z}_j = Y /\!\!/ \mathbb{Z}_j$. Пусть $\pi\colon Y \to X$ — морфизм факторизации, и пусть на Y действует тор $T = \overline{T}/\widetilde{T}$ с открытой орбитой и тривиальным стабилизатором. Определим действие T на X по следующему правилу: $t \cdot \pi(y) = \pi(t^{-1} \cdot y)$. Это действие корректно определено , если на Y перестановочны действия T и $\mathbb{Z}_j$. Проверим, что действия T и $\mathbb{Z}_j = \mathbb{Z}_{(q-p)j}/\mathbb{Z}_{q-p}$, где $\mathbb{Z}_{(q-p)} \subset \mathrm{SL}(2)$ и $\mathbb{Z}_{(q-p)j} \subset \mathrm{SL}(2)$, на $\mathbb{K}[Y]$ перестановочны. Пусть

$$t = \bar{t}\widetilde{T} \in T,\ \bar{t} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \in \overline{T},$$

$$\overline{\zeta} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{j(q-p)},\ \zeta = \overline{\zeta}\mathbb{Z}_{q-p} \in \mathbb{Z}_j.$$

Здесь ε — корень из 1 степени $(q-p)j$. Тогда:

$$t \cdot x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n} = a^{-m} b^{m-q} c^{-n} d^{n-p} x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n}.$$

Напомним, что

$$Y = v_1 \otimes \ldots \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_2.$$

Плотная SL(2) - орбита имеет вид $g \cdot e_1 \otimes \ldots \otimes g \cdot e_1 \otimes g \cdot e_2 \otimes \ldots \otimes g \cdot e_2$, где (e_1, e_2) — фиксированный базис в $\mathbb{K}^2$. То есть e_1 и e_2 из разных $\mathbb{K}^2$, но мы считаем, что выбрав базисы, мы установили SL(2) - эквивариантный изоморфизм между обоими $\mathbb{K}^2$. Пусть $v = g \cdot e_1 \otimes \ldots \otimes g \cdot e_1 \otimes g \cdot e_2 \otimes \ldots \otimes g \cdot e_2$. Тогда

$$\zeta \cdot v = g\overline{\zeta} \cdot e_1 \otimes \ldots \otimes g\overline{\zeta} \cdot e_1 \otimes g\overline{\zeta} \cdot e_2 \otimes \ldots \otimes g\overline{\zeta} \cdot e_2 = \varepsilon g \cdot e_1 \otimes \ldots \otimes \varepsilon g \cdot e_1 \otimes \varepsilon^{-1} g \cdot e_2 \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{-1} g \cdot e_2 =$$
$$= \varepsilon^{q-p} g \cdot e_1 \otimes \ldots \otimes g \cdot e_1 \otimes g \cdot e_2 \otimes \ldots \otimes g \cdot e_2 = \varepsilon^{q-p} v.$$

Значит, $\zeta \cdot x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n}(v) = x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n}(\zeta^{-1} \cdot v) = \varepsilon^{p-q} x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n}(v)$. То есть $\zeta \cdot x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n} = \varepsilon^{p-q} x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n}$. Отсюда видно, что действия тора и $\mathbb{Z}_j$ коммутируют.

Раз у действия T на Y была открытая орбита, то у действия T на X тоже будет открытая орбита. Стабилизатор точки этой орбиты конечен, но фактор тора по конечной группе — тор. Итак, X — торическое $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_{(q-p)j}$-вложение.

Сформулируем окончательный результат.

Предложение 9. *Нормальное аффинное* $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$*-вложение с высотой*

$$p/q;\ p, q \in \mathbb{N},\ (p, q) = 1,$$

является торическим тогда и только тогда, когда r *делится на* $q-p$.

В частности, при $r=1$ получаем следующее утверждение.

Следствие 4. *Нормальное аффинное* $\mathrm{SL}(2)$*-вложение является торическим тогда и только тогда, когда его высота равна* $p/(p+1)$.

Из следствия 3 и предложения 9 вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* X *— трехмерное нормальное аффинное многообразие, и на* X *задано локально транзитивное* $\mathrm{SL}(2)$*-действие. Тогда* X *— торическое в том и только том случае, когда* X *— это* $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$*-вложение с высотой* $\frac{p}{q}$, $(p,q)=1$ *и* r *делится на* $q-p$.

7. Конуса торических $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложений

Как упоминалось в разделе 1, любому торическому многообразию X соответствует некоторый конус в пространстве $N_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^{\dim X}$. Ранее доказано, что нормальное аффинное $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$ - вложение является торическим многообразием тогда и только тогда, когда r делится на $q-p$, где $(q,p)=1$ и p/q — высота данного вложения. Опишем конус, соответствующий нормальному афинному $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_{(q-p)j}$-вложению X с высотой p/q, как торическому многообразию.

В предыдущем разделе была проведена явная конструкция X, как фактора торического $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_{(q-p)}$ -вложения Y по действию группы $\mathbb{Z}_j$. При этом алгебра функций на Y — это $\mathbb{K}[x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n}]$, $0 \le m \le q$, $0 \le n \le p$. Кроме того был выписан явный вид действия группы $\mathbb{Z}_j$ на $\mathbb{K}[Y]$. Для этого группа Z_j была реализована как факторгруппа $\mathbb{Z}_{(q-p)j}/\mathbb{Z}_{q-p}$, где $\mathbb{Z}_{(q-p)j} \subset \mathrm{SL}(2)$ порождена элементом $\overline{\zeta} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$, где ε — первообразный корень из 1 степени $j(q-p)$, и $\mathbb{Z}_{q-p} \subset \mathrm{SL}(2)$. Пусть $\zeta = \overline{\zeta}\mathbb{Z}_{q-p} \in \mathbb{Z}_j$. Действие $\mathbb{Z}_j$ на $\mathbb{K}[Y]$ задается формулой:

$$\zeta \cdot x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n} = \varepsilon^{p-q} x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n}.$$

Отсюда видно, что алгебра инвариантов будет такой:

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[Y]^{\mathbb{Z}_j} = \mathbb{K}[x_1^u x_2^{jq-u} y_1^v y_2^{jp-v}].$$

Вложим $\mathbb{K}[X]$ в алгебру многочленов от трех переменных $\mathbb{K}[f,g,h]$. Пусть $f = x_2/x_1, g = y_2/y_1, h = {x_1}^{jq}{y_1}^{jp}$ лежат в $\mathbb{K}(X)$. Ясно, что они алгебраически независимы. Тогда ${x_1}^{jq-u}{x_2}^m{y_1}^{jp-v}{y_2}^v = f^u g^v h$. Существует естественное вложение: $\mathbb{K}[f,g,h] \hookrightarrow \mathbb{K}[f,g,h,f^{-1},g^{-1},h^{-1}]$. Ему соответствует вложение тора $T = \operatorname{Spec}\mathbb{K}[f,g,h,f^{-1},g^{-1},h^{-1}]$ в трехмерное аффинное пространство $V = \operatorname{Spec}\mathbb{K}[f,g,h]$. Пусть M — решетка характеров тора T, а N — двойственная решетка. Тогда торическому многообразию V соответствует конус в $N_{\mathbb{Q}}$, порожденный векторами $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$. Двойственный конус в $M_{\mathbb{Q}}$ порожден вектораи $a=(1,0,0), b=(0,1,0)$ и $c=(0,0,1)$. Тогда $\mathbb{K}[f,g,h]$ — полугрупповая алгебра полугруппы P, порожденной a,b и c. Определим изоморфизм $i\colon \mathbb{K}[f,g,h] \to \mathbb{K}[P]$ следующим образом: $i(f)=a,\ i(g)=b,\ i(h)=c$. Тогда $i(f^u g^v h) = ua+vb+c$.

Обозначим через σ конус, соответствующий X, а через $\widehat{\sigma}$ — конус, двойственный к σ. Конус $\widehat{\sigma}$ натянут, соответственно, на вектора:

$$ua+vb+c, u \in \mathbb{Z}\cap[0,jq], v \in \mathbb{Z}\cap[0,jp].$$

Тогда конус σ состоит из всех векторов $w \in N$, для которых выполнены неравенства:

$$(w, ua+vb+c) \ge 0.$$

Так как линейная функция на отрезке принимает минимальное значение в конце этого отрезка, то достаточно проверять лишь неравенства:

$$(w, c) \geq 0, (w, jqa + c) \geq 0, (w, jpb + c) \geq 0, (w, jqa + jpb + c) \geq 0.$$

Найдем 1-мерные грани этого конуса. Для этого решим системы из 2-х уравнений, полученных из наших неравенств, обращением их в равенства. Пусть $w = (r, s, t)$. Будем решать упомянутые системы и брать только те их решения, которые лежат в σ. Имеем 6 систем.

1)

$$\begin{cases} t = 0; \\ rjq + t = 0. \end{cases}$$

Отсюда $r = 0, t = 0$, искомый вектор (0,1,0).
2)

$$\begin{cases} t = 0; \\ sjp + t = 0. \end{cases}$$

Значит, $s = 0, t = 0$, искомый вектор (1,0,0).
3)

$$\begin{cases} t = 0; \\ rjq + sjp + t = 0. \end{cases}$$

Отсюда $t = 0, rjq + sjp = 0$. Так как $rjq \geq 0, sjp \geq 0$, получаем $rjq = sjp = 0$, что означает, что $r = s = t = 0$.
4)

$$\begin{cases} rjq + t = 0; \\ sjp + t = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $0 \leq rjq + sjp + t = -t \leq 0$. Поэтому $r = s = t = 0$.
5)

$$\begin{cases} rjq + t = 0; \\ rjq + sjp + t = 0. \end{cases}$$

Значит, $s = 0$. Искомый вектор $(-1, 0, jq)$, т.к. для вектора $(1, 0, -jq)$ имеем: $sjp + t < 0$.
6)

$$\begin{cases} sjp + t = 0; \\ rjq + sjp + t = 0. \end{cases}$$

Отсюда $r = 0$. Искомый вектор $(0, -1, jp)$.

Получаем четыре 1-мерных грани: лучи, натянутые на вектора $\rho_1 = \mathbb{Q}_+(1, 0, 0)$, $\rho_2 = \mathbb{Q}_+(0, 1, 0)$, $\rho_3 = \mathbb{Q}_+(-1, 0, jq)$ и $\rho_4 = \mathbb{Q}_+(0, -1, jp)$. Никакие 3 из этих лучей не лежат в одной плоскости, значит, это действительно одномерные грани. Получаем следующий результат.

Теорема 2. *Конус нормального аффинного* $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_{j(q-p)}$ *- вложения, как торического многообразия, порожден векторами* $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, jq)$ *и* $(0, -1, jp)$.

8. Заключительные замечания

В последнее время активно исследуется вопрос о вырождениях произвольного алгебраического многообразия в торическое, см., например, [5]. В случае аффинного $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложения уже стандартная процедура стягивания действия [4] приводит к торическому многообразию. Интересно отметить, что если исходное вложение само было торическим, то торическое многообразие, возникающее после стягивания, никогда не изоморфно исходному.

Заметим также, что результат данной работы можно рассматривать как первый шаг в направлении описания группы (неэквивариантных) автоморфизмов произвольного $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложения.

Список литературы

[1] Х. Крафт, Геометрические методы в теории инвариантов // М.: Мир, 1987.
[2] В.Л. Попов, *Квазиоднородные аффинные алгебраические многобразия группы* SL(2), Изв. АН СССР, Сер. Мат. **37:4** (1973), 792-832.
[3] В.Л. Попов, *Группа Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения*, Изв. АН СССР, Сер. Мат. **38:2** (1974), 294-332.
[4] В.Л.Попов, Стягивание действий редуктивных алгебраических групп, Мат. Сборник **130:3** (1986), 310-334.
[5] V.Alexeev, M. Brion, Toric degenerations of spherical varieties, Selecta Math. **10** (2004), 453-478
[6] F. Berchtold, J. Hausen, Homogeneous coordinates for algebraic varieties, J. Algebra **266** (2003), 636-670.
[7] D.A. Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Alg. Geometry **4** (1995), 17-50.
[8] D. Fulton, Introduction to toric varieties // Annals of Math. Studies **131**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
[9] Y.Hu, S.Keel, Mori dream spaces and GIT, Michigan Math. J. **48** (2000), 331-348.
[10] F.Knop, H.Kraft, T.Vust, *The Picard group of a G-variety*, in: Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, DMV Seminar, Vol. **13**, Birkhäuser, Basel (1989), 77-87.
[11] H. Kraft, V.L. Popov, *Semisimple group actions on the three dimensional affine space are linear*, Comment. Math. Helvetici **60** (1985), 466-479.

Кафедра высшей алгебры механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва, ГСП-2, Ленинские горы.
E-mail address: sergaifu@mccme.ru