

СКОРОСТЬ ДИФФУЗИИ В ЗАДАЧЕ МЕЗЕРА.

Г.Н. ПИФТАНКИН

1 октября 2005 г.

Аннотация. Рассматривается задача Мезера — возмущение геодезического потока на T^2 периодическим по времени потенциалом. К этой задаче применяются методы сепаратрисного отображения и антиинтегрируемого предела. Основным результатом работы является построение траекторий на которых энергия неограниченно растет линейно по времени.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	2
2. Гамильтонова система и основной результат	4
Часть 1. Антиинтегрируемый предел	6
3. Сепаратрисное отображение: определение и формулы	6
4. Символическая динамика	9
5. Быстрые траектории Мезера	15
Часть 2. Сепаратрисное отображение	19
6. Нормальные координаты	19
7. Однородные координаты	22
8. Гамильтониан и уравнения Гамильтона в однородных координатах	23
9. Отображение склейки: определение	26
10. Отображение склейки: формулы	28
11. Нормализация	30
12. Возмущенное отображение склейки	34
13. Фазовый поток возмущенной системы	35
14. Сепаратрисное отображение	37
Список литературы	39

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы рассмотрим один из простейших случаев явления, получившего название диффузии Арнольда. Это явление, открытое В.И. Арнольдом в его знаменитом примере [Ар2], обычно рассматривается в гамильтоновых системах, близких к интегрируемым (основная задача динамики по Пуанкаре[P]). В этом случае его можно кратко описать следующим образом. Рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом:

$$(1.1) \quad H(I, \varphi, t) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, t, \varepsilon),$$

где $I \in \mathbb{R}^d$, $\varphi \in \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (т.е. гамильтониан периодичен по φ и t). Уравнения Гамильтона имеют следующий вид:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \dot{I} &= -\varepsilon \partial_\varphi H_1, \\ \dot{\varphi} &= \partial_I H_0 + \varepsilon \partial_I H_1. \end{aligned}$$

При $\varepsilon = 0$ получаем интегрируемую систему, переменные "действие" I постоянны вдоль траекторий. Задача заключается в исследовании эволюции этих медленных переменных при малых $\varepsilon > 0$. В численных экспериментах эта эволюция напоминает случайное блуждание и потому ее называют диффузией.

Если $d = 1$ ¹, то одним из важных следствий теории КАМ [Ар1],[АКН] является отсутствие эволюции медленных переменных²:

$$|I(t) - I(0)| < C\sqrt{\varepsilon}.$$

Гипотеза 1.1 (Арнольд [Ар1]). *В типичных системах вида (1.2) при $d > 1$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует траектория такая, что $|I(t) - I(0)| > 1$ для достаточно большого t .*

При исследовании диффузии большую роль играет степень гладкости гамильтониана H .

Как показал Н.Н. Нехорошев [Н], в аналитических системах (1.2) достаточно общего вида диффузия возможна с не более чем экспоненциально малой скоростью³:

$$|I(t) - I(0)| < C e^{-\frac{b}{\varepsilon^a} t},$$

для некоторых $a, b > 0$. Это одна из главных трудностей при исследовании эволюции переменных "действие", поскольку экспоненциально малые эффекты не улавливаются ни на каком шаге метода усреднения. Недавно, Дж. Мезер анонсировал доказательство существования диффузии при $d = 2$ [М2].

В гладких системах $H \in C^\infty$ диффузия доказана Р. Дуади [D]. Скорость в этом случае может быть не экспоненциально малая, но остается меньше любой степени ε :

$$|I(t) - I(0)| < C\varepsilon^k t, \quad k \in \mathbb{N}, \quad C = C(k).$$

¹В физической литературе такие системы называются системами с полутора степенями свободы.

²Здесь мы говорим о "невырожденных" системах, например, гармонический осциллятор является вырожденной системой. В данном случае возможен захват в резонанс и, как следствие, линейный рост переменной действие.

³Здесь и далее имеется в виду средняя скорость изменения переменных действия на отрезке времени, при котором $|I(t) - I(0)| > 1$. Локально скорость \dot{I} , конечно, может быть порядка ε .

В ряде задач диффузия может происходить без экспоненциально малых эффектов. Д. В. Трещёв [Т4] доказал, что в типичных *a priori* неустойчивых системах⁴ с двумя с половиной степенями свободы существует траектория, на которой

$$|I(t) - I(0)| > c \frac{\varepsilon}{|\log \varepsilon|} t,$$

для некоторой константы $c > 0$. Имеются достаточно правдоподобные рассуждения, показывающие, что в общем случае в таких системах эта оценка оптимальна по порядку.

В этой работе мы оцениваем скорость диффузии в следующей системе.

Задача Мезера — возмущение геодезического потока на двумерном торе \mathbb{T}^2 периодическим по времени потенциалом.

Рассмотрим классическую гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H(q, p, t) = T(q, p) + V(q, t), \quad q \in \mathbb{T}^2, \quad p \in T_q^* \mathbb{T}^2, \quad t \in \mathbb{T},$$

здесь $T(q, p) = \frac{1}{2} \langle A^{-1}(q)p, p \rangle$ — кинетическая энергия (риманова метрика на \mathbb{T}^2 , $T = \frac{1}{2} \langle A(q)\dot{q}, \dot{q} \rangle$, $\dot{q} \in T_q \mathbb{T}^2$, $p = A(q)\dot{q}$), $V(q, t)$ — периодическая по времени потенциальная энергия. Система не автономна, и энергия может изменяться на траектории.

Согласно [M1] для общих метрики и потенциала существует решение $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow T^* \mathbb{T}^2$, на котором

$$H(\sigma(t), t) \rightarrow +\infty, \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$

Условия общности мы сформулируем в следующем пункте. Здесь только заметим, что они предполагают "хаотичность" геодезического потока⁵ — невозмущенной системы. Нетрудно видеть, что рост энергии обусловлен только ростом кинетической энергии, поскольку потенциальная энергия ограничена. Отметим, что в этой задаче отсутствует малый параметр ε . Он появляется как отношение $\frac{V}{T}$ при условии, что полная энергия $T + V$ достаточно велика. Действительно, на больших уровнях энергии $H \sim \varepsilon^{-2}$, канонической заменой

$$p = \varepsilon^{-1} \hat{p}, \quad H = \varepsilon^{-2} \hat{H}, \quad t = \varepsilon \hat{t},$$

приходим к системе с гамильтонианом:

$$\hat{H} = T(q, \hat{p}) + \varepsilon^2 V(q, \varepsilon \hat{t}),$$

при этом роль медленной переменной играет сам гамильтониан \hat{H} . Опубликованные доказательства утверждения Мезера содержатся в [BT], [DLS] и [K]. В работе [BT] получено многомерное обобщение этого результата.

Первые оценки снизу максимальной скорости диффузии были порядка $H(t) \sim \sqrt[n]{t}$, для достаточно большого n . С. В. Болотин построил траекторию, на которой

$$|H(t) - H(0)| > c\sqrt{t}.$$

В данной работе мы применяем к задаче Мезера метод сепаратрисного отображения и метод антиинтегрируемого предела, разработанных для *a priori*

⁴Это системы с гамильтонианом вида $H(I, \varphi, u, v, t) = H_0(I) + F(u, v) + \varepsilon H_1(I, \varphi, u, v, t, \varepsilon)$, где $F(u, v)$ — гамильтониан математического маятника.

⁵Здесь под геодезическим потоком мы понимаем систему с гамильтонианом $T(q, p)$.

неустойчивых систем, в работах [Т2] и [Т3]. С помощью этих методов удается доказать существование траектории с линейным по времени ростом энергии:

$$|H(t) - H(0)| > ct.$$

В следующем пункте мы сформулируем соответствующий результат. Аналогичный результат имеется в [dlL]. Нетрудно видеть, что эта оценка оптимальна по порядку (см. замечание 2.4).

Работа состоит из двух почти независимых частей. В первой, используя формулы для сепаратрисного отображения, мы доказываем главный результат этой работы (теорема 2.2), во второй — вычисляем эти формулы.

Мне очень приятно выразить огромную благодарность моему научному руководителю Дмитрию Валерьевичу Трещеву за всестороннюю поддержку в написании этой работы. Мне было относительно легко пройти по пути намеренным им. Практически все построения и идеи были заимствованы из его предыдущих работ.

2. ГАМИЛЬТОНОВА СИСТЕМА И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Итак, рассмотрим гамильтонову систему $(\mathcal{M}, \Omega, \mathcal{H})$ с двумя с половиной степенями свободы, где \mathcal{M} — вещественно-аналитическое симплектическое многообразие, $\dim \mathcal{M} = 4$, Ω — симплектическая структура, гамильтониан $\mathcal{H} \in C^\omega(\mathcal{M} \times \mathbb{T})$ имеет вид:

$$(2.1) \quad \mathcal{H}(\mathcal{Z}, t) = \mathcal{H}_0(\mathcal{Z}) + \mathcal{H}_1(\mathcal{Z}, t), \quad \mathcal{Z} \in \mathcal{M}, \quad t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Пусть

$$\mathcal{G}^\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$$

— однопараметрическая группа диффеоморфизмов фазового пространства. Предположим, что

$$(2.2) \quad \mathcal{H}_0 \circ \mathcal{G}^\mu = e^{2\mu} \mathcal{H}_0, \quad \mathcal{H}_1 \circ \mathcal{G}^\mu = \mathcal{H}_1, \quad (\mathcal{G}^\mu)^* \Omega = e^\mu \Omega.$$

Ниже без ограничения общности предполагаем, что $\{\mathcal{H}_0 = 1\} \neq \emptyset$.

Определение 2.1. Функцию $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть \mathcal{G}^μ -однородной степени k , если

$$F \circ \mathcal{G}^\mu = e^{k\mu} F.$$

При этом гамильтоново векторное поле v_F , порожденное гамильтонианом F , также будем называть \mathcal{G}^μ -однородным степени k .

Таким образом, функции \mathcal{H}_0 и \mathcal{H}_1 являются \mathcal{G}^μ -однородными степени 2 и 0, соответственно.

В задаче Мезера роль функций \mathcal{H}_0 и \mathcal{H}_1 играют кинетическая и потенциальная энергии, а группа \mathcal{G}^μ — гомотетия по импульсам:

$$\mathcal{G}^\mu(q, p) = (q, e^\mu p), \quad \mathcal{Z} = (q, p).$$

Автономную гамильтонову систему с гамильтонианом \mathcal{H}_0 будем называть невозмущенной, а исходную — возмущенной.

Далее мы формулируем условия общности системы (2.1)—(2.2).

У1 Пусть невозмущенная система имеет периодическую гиперболическую траекторию $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}$ и трансверсальное гомоклиническое к ней решение

$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$.

В параграфе 6 мы дадим соответствующие определения. Здесь только заметим, что гомоклиническое решение $\gamma(t)$ экспоненциально стремится к \mathcal{T} при $t \rightarrow \pm\infty$.

У2 *Интеграл Пуанкаре-Мельникова*

$$(2.3) \quad I(t) = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \left[\int_{-\theta}^{\theta} \mathcal{H}_1(\gamma(\tau), t) d\tau + \mathcal{F}(\gamma(-\theta), t) - \mathcal{F}(\gamma(\theta), t) \right]$$

— не постоянная функция.

Здесь мы без ограничения общности предполагаем, что среднее функции $\mathcal{H}_1(\cdot, t)$ на гиперболической траектории нулевое для любого $t \in \mathbb{T}$, т.е.

$$(2.4) \quad \int_0^l \mathcal{H}_1(\mathcal{T}(\tau), t) d\tau = 0,$$

где l — период периодического решения $\mathcal{T}(t)$. Действительно, замена гамильтониана $\mathcal{H}(\mathcal{Z}, t) \mapsto \mathcal{H}(\mathcal{Z}, t) - \bar{\mathcal{H}}_1(t)$ не изменяет уравнений Гамильтона. Здесь $\bar{\mathcal{H}}_1(t)$ — среднее исходной функции \mathcal{H}_1 на гиперболической орбите для каждого $t \in \mathbb{T}$.

Функция $\mathcal{F} : \mathcal{M} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная гладкая функция такая, что для любой точки на $\mathcal{Z} \in \mathcal{T}$

$$\{\mathcal{H}_0, \mathcal{F}\}(\mathcal{Z}, t) = \mathcal{H}_1(\mathcal{Z}, t).$$

Это уравнение мы решим в параграфе 11. Поскольку $\gamma(t)$ экспоненциально стремится к \mathcal{T} , то предел (2.3) существует и не зависит от выбора функции \mathcal{F} .

Теорема 2.2. *Пусть для системы (2.1)–(2.2) выполнены условия У1 и У2. Тогда существует решение $\sigma(t)$ этой системы такое, что при всех $t \geq 0$:*

$$(2.5) \quad \mathcal{H}(\sigma(t), t) \geq A^- t + B^-,$$

для некоторых констант $A^- > 0$ и B^- .

Замечание 2.3. Условие аналитичности системы (2.1)–(2.2) необходимо лишь для применения нормальной формы Элиассона (см. теорему 6.2). В частности, возмущение \mathcal{H}_1 может иметь конечную гладкость.

Замечание 2.4. Пусть $\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_1(\mathcal{Z}, t) \leq A^+$. Например, это выполнено, когда поверхности уровня \mathcal{H}_0 компактны, что, конечно, имеет место в задаче Мезера. Тогда для любого решения $\sigma(t)$ системы (2.1)–(2.2)

$$\frac{d\mathcal{H}(\sigma(t), t)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_1(\sigma(t), t)}{\partial t} \leq A^+,$$

и следовательно

$$\mathcal{H}(\sigma(t), t) \leq A^+ t + B^+.$$

Таким образом, рост энергии более быстрый, чем линейный по времени, невозможен ни на каком решении. В этом смысле оценка (2.5) точна.

Часть 1. Антиинтегрируемый предел

Метод антиинтегрируемого предела является одним из методов символической динамики. Символическая динамика — это динамика на пространстве символов (кодов). Динамика исходной динамической системы на некотором множестве⁶ с помощью соответствия "код \leftrightarrow траектория системы" переносится на пространство кодов с "тривиальной" динамикой⁷. Получаемые тем самым траектории исходной системы носят достаточно хаотический характер. Метод антиинтегрируемого предела был впервые применен в работе Обри и Абрамовича [АА] для построения хаотических траекторий стандартного отображения Чирикова [Ч], когда присутствующий в нем параметр, обычно считаемый малым, достаточно велик. Затем этот метод был обобщен на большой класс дискретных [Т1], [ММ] и непрерывных [ВМ] лагранжевых систем. В работе [ТЗ] метод антиинтегрируемого предела был применен для построения хаотических траекторий для многомерного сепаратрисного отображения. В полученном сепаратрисном отображении задачи Мезера мы применяем те же идеи.

3. СЕПАРАТРИСНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ФОРМУЛЫ

В этом пункте мы представим формулы для сепаратрисного отображения — основного инструмента для построения траекторий с линейным по времени ростом энергии.

Заметим, что поверхности уровня гамильтониана \mathcal{H}_0 инвариантны относительно фазового потока Φ_0^t невозмущенной системы. Обозначим их

$$(3.1) \quad \mathcal{M}_\mu = \{ \mathcal{Z} \in \mathcal{M} : \mathcal{H}_0(\mathcal{Z}) = e^{2\mu} \},$$

Будем считать, что гиперболическая траектория \mathcal{T} , а значит и ее гомоклиника γ , лежит на единичном уровне \mathcal{M}_0 .

Динамика невозмущенной системы "одинакова" на каждом уровне гамильтониана \mathcal{H}_0 . Точнее, имеет место

Предложение 3.1.

$$\Phi_0^t \circ \mathcal{G}^\mu = \mathcal{G}^\mu \circ \Phi_0^{e^\mu \cdot t}$$

Доказательство. Действительно, каждый уровень гамильтониана инвариантен относительно фазового потока и

$$\mathcal{G}^{\mu*}(\Omega - d\mathcal{H}_0 \wedge dt) = e^\mu \Omega - e^{2\mu} d\mathcal{H}_0 \wedge dt = e^\mu(\Omega - d\mathcal{H}_0 \wedge de^\mu t). \quad \square$$

Тем самым, из условия **У1** получим семейство гиперболических решений

$$\mathcal{T}_\mu(t) = \mathcal{G}^\mu \mathcal{T}(e^\mu t),$$

и гомоклинических к ним решений

$$\gamma_\mu(t) = \mathcal{G}^\mu \gamma(e^\mu t).$$

Мы будем исследовать динамику в окрестности этого семейства гомоклинических решений для достаточно больших $\mu > 0$.

⁶Часто, транзитивное гиперболическое множество.

⁷Например, сдвиг Бернулли на пространстве бесконечных последовательностей из 0 и 1.

В расширенном фазовом пространстве $\mathcal{M} \times \mathbb{R}_t$ выберем гиперповерхность⁸ \mathcal{Q} , трансверсальную гамильтонову векторному полю $v_{\mathcal{H}} + \partial_t$ и содержащую множество

$$(3.2) \quad \{(\gamma_\mu(0), t) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}_t : \mu^{-1} - \text{мало}\}$$

Сепаратрисное отображение \mathcal{SM} представляет собой отображение Пуанкаре этой четырехмерной поверхности \mathcal{Q} . Точнее, выберем произвольную точку Z на этой поверхности.

Пусть

$$t_r(Z) = \min\{t > 0 : \Phi^t Z \in \mathcal{Q}\} \quad \text{и} \quad \mathcal{Q}_r = \{Z \in \mathcal{Q} : t_r < +\infty\},$$

то есть множество \mathcal{Q}_r состоит из точек на поверхности \mathcal{Q} , которые под действием фазового потока возвращаются на эту поверхность. Тогда определение сепаратрисного отображения выглядит следующим образом:

$$\mathcal{SM} : \mathcal{Q}_r \rightarrow \mathcal{Q}, \quad \mathcal{SM}(Z) = \Phi^{t_r} Z.$$

На самом деле, ниже мы используем вместо \mathcal{Q}_r меньшую область \mathcal{Q}_* , которая лежит в окрестности множества (3.2) и ограничение \mathcal{SM} на нее является гладким отображением.

Пусть ν частота и λ мультипликатор гиперболического решения $\mathcal{T}(t)$. Пусть для фиксированных параметризаций на решениях $\mathcal{T}(t)$ и $\gamma(t)$:

$$\gamma(t) \rightarrow \mathcal{T}(t + t^\pm) \quad \text{при} \quad t \rightarrow \pm\infty.$$

Числа t^\pm определены по модулю периода $l = \frac{1}{\nu}$ решения $\mathcal{T}(t)$. Положим

$$x_0 = \nu(t^+ - t^-).$$

Число x_0 определено по модулю 1 и не зависит от выбранных параметризаций. Без ограничения общности считаем $\lambda > 0$ (замечание 6.4), $x_0 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Также обозначим

$$(3.3) \quad I'(t) = \frac{d}{dt} I(t).$$

Определение 3.2. Пусть D - область в $\mathbb{R}^n(x_1, \dots, x_n)$. Пусть $R, r_1, r_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции на ней. Будем говорить, что

$$R = \mathbf{O}_1(r_1, r_2) \quad \text{на } D \text{ в координатах } (x_1, \dots, x_n),$$

если R представляется в виде :

$$R = a_1 r_1 + a_2 r_2, \quad |a_j| < C, \quad \left| \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right| < L, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n,$$

т.е. гладкие функции $a_j : D \rightarrow \mathbb{R}$, имеют конечные C^1 -нормы на D . Аналогичным образом определим символ $\mathbf{O}_2(r_1, r_2)$:

$$R = \mathbf{O}_2(r_1, r_2) \Leftrightarrow R = a_{11} r_1^2 + 2a_{12} r_1 r_2 + a_{22} r_2^2, \quad |a_{ij}| < C, \quad \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \right| < L.$$

Основным результатом второй части этой работы является следующая

⁸Мы ее определим ниже, при выводе формул для сепаратрисного отображения.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия **У1** и **У2**, тогда существуют координаты (x, ρ, t, h) на поверхности \mathcal{Q}

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x, \rho, t, h) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^3 : \rho, h^{-1} - \text{малы} \right\}$$

такие, что

- (1) t - совпадает с исходным временем;
- (2) $\mathcal{H} = h + \mathbf{O}(1)$ на \mathcal{Q} ;
- (3) на области $\left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{h}} < \rho; x, \rho - \text{малы} \right\}^9 \subset \mathcal{Q}$, существует гладкая функция

$$(3.4) \quad r(x, \rho, t, h) = ax + b\rho + \mathbf{O}_2(x, \rho), \quad a \neq 0, \quad b - \text{константы},$$

такая, что

$$\mathcal{Q}_* = \left\{ (x, \rho, t, h) \in \mathcal{Q} : \frac{1}{\sqrt[4]{h}} < \rho, \frac{1}{\sqrt[4]{h}} < r; x, \rho - \text{малы} \right\},$$

и сепаратрисное отображение имеет вид

$$\mathcal{SM} : \mathcal{Q}_* \rightarrow \mathcal{Q}, \quad \mathcal{SM}(x, \rho, q, p) = (x^+, \rho^+, t^+, h^+),$$

$$(3.5) \quad \begin{cases} x^+ = x + x_0 - \frac{\nu}{\lambda} \log r & + \mathbf{O}_1, \\ \rho^+ = r & + r\mathbf{O}_1, \\ t^+ = t - \frac{1}{\lambda\sqrt{h}} \log r & + \frac{1}{\sqrt{h}}\mathbf{O}_1, \\ h^+ = h + \frac{1}{\sqrt{h}}I'(t) & + \frac{1}{\sqrt{h}}\mathbf{O}_1, \end{cases}$$

где $\mathbf{O}_1 = \mathbf{O}_1(r \log r) + \mathbf{O}_1(x, \rho)$ на \mathcal{Q}_* .

Замечание 3.4. Поскольку $a \neq 0$, то $\mathcal{Q}_* \neq \emptyset$.

Замечание 3.5. Из (3.5) следует, что $t^+ - t < 1$, поэтому для построения траектории с неограниченным, линейным по времени, ростом энергии достаточно построить соответствующую траекторию сепаратрисного отображения.

Замечание 3.6. Для сравнения приведем формулы сепаратрисного отображения для невозмущенной системы $(\mathcal{M}, \mathcal{H}_0, \Omega)$:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{SM}_0(x, \rho, q, p) &= (x^+, \rho^+, t^+, h^+), \\ \begin{cases} x^+ = x + x_0 - \frac{\nu}{\lambda} \log r & + \mathbf{O}_1, \\ \rho^+ = r & + r\mathbf{O}_1, \\ t^+ = t - \frac{1}{\lambda\sqrt{h}} \log r & + \frac{1}{\sqrt{h}}\mathbf{O}_1, \\ h^+ = h, \end{cases} \\ r &= ax + b\rho + \mathbf{O}_2(x, \rho), \end{aligned}$$

где символ-функции $\mathbf{O}_{1,2}$ не зависят от t и h .

⁹Переменная x — угловая, и выражение: " x — мало" следует понимать как близость к точке $x = 0$ на окружности.

Заметим, что координаты используемые в теореме 3.3 и в этом замечании различны. В частности, в здесь $h = \mathcal{H}_0$. Таким образом, первые два уравнения в системе (3.6) отделяются. Похожие формулы задают стандартное сепаратрисное отображение для двумерного симплектического отображения [Ч],[Т1].

В следующих двух пунктах мы докажем теорему 2.2, считая, что теорема 3.3 уже доказана.

4. СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

В данном пункте мы опишем как применяется метод антиинтегрируемого предела для сепаратрисного отображения 3.5.

Обозначим через $[x]$ — округление вещественного числа x до целого, $\{x\} = x - [x]$ — "расстояние со знаком" до ближайшего целого числа. Например, $[2, 9] = 3$, $\{2, 9\} = -0, 1$.

Сепаратрисное отображение имеет естественное поднятие на область

$$Q_* = \left\{ (x, \rho, t, h) \in \mathbb{R}^4 : \frac{1}{\sqrt[3]{h}} < \rho, \frac{1}{\sqrt[3]{h}} < r; \{x\}, \rho \text{ — малы} \right\},$$

$$r = a\{x\} + b\rho + \mathbf{O}_2(\{x\}, \rho).$$

При этом все функции из теоремы 3.3 поднимаются как периодические функции по x .

Нам будет необходима следующая регуляризация сепаратрисного отображения. Для $E > 0$ положим

$$(4.1) \quad \mathcal{SM}_E(x, \rho, t, h) = (x^+, \rho^+, t^+, h^+), \text{ где}$$

$$(4.2) \quad x^+ = x_{\mathcal{SM}}^+, \quad \rho^+ = \rho_{\mathcal{SM}}^+, \quad t^+ = t_{\mathcal{SM}}^+, \quad h^+ = \max\{E, h_{\mathcal{SM}}^+\},$$

$$(x_{\mathcal{SM}}^+, \rho_{\mathcal{SM}}^+, t_{\mathcal{SM}}^+, h_{\mathcal{SM}}^+) = \mathcal{SM}(x, \rho, t, h).$$

Тем самым мы насильно заставляем "энергию" h быть всегда не меньше параметра E . Это естественно, поскольку мы хотим строить траектории на больших уровнях энергии, и тем самым освобождаемся от траекторий, которые опускаются с больших уровней энергии. Далее полезно представлять E достаточно большим.

Мы будем строить траектории с полной орбитой:

$$(4.3) \quad \{(x_n, \rho_n, t_n, h_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}, \text{ где}$$

$$\mathcal{SM}_E(x_n, \rho_n, t_n, h_n) = (x_{n+1}, \rho_{n+1}, t_{n+1}, h_{n+1}).$$

Замечание 4.1. Пусть траектория $\{(x_n, \rho_n, t_n, h_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ отображения \mathcal{SM}_E такая, что $h_n > E$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, тогда она является траекторией отображения \mathcal{SM} .

Замечание 4.2. Симплектические отображения являются дискретными аналогами гамильтоновых систем. При определенных условиях "закручивания" их можно представлять, по аналогии с непрерывными системами, в лагранжевом виде. В нашем случае отображение симплектическое, но переменные не канонические. Несмотря на это, для нашего отображения по первым "сопряженным" переменным (x, ρ) тоже можно выписать уравнения, которые в первом приближении¹⁰ являются аналогом лагранжевого вида. По аналогии

¹⁰Т.е. если предположить, что в системе (3.5) все функции, обозначенные символом \mathbf{O}_1 , равны 0.

с уравнениями классической механики, когда одна часть уравнений имеет гамильтонову форму, а другая — лагранжеву, аналогичные уравнения названы в [ТЗ] уравнениями Рауса.

Предложение 4.3. Система (4.3) равносильна следующей системе

$$(4.4) \quad \begin{cases} a\{x_n\} = e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x_{n+1}-x_n-x_0+R_n^\rho)} - be^{-\frac{\lambda}{\nu}(x_n-x_{n-1}-x_0+R_{n-1}^\rho)} + R_n^x, \\ \rho_{n+1} = e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x_{n+1}-x_n-x_0+R_n^\rho)}, \\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{\nu\sqrt{h_n}} (x_{n+1} - x_n - x_0 + R_n^t), \\ h_{n+1} = \max \left\{ E, h_n + \frac{1}{\sqrt{h_n}} (I'(t_n) + R_n^h) \right\}, \end{cases}$$

при этом

$$(4.5) \quad r_n = r(x_n, \rho_n, t_n, h_n) = e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x_{n+1}-x_n-x_0+R_n^r)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_n^{x,\rho,r,t,h} &= R^{x,\rho,r,t,h}(x_n, \rho_n, t_n, h_n), \\ R^{\rho,r,t,h}(x, \rho, t, h) &= \mathbf{O} \left((x^+ - x) e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x^+ - x)} \right) + \mathbf{O}_1(x, \rho) \text{ на } Q_*, \\ R^x(x, \rho, t, h) &= \mathbf{O} \left((x^+ - x) e^{-\frac{2\lambda}{\nu}(x^+ - x)} \right) + \mathbf{O}_2(x, \rho) \text{ на } Q_*. \end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство системы (3.5) равносильно следующему

$$(4.6) \quad r(x, \rho, t, h) = e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x^+ - x - x_0 + R^r)}.$$

Действительно, имеем

$$x^+ = x + x_0 - \frac{\nu}{\lambda} (1 + \mathbf{O}(r)) \log r + \tilde{R}, \quad \tilde{R}(x, \rho, t, h) = \mathbf{O}_1(x, \rho).$$

Положим $\tilde{r} = e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x^+ - x - x_0 - \tilde{R})}$. Тогда последовательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{\lambda} \log \tilde{r} &= \frac{\nu}{\lambda} (1 + \mathbf{O}(r)) \log r, & \tilde{r} &= r + \mathbf{O}(r^2 \log r), \\ r &= \tilde{r} + \mathbf{O}(\tilde{r}^2 \log \tilde{r}) = \tilde{r} (1 + \mathbf{O}(\tilde{r} \log \tilde{r})) = e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x^+ - x - x_0 + \tilde{R} + \mathbf{O}(\tilde{r} \log \tilde{r}))}. \end{aligned}$$

С учетом (4.6), определение функции r (3.4), второе, третье и четвертое¹¹ уравнения системы (3.5) равносильны системе

$$(4.7) \quad \begin{cases} a\{x\} = \rho^+ - b\rho + R^x, \\ \rho^+ = e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x^+ - x - x_0 + R^\rho)}, \\ t^+ = t + \frac{1}{\nu\sqrt{h}} (x^+ - x - x_0 + R^t), \\ h^+ = \max \left\{ E, h + \frac{1}{\sqrt{h}} (I'(t) + R^h) \right\}. \end{cases}$$

Для доказательства осталось сравнить (4.4) и (4.7). \square

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \boldsymbol{\rho} = \{\rho_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \mathbf{t} = \{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \mathbf{h} = \{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \\ \boldsymbol{\zeta} &= (x, \rho, t, h), \quad \boldsymbol{\zeta} = \{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{t}, \mathbf{h}). \end{aligned}$$

¹¹С учетом регуляризации (4.2).

Замечание 4.4. Метод антиинтегрируемого предела заключается в построении сжимающего оператора на пространстве последовательностей $\{\zeta\}$. Неподвижной точкой этого оператора является траектория рассматриваемой системы. Обычно на пространстве последовательностей рассматриваются метрики, соответствующие равномерной сходимости. В нашем случае соответствующий оператор не является сжимающим в таких метриках¹². Поэтому мы будем использовать метрику, в которой "сепаратрисное отображение становится гиперболическим".

Для числовых последовательностей $\mathbf{a}' = \{a'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ и $\mathbf{a}'' = \{a''_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ положим

$$\text{dist}(\mathbf{a}', \mathbf{a}'') = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|a'_n - a''_n\|_{(n)},$$

где $\|a\|_{(n)} = 2^{-|n|}|a|$, $a \in \mathbb{R}$.

Обозначим

$$\text{dist}_3(\zeta', \zeta'') = \max\{\text{dist}(\mathbf{x}', \mathbf{x}''), \text{dist}(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}''), \text{dist}(\mathbf{t}', \mathbf{t}''), \text{dist}(\mathbf{h}', \mathbf{h}'')\}.$$

Таким образом, получаем полное метрическое пространство $\mathfrak{Z} = (\{\zeta\}, \text{dist}_3)$.

Пусть

$$\max_{t \in \mathbb{T}} |I'(t)| = m, \quad \max_{t \in \mathbb{T}} |I''(t)| = m'.$$

Пусть $C, L > 0$ константы для функций $R^{x, \rho, r, t, h}$ из определения 3.2.

К системе (4.4) мы применяем метод антиинтегрируемого предела.

Определение 4.5. Пусть $K', K'' \in \mathbb{N}$. Положим

$$\mathcal{C}_{K', K''} = \left\{ \bar{\mathbf{x}} = \{\bar{x}_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : \bar{x}_n \in \mathbb{Z}, K' < \bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n < K'' \right\},$$

$$\text{dist}_c(\bar{\mathbf{x}}', \bar{\mathbf{x}}'') = 2^{-N}, \quad N = \min\{|n| : \bar{x}'_n \neq \bar{x}''_n\}.$$

Метрическое пространство $(\mathcal{C}_{K', K''}, \text{dist}_c)$ назовем пространством кодов.

Предложение 4.6. Пусть ε достаточно мало и

$$(4.8) \quad \frac{1}{\sqrt[4]{E}} < e^{-\frac{\Delta}{\nu} K''}, \quad \left(\frac{1 + |b|}{|a|} + 1 \right) e^{-\frac{\Delta}{\nu} K'} < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Тогда, для каждого кода $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}_{K', K''}$ и $t_0, h_0 \in \mathbb{R}$, $h_0 \geq E$ существует единственная траектория $\zeta = \{(x_n, \rho_n, t_n, h_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ системы (4.4) такая, что

$$|x_n - \bar{x}_n| \leq \varepsilon, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{E}} \leq \rho_n \leq \varepsilon, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{E}} \leq r_n \leq \varepsilon, \quad h_n \geq E.$$

При этом, если ζ' (соответственно ζ'') траектория, соответствующая коду $\bar{\mathbf{x}}'$ (соответственно $\bar{\mathbf{x}}''$) $\in \mathcal{C}_{K', K''}$, то

$$(4.9) \quad \text{dist}(\mathbf{t}', \mathbf{t}'') \leq 8\varepsilon \text{dist}_c(\bar{\mathbf{x}}', \bar{\mathbf{x}}'').$$

Таким образом, при фиксированных $t_0, h_0 > E$, получаем отображение из пространства кодов в пространство траекторий :

$$(4.10) \quad \mathcal{SM} : \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}_{K', K''} \mapsto \zeta = \{(x_n, \rho_n, t_n, h_n)\}_{n \in \mathbb{Z}},$$

где $\mathcal{SM}_E(x_n, \rho_n, q_n, p_n) = (x_{n+1}, \rho_{n+1}, t_{n+1}, h_{n+1})$.

¹²Неформально это объясняется отсутствием гиперболичности по переменным (t, h) в системе (3.5).

Доказательство. Зафиксируем произвольный код $\bar{x} \in C_{K',K''}$ и выберем $t_0, h_0 \geq E$. В пространстве последовательностей \mathfrak{Z} рассмотрим множество

$$B_{\varepsilon,E} = \left\{ \zeta = \{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : |x_n - \bar{x}_n| \leq \varepsilon, \right. \\ \left. \frac{1}{\sqrt[4]{E}} \leq \rho_n \leq \varepsilon, \frac{1}{\sqrt[4]{E}} \leq r_n \leq \varepsilon, h_n \geq E; t_0, h_0 - \text{фиксированы} \right\}$$

Для достаточно малого ε : $B_{\varepsilon,E} \neq \emptyset$ и все точки (x_n, ρ_n, t_n, h_n) лежат в области Q_* — области определения \mathcal{SM}_E . Поэтому на этом множестве определен оператор $\mathbf{C} : B_{\varepsilon,E} \rightarrow \mathfrak{Z}$,

$$\mathbf{C} : \zeta = \{(x_n, \rho_n, t_n, h_n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \tilde{\zeta} = \{(\tilde{x}_n, \tilde{\rho}_n, \tilde{t}_n, \tilde{h}_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}, \\ [\tilde{x}_n] = \bar{x}_n, \quad \tilde{t}_0 = t_0, \quad \tilde{h}_0 = h_0, \\ a\{\tilde{x}_n\} = e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x_{n+1} - x_n - x_0 + R_n^p)} - b e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x_n - x_{n-1} - x_0 + R_{n-1}^p)} + R_n^x, \\ \tilde{\rho}_n = e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x_n - x_{n-1} - x_0 + R_n^p)}, \\ \tilde{t}_n = \begin{cases} t_{n-1} + \frac{1}{\nu\sqrt{h_{n-1}}}(x_n - x_{n-1} - x_0 + R_{n-1}^t) & \text{при } n > 0, \\ t_{n+1} - \frac{1}{\nu\sqrt{h_n}}(x_{n+1} - x_n - x_0 + R_n^t) & \text{при } n < 0, \end{cases} \\ \tilde{h}_n = \begin{cases} \max \left\{ E, h_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{h_{n-1}}}(I'(t_{n-1}) + R_{n-1}^h) \right\} & \text{при } n > 0, \\ \max \left\{ E, h_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{h_{n+1}}}(I'(t_{n+1}) + R_n^h) \right\} & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Из (4.4) нетрудно видеть, что неподвижные точки этого отображения есть траектории отображения \mathcal{SM}_E .

Лемма 4.7. а) $\mathbf{C}(B_{\varepsilon,E}) \subset B_{\varepsilon,E}$. б) \mathbf{C} — сжимающий :

$$\text{dist}_{\mathfrak{Z}}(\mathbf{C}\zeta', \mathbf{C}\zeta'') < \frac{3}{4} \text{dist}_{\mathfrak{Z}}(\zeta', \zeta'').$$

Пусть лемма доказана, тогда поскольку $B_{\varepsilon,E}$ — замкнутое подпространство полного пространства \mathfrak{Z} , то из принципа сжимающих отображений следует, что \mathbf{C} имеет единственную неподвижную точку $\zeta \in B_{\varepsilon,E}$ — траекторию сепаратрисного отображения.

Докажем оценку (4.9). Пусть ζ' и ζ'' — траектории, соответствующие кодам \bar{x}' и $\bar{x}'' \in C_{K',K''}$, соответственно. Пусть $\text{dist}_c(\bar{x}', \bar{x}'') = 2^{-N}$. Возьмем в качестве нулевого приближения к траектории $\zeta'' = \{\zeta_n''\}_{n \in \mathbb{Z}}$ следующую последовательность $\zeta^{(0)} = \{\zeta_n^{(0)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$x_n^{(0)} = \begin{cases} x'_n & \text{при } n < N, \\ \bar{x}''_n & \text{при } n \geq N, \end{cases} \quad \rho_n^0 = \rho'_n, \quad t_n^{(0)} = t'_n, \quad h_n^{(0)} = h'_n.$$

Тогда, из определения оператора \mathbf{C} , первое приближение $\zeta^{(1)} = \mathbf{C}(\zeta^{(0)})$, имеет вид:

$$\begin{aligned} x_n^{(1)} &= x_n^{(0)} \text{ при } |n| < N-1, \\ |x_n^{(1)} - x_n^{(0)}| &\leq \varepsilon \text{ при } |n| \geq N-1, \\ \rho_n^{(1)} &= \rho_n^{(0)} \text{ при } |n| < N-1, \\ |\rho_n^{(1)} - \rho_n^{(0)}| &\leq \varepsilon \text{ при } |n| \geq N-1, \\ t_n^{(1)} &= t_n^{(0)}, \text{ при } |n| < N, \\ |t_n^{(1)} - t_n^{(0)}| &\leq \frac{K''}{\nu\sqrt{E}} \text{ при } |n| \geq N, \\ h_n^{(1)} &= h_n^{(0)} \text{ при } |n| < N, \\ |h_n^{(1)} - h_n^{(0)}| &\leq \frac{1}{\nu\sqrt{E}} + \frac{K''C}{E} \text{ при } |n| \geq N. \end{aligned}$$

Поэтому, при необходимости уменьшая ε , получим:

$$\text{dist}(\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}) \leq 2^{-N} 2\varepsilon.$$

Следовательно, из свойства сжимающего отображения,

$$\text{dist}(\zeta^{(0)}, \zeta'') \leq \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} \text{dist}(\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}) \leq 8\varepsilon 2^{-N}.$$

Отсюда

$$\text{dist}(\mathbf{t}', \mathbf{t}'') \leq \text{dist}(\mathbf{t}', \mathbf{t}^{(0)}) + \text{dist}(\mathbf{t}^{(0)}, \mathbf{t}'') \leq 8\varepsilon 2^{-N} = 8\varepsilon \text{dist}_c(\bar{\mathbf{x}}', \bar{\mathbf{x}}''). \quad \square$$

Доказательство леммы 4.7

а) Пусть $\zeta \in B_\varepsilon$, $\tilde{\zeta} = \mathbf{C}(\zeta)$. Имеем:

$$\begin{aligned} |R_n^{\rho,r}| &< CK' e^{-\frac{\lambda}{\nu} K'} + 2C\varepsilon, \\ |R_n^x| &< CK' e^{-\frac{2\lambda}{\nu} K'} + 3C\varepsilon^2. \end{aligned}$$

При достаточно малом ε , имеем $K' < x_{n+1} - x_n - x_0 + R_n^{\rho,r} < K''$. Получаем:

$$\begin{aligned} |\{\tilde{x}_n\}| &= \frac{1}{|a|} |e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x_{n+1}-x_n-x_0+R_n^\rho)} - b e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x_n-x_{n-1}-x_0+R_{n-1}^\rho)} + R_n^x| < \\ &< \frac{1+|b|}{|a|} e^{-\frac{\lambda}{\nu} K'} + CK' e^{-\frac{2\lambda}{\nu} K'} + 3C\varepsilon^2 < \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{E}} < e^{-\frac{\lambda}{\nu} K''} < \tilde{\rho}_n = e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x_n-x_{n-1}-x_0+R_{n-1}^\rho)} < e^{-\frac{\lambda}{\nu} K'} < \varepsilon.$$

Аналогично $\frac{1}{\sqrt[4]{E}} < \tilde{r}_n = e^{-\frac{\lambda}{\nu}(\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1} - x_0 + R^\rho(\tilde{\zeta}_{n-1}))} < \varepsilon$. Итак, $\tilde{\zeta} \in B_{\varepsilon,E}$.

б) Пусть $\zeta', \zeta'' \in B_{\varepsilon,E}$. Имеем:

$$\begin{aligned} |R^{\rho,t,h}(\zeta'') - R^{\rho,t,h}(\zeta')| &< \\ &< (2C e^{-\frac{\lambda}{\nu} K'} + 2C \frac{\lambda}{\nu} K' e^{-\frac{\lambda}{\nu} K'} + K' e^{-\frac{\lambda}{\nu} K'} L) (\|\zeta''_{n+1} - \zeta'_{n+1}\| + \|\zeta'' - \zeta'\|) + \\ &+ (2C + 2L\varepsilon) \|\zeta'' - \zeta'\| < D (\|\zeta''_{n+1} - \zeta'_{n+1}\| + \|\zeta'' - \zeta'\|), \end{aligned}$$

где $\|\zeta\| = \max\{|x|, |\rho|, |t|, |h|\}$.

$$\begin{aligned} & |R^x(\zeta''_n) - R^x(\zeta'_n)| < \\ & < (2C e^{-\frac{2\lambda}{\nu} K'} + 4C \frac{\lambda}{\nu} K' e^{-\frac{2\lambda}{\nu} K'} + K' e^{-\frac{2\lambda}{\nu} K'} L) (\|\zeta''_{n+1} - \zeta'_{n+1}\| + \|\zeta''_n - \zeta'_n\|) + \\ & \quad + (6C\varepsilon + 3L\varepsilon^2) \|\zeta''_n - \zeta'_n\| < \varepsilon D (\|\zeta''_{n+1} - \zeta'_{n+1}\| + \|\zeta''_n - \zeta'_n\|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x''_{n+1} - x'_n - x_0 + R^\rho(\zeta''_n))} - e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x'_{n+1} - x'_n - x_0 + R^\rho(\zeta'_n))}| < \\ & < e^{-\frac{\lambda}{\nu} K'} \frac{4\lambda}{\nu} C (\|\zeta''_{n+1} - \zeta'_{n+1}\| + \|\zeta''_n - \zeta'_n\|) < \varepsilon D (\|\zeta''_{n+1} - \zeta'_{n+1}\| + \|\zeta''_n - \zeta'_n\|), \end{aligned}$$

где при достаточно малом ε можно положить:

$$(4.11) \quad D = \max\{6C + L, \frac{4\lambda}{\nu} C\}.$$

Пусть $\tilde{\zeta}' = C\zeta'$ и $\tilde{\zeta}'' = C\zeta''$. Получаем:

$$\begin{aligned} |\tilde{x}''_n - \tilde{x}'_n| & < \varepsilon D \left(\frac{1+|b|}{|a|} + 1 \right) (\|\zeta''_{n+1} - \zeta'_{n+1}\| + \|\zeta''_n - \zeta'_n\|), \\ |\tilde{\rho}''_n - \tilde{\rho}'_n| & < 2\varepsilon D (\|\zeta''_{n+1} - \zeta'_{n+1}\| + \|\zeta''_n - \zeta'_n\|). \end{aligned}$$

Следовательно при достаточно малом ε :

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}''_n - \tilde{x}'_n\|^{(n)} & < \frac{3}{4} \max\{\|\zeta''_n - \zeta'_n\|^{(n)}, \|\zeta''_{n+1} - \zeta'_{n+1}\|^{(n+1)}\}, \\ \|\tilde{\rho}''_n - \tilde{\rho}'_n\|^{(n)} & < \frac{3}{4} \max\{\|\zeta''_n - \zeta'_n\|^{(n)}, \|\zeta''_{n+1} - \zeta'_{n+1}\|^{(n+1)}\}. \end{aligned}$$

Далее для положительных индексов n имеем:

$$\begin{aligned} \|\tilde{t}''_{n+1} - \tilde{t}'_{n+1}\|^{(n+1)} & = \frac{1}{2} \|t''_n - t'_n\|^{(n)} + \\ & + \frac{1}{\nu\sqrt{E}} \left(\|x''_{n+1} - x'_{n+1}\|^{(n+1)} + \frac{1}{2} \|x''_n - x'_n\|^{(n)} + D (\|\zeta''_{n+1} - \zeta'_{n+1}\|^{(n+1)} + \frac{1}{2} \|\zeta''_n - \zeta'_n\|^{(n)}) \right) + \\ & + \frac{K''}{2\nu E \sqrt{E}} \|h''_n - h'_n\|^{(n)} < \frac{3}{4} \max\{\|\zeta''_n - \zeta'_n\|^{(n)}, \|\zeta''_{n+1} - \zeta'_{n+1}\|^{(n+1)}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{h}''_{n+1} - \tilde{h}'_{n+1}\|^{(n+1)} & = \frac{1}{2} \|h''_n - h'_n\|^{(n)} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{E}} \left(m' \|t''_n - t'_n\|^{(n)} + D (\|\zeta''_{n+1} - \zeta'_{n+1}\|^{(n+1)} + \frac{1}{2} \|\zeta''_n - \zeta'_n\|^{(n)}) \right) + \\ & + \frac{1}{2E\sqrt{E}} \|h''_n - h'_n\|^{(n)} (m+1) < \frac{3}{4} \max\{\|\zeta''_n - \zeta'_n\|^{(n)}, \|\zeta''_{n+1} - \zeta'_{n+1}\|^{(n+1)}\}. \end{aligned}$$

Для отрицательных n все аналогично. Поэтому,

$$\text{dist}(\tilde{\zeta}', \tilde{\zeta}'') < \frac{3}{4} \text{dist}(\zeta', \zeta'').$$

Лемма доказана. \square

5. БЫСТРЫЕ ТРАЕКТОРИИ МЕЗЕРА

В этом параграфе с помощью предложения 4.6 мы докажем теорему 2.2.

Сначала докажем вспомогательную лемму.

Пусть, выбраны числа $\Theta_j \in \mathbb{R}$:

$$\dots < \Theta_{-2} < \Theta_{-1} < \Theta_0 < \Theta_1 < \Theta_2 < \dots$$

Тогда получаем следующее разбиение интервалами вещественной оси :

$$(5.1) \quad \dots \Xi_{-1} \sqcup \Delta_{-1} \sqcup \Xi_0 \sqcup \Delta_0 \sqcup \Xi_1 \sqcup \Delta_1 \sqcup \Xi_2 \sqcup \Delta_2 \dots = \mathbb{R},$$

$$(5.2) \quad \Delta_j = [\Theta_{2j}, \Theta_{2j+1}), \quad \Xi_j = [\Theta_{2j-1}, \Theta_{2j}).$$

Пусть имеется последовательность

$$\{ \dots, k_{-1}, k_0, k_1, \dots \quad : \quad k_n \in \mathbb{N}, \quad K' < k_n < K'' \},$$

и задано соответствие $\Delta_j \mapsto k_j$.

И наконец, пусть имеется отображение:

$$\mathcal{CM}_t : \bar{\mathbf{x}} = \{\bar{x}_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{C}_{K', K''} \mapsto \mathbf{t} = \{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

такое, что, если $\mathbf{t}' = \mathcal{CM}_t(\bar{\mathbf{x}}')$, $\mathbf{t}'' = \mathcal{CM}_t(\bar{\mathbf{x}}'')$, то

$$\text{dist}(\mathbf{t}', \mathbf{t}'') < \delta \text{dist}_c(\bar{\mathbf{x}}', \bar{\mathbf{x}}'').$$

Лемма 5.1. Пусть для любого $j \in \mathbb{Z}$: $|\Xi_j| \geq \delta$. Тогда, существует такой код $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}_{K', K''}$ и соответствующая последовательность $\mathbf{t} = \mathcal{CM}_t(\bar{\mathbf{x}})$, что

$$(5.3) \quad t_n \in \Delta_j \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n = k_j, & \text{при } n \geq 0, \\ \bar{x}_n - \bar{x}_{n-1} = k_j, & \text{при } n \leq 0. \end{cases}$$

Доказательство. Проводиться с помощью индуктивной процедуры, аналогичной [ГЗ]. Пусть

$$\bar{\Theta}_j = \frac{\Theta_{2j} + \Theta_{2j-1}}{2}, \quad \bar{\Delta}_j = [\bar{\Theta}_{j+1}, \bar{\Theta}_j).$$

На N -ом шаге мы определяем точки \bar{t}_N и \bar{t}_{-N} такие, что у полученной в конце всей процедуры последовательности $\mathbf{t} = \{t_n\}$, члены t_N и t_{-N} будут лежать в $\frac{1}{2}\delta$ -окрестности этих точек. Отсюда, нетрудно видеть, что свойство (5.3), будет следовать из аналогичного свойства для последовательности $\{\bar{t}_n\}$ и интервалов $\bar{\Delta}_j$:

$$(5.4) \quad \bar{t}_n \in \bar{\Delta}_j \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n = k_j, & \text{при } n \geq 0, \\ \bar{x}_n - \bar{x}_{n-1} = k_j, & \text{при } n \leq 0. \end{cases}$$

Это свойство, есть индуктивное определение кода. Действительно, получаем следующую процедуру.

На нулевом шаге мы берем произвольный код $\bar{\mathbf{x}}^{(0)} \in \mathcal{C}_{K', K''}$ и полагаем $\bar{t}_0 = t_0$.

Опишем N -ый шаг. Из $N-1$ шага мы имеем код $\bar{\mathbf{x}}^{(N-1)}$ и соответствующую последовательность $\mathbf{t}^{(N-1)}$. Определяем

$$\bar{x}_n^{(N)} = \begin{cases} \bar{x}_n^{(N-1)} & \text{при } |n| < N, \\ \bar{x}_{N-1}^{(N-1)} + k_j & \text{при } n = N, \text{ если } t_{N-1}^{(N-1)} \in \bar{\Delta}_j, \\ \bar{x}_{-(N-1)}^{(N-1)} - k_j & \text{при } n = -N, \text{ если } t_{-(N-1)}^{(N-1)} \in \bar{\Delta}_j, \\ \text{произвольно} & \text{при } |n| > N, \end{cases}$$

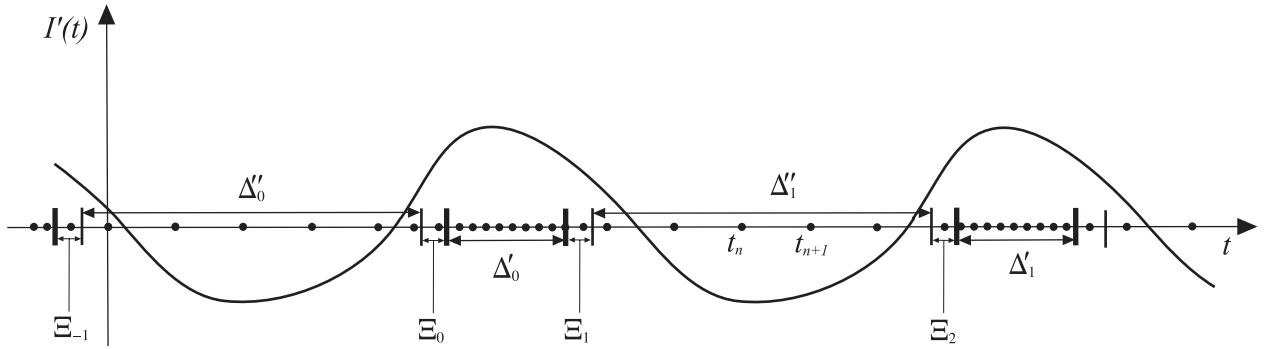


Рис. 1. Последовательность t_n , для траектории с линейным ростом энергии.

$$\bar{t}_N = \mathbf{t}_N^{(N)}, \quad \bar{t}_{-N} = \mathbf{t}_{-N}^{(N)}, \quad \text{где } \mathbf{t}^{(N)} = \mathcal{C}\mathcal{M}_t(\mathbf{x}^{(N)}).$$

Таким образом, процедура описана.

Далее пусть $\bar{\mathbf{x}}$ - предел соответствующей процедуры, и $\mathbf{t} = \mathcal{C}\mathcal{M}_t(\bar{\mathbf{x}})$. Имеем

$$\text{dist}(\mathbf{t}^{(N)}, \mathbf{t}) < \delta \text{dist}_c(\bar{\mathbf{x}}^{(N)}, \bar{\mathbf{x}}) \leq \delta 2^{-N-1}.$$

Следовательно

$$|t_N - \bar{t}_N| = |t_N - t_N^{(N)}| < \delta 2^N 2^{-N-1} = \frac{1}{2}\delta.$$

Что и требовалось показать. \square

Чтобы применить эту лемму для построения траекторий сепаратрисного отображения, нужно только рассмотреть соответствующее кодирующее отображение, доставляемое предложением 4.6, и положить $\delta = 8\varepsilon$.

Доказательство теоремы 2.2 Мы сейчас построим траекторию $\mathcal{S}\mathcal{M}_E$ такую, что для констант $A > 0$ и $B > E$,

$$h_n > A|t_n| + B, \quad \text{для любого } n \in \mathbb{Z},$$

и тем самым получим траекторию $\mathcal{S}\mathcal{M}$ с линейным по времени ростом энергии.

Из условия **V2**, поскольку

$$\int_{\mathbb{T}(t)} I'(t) dt = 0,$$

следует, что существует интервал $\Delta \subset \mathbb{T}(t)$, $|\Delta| > 0$, такой, что

$$\min_{t \in \Delta} I'(t) > m_+ > 0.$$

Пусть

$$\min_{t \in \mathbb{T}} I'(t) = -m_-.$$

Пусть $\Delta'_j, j \in \mathbb{Z}$ — прообразы Δ при естественном накрытии $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$. Рассмотрим разбиение $\mathbb{R}(t)$

$$\mathbb{R} = \dots \Delta'_{-1} \sqcup \Xi_{-2} \sqcup \Delta''_{-1} \sqcup \Xi_{-1} \sqcup \Delta'_0 \sqcup \Xi_0 \sqcup \Delta''_0 \sqcup \Xi_1 \sqcup \Delta'_1 \sqcup \Xi_2 \sqcup \Delta''_1 \dots$$

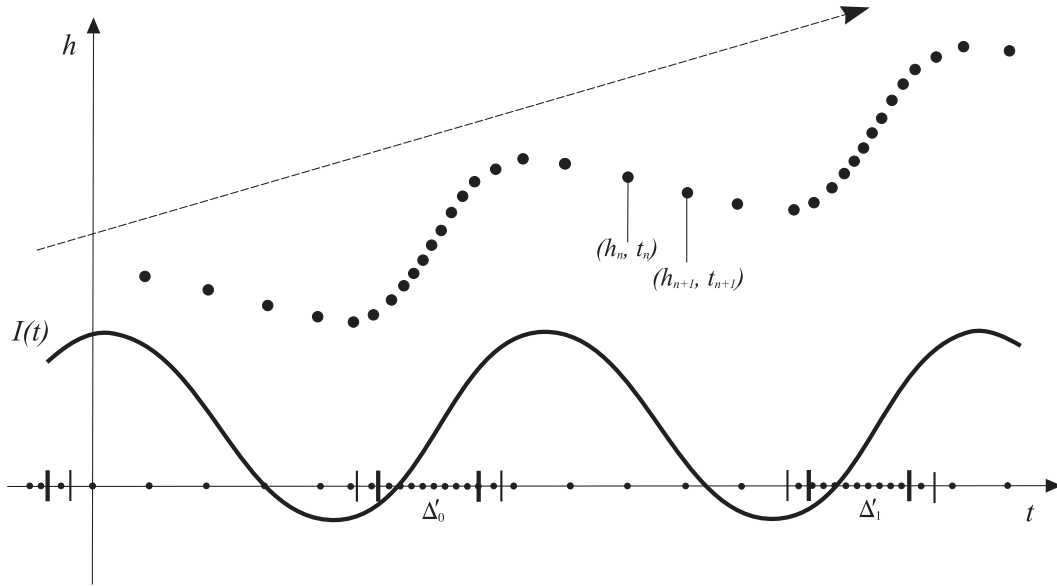


Рис. 2. Быстрая траектория Мезера и интеграл Пуанкаре-Мельникова

такое, что $|\Xi_j| = \delta$ и $I'(t) > 0$ при $t \in \Xi_{2j} \cup \Delta_j \cup \Xi_{2j+1}$. Это возможно, например, при

$$\delta < \frac{m_+}{m'},$$

где, напомним, $m' = \max I''(t)$. Теперь фиксируем ε, E, K', K'' такие, что выполнены условия предложения 4.6, предыдущее условие, а также

$$K'' > 300 \frac{1-|\Delta|}{|\Delta|} \frac{m_-}{m_+} K'.$$

Очевидно, при достаточно малом ε , этого всегда можно добиться. Теперь, рассмотрим, отображение \mathcal{SM}_E . Фиксируем $t_0 = 0, h_0 = 2E$. Пользуясь предложением 4.6 и предыдущей леммой, построим траекторию, такую что

$$(5.5) \quad t_n \in \Delta'_j \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n = K' + 1, & \text{при } n \geq 0, \\ \bar{x}_n - \bar{x}_{n-1} = K' + 1, & \text{при } n \leq 0, \end{cases}$$

$$(5.6) \quad t_n \in \Delta''_j \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n = K'' - 1, & \text{при } n \geq 0, \\ \bar{x}_n - \bar{x}_{n-1} = K'' - 1, & \text{при } n \leq 0. \end{cases}$$

Оценим, прирост "энергии" Δh_j "за время 1": с момента последнего попадания в Ξ_{j-1} , до первого попадания в Ξ_{j+1} . Обозначим h_+, h_- — максимум и минимум

h_n , за этот период. Тогда имеем:

$$1 \leq \frac{h_+}{h_-} < 2.$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} \delta t' &= \max_{t_n \in \Delta'_j} t_{n+1} - t_n, & \delta t'' &= \min_{t_n \in \Delta''_j} t_{n+1} - t_n, \\ \delta h' &= \min_{t_n \in \Delta'_j} h_{n+1} - h_n, & \delta h'' &= \min_{t_n \in \Delta''_j} h_{n+1} - h_n, \\ N' &= \min_j \#\{t_n : t_n \in \Delta'_j\}, & N'' &= \max_j \#\{t_n : t_n \in \Delta''_j\}. \end{aligned}$$

Имеем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \delta t' &< \frac{2K'}{\nu\sqrt{h_-}}, & \delta t'' &> \frac{K''}{2\nu\sqrt{h_-}}, \\ \delta h' &> \frac{m_+}{2\sqrt{h_+}}, & \delta h'' &> -\frac{3m_-}{2\sqrt{h_-}}, \\ N' &> \frac{|\Delta|\nu\sqrt{h_-}}{4K'}, & N'' &< \frac{4(1-|\Delta|)\nu\sqrt{h_+}}{K''}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (5.7) \quad \Delta h_j &> \frac{|\Delta|\nu\sqrt{h_-}}{4K'} \frac{m_+}{2\sqrt{h_+}} - \frac{4(1-|\Delta|)\nu\sqrt{h_+}}{K'} \frac{3m_-}{2\sqrt{h_-}} > \\ &> \frac{|\Delta|\nu m_+}{16K'} - \frac{9(1-|\Delta|)\nu m_-}{K''} > \frac{|\Delta|\nu m_+}{32K'} = A. \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы 2.2, осталось воспользоваться замечанием 3.5. \square

Часть 2. Сепаратрисное отображение

Сепаратрисное отображение было введено для изучения гамильтоновых систем с полутора степенями свободы и двумерных симплектических отображений вблизи асимптотических поверхностей. В работе Заславского и Филоненко [ЗФ] сепаратрисное отображение определялось для систем, близких к интегрируемым, и определяло динамику глобально в окрестности сепаратрис. Независимо Шильников [Ш] ввел сепаратрисное отображение, которое определяло динамику в окрестности гомоклинического решения и не требовало близости к интегрируемости. Отметим, что несмотря на принципиальную разницу этих определений, вычисления формул для отображений аналогично. Многомерное обобщение сепаратрисного отображения Заславского было получено в работе [Г2]. Здесь мы следуем по плану этой статьи, но выписываем сепаратрисное отображение в форме Шильникова, которое определено в окрестности семейства гомоклинических траекторий.

А. Невозмущенная система

Мы начинаем с исследования невозмущенной системы $(\mathcal{M}, \Omega, \mathcal{H}_0)$.

6. НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

В этом пункте мы рассмотрим окрестность гиперболической траектории \mathcal{T} . Кратко напомним, что под этим понимается .

Итак, рассматриваем автономную гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Трехмерные поверхности уровня гамильтониана \mathcal{H}_0 инвариантны относительно фазового потока. Пусть $\mathcal{T}(t)$ — периодическое решение, лежащее на поверхности $\mathcal{M}_0 = \{\mathcal{H}_0 = 1\}$. Выберем на нем произвольную точку $\mathcal{T}(t_0)$ и некоторую двумерную поверхность $S \subset \mathcal{M}_0$, трансверсальную вектору $\dot{\mathcal{T}}(t_0)$. Она будет трансверсальна векторному полю $v_{\mathcal{H}_0}$ в некоторой окрестности точки $\mathcal{T}(t_0)$. Динамика в окрестности этой периодической траектории определяется отображением Пуанкаре $P : S \rightarrow S$ (рис. 3). Точка $\mathcal{T}(t_0)$ — неподвижная точка этого отображения. Линеаризация отображения Пуанкаре в неподвижной точке называется оператором монодромии $P_*|_{\mathcal{T}(t_0)} : T_{\mathcal{T}(t_0)}S \rightarrow T_{\mathcal{T}(t_0)}S$. Пусть M — матрица этого оператора в каких-нибудь координатах на S , она называется матрицей монодромии. Собственные числа λ_1, λ_2 матрицы M называются мультипликаторами периодического решения. Поскольку отображение Пуанкаре сохраняет симплектическую структуру¹³, то $\det M = \lambda_1 \lambda_2 = 1$. Отсюда, мультипликаторы либо лежат на единичной окружности в комплексной плоскости ($|\operatorname{tr} M| \leq 2$), либо они вещественны и различны ($|\operatorname{tr} M| > 2$). В первом случае периодическое решение устойчиво в линейном приближении, во втором — неустойчиво, как в линейном приближении, так и по Ляпунову.

Определение 6.1. Если след матрицы монодромии $|\operatorname{tr} M| > 2$, то периодическое решение $\mathcal{T}(t)$ называется гиперболическим.

Для исследования динамики в окрестности гиперболической траектории, мы пользуемся координатами Элиассона, в которых гамильтониан имеет следующую нормальную форму:

¹³См. например [Г1].

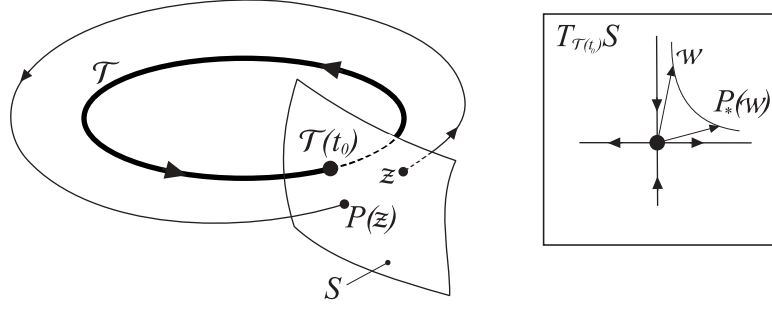


Рис. 3. Отображение Пуанкаре и оператор монодромии.

Теорема 6.2 (Элиассон [Е]). *Существует окрестность \mathcal{U}_0 гиперболического периодического решения $T(t)$ и аналитические координаты $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{q}, \hat{p})$, то есть отображение*

$$\widehat{\mathcal{EM}} : \widehat{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}_0,$$

где $\widehat{U}_0 = \{(\hat{x}, \hat{y}, \hat{q}, \hat{p}) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^3 : \hat{y} - y_0, \hat{q}, \hat{p} - \text{малы}\}$ такие, что

(1) координаты канонические: $\widehat{\omega} = d\hat{y} \wedge d\hat{x} + d\hat{p} \wedge d\hat{q}$,

(2) гамильтониан имеет вид: $\widehat{H}_0(\hat{z}) = \nu\hat{y} + \lambda\hat{q}\hat{p} + O_2(\hat{y} - y_0, \hat{q}\hat{p})$,

(3) периодическое решение: $\widehat{T}(t) = (\nu t, y_0, 0, 0)$.

Здесь

$$\widehat{\omega} = \widehat{\mathcal{EM}}^* \Omega, \quad \widehat{H}_0 = \mathcal{H}_0 \circ \widehat{\mathcal{EM}}, \quad \widehat{\mathcal{EM}} \circ \widehat{T} = T, \quad \nu y_0 = 1.$$

В нормальных координатах имеем следующие уравнения Гамильтона:

$$(6.1) \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \nu + O_1(\hat{q}\hat{p}, \hat{y} - y_0), \\ \dot{\hat{y}} = O_2(\hat{q}\hat{p}, \hat{y} - y_0), \\ \dot{\hat{q}} = \lambda\hat{q}(1 + \hat{R}) + O_2(\hat{q}\hat{p}, \hat{y} - y_0), \\ \dot{\hat{p}} = -\lambda\hat{p}(1 + \hat{R}) + O_2(\hat{q}\hat{p}, \hat{y} - y_0), \end{cases}$$

где $\hat{R} = O_1(\hat{q}\hat{p}, \hat{y} - y_0)$.

Поверхности $\widehat{\Gamma}^u = \{\hat{y} = y_0, \hat{q} = 0\}$ и $\widehat{\Gamma}^s = \{\hat{y} = y_0, \hat{p} = 0\}$ инвариантны для этой системы. Действительно, из уравнений (6.1) легко следует, что поверхности $\widehat{\Gamma}^u$ и $\widehat{\Gamma}^s$ расслоены на решения:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \widehat{\gamma}^s(\hat{x}_s, t) &= (\hat{x} = \hat{x}_s + \nu t, \hat{y} = y_0, \hat{q} = 0, \hat{p} = e^{-\lambda t}), \\ \widehat{\gamma}^u(\hat{x}_u, t) &= (\hat{x} = \hat{x}_u + \nu t, \hat{y} = y_0, \hat{q} = e^{\lambda t}, \hat{p} = 0), \end{aligned}$$

$$\widehat{\Gamma}^s = \bigcup_{x_s \in \mathbb{T}} \widehat{\gamma}^s(x_s), \quad \widehat{\Gamma}^u = \bigcup_{x_u \in \mathbb{T}} \widehat{\gamma}^u(x_u).$$

Таким образом, любое решение, лежащее на $\widehat{\Gamma}^u$ (соответственно на $\widehat{\Gamma}^s$), стремится к периодической траектории \widehat{T} при $t \rightarrow -\infty$ (соответственно при $t \rightarrow$

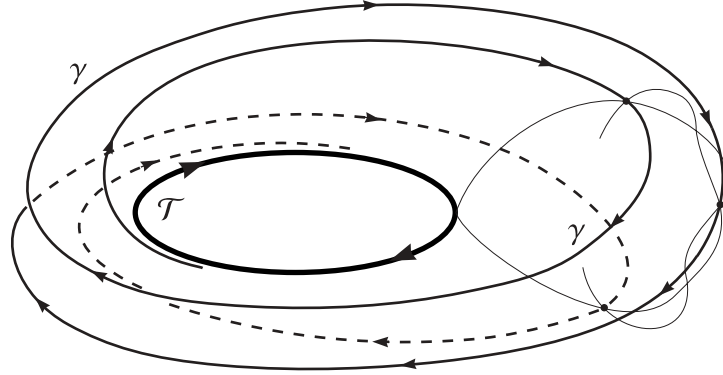


Рис. 4. Гиперболическая орбита и гомоклиническое решение.

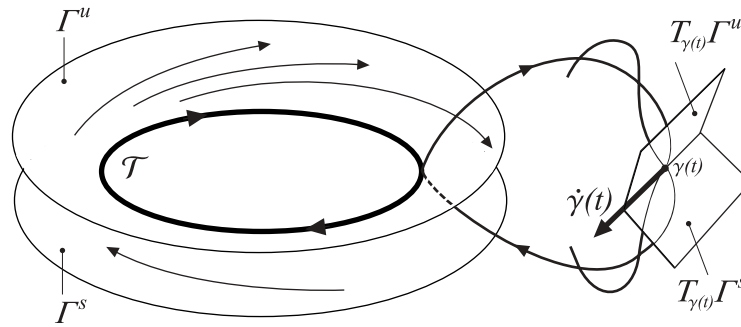


Рис. 5. Гиперболическая орбита и асимптотические поверхности.

$+\infty$). Поверхности $\widehat{\Gamma}^u$ и $\widehat{\Gamma}^s$ называются асимптотическими к \widehat{T} или сепаратрисами. В частности, отсюда следует существование асимптотических поверхностей Γ^u и Γ^s для исходной системы¹⁴.

Замечание 6.3. На самом деле, отображение $\widehat{\mathcal{EM}}$ определено только в окрестности \widehat{U}_0 . Поэтому из существования нормальных координат следует существование "кусков" асимптотических поверхностей $\Gamma^u \cap \mathcal{U}_0 = \widehat{\mathcal{EM}}(\widehat{\Gamma}^u \cap \widehat{U}_0)$ и $\Gamma^s \cap \mathcal{U}_0 = \widehat{\mathcal{EM}}(\widehat{\Gamma}^s \cap \widehat{U}_0)$. За пределы этой области асимптотические поверхности продолжаются фазовым потоком.

В интегрируемых системах эти поверхности обычно сдвоены, т.е. $\Gamma^u = \Gamma^s$. А.Пуанкаре впервые заметил, что в типичных случаях асимптотические поверхности не совпадают, а пересекаются:

¹⁴Теорема Адамара-Перрона.

"...эти пересечения образуют нечто вроде решетки, ткани, сети с бесконечно тесными петлями... Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить."¹⁵

В общем случае сепаратрисы пересекаются вдоль нескольких гомоклинических решений, т.е. решений, которые стремятся к гиперболической орбите при $t \rightarrow \pm\infty$.

В условии **У1** теоремы 2.2 мы предположили существование трансверсальной гомоклиники γ . Это означает, что Γ^u и Γ^s трансверсально пересекаются в каждой точке $\gamma(t)$ на трехмерной поверхности уровня \mathcal{M}_0 , т.е. пересечение двумерных плоскостей $T_{\gamma(t)}\Gamma^s \cap T_{\gamma(t)}\Gamma^u$ одномерно и порождено $\dot{\gamma}(t)$ (рис. 5).

Замечание 6.4. Нормальные координаты определены не однозначно. В частности, координаты $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{q}', \hat{p}') = (\hat{x} + A, \hat{y}, \hat{q}/B, \hat{p}B)$ и $(\hat{x}'', \hat{y}'', \hat{q}'', \hat{p}'') = (\hat{x}, \hat{y}, -\hat{p}, \hat{q})$ также нормальные.

7. ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ

Нормальные координаты Элиассона удобны для исследования динамики вблизи только одной гиперболической траектории \mathcal{T} . Наша цель: определить удобные координаты в окрестности всего семейства гиперболических траекторий $\mathcal{T}_\mu = \mathcal{G}^\mu \mathcal{T}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Пусть $M = \mathbb{T}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_p$, и

$$g^\mu : M \rightarrow M, \quad g^\mu(x, y, q, p) = (x, e^\mu y, q, e^\mu p)$$

— выбранная нами группа диффеоморфизмов, относительно которой невозмущенная система будет однородной в новых координатах. Для краткости обозначим $z = (x, y, q, p)$. Пусть также

$$\mathcal{I} : M \rightarrow \widehat{M}, \quad \mathcal{I}(z) = \widehat{z} := z,$$

где $\widehat{M} = \mathbb{T}_{\hat{x}} \times \mathbb{R}_{\hat{y}} \times \mathbb{R}_{\hat{q}} \times \mathbb{R}_{\hat{p}}$, $\widehat{z} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{q}, \hat{p})$ — координаты Элиассона.

От отображения $\mathcal{EM} : M \rightarrow \mathcal{M}$, задающего замену координат в исходном многообразии \mathcal{M} , потребуем:

- (1) На единичном уровне гамильтониана \mathcal{H}_0 однородные координаты совпадают с координатами Элиассона:

$$(7.1) \quad \mathcal{EM} = \widehat{\mathcal{EM}} \circ \mathcal{I} \text{ на поверхности } M_0 = \{z : \widehat{H}_0 \circ \mathcal{I}(z) = 1, \mathcal{I}(z) \in \widehat{U}_0\}.$$

- (2) Сопряжение соответствующих групп однородности:

$$g^\mu = \mathcal{EM}^{-1} \circ G^\mu \circ \mathcal{EM},$$

т.е. следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g^\mu} & M \\ \mathcal{EM} \downarrow & & \downarrow \mathcal{EM} \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{G^\mu} & \mathcal{M} \end{array}$$

коммутативна.

¹⁵А.Пуанкаре [P].

Нормальные координаты были определены только в окрестности \mathcal{U}_0 . Поэтому однородные координаты определены в области

$$\mathcal{U} = \cup_{\mu \in \mathbb{R}} \mathcal{G}^\mu(\mathcal{U}_0),$$

— окрестности семейства гиперболических траекторий \mathcal{T}_μ , $\mu \in \mathbb{R}$.

Соответствующая область на M :

$$U = \cup_{\mu \in \mathbb{R}} g^\mu(U_0), \quad U_0 = \mathcal{I}(\widehat{U}_0),$$

Предложение 7.1. *Отображение $\mathcal{EM} : U \rightarrow \mathcal{U}$ задаёт аналитическую замену координат в области \mathcal{U} .*

Доказательство. Поток g^μ трансверсален поверхности M_0 (см. (7.1)) . \square

Замечание 7.2. Как и нормальные координаты (см. замечание 6.4), однородные координаты определены неоднозначно.

Пусть $H_0 = \mathcal{H}_0 \circ \mathcal{EM}$, $\omega = \mathcal{EM}^* \Omega$ и ϕ_0^t - поток на M , порожденный гамильтонианом H_0 .

Следующее предложение следует из определения однородных координат и соответствующих свойств исходной системы.

Предложение 7.3.

$$H_0 \circ g^\mu = e^{2\mu} H_0, \quad g^{\mu*} \omega = e^\mu \omega, \quad \phi_0^t \circ g^\mu = g^\mu \circ \phi_0^{e^\mu t}.$$

Отсюда, в новых координатах семейство гиперболических решений имеет вид

$$T_\mu(t) = (x = \nu e^\mu t, y = e^\mu y_0, q = 0, p = 0),$$

а соответствующие им асимптотические поверхности:

$$\Gamma_\mu^u = \{y = e^\mu y_0, p = 0\}, \quad \Gamma_\mu^s = \{y = e^\mu y_0, q = 0\}$$

расслоены на траектории:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu^u(x_u, t) &= (x = x_u + e^\mu \nu t, y = e^\mu y_0, q = e^{e^\mu \lambda t}, p = 0), \\ \gamma_\mu^s(x_s, t) &= (x = x_s + e^\mu \nu t, y = e^\mu y_0, q = 0, p = e^{-e^\mu \lambda t}), \end{aligned}$$

$$\Gamma_\mu^u = \bigcup_{x_u \in \mathbb{T}} \gamma_\mu^u(x_u), \quad \Gamma_\mu^s = \bigcup_{x_s \in \mathbb{T}} \gamma_\mu^s(x_s).$$

8. ГАМИЛЬТониан и уравнения Гамильтона в однородных координатах

В дальнейшем нам пригодятся следующие леммы о свойствах однородных функций:

Лемма 8.1. *Пусть $F, G : M \rightarrow \mathbb{R}$ — g^μ -однородные функции одинаковой степени:*

$$F \circ g^\mu = e^{k\mu} F, \quad G \circ g^\mu = e^{k\mu} G, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

И пусть они совпадают на некоторой гиперповерхности трансверсальной потоку g^μ . Тогда $F \equiv G$.

Лемма 8.2. Пусть $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая g^μ -однородная функция степени k . Тогда

$$(g^\mu)^* dF(g^\mu z) = e^{k\mu} dF(z), \quad v_F(g^\mu z) = e^{(k-1)\mu} (g^\mu)_* v_F(z),$$

здесь $z \in M$, $dF : M \rightarrow T^*M$, $v_F : M \rightarrow TM$ — гамильтоново векторное поле, порожденное гамильтонианом F .

Доказательство. Первое равенство очевидно. Второе получается так:

$$\begin{aligned} \omega^2(\cdot, v_F(g^\mu z)) &= dF(g^\mu z) = (g^{-\mu})^* e^{k\mu} dF(z) = \\ &= e^{k\mu} (g^{-\mu})^* \omega^2(\cdot, v_F(z)) = e^{(k-1)\mu} \omega^2(\cdot, (g^\mu)_* v_F(z)). \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 8.3. Пусть $F, G : M \rightarrow \mathbb{R}$ — g^μ -однородные функции степени k и l , соответственно. Тогда функция $\{F, G\}$ — g^μ -однородная функция степени $k + l - 1$.

Доказательство. Следует из предыдущей леммы. Для произвольной $z \in M$ имеем

$$\begin{aligned} \{F, G\}(g^\mu z) &= \omega^2(v_G(g^\mu z), v_F(g^\mu z)) = e^{k+l-2} \omega^2((g^\mu)_* v_G(z), (g^\mu)_* v_F(z)) = \\ &= e^{k+l-2} (g^\mu)^* \omega^2(v_G(z), v_F(z)) = e^{k+l-1} \omega^2(v_G(z), v_F(z)) = e^{(k+l-1)\mu} \{F, G\}(z). \quad \square \end{aligned}$$

Определение 8.4. Пусть $R, r : M \rightarrow \mathbb{R}$. Будем говорить, что

$$R = \mathbb{O}_k(r),$$

если $R \circ g^\mu = R$ и $R = O_k(r)$ при $r \rightarrow 0$.

В нормальных координатах, естественно, расстояние до сепаратрис измерять функцией \widehat{qp} . Введем "безразмерный" аналог, т.е. g^μ -однородную функцию степени 0:

$$(8.1) \quad \rho = \frac{qp}{\sqrt{H_0}}.$$

Предложение 8.5.

$$(8.2) \quad H_0 = (\nu y + \lambda qp)^2 (1 + \mathbb{O}_2(\rho)).$$

Доказательство. В силу леммы 8.1 и предложения 7.3 достаточно доказать, что H_0 представляется в виде

$$(8.3) \quad H_0 = (\nu y + \lambda qp)^2 (1 + O_2(\rho)),$$

на своём единичном уровне M_0 . Поскольку на этой гиперповерхности однородные координаты z совпадают с нормальными \hat{z} , то она задаётся равенством:

$$\nu y + \lambda qp + O_2(y - y_0, qp) = 1.$$

Отсюда (т.к. $\nu y_0 = 1$) последовательно получаем:

$$\nu(y - y_0) = -\lambda qp + O_2(qp),$$

$$\nu y + \lambda qp = 1 + O_2(qp), \quad \nu y + \lambda qp = (\nu y + \lambda qp)^2 + O_2(qp).$$

С другой стороны, $H_0 = \nu y + \lambda qp + O_2(y - y_0, qp)$, следовательно

$$H_0 = (\nu y + \lambda qp)^2 (1 + O_2(qp)).$$

Это вместе с (8.1) дает (8.3). Что и требовалось доказать. \square

В дальнейшем функцию H_0 мы часто будем использовать в качестве координаты. В этом смысле примем для неё новое обозначение h .

Далее мы запишем уравнения Гамильтона в однородных координатах.

Предложение 8.6. *Векторное поле $v_{H_0} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{q}, \dot{p})^T$ имеет следующий вид:*

$$(8.4) \quad \begin{cases} \dot{x} = \sqrt{h} (\nu + \mathbb{O}_1), \\ \dot{y} = h \mathbb{O}_2, \\ \dot{q} = \sqrt{h} (\lambda q(1 + R) + \mathbb{O}_2), \\ \dot{p} = h (\lambda \frac{p}{\sqrt{h}}(1 + R) + \mathbb{O}_2), \end{cases}$$

при этом

$$(8.5) \quad \dot{h} = 0, \quad \dot{\rho} = \sqrt{h} \mathbb{O}_2.$$

Здесь $R = \mathbb{O}_1$, $\mathbb{O}_{1,2} = \mathbb{O}_{1,2}(\rho)$.

Доказательство проводится с помощью тех же соображений, использующих однородность координат, как и в предыдущем предложении. В силу леммы 8.2, поскольку

$$e^\mu g_*^\mu (\dot{x}, \dot{y}, \dot{q}, \dot{p})^T = (e^\mu \dot{x}, e^{2\mu} \dot{y}, e^\mu \dot{q}, e^{2\mu} \dot{p})^T,$$

достаточно показать, что на M_0 , гамильтоново поле имеет вид:

$$(8.6) \quad \begin{cases} \dot{x} = \nu + O_1(\rho), \\ \dot{y} = O_2(\rho), \\ \dot{q} = \lambda q(1 + R) + O_2(\rho), \\ \dot{p} = \lambda p(1 + R) + O_2(\rho). \end{cases}$$

На M_0 однородные координаты совпадают с нормальными. Поскольку v_{H_0} касается этой поверхности, то на ней в однородных координатах поле v_{H_0} также имеет вид (6.1). Осталось, как и в предыдущем предложении, заметить, что на M_0 в окрестности периодической траектории T :

$$y - y_0 = O(\rho), \quad qp = O(\rho).$$

Тогда уравнения (6.1) принимают вид (8.6) — что и требовалось показать. Последнее равенство (8.5) следует из (8.4). \square

Замечание 8.7. Здесь мы не вычисляем симплектической структуры ω в новых координатах. Поскольку она нам не пригодится в дальнейшем. Без вычислений приводим формулу для симплектической структуры:

$$\omega = \omega_{stand} + d\sqrt{H_0} \wedge \alpha,$$

где $\alpha = g^{-\mu*}(\widehat{E}^* \Omega^1 - \omega_{stand}^1)$, $\mu = \frac{1}{2} \log H_0$,

$$\omega_{stand} = dy \wedge dx + dp \wedge dq, \quad \omega_{stand} = d\omega_{stand}^1, \quad \Omega = d\Omega^1.$$

Однородные координаты будут каноническими, только если преобразование координат Элиассона будет точным симплектическим.

9. ОТОБРАЖЕНИЕ СКЛЕЙКИ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ

В данном пункте мы продолжим однородные координаты вдоль асимптотических поверхностей на окрестность множества $\{\gamma_\mu(0)\}_{\mu \in \mathbb{R}}$, выбранного нами при определении сепаратрисного отображения (параграф 3). Неформально говоря, мы продолжаем координаты вдоль асимптотических поверхностей. Так, что в окрестности этого множества возникает две системы координат, продолженных вдоль устойчивой и неустойчивой сепаратрисы. Возникающее отождествление этих координат называется отображением склейки.

Замечание 9.1. Асимптотическая поверхность Γ^u , естественно, разделяется периодической траекторией на две компоненты — "верхнюю" и "нижнюю":

$$\Gamma^u \setminus T = \Gamma^{u+} \cup \Gamma^{u-},$$

$$\Gamma^{u+} = \{y = y_0, q > 0, p = 0\}, \quad \Gamma^{u-} = \{y = y_0, q < 0, p = 0\}.$$

Аналогично:

$$\Gamma^s \setminus T = \Gamma^{s+} \cup \Gamma^{s-},$$

$$\Gamma^{s+} = \{y = y_0, q = 0, p > 0\}, \quad \Gamma^{s-} = \{y = y_0, q = 0, p < 0\}.$$

Обозначим через $\Gamma^{u+}, \Gamma^{u-}, \Gamma^{s+}, \Gamma^{s-}$ соответствующие компоненты асимптотических поверхностей на \mathcal{M} . Тогда, без ограничения общности (замечание 7.2), можем предположить, что гомоклиническая траектория γ лежит в пересечении $\Gamma^{u+} \cup \Gamma^{s+}$.

Продолжим координаты сначала вблизи поверхности M_0 . Зафиксируем положительные числа $t', t'' > 0$. Пусть

$$U_0^{t', t''} = \bigcup_{-t' < t < t''} \phi^t U_0,$$

$$\mathcal{U}_0^{t', t''} = \bigcup_{-t' < t < t''} \Phi^t \mathcal{U}_0.$$

Напомним, что U_0 и \mathcal{U}_0 — окрестности гиперболических траекторий $T \subset M_0$ и $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}_0$, соответственно. Естественное продолжение отображения $\mathcal{E}\mathcal{M}$ на $U_0^{t', t''}$, задается следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} U_0^{t', t''} & \xrightarrow{\phi^t} & U_0^{t'-t, t''+t} \\ \mathcal{E}\mathcal{M} \downarrow & & \downarrow \mathcal{E}\mathcal{M} \\ \mathcal{U}_0^{t', t''} & \xrightarrow{\Phi^t} & \mathcal{U}_0^{t'-t, t''+t}. \end{array}$$

Поскольку асимптотические поверхности Γ^u и Γ^s пересекаются, отображение $\mathcal{E}\mathcal{M}$ перестает быть взаимнооднозначным. И тем самым задает накрытие своего образа. Теперь выберем t', t'' так, чтобы в некоторой окрестности \mathcal{V}_0 точки $\gamma(0)$ продолженное отображение E задавало двулистное накрытие этой окрестности¹⁶.

Продолжая по однородности отображение $\mathcal{E}\mathcal{M}$ на область:

$$U = \bigcup_{\mu \in \mathbb{R}} g^\mu(U_0^{t', t''}),$$

получаем двулистное накрытие окрестности множества $\{\gamma_\mu(0)\}_{\mu \in \mathbb{R}}$ — области $\mathcal{V} = \bigcup_{\mu \in \mathbb{R}} g^\mu(\mathcal{V}_0)$.

¹⁶Если положить $t' = t'' = +\infty$ то, вообще говоря, получим бесконечнолистное накрытие

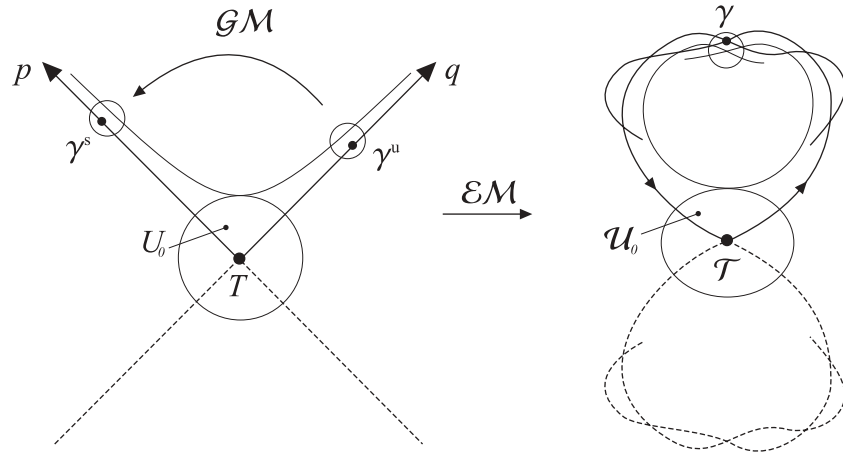


Рис. 6. Отображение склейки.

Обозначим через V^u и V^s прообразы окрестности \mathcal{V} , лежащие в окрестности неустойчивых Γ_μ^u и устойчивых Γ_μ^s сепаратрис, соответственно:

$$V^u \subset \{(x_u, y_u, q_u, p_u) : q_u \sim 1, \frac{p_u}{\sqrt{h_u}} - \text{мало}\},$$

$$V^s \subset \{(x_s, y_s, q_s, p_s) : q_s - \text{мало}, \frac{p_s}{\sqrt{h_s}} \sim 1\}.$$

Теперь определим отображение склейки :

$$\mathcal{GM} : V^u \rightarrow V^s, \quad \mathcal{GM} = (\mathcal{EM}|_{V^s})^{-1} \circ \mathcal{EM}|_{V^u}.$$

Т.е. для каждой точки \mathcal{Z} из окрестности \mathcal{V} имеется два прообраза: $\mathcal{EM}(z_u) = \mathcal{Z}$, $z_u \in V^u$ и $\mathcal{EM}(z_s) = \mathcal{Z}$, $z_s \in V^s$, которые отождествляет отображение склейки $\mathcal{GM}(z_u) = z_s$ (рис. 6).

Обозначим через $\gamma_\mu^u(t)$ и $\gamma_\mu^s(t)$ прообразы гомоклинических решений $\gamma_\mu(t)$ при отображении \mathcal{EM} , лежащие на устойчивых и неустойчивых сепаратрисах, соответственно. Тогда

$$(9.1) \quad \begin{aligned} \gamma_\mu^u(t) &= (x = x_{0u} + \nu e^{\mu t}, y = e^{\mu} y_0, q = q_{0u} e^{\lambda e^{\mu} t}, p = 0), \\ \gamma_\mu^s(t) &= (x = x_{0s} + \nu e^{\mu t}, y = e^{\mu} y_0, q = 0, p = e^{\mu} p_{0s} e^{-\lambda e^{\mu} t}), \end{aligned}$$

где $x_{0s}, x_{0u}, q_{0u}, p_{0s}$ — константы. Далее поскольку (см. параграф 3)

$$\gamma_0^u(t) \rightarrow T(t + t^-), \quad \gamma_0^s(t) \rightarrow T(t + t^+)$$

при $t^- \rightarrow -\infty$ и $t^+ \rightarrow +\infty$, соответственно, то

$$\begin{aligned} x_{0u} + \nu t &= \nu(t + t^-), & x_{0s} + \nu t &= \nu(t + t^+), \\ x_{0s} - x_{0u} &= \nu(t^+ - t^-) = x_0. \end{aligned}$$

В силу замечаний 7.2 и 9.1, без ограничения общности, считаем

$$(9.2) \quad x_{0u} = 0, \quad x_{0s} = x_0, \quad q_{0u} = 1, \quad p_{0s} = p_0 > 0.$$

Замечание 9.2. Сделаем здесь переобозначение переменной ρ :

$$\rho_{\text{новое}} = \frac{\rho_{\text{старое}}}{p_0} = \frac{qp}{p_0\sqrt{H_0}}.$$

Это сделано из эстетических соображений, которые выяснятся ниже. Не трудно проверить, что это переобозначение не повлияло ни на какое из утверждений сформулированных выше.

Следующее предложение следует из определения отображения склейки.

Предложение 9.3. *Отображение склейки \mathcal{GM} обладает следующими свойствами:*

- (1) $\mathcal{GM} \circ \phi_0^t = \phi_0^t \circ \mathcal{GM}$ на $\phi_0^{-t}V^u \cap V^u$;
- (2) $\mathcal{GM} \circ g^\mu = g^\mu \circ \mathcal{GM}$;
- (3) $H_0 \circ \mathcal{GM} = H_0$;
- (4) $\mathcal{GM}(\gamma_\mu^u(t)) = (\gamma_\mu^s(t))$, когда $\gamma_\mu^u(t) \in V^u$.

Замечание 9.4. Конечно, отображение склейки сохраняет симплектическую структуру: $\mathcal{GM}^*\omega = \omega$. Но здесь мы не будем пользоваться этим свойством.

10. ОТОБРАЖЕНИЕ СКЛЕЙКИ: ФОРМУЛЫ

Введем "безразмерную" функцию:

$$\varkappa = x - \log q.$$

Тогда $\varkappa(\gamma_\mu^u(t)) = 0$ для любых t и μ , отсюда \varkappa играет роль "расстояния со знаком" до $\gamma_\mu^u(t)$.

Предложение 10.1. *Пусть $(x_u, y_u, q_u, p_u) \in V^u$, тогда*

$$(x_s, y_s, q_s, p_s) = \mathcal{GM}(x_u, y_u, q_u, p_u),$$

$$(10.1) \quad \begin{cases} x_s = x_u + x_0 + \mathbb{O}_1, \\ y_s = y_u + \sqrt{h_u}\mathbb{O}_1, \\ q_s = \mathbb{O}_1, \\ p_s = \sqrt{h_u} \left(\frac{p_0}{q_u} + \mathbb{O}_1 \right), \end{cases}$$

где $\mathbb{O}_1 = \mathbb{O}_1(\varkappa, \rho)$.

Доказательство. следует из предложения 9.3, поскольку это общий вид отображения с указанными свойствами. \square

На самом деле, в дальнейшем нам понадобится лишь ограничение \mathcal{GM} на гиперповерхность, проходящую через точки $\gamma_\mu^u(0)$, $\mu \in \mathbb{R}$ и трансверсальную к фазовому потоку:

$$Q^u = \{q = 1\} \cap V^u = \{(x, y, q, p) : q = 1; x, p - \text{малы}\}.$$

На этой поверхности $\varkappa = x - \log q = x$, и роль "расстояния" от γ_μ^u на ней играет переменная x .

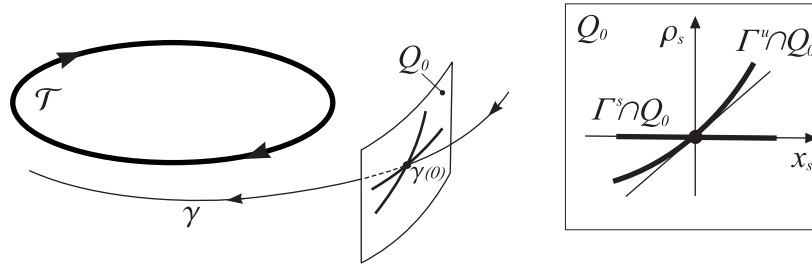


Рис. 7. Пересечение сепаратрис.

Обозначим $Q^s = \mathcal{G}\mathcal{M} Q^u$, тогда на каждой из поверхностей можно ввести координаты (x, ρ, h) .

Замечание 10.2. Пусть $F(x, \rho, h)$ "безразмерная" функция на поверхности Q^u (т.е. $F \circ g^t = F$), тогда F не зависит от h .

Предложение 10.3. *Существуют константы $a \neq 0$ и b такие, что*

$$(10.2) \quad \begin{aligned} (x_s, \rho_s, h_s) &= \mathcal{G}\mathcal{M}(x_u, \rho_u, h_u), \\ \begin{cases} x_s = x_u + x_0 + \mathbb{O}_1, \\ \rho_s = ax_u + b\rho_u + \mathbb{O}_2, \\ h_s = h_u, \end{cases} \end{aligned}$$

где $\mathbb{O}_j = \mathbb{O}_j(x_u, \rho_u)$.

Доказательство. Действительно, из предыдущего предложения, следует

$$\rho_s = \frac{q_s p_s}{p_0 \sqrt{h_s}} = \frac{\mathbb{O}_1(\rho_u, x_u) \sqrt{h_u} (p_0 + \mathbb{O}_1(\rho_u, x_u))}{p_0 \sqrt{h_u}} = \mathbb{O}_1(\rho_u, x_u).$$

Следовательно, в силу замечания 10.2, существуют константы a, b :

$$\rho_s = ax_u + b\rho_u + \mathbb{O}_2(\rho_u, x_u)$$

Неравенство $a \neq 0$ следует из условия **У1** теоремы 2.2 (стр. 4) и следующего предложения.

Предложение 10.4. *Асимптотические поверхности Γ^u и Γ^s пересекаются трансверсально вдоль гомоклиники $\gamma(t)$, тогда и только тогда, когда $a \neq 0$.*

Доказательство. Достаточно определить условие трансверсального пересечения Γ^u и Γ^s в точке $\gamma(0)$. Пусть

$$Q_0 = \mathcal{E}\mathcal{M}(Q^u) \cap \mathcal{M}_0$$

— двумерная поверхность, лежащая на трехмерной поверхности уровня гамильтониана \mathcal{H}_0 и трансверсальная векторному полю $v_{\mathcal{H}_0}$. Поэтому трансверсальность пересечений Γ^u с Γ^s и кривых $\Gamma^u \cap Q_0$ с $\Gamma^s \cap Q_0$ равносильны. На поверхности Q_0 можно ввести две системы координат (x_u, ρ_u) (x_u, ρ_u — малы) и (x_s, ρ_s) ($x_s - x_0, \rho_s$ — малы). При этом кривая $\Gamma^u \cap Q_0$ в координатах (x_u, ρ_u)

задается уравнением $\rho_u = 0$, а кривая $\Gamma^s \cap \mathcal{Q}_0$ в координатах (x_s, ρ_s) — уравнением $\rho_s = 0$. Отождествление между координатами, задается отображением склейки:

$$\begin{aligned} x_s &= x_u + x_0 + \mathbb{O}_1(x_u, \rho_u), \\ \rho_s &= ax_u + b\rho_u + \mathbb{O}_2(x_u, \rho_u). \end{aligned}$$

Поэтому в координатах (x_s, ρ_s) кривая $\Gamma^u \cap \mathcal{Q}_0$ задается параметрически (x_u — параметр):

$$\begin{aligned} x_s &= x_u + x_0 + \mathbb{O}_1(x_u), \\ \rho_s &= ax_u + \mathbb{O}_2(x_u). \end{aligned}$$

Следовательно касательные прямые к этим кривым в точке $\gamma(0)$ трансверсальны тогда и только тогда, когда $a \neq 0$ — что и требовалось доказать. \square

Б. Возмущенная система

Теперь мы переходим к исследованию возмущенной системы $(\mathcal{M}, \Omega, \mathcal{H})$. Эта система уже неавтономна и ее необходимо исследовать в расширенном фазовом пространстве — $\mathcal{M} \times \mathbb{T}_t$.

Мы воспользуемся уже построенными однородными координатами $z = (x, y, p, q)$. В них мы имеем гамильтонову систему: (M, ω, H) , где

$$H(z, t) = H_0(z) + H_1(z, t).$$

Группа g^μ и отображение склейки $\mathcal{G}\mathcal{M}$ естественным образом продолжаются на $M \times \mathbb{T}_t$, как $g^\mu \times \text{id}_{\mathbb{T}_t}$ и $\mathcal{G}\mathcal{M} \times \text{id}_{\mathbb{T}_t}$, соответственно. Тогда

$$H_0 \circ g^\mu = e^{2\mu} H_0, \quad H_1 \circ g^\mu = H_1.$$

11. НОРМАЛИЗАЦИЯ

В этом параграфе мы применяем один из классических методов усреднения в гамильтоновых системах, который называется методом Хори-Депри¹⁷ [АКН].

Сначала напомним схему этого метода. Запишем уравнения Гамильтона возмущенной системы в однородных координатах:

$$\dot{z} = v_{H_0}(z) + v_{H_1}(z, t)$$

Возмущение v_{H_1} — векторное поле нулевой степени однородности относительно группы g^μ . С помощью замены координат хотим уменьшить возмущение по порядку однородности.

Пусть

$$g_F : M \times \mathbb{T}_t \rightarrow M \times \mathbb{T}_t$$

— сдвиг на время 1 вдоль гамильтонова векторного поля v_F , зависящий от $t \in \mathbb{T}_t$ как от параметра. Гамильтониан $F : M \times \mathbb{T}_t \rightarrow \mathbb{R}$ в методе Хори-Депри называется генератором. Отображение $\widehat{\mathcal{E}\mathcal{M}} = \mathcal{E}\mathcal{M} \circ g_F$ задает новые координаты на $M \times \mathbb{T}_t$, которые мы будем называть усредняющими координатами.

¹⁷гамильтонов вариант метода Ли

Гамильтоново векторное поле в расширенном фазовом пространстве в однородных координатах обозначим через $v = v_{H_0} + v_{H_1} + \partial_t$, а в усредняющих координатах — через $\tilde{v} = (g_F^{-1})_* v$. Получаем

$$\tilde{v} = e^{v_F} \circ v \circ e^{-v_F} = e^{[v_F, \cdot]} v = v + [v_F, v] + \frac{1}{2!} [v_F, [v_F, v]] + \dots \quad 18.$$

Генератор F ищем в виде:

$$F = F_1 + F_2$$

где F_1 и F_2 - функции (-1) и (-2) степени однородности, соответственно. Имеем

$$[v_F, v] = [v_{F_1}, v_{H_0}] + [v_{F_2}, v_{H_0}] + [v_{F_1}, \partial_t] + \dots, \quad [v_{F_1}, \partial_t] = -\frac{\partial v_{F_1}}{\partial t},$$

применяя лемму 8.3, расписываем векторное поле по однородным слагаемым

$$\tilde{v} = v_{H_0} + \partial_t + \left(v_{H_1} - [v_{H_0}, v_{F_1}] \right) + \left(-\frac{\partial v_{F_1}}{\partial t} - [v_{H_0}, v_{F_2}] \right) + v_{H_2};$$

где векторное поле v_{H_2} , порождено гамильтонианом H_2 , при разложении которого по однородным членам его самый старший член имеет степень однородности (-2) .

Таким образом, решив уравнения:

$$(11.1) \quad [v_{H_0}, v_{F_1}] = v_{H_1}, \quad [v_{H_0}, v_{F_2}] = -\frac{\partial v_{F_1}}{\partial t},$$

относительно неизвестных F_1 и F_2 , в новых координатах получим следующие уравнения Гамильтона

$$(11.2) \quad \dot{z} = v_{H_0}(z) + v_{H_2}(z, t).$$

В силу известного гомоморфизма алгебры Ли гамильтоновых векторных полей и алгебры Ли функций, на функции F_1 и F_2 получаем следующие уравнения

$$(11.3) \quad \{H_0, F_1\} = H_1 - h_1(t), \quad \{H_0, F_2\} = -\frac{\partial F_1}{\partial t} + f_1(t),$$

где функции $h_1, f_1 : \mathbb{T}_t \rightarrow \mathbb{R}$ выбираются из условия разрешимости этой системы. Ниже мы увидим, что необходимо положить

$$h_1(t) = \int_{T_0} H_1(x, y_0, 0, 0, t) dx, \quad f_1(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{T_0} F_1(x, y_0, 0, 0, t) dx.$$

Но, из предположения (2.4), первое среднее равно 0, а второе среднее можно положить равным нулю выбором решения первого уравнения (11.3), поскольку оно определено с точностью до функции от t .

Теперь мы приступаем к решению этой системы. С учетом сделанных замечаний, уравнения (11.3) можно переписать в виде:

$$(11.4) \quad \dot{F}_1 = H_1, \quad \dot{F}_2 = -\frac{\partial F_1}{\partial t},$$

где $\dot{(\cdot)}$ — дифференцирование вдоль векторного поля v_{H_0} . Время t в каждом уравнении выступает в роли параметра.

¹⁸Здесь композиция векторных полей — композиция дифференцирований на $M \times \mathbb{T}$, а оператор $e^{v_F} f := f \circ g_F$, $f : M \times \mathbb{T}_t \rightarrow \mathbb{R}$).

Лемма 11.1. Пусть функция $G : M \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция и

$$(11.5) \quad \int_{T_0} G(x, y_0, 0, 0, t) dx = 0.$$

Тогда уравнение:

$$(11.6) \quad \{H_0, F\} = G$$

относительно неизвестной функции F , имеет гладкое решение на торе $T \times \mathbb{T}$ такое, что

$$(11.7) \quad \int_{T_0} F(x, y_0, 0, 0, t) dx = 0.$$

Доказательство. Действительно на торе $T \times \mathbb{T}$ уравнение 11.6 принимает вид:

$$\nu \frac{\partial F}{\partial x}(x, y_0, 0, 0, t) = G(x, y_0, 0, 0, t)$$

и в силу (11.5) это уравнение имеет решение:

$$F(x, y_0, 0, 0, t) = \frac{1}{\nu} \int_0^x G(\xi, y_0, 0, 0, t) d\xi - f(t).$$

Полагая

$$f(t) = \frac{1}{\nu} \int_0^1 G(\xi, y_0, 0, 0, t) d\xi,$$

получаем (11.7). \square

Предложение 11.2. Система уравнений (11.3) имеет гладкое решение в g^μ инвариантной окрестности множества $\{T_\mu \cup \Gamma_\mu^s \cup \Gamma_\mu^u\}_{\mu \in \mathbb{R}} \times \mathbb{T}$.

При этом

$$(11.8) \quad F_1(\gamma^u(0), t) - F_1(\gamma^s(0), t) = I'(t), \text{ где} \\ I'(t) = \frac{d}{dt} I(t), \quad I(t) - \text{интеграл Пуанкаре-Мельникова.}$$

Доказательство. В силу лемм 8.1 и 8.3 уравнения (11.3) достаточно решить на четырехмерной поверхности $M_0 \times \mathbb{T}_t$ в окрестности $\{T \cup \Gamma^s \cup \Gamma^u\} \times \mathbb{T}$, и затем продолжить на g^μ -инвариантную окрестность множества $\{T_\mu \cup \Gamma_\mu^s \cup \Gamma_\mu^u\}_{\mu \in \mathbb{R}} \times \mathbb{T}$ как g^μ -однородные функции.

Используя предыдущую лемму находим последовательно функции F_1 и F_2 на торе $T \times \mathbb{T}$.

Далее рассмотрим первое уравнение (11.4). Интегрируя вдоль решений лежащих на неустойчивой сепаратрисе имеем

$$F_1(x, y_0, q, 0, t) - F_1(x - \nu\theta, y_0, qe^{-\lambda\theta}, t) = \int_{-\theta}^0 H_1(x + \nu\tau, y_0, qe^{\lambda\tau}, 0, t) d\tau.$$

Поэтому равенство

$$F_1(x, y_0, q, 0, t) = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \left[\int_{-\theta}^0 H_1(x + \nu\tau, y_0, qe^{\lambda\tau}, 0, t) d\tau + F_1(x - \nu\theta, y_0, 0, t) \right],$$

задает решение F_1 на $\Gamma^u \times \mathbb{T}$. Аналогичное выражение задает F_1 на устойчивой сепаратрисе $\Gamma^s \times \mathbb{T}$. Подставляя точки $\gamma^u(0)$ и $\gamma^s(0)$, получаем

$$\begin{aligned} F_1(\gamma^u(0), t) &= \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \left[\int_{-\theta}^0 H_1(\gamma^u(\tau), t) d\tau + F_1(\gamma^u(-\theta), t) \right], \\ F_1(\gamma^s(0), t) &= \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \left[- \int_0^\theta H_1(\gamma^s(\tau), t) d\tau + F_1(\gamma^s(\theta), t) \right]. \end{aligned}$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем (11.8).

Далее на четырехмерной поверхности $M_0 \times \mathbb{T}_t$ берем две трехмерные поверхности $q = 1$ и $q = -1$. Затем гладко продолжаем функции F_1 и F_2 с $\Gamma^u \times \mathbb{T}$ на эти поверхности произвольным образом и продолжаем на окрестность $T \cup \Gamma^s \cup \Gamma^u \times \mathbb{T}$ интегрированием уравнений (11.4) вдоль решений системы с гамильтонианом H_0 . Фазовые точки $(x, y, q = \pm 1, p - \text{мало})$ под действием потока $\phi_0^t : M \rightarrow M$ никогда не возвращается на эти поверхности и по теоремам обыкновенных дифференциальных уравнений получаем гладкие функции F_1 и F_2 в некоторой окрестности $T \cup \Gamma^s \cup \Gamma^u \times \mathbb{T}_t$. \square

Определение 11.3. Пусть $G : M \times \mathbb{T}_t \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция. Будем говорить, что

$$G(z, t) = \mathcal{O}_k(z, t), \quad k \in \mathbb{Z},$$

если функция G раскладывается в ряд по g^μ -однородным слагаемым и самый старший член имеет степень однородности $(-k)$.

Следствие 11.4. Пусть

$$(11.9) \quad (\tilde{z}, t) \in \left\{ (z, t) : |q|, \left| \frac{p}{\sqrt{h}} \right| < c^{-1}; \rho, h^{-1} - \text{малы} \right\}^{19},$$

тогда верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} (11.10) \quad (x, y, q, p, t) &= g_F(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{q}, \tilde{p}, t), \\ x &= \tilde{x} + \mathcal{O}_2(\tilde{z}, t), \\ y &= \tilde{y} + \mathcal{O}_1(\tilde{z}, t), \\ q &= \tilde{q} + \mathcal{O}_2(\tilde{z}, t), \\ p &= \tilde{p} + \mathcal{O}_1(\tilde{z}, t), \end{aligned}$$

при этом

$$(11.11) \quad \begin{aligned} \rho &= \tilde{\rho} + \mathcal{O}_2(\tilde{z}, t), \\ h &= \tilde{h} + \{F, H_0\}(\tilde{z}, t) + \mathcal{O}_2(\tilde{z}, t). \end{aligned}$$

Доказательство. Гамильтониан F определен в области

$$\left\{ (z, t) : |q|, \left| \frac{p}{\sqrt{h}} \right| < c^{-1}; \rho - \text{мало} \right\},$$

и мал при достаточно малом h^{-1} . Поэтому существует еще меньшая область (11.9), в которой определен сдвиг g_F . В этой области для любой гладкой функции f имеем

$$f(z, t) = e^{vF} f(\tilde{z}, t) = f(\tilde{z}, t) + \{F, f\}(\tilde{z}, t) + \dots$$

¹⁹Здесь и далее через c обозначаем несущественную достаточно малую константу.

Подставляя вместо функции f координатные функции x, y, q, p, ρ, h и используя лемму 8.3, получаем (11.10). \square

12. ВОЗМУЩЕННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ СКЛЕЙКИ

Усредненные координаты, также как и однородные, в окрестности $(\gamma_\mu(0), t)$ определены не однозначно. Поскольку отображение $\mathcal{EM} \circ g_F$ — малая деформация отображения \mathcal{EM} на достаточно больших уровнях H_0 , то оно тоже задает двулистное накрытие образа в окрестности $\{(\gamma_\mu(0), t), \mu^{-1} - \text{мало}\}$. Соответствующее отображение склейки имеет вид

$$\widetilde{\mathcal{GM}} = g_F^{-1} \circ \mathcal{GM} \circ g_F.$$

Обозначим $\widetilde{Q}_u = g_F^{-1}(Q_u \times \mathbb{T}_t)$ и $\widetilde{Q}_s = g_F^{-1}(Q_s \times \mathbb{T}_t)$ (определения поверхностей $Q_{u,s}$ см. в параграфе 10). Тогда $\widetilde{\mathcal{GM}}(\widetilde{Q}_u) = \widetilde{Q}_s$. На каждой поверхности $\widetilde{Q}_{u,s}$ можно ввести координаты (x, ρ, t, h) .

Предложение 12.1. Пусть $(z_u, t_u) \in \widetilde{Q}_u$ такая, что

$$(12.1) \quad \frac{1}{\sqrt{h_u}} < c^{-1} \rho_u^2; \quad x_u, \rho_u - \text{малы},$$

тогда

$$(12.2) \quad \begin{aligned} (x_s, \rho_s, t_s, h_s) &= \widetilde{\mathcal{GM}}(x_u, \rho_u, t_u, h_u), \\ \begin{cases} x_s = x_u + x_0 + \mathbf{O}_1, \\ \rho_s = ax_u + b\rho_u + \mathbf{O}_2, \\ t_s = t_u, \\ h_s = h_u + \frac{1}{\sqrt{h_u}}(I'(t) + \mathbf{O}_1), \end{cases} \end{aligned}$$

где $\mathbf{O}_{1,2} = \mathbf{O}_{1,2}(x_u, \rho_u)$ на (12.1).

Лемма 12.2. Пусть $D = \{(z, t) : |q|, |\frac{p}{\sqrt{h}}| < c^{-1}, \frac{1}{\sqrt{h}} < c^{-1} \rho^2\}$ и $G(z, t) = \mathcal{O}_k(z, t)$. Тогда $G = \mathbf{O}_k(\rho)$ на D в любых независимых координатах из набора (x, y, p, q, ρ, h, t) .

Доказательство. Действительно, имеем $\frac{1}{\sqrt{h}} = \rho \frac{1}{\rho\sqrt{h}}$ и

$$\left| \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho\sqrt{h}} \right) \right| = \left| \frac{1}{\rho^2\sqrt{h}} \right| < c^{-1}.$$

Ограниченность самой функции $\frac{1}{\rho\sqrt{h}}$ и остальных производных очевидна. \square

Доказательство предложения 12.1. Пусть точка $(\tilde{z}_u, t) \in \widetilde{Q}_u$ лежит в области (12.1). Обозначим

$$(\tilde{z}_u, t) \xrightarrow{g_F} (z_u, t) \xrightarrow{\mathcal{GM}} (z_s, t) \xrightarrow{g_F^{-1}} (\tilde{z}_s, t).$$

Из леммы 12.2 получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_k(z_s, t) &= \mathcal{O}_k(z_u, t) = \mathcal{O}_k(\tilde{z}_u, t) = \mathbf{O}_k(\tilde{\rho}_u), & \mathbf{O}_k(x_u, \rho_u) &= \mathbf{O}_k(\tilde{x}_u, \tilde{\rho}_u), \\ \tilde{x}^s &= x^s + \mathbf{O}_2(\tilde{\rho}_u) = x_u + x_0 + \mathbf{O}_1(\tilde{x}_u, \tilde{\rho}_u) = \tilde{x}_u + x_0 + \mathbf{O}_1(\tilde{x}_u, \tilde{\rho}_u), \\ \tilde{\rho}^s &= \rho^s + \mathbf{O}_2(\tilde{\rho}_u) = ax_u + b\rho_u + \mathbf{O}_2(\tilde{x}_u, \tilde{\rho}_u) = a\tilde{x}_u + b\tilde{\rho}_u + \mathbf{O}_2(\tilde{x}_u, \tilde{\rho}_u). \end{aligned}$$

Докажем последнее равенство 12.2. Имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{h}_s &= h_s - \{F, H_0\}(z_s, t) + \mathcal{O}_2 = \\ &= h_u - \{F, H_0\}(z_s, t) + \mathcal{O}_2 = \tilde{h}_u + \{F, H_0\}(z_u, t) - \{F, H_0\}(z_s, t) + \mathcal{O}_2.\end{aligned}$$

Далее, во-первых, в силу уравнений (11.3),

$$\{F, H_0\}(z_u, t) - \{F, H_0\}(z_s, t) = -H_1(z_u, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}(z_u, t) + H_1(z_s, t) - \frac{\partial F_1}{\partial t}(z_s, t).$$

во-вторых, из определения отображения \mathcal{GM} ,

$$H_1(z_u, t) = H_1(z_s, t) = \mathcal{H}_1(\mathcal{Z}, t), \quad \mathcal{EM}(z_{u,s}) = \mathcal{Z},$$

и в-третьих, из g^μ -однородности F_1 ,

$$\begin{aligned}F_1(z_u, t) &= \frac{1}{\sqrt{h_u}} \left(F_1(\gamma^u(0), t) + \mathbf{O}_1(x_u, \rho_u) \right), \\ F_1(z_s, t) &= \frac{1}{\sqrt{h_s}} \left(F_1(\gamma^s(0), t) + \mathbf{O}_1(x_s - x_0, \rho_s) \right).\end{aligned}$$

Все вместе с предложением 11.2 дает

$$\tilde{h}_s = \tilde{h}_u + \frac{\partial}{\partial t} (F_1(z_u, t) - F_1(z_s, t)) + \mathcal{O}_2 = \tilde{h}_u + \frac{1}{\sqrt{h_u}} (I'(t) + \mathbf{O}_1(\tilde{x}_u, \tilde{\rho}_u)). \quad \square$$

13. ФАЗОВЫЙ ПОТОК ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ

Обозначим $\tilde{\phi}^t : M \times \mathbb{T}_t \rightarrow M \times \mathbb{T}_t$ — фазовый поток возмущенной системы в усредняющих координатах, т.е. поток порождаемый векторным полем \tilde{v} (см. параграф 11). Пусть

$$\Delta = \left\{ (z, t) \in M \times \mathbb{T}_t : c < \frac{p}{\sqrt{h}} < c^{-1}, \frac{1}{\sqrt{h}} < c^{-1} \rho^2 \right\}.$$

Предложение 13.1. Пусть $(z_s, t) \in \Delta$ и $\theta \in \mathbb{R}$:

$$(13.1) \quad c < e^{\lambda \sqrt{h_s} \theta} q_s < c^{-1}.$$

Тогда, верны следующие равенства

$$(x_u, y_u, q_u, p_u, t_s + \theta) = \phi^\theta(x_s, y_s, q_s, p_s, t_s),$$

$$(13.2) \quad x_u = x_s + \nu \sqrt{h_s} \theta + \mathbf{O}_1,$$

$$(13.3) \quad y_u = y_s + \sqrt{h_s} \mathbf{O}_2$$

$$(13.4) \quad q_u = e^{\lambda \sqrt{h_s} \theta} q_s + \mathbf{O}_1,$$

$$(13.5) \quad p_u = e^{-\lambda \sqrt{h_s} \theta} p_s + \sqrt{h_s} \mathbf{O}_2,$$

при этом

$$(13.6) \quad \rho_u = \rho_s + \mathbf{O}_2,$$

$$(13.7) \quad h_u = h_s + \frac{1}{\sqrt{h_s}} \mathbf{O}_1.$$

Здесь $\mathbf{O}_1 = \mathbf{O}_1(\rho_s \log \rho_s)$ и $\mathbf{O}_2 = \mathbf{O}_2(\rho_s^2 \log \rho_s)$ на Δ .

Доказательство. Уравнения Гамильтона потока $\tilde{\phi}^t$ имеют вид:

$$\dot{z} = v_{H_0}(z) + v_{H_2}(z).$$

Используя предложение 8.6 и лемму 8.3 получаем

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sqrt{h}(\nu + \mathbb{O}_1(\rho) + \mathcal{O}_4), \\ \dot{y} &= h(\mathbb{O}_2(\rho) + \mathcal{O}_4), \\ \dot{q} &= \sqrt{h}(\lambda q(1 + R) + \mathbb{O}_2(\rho) + \mathcal{O}_4), \\ \dot{p} &= h\left(\lambda \frac{p}{\sqrt{h}}(1 + R) + \mathbb{O}_2(\rho) + \mathcal{O}_4\right), \\ \dot{h} &= \mathcal{O}_1, \\ \dot{\rho} &= \sqrt{h}(\mathbb{O}_2 + \mathcal{O}_4),\end{aligned}$$

где $R = \mathbb{O}_1(\rho)$.

Из условия (13.1) получаем

$$(13.8) \quad c^2 < e^{\lambda\sqrt{h_s}\theta} \rho_s < c^{-2}, \quad \theta = \frac{\log \rho_s + \mathbf{O}(1)}{\lambda\sqrt{h_s}} \text{ на } \Delta.$$

Далее $t \in [0, \theta]$ и $(x, y, q, p, t_s + t) = \phi^t(x_s, y_s, q_s, p_s, t_s)$.

Оценим сначала h и ρ . Имеем: $\dot{h} = \mathcal{O}_1$, тогда

$$h = h_s + \frac{1}{\sqrt{h_s}} \mathbf{O}(\rho_s \log \rho_s).$$

В частности, $\frac{1}{\sqrt{h}} = \mathbf{O}(\rho_s)$.

Далее: $\dot{\rho} = \sqrt{h_s}(\mathbb{O}_2(\rho) + \mathbf{O}_2(\rho_s))$, отсюда

$$\rho = \rho_s + \mathbf{O}(\rho_s^2 \log \rho_s).$$

В частности, $\rho = \mathbf{O}(\rho_s)$. Таким образом мы доказали (13.6) и (13.7).

Для переменных x и y получаем:

$$\dot{x} = \sqrt{h_s}(\nu + \mathbf{O}(\rho_s)), \quad \dot{y} = h_s \mathbf{O}_2(\rho_s),$$

отсюда следует (13.2) и (13.3).

Теперь вычислим p_u . Имеем

$$\dot{p} = \lambda\sqrt{h_s}p(1 + R_1) + R_2,$$

где $R_1(t) = \mathbf{O}(\rho_s)$, $R_2(t) = h_s \mathbf{O}(\rho_s^2)$. Отсюда

$$p_u = e^{-\lambda\sqrt{h_s}(\theta+r(\theta))} (p_s + \int_0^\theta e^{\lambda\sqrt{h_s}t+r(t)} R_2(t) dt),$$

где $r(t) = \int_0^t R_1(u) du = \frac{1}{\sqrt{h_s}} \mathbf{O}(\rho_s \log \rho_s)$. Таким образом, из определения области Δ и (13.1), получаем

$$\begin{aligned}p_u - e^{-\lambda\sqrt{h_s}\theta} p_s &= e^{-\lambda\sqrt{h_s}\theta} p_s (e^{-\lambda\sqrt{h_s}r(\theta)} - 1) + \\ &+ \int_0^\theta e^{\lambda\sqrt{h_s}(t-\theta)+r(t)-r(\theta)} R_2(t) dt = \sqrt{h_s} \mathbf{O}(\rho_s^2 \log \rho_s).\end{aligned}$$

Наконец для q_u имеем:

$$\begin{aligned} q_u &= \rho_u \frac{\sqrt{h_u}}{p_u} = (\rho_s + \mathbf{O}(\rho_s^2 \log \rho_s)) \frac{\sqrt{h_s} + \frac{1}{\sqrt{h_s}} \mathbf{O}(\rho_s \log \rho_s)}{e^{-\lambda \sqrt{h_s} \theta} p_s + \sqrt{h_s} \mathbf{O}(\rho_s^2 \log \rho_s)} = \\ &= \rho_s (1 + \mathbf{O}(\rho_s \log \rho_s)) \frac{\sqrt{h_s} (1 + \mathbf{O}(\rho_s^3 \log \rho_s))}{e^{-\lambda \sqrt{h_s} \theta} p_s (1 + \mathbf{O}(\rho_s \log \rho_s))} = \\ &= e^{\lambda \sqrt{h_s} \theta} \rho_s \frac{\sqrt{h_s}}{p_s} (1 + \mathbf{O}(\rho_s \log \rho_s)). \end{aligned}$$

Доказательство закончено. \square

14. СЕПАРАТРИСНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

В этом параграфе мы докажем предложение 3.3, т.е. вычислим формулы для сепаратрисного отображения.

Сепаратрисное отображение будет записано в усредняющих координатах. Определим поверхность \mathcal{Q} , участвующую в определении сепаратрисного отображения (параграф 3). Положим

$$\mathcal{Q} = \mathcal{EM}(\mathcal{Q}), \quad \mathcal{Q} = \{(x, y, q, p, t) : q = 1; \rho, h^{-1} - \text{малы}\},$$

поверхность \mathcal{Q} в усредняющих координатах имеет вид

$$\mathcal{Q} = \widetilde{\mathcal{EM}}(\widetilde{\mathcal{Q}}), \quad \widetilde{\mathcal{Q}} = \{(z, t) : q = 1 + \mathcal{O}_2(x, \rho, t, h); \rho, h^{-1} - \text{малы}\}$$

Сепаратрисное отображение будет записано в усредняющих координатах на \mathcal{Q} , которые задаются отображением $\widetilde{\mathcal{EM}}|_{\widetilde{\mathcal{Q}}}$. В этих координатах оно представляется следующей композицией

$$\widetilde{\mathcal{SM}} = \widetilde{\phi}^\theta \circ \widetilde{\mathcal{GM}}, \quad \widetilde{\mathcal{SM}} = (\widetilde{\mathcal{EM}}|_{\widetilde{\mathcal{Q}}})^{-1} \circ \mathcal{SM} \circ \widetilde{\mathcal{EM}}|_{\widetilde{\mathcal{Q}}}.$$

Доказательство теоремы 3.3.

Следуя формулировке теоремы 3.3, рассмотрим область

$$\left\{ (x, \rho, t, h) \in \widetilde{\mathcal{Q}} : \frac{1}{\sqrt[4]{h}} < \rho; x, \rho - \text{малы} \right\} \subset \widetilde{\mathcal{Q}}_u \subset \widetilde{\mathcal{Q}}.$$

Из предложения 12.1, получаем

$$\begin{aligned} (x_s, \rho_s, h_s, t_s) &= \widetilde{\mathcal{GM}}(x, \rho, h, t), \\ \begin{cases} x_s = x + x_0 + \mathbf{O}_1(x, \rho), \\ \rho_s = ax + b\rho + \mathbf{O}_2(x, \rho), \\ h_s = h + \frac{1}{\sqrt{h}} (I'(t) + \mathbf{O}_1(x, \rho)), \\ t_s = t. \end{cases} \end{aligned}$$

Положим

$$r(x, \rho, h, t) = \rho_s = ax + b\rho + \mathbf{O}_2(x, \rho).$$

Теперь можем определить поверхность \mathcal{Q}_* :

$$\mathcal{Q}_* = \widetilde{\mathcal{EM}}(\widetilde{\mathcal{Q}}_*), \quad \widetilde{\mathcal{Q}}_* = \left\{ (x, \rho, t, h) \in \mathcal{Q} : \frac{1}{\sqrt[4]{h}} < \rho, \frac{1}{\sqrt[4]{h}} < r; x, \rho - \text{малы} \right\}.$$

Далее, если $(x, \rho, t, h) \in \tilde{Q}_*$, то $(x_s, \rho_s, h_s, t_s) \in \Delta$ (см. параграф 13) и, из предложения 13.1, получаем

$$(x^+, \rho^+, h^+, t^+) = \tilde{\phi}^\theta(x_s, \rho_s, h_s, t_s),$$

$$\begin{cases} x^+ = x_s + \nu\sqrt{h_s}\theta + \mathbf{O}_1(\rho_s \log \rho_s) & = x + x_0 + \nu\sqrt{h}\theta + \mathbf{O}_1(r \log r) + \mathbf{O}_1(x, \rho), \\ \rho^+ = \rho_s + \mathbf{O}_1(\rho_s^2 \log \rho_s) & = r + \mathbf{O}_1(r^2 \log r), \\ h^+ = h_s + \frac{1}{\sqrt{h_s}}\mathbf{O}_1(\rho_s \log \rho_s) & = h + \frac{1}{\sqrt{h}}(I'(t) + \mathbf{O}_1(r \log r) + \mathbf{O}_1(x, \rho)), \\ t^+ = t + \theta. \end{cases}$$

На поверхности \tilde{Q} : $q^+ = 1 + \mathcal{O}_2(x^+, \rho^+, h^+, t^+) = 1 + \mathcal{O}_2(x, \rho, t, h) = 1 + \mathbf{O}_2(\rho)$. Поэтому время сдвига θ , до пересечения траектории с поверхности Q определяется из равенства

$$q^+ = e^{\lambda\sqrt{h_s}\theta} q_s + \mathbf{O}_1(\rho_s \log \rho_s) = 1 + \mathbf{O}_2(\rho).$$

Поскольку, из предложения 10.1 и замечания 9.2:

$$q_s = \rho_s \frac{p_0\sqrt{h_s}}{p_s} = \rho_s(1 + \mathbf{O}_1(x, \rho)) = r(1 + \mathbf{O}_1(x, \rho)),$$

то отсюда

$$\theta = \frac{1}{\lambda\sqrt{h_s}}(-\log q_s + \mathbf{O}_1(\rho_s \log \rho_s)) = \frac{1}{\lambda\sqrt{h}}(-\log r + \mathbf{O}_1(r \log r) + \mathbf{O}_1(x, \rho)).$$

Окончательно, получаем

$$\begin{cases} x^+ = x + x_0 - \frac{\nu}{\lambda} \log r & + \mathbf{O}_1(r \log r) + \mathbf{O}_1(x, \rho), \\ \rho^+ = r & + \mathbf{O}_1(r^2 \log r), \\ t^+ = t + \frac{1}{\lambda\sqrt{h}} \log r & + \frac{1}{\sqrt{h}}(\mathbf{O}_1(r \log r) + \mathbf{O}_1(x, \rho)), \\ h^+ = h + \frac{1}{\sqrt{h}} I'(t) & + \frac{1}{\sqrt{h}}(\mathbf{O}_1(r \log r) + \mathbf{O}_1(x, \rho)). \end{cases}$$

Доказательство завершено. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Ар1. Арнольд В. И., Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *Успехи Матем. Наук*, 1963, Т. 18, Вып 6., С. 91–192.
- Ар2. Арнольд В. И., О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы. *Докл. АН СССР*, 1964, Т. 156, N. 1, С. 9–12.
- АКН. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И., Математические аспекты классической и небесной механики. В кн. *Совр. пробл. мат. Фундаментальные направления*. Т. 3. М.: Наука, 1978. 304 стр.
- ЗФ. Заславский Г. М., Филоненко Н. Н., Стохастическая неустойчивость захваченных частиц и условия применимости квазилинейного приближения. *ЖЭТФ* 1968, Т. 54, С. 1590–1602.
- Н. Нехорошев Н. Н., Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем близких к интегрируемым. *Успехи мат. наук*, 1977, Т. 32, Вып. 6, С. 5–66.
- Т1. Трещев Д. В. *Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем* (Фазис: Москва 1998)
- Ч. Чириков В. В. *Нелинейный резонанс*. (ИГУ, 1977)
- Ш. Шильников Л.П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений. - *ДАН СССР*, 1965, т. 160, 3, с. 558–561.
- АА. Aubry S., Abramovici G., Chaotic trajectories in the standard map: the concept of anti-integrability. *Physica* 43 D, 1990, P. 199–219.
- ВТ. Bolotin S., Treschev D., Unbounded growth of energy in nonautonomous Hamiltonian systems. *Nonlinearity*, 12(2):365-388, 1999.
- ВМ. Bolotin S.V., MacKay R., Multibump orbits near the anti-integrable limits for Lagrangian systems. *Nonlinearity*, 1997, **10**, 1015-1029.
- Е. Eliasson L. H., Perturbations of stable invariant tori, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci.* **IV** Ser. **15**, 1988, P. 115–147.
- DLС. Delshams A., de la Llave R., Seara T. M., A geometric approach to the existence of orbits with unbounded energy in generic periodic perturbations by potential of generic geodesic flows on T^2 , *Comm. Math. Phys.*, 209(2):353 392, 2000.
- dLL. de la Llave R., Orbits of unbounded energy in perturbations of geodesic flows by periodic potentials, *Preprint*, 2004.
- Д. Douady R., Stabilité ou instabilité des points fixes elliptiques, *Ann. Sci. Ec. Norm. Super.* **IV** Ser. **21**, 1–46 (1988)
- К. Kaloshin V., Geometric proofs of Mather’s connecting and accelerating theorems *Proc. (Katsively)* (Cambridge University Press)(2003)
- М1. Mather J., *Talk given at the conference in dynamical systems*, Oberwolfach (1997)
- М2. Mather J., *Lectures given at School and Workshop on Dinamical Systems* ICTP, August
- ММ. MacKay R. S., Meiss J. D., Cantori for symplectic maps near the anti-integrable limit. *Nonlinearity* **V**, 5, V. 149, 1992, P. 1–12.
- Р. Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. V. 1–3. Paris: Gauthier–Villars, 1892, 1893, 1899.
- Т2. Treschev D., Multidimensional symplectic separatrix maps *J. Nonlinear Sci* **12** 27-58, 2002.
- Т3. Treschev D., Trajectories in a neighborhood of asymptotic surface of *a priori* unstable Hamiltonian systems *Nonlinearity* **15** 2033-52, 2002.
- Т4. Treschev D., Evolution of slow variables in *a priori* unstable Hamiltonian systems *Nonlinearity* **17** 1803-1841, 2004.