ПОМИ ПРЕПРИНТ — 22/2004

О КОЛИЧЕСТВЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧЕК НА СТРОГО ВЫПУКЛОЙ КРИВОЙ

Ф. В. Петров

Санкт-Петербургское Отделение Математического Института РАН
РОССИЯ, 191023, Санкт-Петербург,
наб. Фонтанки, 27
E-mail: fedor@fp5607.spb.edu

Декабрь 25, 2004

АННОТАЦИЯ

Если γ — ограниченная строго выпуклая кривая на плоскости, то $\sharp(\gamma \cap (\mathbb{Z}/n)^2) = o(n^{2/3})$. Это усиливает классический результат Ярника [J] (оценку $cn^{2/3}$) и опровергает гипотезу о существовании т. н. *универсальной* кривой Ярника.

Ключевые слова: выпуклая кривая, целые точки, аффинная длина

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00093).

В знаменитой работе Ярника [J] было (в числе прочего) доказано, что максимальное количество целых точек, которые могут лежать на строго выпуклой кривой длины N на плоскости, растет как $cN^{2/3}$ (точная константа c также вычислена Ярником и равна $3(2\pi)^{-1/3}$). Иными словами, количество точек сетки $L_N := (\mathbb{Z}/N)^2$, лежащих на строго выпуклой кривой γ длины 1, не превосходит $cN^{2/3}$ и для любого N существует такая строго выпуклая кривая $\gamma^{(N)}$ длины 1, что

$$k(\gamma^{(N)}, N) := \sharp(\gamma^{(N)} \cap L_N) \geq cN^{2/3} \qquad (*)$$

В связи с этим возникает естественный вопрос: а существует ли *универсальная* кривая γ, для которой (*) выполняется для бесконечного количества натуральных N? Впервые указанный вопрос явно сформулирован, видимо, в работе А. Планя [P], в которой автор указывает, что был введен в проблематику Ж.-М. Дезуйе (Jean-Marc Deshouillers) и Дж. Грекосом (Georges Grekos). Дезуйе, в свою очередь, узнал об этой задаче от А. М. Вершика.

Свиннертон-Дайер [SD] доказал, что если $\gamma \in C^3$, то $k(\gamma, N) \leq cN^{3/5+\varepsilon}$, а Бомбьери и Пила [BP] — что для бесконечно гладкой γ имеет место $k(\gamma, N) \leq cN^{1/2+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$. Мы здесь не будем перечислять многочисленные дальнейшие результаты в этом направлении, связанные с гладкостью, уловиями на кривизну и другими ограничениями на кривую.

В работах Вершика и Барани ([Be], [Ba]) обсуждаются вопросы о предельных формах многоугольников с вершинами на мелкой сетке. Ответы на эти вопросы выявляют связь с аффинной геометрией. Именно, пусть $l_a(\gamma)$ обозначает аффинную длину кривой γ (интеграл по натуральному параметру от кубического корня из кривизны). Оказывается, что количество многоугольников с вершинами в узлах L_n, лежащих в малой окрестности данной кривой γ, растет как $e^{c \cdot l_a(\gamma) n^{2/3}}$, а количество вершин этих многоугольников — как $c \cdot l_a(\gamma) n^{2/3}$ (замечательно, что это верно как для максимального возможного количества вершин, так и для количества вершин типичного многоугольника, отличаются только константы). Многоугольники с вершинами в узлах сетки L_n, содержащиеся в данном выпуклом многоугольнике, концентрируются около замкнутой выпуклой кривой, которая имеет максимально возможную аффинную длину ([Ba]). Эта кривая составлена из кусков парабол, вписанных в углы многоугольника. Поэтому количество узлов сетки L_N на такой кривой не превосходит $C \cdot N^{1/2}$. Таким образом, типичная кривая не является универсальной. Здесь мы покажем, что в действительности универсальной кривой не существует: для любой ограниченной строго выпуклой кривой γ выполнена оценка $k(\gamma, n) = o(n^{2/3})$.

Я глубоко признателен А. М. Вершику за постановку задачи, многочисленные полезные обсуждения и внимание к работе, включающее и труд по редактированию рукописи. Я также благодарен А. Городнику за ценную консультацию по равномерной распределенности.

§1. Определения и обозначения.

Зафиксируем на плоскости декартову систему координат.

Будем обозначать через $S(F)$ удвоенную площадь многоугольника F; через $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ будем обозначать псевдоскалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ (то есть ориентированную площадь параллелограмма, построенного на этих векторах).

Зафиксируем на плоскости треугольник ABC, ориентированный так, что $S = S(ABC) = +\overline{AC} \times \overline{CB}$. Определим следующие объекты:

1. $\mathrm{An} = \mathrm{An}(ABC)$ — угол с вершиной в начале координат, образованный лучами, сонаправленными с AC и CB (величина этого угла есть $\pi - \angle ACB$). Угол будем рассматривать как множество векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, которые, будучи отложенными из начала координат, лежат в An.

2. Для вектора $\mathbf{x}$ определим его *обхват* (относительно треугольника ABC) как

$$[\mathbf{x}] = (\mathbf{x} \times \overline{CB} + \overline{AC} \times \mathbf{x})/S.$$

Обхват — линейная функция вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Заметим, что $[\overline{AC}] = [\overline{CB}] = 1$, $[\overline{AB}] = 2$. Будем называть обхватом отрезка PQ величину $[PQ] = |[\overline{PQ}]|$.

3. Определим ABC–радиус произвольного треугольника как произведение обхватов его сторон, деленое на учетверенную площадь. (если вместо обхватов брать длины сторон, получится радиус описанной окружности. В действительности ABC-радиус можно интерпретировать как

"радиус" описанной около треугольника параболы с осью, параллельной вектору $\overline{AC}+\overline{BC}$). Заметим, что ABC-радиус треугольника ABC равен S^{-1}.

4. Строго выпуклую ломаную вида $AC_1C_2\dots C_kB$ будем называть (AB,C)-ломаной, если все ее вершины лежат в треугольнике ABC. Если при этом промежуточные вершины $C_i (i=1,\,2,\,\dots,k)$ лежат на сетке $L_n=(\frac{1}{n}\mathbb{Z})^2$, будем называть такую ломаную $(AB,C;n)$-ломаной.

5. Пусть (AB,C)-ломаная $\gamma=AC_1C_2\dots C_kB$ вписана в (AB,C)-ломаную $\gamma_1=AD_1D_2\dots D_{k+1}B$ (то есть точки C_i лежат на соответственных отрезках $D_iD_{i+1}\,(i=1,\,2,\,\dots,\,k)$). Будем называть *обобщенной аффинной длиной* ломаной γ относительно γ_1 величину

$$l_A(\gamma:\gamma_1):=\sum_{i=0}^{k}S(C_iD_{i+1}C_{i+1})^{1/3}\,(C_0=A,\,C_{k+1}=B),$$

а обобщенной аффинной длиной ломаной γ величину

$$l_A(\gamma)=\sup_{\gamma_1}l_A(\gamma:\gamma_1),$$

где супремум берется по всем (AB,C)-ломаным γ_1, описанным около γ.

§2. Предварительные утверждения.

Прежде всего, нам понадобится оценка количества k промежуточных вершин $(AB,C;n)$-ломаной при больших n. Для этого воспользуемся тем известным фактом, что площадь выпуклого k-угольника с вершинами на сетке $\mathbb{Z}^2$ не меньше, чем $(8\pi^2)^{-1}k^3\geq(k/5)^3\,(k\geq 3)$. Отсюда получаем, что

$$k\leq\max(3,5(Sn^2)^{1/3})\tag{1}$$

Таким образом, максимальное количество узлов сетки L_n, лежащих в треугольнике площади S и образующих выпуклый многоугольник, растет не быстрее чем $c(Sn^2)^{1/3}$. В действительности оно растет ровно как $c(Sn^2)^{1/3}$. Пример $(AB,C;n)$-ломаной с количеством звеньев порядка $c(Sn^2)^{1/3}$ может быть построен следующим образом: упорядочим вектора множества $\mathrm{An}\cap L_n$ в порядке возрастания обхвата. Возьмем $c(Sn^2)^{1/3}$ векторов с наименьшим обхватом и построим выпуклую ломаную, для которой эти вектора будут векторами звеньев. При не слишком большом c (скажем, $c=1/100$) эту ломаную можно параллельно перенести в треугольник ABC так, чтобы ее вершины лежали в узлах сетки L_n и образовывали, вместе с вершинами A и B, (AB,C)-ломаную. Приведенная конструкция вполне аналогична конструкции Ярника [J] ломаной данной длины, содержащей наибольшее количество целых точек, и может служить ее "аффинным" обобщением. Этот пример понадобится лишь в параграфе 4.

Идея доказательства сформулированного в аннотации утверждения такова: проводя касательные к кривой в точках ее пересечения с сеткой L_n при больших n получаем много маленьких треугольников, в объединении которых содержится наша кривая. Оказывается, что если точек на этих сетках достаточно много, то сумма кубических корней из площадей этих треугольников (величина, названная обобщенной аффинной длиной) будет при добавлении точек очередной сетки уменьшатся в некоторую константу раз (лемма 4), что невозможно. Для доказательства леммы 4 используются некоторые технические утверждения, которым и посвящен этот параграф.

Рассмотрим все вектора из множества $\mathbb{Z}^2\cap\mathrm{An}$ и упорядочим их по возрастанию обхвата. Рассмотрим k таких векторов $\mathbf{z}_1,\,\mathbf{z}_2,\,\dots,\mathbf{z}_k$ с наименьшим обхватом.

Набор векторов $\mathbf{z}_1,\,\mathbf{z}_2,\,\dots,\,\mathbf{z}_k$ устроен следующим образом: это все вектора, концы которых лежат в треугольнике $OPQ=\mathrm{An}\cap\{\mathbf{z}:[\mathbf{z}]<r=[\mathbf{z}_k]\}$, и несколько векторов с обхватом, равным r. Имеем

$$k=\frac{1}{2}S(OPQ)+o(r^2)=\frac{S}{2}r^2+o(r^2)$$

Кроме того,

$$\sum[\mathbf{z}_i]=\int_{OPQ}[\mathbf{x}]d\mathbf{x}+o(r^3)=r^{-1}S^{-1}\int_{OPQ}(S(OPX)+S(OQX))d\mathbf{x}+o(r^3)=\frac{S}{3}r^3+o(r^3).$$

Отсюда

$$\sum[\mathbf{z}_i] \geq cS^{-1/2}k^{3/2} + o(k^{3/2}),\ c = 2\sqrt{2}/3 \tag{2}$$

Эта оценка понадобится нам в дальнейшем.

Следующая элементарная лемма является технической основой всего дальнейшего.

Лемма 1. Пусть точки P, R выбраны на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, а точка Q — на отрезке PR. Тогда:

1°. $S(AQP)^{1/3} + S(BQR)^{1/3} \leq S^{1/3}$.

Кроме того, существует функция $\varepsilon_1(\varepsilon)$, убывающая к нулю при $\varepsilon \to 0$, такая что если $\mathrm{Err} := 1 - (S(APQ)/S)^{1/3} - (S(BQR)/S)^{1/3} < \varepsilon[AQ]$, то

2°. $[AP] : [PQ] \in (1-\varepsilon_1, 1+\varepsilon_1)$

3°. $r(AQP) \in S^{-1}(1-\varepsilon_1, 1+\varepsilon_1)$, где $r(AQP)$ есть ABC-радиус треугольника AQP.

4°. Для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathrm{An}(AQP)$ имеем $[\mathbf{x}]_{AQP} : [\mathbf{x}] \in (AP : AC) \cdot (1-\varepsilon_1, 1+\varepsilon_1)$ (через $[\mathbf{x}]_{AQP}$ обозначается AQP-обхват вектора $\mathbf{x}$).

Доказательство. Имеем

$\mathrm{Err} = 1 - (S(APQ)/S)^{1/3} - (S(BQR)/S)^{1/3} = 1 - (\frac{AP}{AC}\cdot\frac{PQ}{RP}\cdot\frac{RC}{CB})^{1/3} - (\frac{PC}{AC}\cdot\frac{QR}{RP}\cdot\frac{BR}{BC})^{1/3} =$

$= \left((\frac{AP}{AC}+\frac{PQ}{RP}+\frac{RC}{CB})/3 - (\frac{AP}{AC}\cdot\frac{PQ}{RP}\cdot\frac{RC}{CB})^{1/3}\right) + \left((\frac{PC}{AC}+\frac{QR}{RP}+\frac{BR}{BC})/3 - (\frac{PC}{AC}\cdot\frac{QR}{RP}\cdot\frac{BR}{BC})^{1/3}\right) \quad (6)$

Две последние скобки имеют вид $(x+y+z)/3 - (xyz)^{1/3}$ (и отсюда по неравенству о средних следует пункт 1 леммы). Имеем

$$2(x+y+z) - 6(xyz)^{1/3} = (x^{1/3}+y^{1/3}+z^{1/3})\left((x^{1/3}-y^{1/3})^2 + (y^{1/3}-z^{1/3})^2 + (z^{1/3}-x^{1/3})^2\right).$$

Значит, если $\max(x,y,z) \geq (1+\delta)\min(x,y,z)$, то $(x+y+z)/3 - (xyz)^{1/3} \geq c(\delta)(x+y+z)$, где $c(\delta)$ — положительная убывающая к нулю при $\delta \to 0$ функция. Применяя это наблюдение к первому слагаемому в правой части (6) ($x = AP/AC$, $y = PQ/RP$, $z = RC/CB$), получаем, что если $\mathrm{Err} \leq \varepsilon[AQ]$, то, так как $[AQ] = [AP] + [PQ] = AP/AC + (PQ/PR)\cdot[PR] \leq (AP/AC) + 2(PQ/PR)$, выполнена оценка $\mathrm{Err} \leq 2\varepsilon(x+y+z)$, поэтому $\max(x,y,z) : \min(x,y,z) < 1+\varepsilon_1$, где ε_1 таково, что $c(\varepsilon_1) > 2\varepsilon$. Такое $\varepsilon_1(\varepsilon)$ можно выбрать, при этом ε_1 будет стремиться к нулю при $\varepsilon \to 0$. Далее,

$$[PA] = x,\ [PQ] = (PQ/PR)\cdot[PR] = y([PC]+[CR]) = y(1-x+z) = [PA]\cdot(y/x)\cdot(1-x+z)$$

Имеем

$$y/x \in (1-\varepsilon_1, 1+\varepsilon_1),\ 1-x+z = 1+z(1-x/z) \in (1-z\varepsilon_1, 1+z\varepsilon_1) \subset (1-\varepsilon_1, 1+\varepsilon_1),$$

поэтому

$$[PA] : [PQ] \in ((1-\varepsilon_1)^2, (1+\varepsilon_1)^2) \subset (1-\varepsilon_2, 1+\varepsilon_2),\ \varepsilon_2 := 2\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2,$$

что доказывает пункт 2 (с ε_2 вместо ε_1).

Для доказательства пункта 3 заметим, что

$$S\cdot r(AQP) = [AP]\cdot[PQ]\cdot(\frac{[AP]+[PQ]}{2})\cdot(S/S(APQ)) = \frac{[AP]\cdot[PQ]\cdot([AP]+[PQ])}{2xyz} \in (1-\varepsilon_3, 1+\varepsilon_3)$$

где $\varepsilon_3(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, так как попарные отношения чисел $[AP] = x$, $[PQ]$, y, z лежат в отрезке $(1-\varepsilon_2, 1+\varepsilon_2)$.

Перейдем к доказательству пункта 4. Пусть $\mathbf{x} = a\overline{AP} + b\overline{PQ}$, $\mathbf{x} \in \mathrm{An}(AQP)$ (a, $b \geq 0$) Тогда $[\mathbf{x}]_{AQP} = a+b$, $[\mathbf{x}] = a[AP]+b[PQ] = (a+b)[AP]+b([PQ]-[AP]) = (AP/AC)(a+b)(1+\frac{b}{a+b}\cdot([PQ]/[AP]-1))$. Отсюда и следует утверждение пункта 4.

Следствие. Применяя утверждение пункта 1 леммы несколько раз, мы приходим к следующему важному факту: аффинная длина любой (AB,C)-ломаной γ удовлетворяет неравенству $l_A(\gamma) \leq S^{1/3}$. Кроме того, аффинная длина не увеличивается при добавлении к ломаной новых вершин.

Сейчас мы сформулируем утверждение об асмптотическом распределеления целых точек на поверхности $ab - cd = \mathrm{const}$.

Лемма 2. Рассмотрим пары векторов $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{An} \cap \mathbb{Z}^2$, для которых $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = m$ $(0 \neq m \in \mathbb{Z}$ — некоторая константа. Можно говорить и о 2×2 матрицах с целыми элементами и определителем m, однако в нашей ситуации будут фигурировать именно треугольники заданной площади). Каждой такой паре сопоставим *специальную* точку $([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) \in [0, \infty)^2$. Тогда специальные точки распределены равномерно в первом квадранте в следующем смысле: для любой ограниченной области $\Omega \subset (0, \infty)^2$ с кусочно-гладкой границей количество специальных точек в области $N\Omega$ есть (при $N \to \infty$)

$$c(m)S \cdot N^2 S(\Omega) + o(N^2),$$

где $c(m)$ — некоторая зависящая от m константа (именно, $c(m) = (2\zeta(2))^{-1}\sigma(m)/m$, $\sigma(m)$ — сумма натуральных делителей числа m).

Доказательство леммы 2 вынесено в приложение. Как указал автору Александр Городник, это утверждение можно вывести и из известных общих результатов (например, [EM]).

Следствие. Рассмотрим треугольники (определенные с точностью до параллельного переноса) PQR такие, что

$1^\circ.\ \overline{PQ}, \overline{QR} \in \mathrm{An} \cap \mathbb{Z}^2$

$2^\circ.\ [PR] \leq M(n/S)^{1/3}$

$3^\circ.\ r(PQR) \in 2nS^{-1}(t_1, t_2)\ (0 < t_1 < t_2)$

$4^\circ.\ S(PQR) \leq m\ (m \in \mathbb{N})$.

Для количества $N(m, M, t_1, t_2)$ таких треугольников выполняется соотношение (по $n \to \infty$):

$$N(m, M, t_1, t_2) \leq c(m)(t_1 - t_2)^3 (nS^2)^{1/3} + o(n^{2/3}).$$

Доказательство сразу следует из леммы 2 для областей $\Omega(m', M, t_1, t_2) = \{(p, q) : 0 < p, q < M,\ pq(p+q) \in 4m'(t_1, t_2)\}$ и $N = (n/S)^{1/3}$ $(m' = 1, 2, \ldots, m)$ и того факта, что область $\Omega(m', \infty, 0, 1)$ имеет конечную площадь.

Лемма 3. Рассмотрим выпуклый четырехугольник $PSTR$ такой, что $\overline{PS}, \overline{ST}, \overline{TR} \in \mathrm{An}$. Пусть Q — точка на его стороне ST. Тогда величина $r(PQR)$ лежит между числами $\frac{[PQ]}{[PS]} r(PQS)$ и $\frac{[QR]}{[RT]} r(QTR)$.

Доказательство. Имеем

$$S(PQR) = \frac{[QR]}{[SQ]} S(PQS) + \frac{[PQ]}{[QT]} S(RQT)$$

Это равенство может показаться неожиданным: правая часть априори зависит от линейной функции $[\mathbf{x}]$. Доказать его можно, например, так: при движении точек S и T по лучам QS и QT ни левая, ни правая части равенства не меняются. Поэтому можно считать, что $[SQ] = [QR]$ и $[QT] = [PQ]$. Первое равенство означает, что прямая, соединяющая Q с серединой отрезка RS параллельна вектору $\overline{AC} + \overline{BC}$. Аналогично, второе равенство означает, что этому вектору параллельна прямая, соединяющая Q с серединой отрезка PT. Таким образом, точка Q лежит на прямой Гаусса четырехугольника $PRTS$, а потому удовлетворяет задающему эту прямую равенству $S(PXR) + S(TXS) = S(SXP) + S(RXT)$ (разумеется, прямую задает равенство с ориентированными, а не обычными площадями), что и требовалось доказать. Отсюда получаем

$$2r(PQR) = \frac{[PQ] \cdot [QR] \cdot ([PQ] + [QR])}{\frac{[QR]}{[SQ]} S(PQS) + \frac{[PQ]}{[QT]} S(RQT)} = \frac{[PQ] + [QR]}{\frac{[PS]}{2r(PQS)} + \frac{[TR]}{2r(QTR)}}$$

Как известно, частное $\frac{x+y}{x'+y'}$ лежит между $\frac{x}{x'}$ и $\frac{y}{y'}$. Полагая $x = [PQ]$, $y = [QR]$ и $x' = \frac{[PS]}{r(PQS)}$, $y' = \frac{[TR]}{r(QTR)}$, получаем требуемое.

§3. Основная часть

Теорема 1. Пусть γ — ограниченная строго выпуклая кривая. Тогда $k(\gamma, n) = o(n^{2/3})$.

Лемма 4. Для любого $c > 0$ существует такое число $a(c) > 0$, что для любого треугольника $\triangle ABC$ при всех достаточно больших натуральных $n > N(c, \triangle ABC)$ выполнено следующее утверждение: для любой $(AB, C; n)$-ломаной γ с количеством звеньев $\geq c(n^2 S(ABC))^{1/3}$ выполнено неравенство $l_A(\gamma) \leq (1 - a(c))S(ABC)^{1/3}$.

Иными словами, если в ломаной достаточно много звеньев, то у нее не слишком большая обобщенная аффинная длина.

Покажем, как из леммы 4 следует теорема.

Предположим, что теорема неверна и для некоторой ограниченной строго выпуклой кривой γ имеем $k(\gamma, q_n) \geq cq_n^{2/3}$ для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел $q_1 < q_2 < q_3 \ldots$. Не умаляя общности, кривая γ соединяет точки A и B, находясь внутри некоторого треугольника ABC (любая ограниченная выпуклая кривая разбивается на конечное число таких кривых). Пусть также $S(ABC) = 1$. Обозначим через γ_n вписанную в γ (AB, C)-ломаную, содержащую в качестве промежуточных вершин все точки пересечения $\gamma \cap (\cup_{i=1}^{n} L_{q_i})$. Зафиксируем в каждой точке кривой γ опорную прямую к γ. Проведем эти прямые в вершинах кривой γ_n, получим описанную около γ_n (AB, C)-ломаную γ_n'. Получим треугольники $\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_k$, образованные при пересечении опорных прямых в соседних вершинах ломаной γ_n. Кривая γ лежит в объединении $\cup_{i=1}^{k} \triangle_i$. Обозначим $S_i = S(\triangle_i)$. Пусть $q = q_m$ — такое большое натуральное число, что для каждого треугольника $\triangle_i$ $(1 = 1, 2, \ldots, k)$ выполняется альтернатива из леммы: либо

(1) $\sharp(\gamma \cap \triangle_i \cap L_q) \leq (c/2) \cdot S_i^{1/3} \cdot q^{2/3}$, либо

(2) $l_A(\gamma_m \cap \triangle_i) \leq (1 - a)S_i^{1/3}$.

Отметим еще раз, что число a зависит только от c. Обозначим через M_1 множество номеров i, для которых имеет место случай (1), а через M_2 — множество остальных номеров i (для них имеет место случай (2)). Заметим, что

$$c(\sum_{i=1}^{k} S_i^{1/3})q^{2/3} \leq cS(ABC)^{1/3}q^{2/3} = cq^{2/3} \leq \sharp(\gamma \cap L_q) \leq \sum_{i=1}^{k} \sharp(\gamma \cap L_q \cap \triangle_i) = \sum_{i \in M_1} \sharp(\gamma \cap L_q \cap \triangle_i) +$$

$$+ \sum_{i \in M_2} \sharp(\gamma \cap L_q \cap \triangle_i) \leq (c/2)(\sum_{i \in M_1} S_i^{1/3})q^{2/3} + 5(\sum_{i \in M_2} S_i^{1/3})q^{2/3} \leq (c/2)(\sum_{i=1}^{k} S_i^{1/3})q^{2/3} + 5(\sum_{i \in M_2} S_i^{1/3})q^{2/3},$$

откуда

$$\sum_{i \in M_2} S_i^{1/3} \geq \frac{c}{10}(\sum_{i=1}^{k} S_i^{1/3}).$$

Далее,

$$l_A(\gamma_m : \gamma_m') \leq \sum_{i=1}^{k} l_A(\gamma_m \cap \triangle_i) = \sum_{i \in M_1} + \sum_{i \in M_2} \leq$$

$$\leq \sum_{i \in M_1} S_i^{1/3} + (1 - a) \sum_{i \in M_2} S_i^{1/3} \leq (1 - \frac{ac}{10})(\sum_{i=1}^{k} S_i^{1/3}) = (1 - \frac{ac}{10}) l_A(\gamma_n : \gamma_n').$$

Отсюда следует, что $\lim_{n \to \infty} l_A(\gamma_n : \gamma_n') = 0$, что противоречит сделанным предположениям (из которых следует, что $l_A(\gamma_n : \gamma_n') \geq c/5$)).

Таким образом, достаточно доказать лемму 4.

Пусть $\gamma = C_0 C_1 C_2 \ldots C_k C_{k+1}$ (при этом $C_0 = A, C_{k+1} = B, C_i \in L_n (i = 1, 2, \ldots, k)$)—$(AB, C; n)$−ломаная, и $k \geq cS^{1/3}n^{2/3}$. Зафиксируем опорные прямые l_i в точках C_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, определим также прямые $l_0 = AC$ и $l_{k+1} = BC$. Положим $l_i \cap AC = B_i\,(i = 1, 2, \ldots, k+1)$, $l_i \cap l_{i+1} = D_i\,(i = 0, 1, \ldots, k)$. Имеем

$$l_A(\gamma) = \sup \sum_{i=0}^{k} S(C_i D_i C_{i+1})^{1/3},$$

где супремум берется по выбору опорных прямых к ломаной γ. Далее,

$$S(ABC)^{1/3} - l_A(\gamma) = \sup \sum_{i=1}^{k} x_i,\; x_i = S(AC_{i+1}B_{i+1})^{1/3} - S(C_i C_{i+1} D_i)^{1/3} - S(AC_i B_i)^{1/3}.$$

Числа x_i неотрицательны согласно пункту 1 леммы 1. Наша цель — найти $N \geq c_1 n^{2/3} S(ABC)^{1/3}$ номеров i, для которых $x_i \geq c_2[C_i C_{i+1}] S(ABC)^{1/3}$ (с некоторыми константами c_1 и c_2, зависящими от c). Если нам это удастся, лемма 3 будет доказана в силу оценки (2) на сумму N минимально возможно обхватов.

Отметим также, что если мы найдем $N_1 \geq c_3 n^{2/3} S(ABC)^{1/3}$ номеров i, для которых $x_i \geq c_4[C_i C_{i+1}] S(AC_{i+1}B_{i+1})^{1/3}$, то цель также будет достигнута. Действительно, в силу неравенства (5), имеем оценку $100 n^2 S(AC_{i+1}B_{i+1}) \geq i^3$, так что при $i \geq N_1/2$ имеем $S(AC_{i+1}B_{i+1})^{1/3} \geq c_6 S(ABC)^{1/3}$, а значит для хотя бы $N_1/2$ номеров i будет выполнена требуемая оценка $x_i \geq c_7[C_i C_{i+1}] S(ABC)^{1/3}$.

Как следует из леммы 1, примененной сначала к треугольнику ABC и точкам $P = B_{i+1}$, $Q = C_{i+1}$, а затем к треугольнику $AC_{i+1}B_{i+1}$, $P = B_i$, $Q = C_i$, достаточно для некоторого $\varepsilon_0(c)$ найти $N_1 \geq c_3 n^{2/3} S(ABC)^{1/3}$ номеров i, для которых $\max([C_i D_i], [D_i C_{i+1}]) : \min([C_i D_i], [D_i C_{i+1}]) > 1 + \varepsilon_0$ или $r(C_i D_i C_{i+1}) \notin S^{-1}(1-\varepsilon_0, 1+\varepsilon_0)$. Назовем номер i, удовлетворяющий одному из этих условий, ε_0-выделяющимся. Из леммы 3 (для $PSTR = C_i D_i D_{i+1} C_{i+2}$, $Q = C_{i+1}$) следует следующее

Утверждение. Если номера i и $i+1$ не являются ε_0-выделяющимися, то для некоторого $\varepsilon_1(\varepsilon_0)$ выполнено соотношение $r(C_i C_{i+1} C_{i+2}) \in 2S^{-1}(1-\varepsilon_1, 1+\varepsilon_1)$, при этом ε_1 убывает к нулю вместе с ε_0.

Таким образом, достаточно доказать, что при $\varepsilon > 0$ количество N_ε номеров i, для которых $r(C_i C_{i+1} C_{i+2}) \in 2S^{-1}(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ допускает оценку сверху $N_\varepsilon \leq \varepsilon_1 (Sn^2)^{1/3}$, где ε_1 стремится к нулю вместе с ε.

Заметим, что $\sum S(C_i C_{i+1} C_{i+2})^{1/3} \leq 2S^{1/3}$ (суммы по четным и нечетным i не превосходят $S^{1/3}$ по следствию из леммы 1), так что количество номеров i, для которых $S(C_i C_{i+1} C_{i+2}) \geq mn^{-2}$, не превосходит (по неравенству Чебышева) $2m^{-1/3}(SN^2)^{1/3}$. Кроме того, так как сумма обхватов $\sum_{i=0}^{k}[C_i C_{i+1}] \leq 2$, мы также можем не умаляя общности считать (опять применяя неравенство Чебышева), что $[C_i C_{i+2}] \leq M(n^2 S)^{-1/3}$.

Осталось воспользоваться следствем из леммы 2.

Замечание. Утверждение теоремы можно несколько усилить, полагая $L_n = (\frac{1}{n}\mathbb{Z})^2 + \mathbf{x}_n$, где $\mathbf{x}_n$ — некоторый вектор смещения сетки и выбиря n не обязательно натуральным.

§4. О возможном количестве точек на выпуклой кривой

В работе [P] был приведен пример строго выпуклой ограниченной кривой γ, для которой $k(\gamma, q_n) \geq c_n q_n^{2/3}$, где $q_1 < q_2 < \ldots$ — сколь угодно быстро растущая последовательность натуральных чисел, а коэффициенты c_n стремятся к нулю экспоненциально ($c_n = K^{-n}$, $K > 1$ — некоторая явно указываемая константа). Здесь мы улучшим этот результат, показав, что достаточно сходимости ряда $\sum c_n$. Однако наш метод является довольно грубым и предполагается вероятным, что и это условие может быть ослаблено (возможно, до необходимого условия $\lim c_n = 0$).

Теорема 2. Пусть $\sum c_k < \infty$, $M \subset \mathbb{N}$ — бесконечное множество натуральных чисел. Тогда существует последовательность $q_1 < q_2 < \ldots$, $q_i \in M$ натуральных чисел и выпуклая кривая γ конечной длины такие, что $k(\gamma, q_n) \geq c_n q_n^{2/3}$

Доказательство. Рассмотрим полуокружность длины $\sum c_i$. Разделим ее на дуги длин c_i, пусть концы дуги длины c_i есть A_i и A_{i+1}. Проведем в концах дуг касательные к окружности. Каждая дуга c_i попадет в один из образуемых треугольников $A_i B_i A_{i+1}$, у каждого из которых две стороны лежат на касательных, а одна стягивается хордой. Площадь треугольника $A_i B_i A_{i+1}$ не меньше, чем Cc_i^3, где C не зависит от i. Не умаляя общности, $C > 100$. (иначе сделаем гомотетию с подходящим коэффициентом, увеличивая площади треугольников в $100/C$ раз). Теперь построим в треугольнике $A_iB_iA_{i+1}$ $(A_iA_{i+1}, B; q_i)$-ломаную с вершинами в узлах L_{q_i}, где $q_i \in M$ — такое большое число, что количество промежуточных вершин этой ломаной $\geq c_i q_i^{2/3}$ (возможность построения такой ломаной обсуждалась в параграфе 1). Объединение всех таких ломаных даст требуемую кривую γ.

Приложение. О распределении целых точек на поверхности $ab - cd = \text{const}$.

Рассмотрим ограниченные квадрируемые области Ω_1, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$.Поставим следующий вопрос: какова асимптотика количества $M(\Omega_1, \Omega_2; n)$ пар векторов $\mathbf{x}_1 \in n\Omega_1 \cap \mathbb{Z}^2$, $\mathbf{x}_2 \in n\Omega_1 \cap \mathbb{Z}^2$ таких, что $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = 1$. Рассмотрим сначала случай треугольников

$$\Omega_i = \{(x, y) : 0 < y < x \leq a_i\}\,(i = 1, 2,\, a_i > 0) \tag{$\star$}$$

Тогда задача сводится к поиску числа решений неравенства

$$x_1y_2 - y_1x_2 = 1 \tag{$a1$}$$

при условии

$$0 < y_1 < x_1 < na_1,\ 0 < y_2 < x_2 < na_2 \tag{$a2$}$$

Как хорошо известно, при фиксированных взаимно простых x_1, x_2 уравнение $(a1)$ имеет единственное решение относительно y_1, y_2, для которых $0 < y_1 \leq x_1$, $0 < y_2 \leq x_2$. Случаи равенства $y_1 = x_1$ или $y_2 = x_2$ имеют место только для $x_1 = 1$ или $x_2 = 1$, то есть для не более чем $C(a_1, a_2) \cdot n$ вариантов. Поскольку количество точек со взаимно простыми координатами (x_1, x_2) в прямоугольнике $0 < x_1 < na_1$, $0 < x_2 < na_2$ есть

$$\zeta(2)^{-1} n^2 a_1 a_2 + o(n^2),$$

получаем в случае $(\star)$ асимптотику

$$M(\Omega_1, \Omega_2; n) = \zeta(2)^{-1} n^2 a_1 a_2 + o(n^2).$$

Для дальнейших целей мы перепишем последний ответ следующим образом: если через $l(\Omega, \varphi)$ обозначить (одномерную лебегову) меру пересечения области Ω с прямой $y = \operatorname{tg}\varphi \cdot x$, идущей под углом φ к оси абсцисс, то

$$M(\Omega_1,\, \Omega_2;\, n) = \zeta(2)^{-1} \int_0^{\pi} l(\Omega_1, \varphi) \cdot l(\Omega_2, \varphi) d\varphi\ n^2 + o(n^2) \tag{$a3$}$$

(в случае $(\star)$ интеграл в (a3) можно было бы брать и по меньшему отрезку).

Назовем *базовыми* треугольники площади $1/2$ вида OAB, где O — начало координат, A, B — целые точки.

Заметим, что формула (a3) выполнена также для областей, получающихся из $(\star)$ аффинными действиями элементов группы $SL(2, \mathbb{Z})$. Иными словами, формула (a3) верна для пар треугольников, получающихся из некоторого базового треугольника гомотетиями.

Наш дальнейший план состоит в аппроксимации областей достаточно общего вида объединениями таких "базовых" областей, мало пересекающихся радиально (то есть при центральной проекции на единичную окружность).

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Будем называть базовый треугольник OAB *ε-подходящим*, если

1°. $|OA/OB - 1| < \varepsilon$

2°. $\angle AOB < \varepsilon$.

Нам понадобится следующая

Лемма. Почти любой (в смысле меры Лебега на единичной окружности) луч, выходящий из начала координат, идет внутрь бесконечного числа ε-подходящих базовых треугольников.

Доказательство. Не умаляя общности, луч имеет вид $0 < y = \alpha x$, $0 < \alpha < 1$. Разложим число α в цепную дробь: $\alpha = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots}}$. Для почти всех α элементы a_i не ограничены (известно и распределение элементов цепной дроби для почти всех α — формула Гаусса-Кузьмина. Используемый факт грубее и значительно проще доказывается. См. [X].) В терминах подходящих дробей $\frac{p_k}{q_k}(k = 1,\, 2,\, \ldots)$ это означает, что отношение соседних знаменателей q_{k+1}/q_k не ограничено (так как $q_{k+1} = a_k q_k + q_{k-1}$). Каждой паре соседних подходящих дробей соответствует базовый треугольник OAB ($A = (q_k, p_k)$, $B = (q_{k+1}, p_{k+1})$), внутрь которого направлен луч $y = \alpha x$. Если отношение q_{k+1}/q_k велико, то $OB >> OA$.

Применим процедуру "вытягивания носов". Именно, построим последовательность точек $B_0 = B$, $\overline{OB_i} = \overline{OB_{i-1}} + \overline{OA}$. Один из отрезков $B_{i-1}B_i$ пересечет наш луч. Треугольник $OB_{i-1}B_i$ будет базовым (так как по известному свойству подходящих дробей базовым был треугольник OAB) и, если a_k и k достаточно велики, то ε-подходящим. Лемма доказана.

Пусть теперь области Ω_1, Ω_2 суть гомотетичные треугольники вида $\Omega_1 = OCD$, $\Omega_2 = \lambda\Omega_1$ ($\lambda > 0$), где прямая CD вертикальна и точки C, D лежат в области $0 < y < x$ (C ниже D).

Согласно теореме Витали и лемме, мы можем найти ε-подходящие треугольники OA_iB_i ($i = 1,\, 2,\, \ldots, n$) такие, что лучи OC, OA_1, OB_1, OA_2, OB_2, $\ldots, OA_n$, OB_n, OD идут против часовой стрелки в указанном порядке и $\sum_{i=1}^{n} \angle A_iOB_i > \angle COD - \varepsilon$.

Пусть Δ_i — наибольший треугольник, гомотетичный OA_iB_i, содержащийся в Ω_1 ($i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$).

Тогда суммируя оценки вида (a3) для треугольников Δ_i, $\lambda\Delta_i$ получаем оценку снизу

$$M(\Omega_1, \Omega_2;\, n) \geq \left(\lambda \sum_{i=1}^{n} 2S(\Delta_i)\right) n^2 + o(n^2)$$

При малом ε выполнена оценка $S(\Delta_i) \geq c(\varepsilon) S(\angle A_iOB_i \cap \triangle OCD)$, где $c(\varepsilon) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, устремляя ε к нулю, для указанных областей Ω_1, Ω_2 получаем оценку вида (a3) снизу:

$$M(\Omega_1,\, \Omega_2;\, n) \geq \zeta(2)^{-1} \int_0^{\pi} l(\Omega_1, \varphi) \cdot l(\Omega_2, \varphi) d\varphi\ n^2 + o(n^2) \tag{a4}$$

Рассмотрим точки C_1 и D_1, получающиеся пересечением прямой CD с осью абсцисс и прямой $x = y$ соответственно. Рассмотрим треугольники $\triangle_1 = OC_1C$, $\triangle_2 = OCD$, $\triangle_3 = ODD_1$, $\triangle_0 = OC_1D_1$ и треугольники $\lambda\triangle_i$. Имеем

$$M(\triangle_0, \lambda\triangle_0;\, n) \leq \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} M(\triangle_i, \lambda\triangle_j;\, n).$$

Левая часть неравенства имеет асимптотику вида (a3), три слагаемых правой части (для которых $i = j$) — оценку снизу (a4). Отсюда получаем, что оценка снизу во всех трех случаях является и оценкой сверху, а перекрестные члены дают вклад $o(n^2)$ (последнее и так ясно).

Тем самым асимптотика (a3) установлена для областей указанного вида.

Теперь любые две "достаточно хорошие" (например, квадрируемые) области можно аппроксимировать снизу и сверху суммами и разностями таких областей (суммами трапеций с вертикальными сторонами).

Рассмотрим теперь несколько более общую задачу. Именно, заменим условие $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = 1$, накладываемое на пару векторов, условием $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = m = \text{const} \neq 0$. Опять же, рассматривая сначала треугольники

$$\Omega_i = \{(x, y) : 0 < y < x \leq a_i\}\, (i = 1, 2,\, a_i > 0)$$

находим ответ в этом частном случае. В самом деле, если зафиксировать НОД$(x_1, x_2) = d$ (x_1, x_2 — абсциссы векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$), то получим

$$d^{-1}\zeta(2)^{-1} n^2 a_1 a_2 + o(n^2)$$

искомых пар. Суммируя по всем делителям числа m получаем асимптотику в этом случае

$$M(\Omega_1, \Omega_2; m; n) = \sigma(m) \cdot |m|^{-1} \cdot \zeta(2)^{-1} \int_0^{\pi} l(\Omega_1, \varphi) \cdot l(\Omega_2, \varphi) d\varphi \; n^2 + o(n^2) \qquad (a3')$$

Обобщение на случай областей Ω_1, Ω_2 общего вида производится точно так же, как и для $m = 1$.

Покажем теперь, как из доказанного утверждения следует лемма 2.

Доказательство леммы 2. Не умаляя общности, можно считать область Ω прямоугольником вида $\{0 < x < A,\ 0 < y < B\}$. В этом случае количество специальных точек в прямоугольнике $N\Omega$ есть количество пар векторов $(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \times \mathbf{y} = m$ таких, что $\mathbf{x} \in N\Omega_x$, $\mathbf{y} \in N\Omega_y$, где Ω_x и Ω_y — области, определенные как

$$\Omega_x = \{\mathbf{x} \in \mathrm{An} : [\mathbf{x}] \le A\},\ \Omega_y = \{\mathbf{y} \in \mathrm{An} : [\mathbf{x}] \le B\}.$$

Применяя к этому частному случаю асимптотику вида (3'), получаем требуемое.

Литература.

[J] *V. Jarník.* Über die Gitterpunkte auf konvexen Kurven. Math. Z. 1926. Bd. 24. S. 500–518

[P] *A. Plagne.* A uniform version of Jarník's theorem. Acta Arith., **57**, no.3 (1999), 255-267.

[EM] *A. Eskin, C. McMullen.* Mixing, counting and equidistribution in Lie groups. Duke Math. J. 71(1993), 181-209.

[Ве] *А. Вершик.* Предельная форма выпуклых многоугольников, Функц. анал. и прил. **28** (1994), 13–20.

[Ba] *I. Barany.* The Limit Shape of Convex Lattice Polygons. Discrete and Computational Geometry **13** (1995), 279-295.

[BP] *E. Bomberi and J. Pila.* The number of integral points on arcs and ovals, Duke Math. J. 59 (1989), 337-357

[SD] *H. P. F. Swinnerton-Dyer.* The number of lattice points on a convex curve. J. Number Theory 6 (1974), 128–135.

[X] *А. Я. Хинчин.* Цепные дроби. М., Физматгиз (1961).