КОЛЛЕКТИВНЫЕ ИНВАРИАНТЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ДЕЙСТВИЙ

И.В. ЛОСЕВ

Оглавление

1. Введение

Основным полем является алгебраически замкнутое поле K характеристики 0.

Основным объектом изучения в данной работе являются аффинные нормальные пуассоновы многообразия с гамильтоновым действием редуктивной группы. Аффинное пуассоново многообразие — это аффинное алгебраическое многообразие, алгебра функций которого снабжена скобкой Пуассона. Обозначим через G редуктивную алгебраическую группу и через X аффинное пуассоново многообразие. Действие $G : X$ называется *гамильтоновым*, если G сохраняет скобку на $K[X]$ и задано такое G-эквивариантное линейное отображение $\xi \mapsto H_\xi$ из касательной алгебры $\mathfrak{g}$ группы G в алгебру регулярных функций $K[X]$, что дифференцирование $\{H_\xi, \cdot\}$ алгебры $K[X]$ совпадает с векторным полем скоростей ξ_*. Соответствующий гомоморфизм $K[\mathfrak{g}] \to K[X]$ автоматически является гомоморфизмом пуассоновых алгебр.

Морфизм $\mu_{G,X} : X \to \mathfrak{g}^*$, заданный формулой $\langle \mu_{G,X}(x), \xi \rangle = H_\xi(x), x \in X, \xi \in \mathfrak{g}$, называется *отображением моментов*. Поскольку группа G редуктивна, алгебра $\mathfrak{g}$ обладает невырожденной билинейной симметрической G-инвариантной формой $(\cdot, \cdot)$. Фиксируем некоторую такую форму и, отождествив с её помощью $\mathfrak{g}^*$ с $\mathfrak{g}$, будем рассматривать $\mu_{G,X}$ как морфизм из X в $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим морфизм $\psi_{G,X} : X \to \mathfrak{g}/\!/G$, являющийся композицией отображения моментов и морфизма факторизации $\pi_{G,\mathfrak{g}}$. *Алгеброй коллективных инвариантов* действия $G : X$ будем называть целое замыкание подалгебры $\psi^*_{G,X}(K[\mathfrak{g}]^G)$ в $K[X]^G$. Спектр алгебры коллективных инвариантов обозначим через $C_{G,X}$. Включение $K[C_{G,X}] \hookrightarrow K[X]$ индуцирует G-инвариантный морфизм $\widetilde{\psi}_{G,X} : X \to C_{G,X}$. Морфизм $\psi_{G,X}$ является композицией $\widetilde{\psi}_{G,X}$ и конечного морфизма $C_{G,X} \to \mathfrak{g}/\!/G$. Основной целью этой работы является изучение гомоморфизмов $K[\mathfrak{g}]^G \to K[C_{G,X}], K[C_{G,X}] \hookrightarrow K[X]^G$, или, на языке алгебраической геометрии, схем $C_{G,X}$ над $\mathfrak{g}/\!/G$ и $X/\!/G$ над $C_{G,X}$.

Можно привести две мотивировки для подобного исследования. Первая заключается в замечательных свойствах аналога морфизма $\widetilde{\psi}_{G,X}$ для гамильтонова действия связной компактной группы G на симплектическом компактном многообразии X. Именно, вводится отображение моментов $\mu : X \to \mathfrak{g}$ и рассматривается непрерывное отображение $\psi : X \to C$ (где C — камера Вейля в некоторой картановской подалгебре в $\mathfrak{g}$), которое сопоставляет точке x точку $G\mu(x) \cap C$. Это отображение обладает следующими свойствами (см. [1]):

1. Образ отображения ψ является выпуклым многоогранником.
2. Все слои отображения ψ связны.

Причина, по которой правильным аналогом отображения ψ следует считать именно морфизм $\widetilde{\psi}_{G,X}$, а не $\psi_{G,X}$, заключается в том, что общий слой морфизма $\psi_{G,X}$ может быть не связен, даже в случае связной группы G. Пример доставляет действие группы SL_2 на $K^2 \oplus K^2$ (где под K^2 понимается двумерный неприводимый SL_2-модуль).

Вторая мотивировка приходит из теории инвариантов. Предположим, что многообразие X неприводимо, нормально, и симплектично в общей точке (т.е. на некотором открытом подмножестве в X бивектор Пуассона, соответствующий скобке, невырожден). В этом случае представляет интерес описания алгебры регулярных инвариантов действия $G : X$, централизующих (по скобке Пуассона) все рациональные инварианты. В случае, когда пуассоново поле $K(X)^G$ коммутативно (в этом случае говорят, что действие $G : X$ коизотропно), это даст описание алгебры $K[X]^G$. Мы увидим ниже (предложение 6.6), что указанная алгебра допускает описание в терминах $C_{G,X}$ и $\widetilde{\psi}_{G,X}$.

Идея о необходимости изучения морфизма $\widetilde{\psi}_{G,X}$ принадлежит Ф. Кнопу. В работах [2],[3],[4] им установлены некоторые свойства этого морфизма в случае, когда $X = T^*Y$, где Y — гладкое (не обязательно аффинное) G-многообразие, а группа G связна. Именно, существуют подпространство $\mathfrak{a}$ в картановской подалгебре алгебры $\mathfrak{g}$ и подгруппа $W \subset N_G(\mathfrak{a})/Z_G(\mathfrak{a})$, для которых имеет место изоморфизм $\mathfrak{a}/W \cong C_{G,X}$ как схем над $\mathfrak{g}/\!/G$. Линейная группа $W \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{a})$ порождена отражениями. Далее, морфизм $\widetilde{\psi}_{G,X}$ имеет связные равноразмерные слои. При этом, в случае когда многообразие Y является квазиаффинным, группа W строится по некоторому G-эквивариантному накрытию Галуа над X (конструкция группы W через накрытие в общем случае приведена в работе [5]). Следует отметить, что методы доказательства, использованные в [2],[3],[4] существенно опираются на специфику кокасательных расслоений и, судя по всему, не могут быть перенесены на более общие гамильтоновы действия.

Во время подготовки нашей работы к печати появился также препринт [6], в котором доказаны равноразмерность морфизма $\widetilde{\psi}_{G,X}$ и аналогичный указанному выше результат о строении $\mathfrak{g}/\!/G$-схемы $C_{G,X}$ для действий связных групп на симплектических векторных пространствах. Возможность обобщения используемых методов на более общие гамильтоновы действия неясна.

Мы проведем исследование схемы $C_{G,X}$ над $\mathfrak{g}/\!/G$ и морфизма $\widetilde{\psi}_{G,X}/\!/G : X/\!/G \to C_{G,X}$ в случае, когда X — неприводимое нормальное аффинное многообразие. Перейдем к краткой формулировке основных полученных в работе результатов.

1.1. **Основные результаты.** В этом пункте X — нормальное неприводимое аффинное пуассоново многообразие, снабженное гамильтоновым действием редуктивной группы G.

Нам потребуется понятие *дефекта* гамильтонова действия. Для действия группы G на алгебраическом многообразии Y через $m_G(Y)$ обозначим максимальную размерность орбиты этого действия.

Определение 1.1. Пусть X — гамильтоново G-многообразие, а группа G транзитивно действует на множестве неприводимых компонент многообразия X. *Рангом* многообразия X называется число $\mathrm{rk}_G(X) = m_G(\overline{\operatorname{im}\mu_{G,X}})$. *Нижним дефектом* многообразия X называется разность $m_G(X) - \mathrm{rk}_G(X)$. Нижний дефект будем обозначать через $\underline{\mathrm{def}}_G(X)$. *Верхним дефектом* многообразия X мы будем называть число $\dim \overline{\operatorname{im}\psi_{G,X}}$. Обозначать верхний дефект будем через $\overline{\mathrm{def}}_G(X)$. В случае равенства двух дефектов будем говорить просто о дефекте и писать $\mathrm{def}_G(X)$.

Первым из основных результатов этой работы является оценка на размерность слоев морфизма $\widetilde{\psi}_{G,X}/\!/G$ (или $\psi_{G,X}/\!/G$, что все равно).

Теорема 1.2. *Коразмерность любого слоя морфизма $\widetilde{\psi}_{G,X}/\!/G : X/\!/G \to C_{G,X}$ не меньше $\underline{\mathrm{def}}_G(X)$.*

Далее в этом пункте мы будем предполагать, что действие $G : X$ удовлетворяет следующему условию

(EqDef) $\underline{\mathrm{def}}_G(X) = \overline{\mathrm{def}}_G(X)$.

Условие (EqDef) выполняется, скажем, в случае, когда многообразие X симплектично в общей точке или когда $m_G(X) = \dim G$ (предложение 3.6, следствие 3.9).

При выполнении условия (EqDef) размерность многообразия $C_{G,X}$ равна $\underline{\mathrm{def}}_G(X)$, и, значит, морфизм $\widetilde{\psi}_{G,X}/\!/G$ является равноразмерным. Отсюда следует, в частности, что он открыт. Наши основные результаты касаются строения схемы $\operatorname{im}(\widetilde{\psi}_{G,X}/\!/G) = \operatorname{im}\widetilde{\psi}_{G,X}$ над $\mathfrak{g}/\!/G$. Для того, чтобы сформулировать их, нам потребуются некоторые обозначения.

Именно, обозначим через L стабилизатор общего полупростого элемента из $\overline{\operatorname{im}\mu_{G,X}}$. Через $\mathfrak{l}_{reg}$ мы обозначим открытое подмножество в $\mathfrak{l} = \mathrm{Lie}(L)$, состоящее из таких элементов ξ, что централизатор полупростой части элемента ξ содержится в (и, значит, совпадает с) $\mathfrak{l}$. Мы увидим ниже (пункт 1 предложения 4.2 и предложение 4.4), что многообразие $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{l}_{reg})$ нормально, а его неприводимые (=связные) компоненты транзитивно переставляются группой $N_G(L)$. Выберем одну из компонент Y многообразия $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{l}_{reg})$ и обозначим через N_0 подгруппу в $N_G(L)$, состоящую из всех элементов, оставляющих Y на месте. Замыкание множества $\mu_{G,X}(Y^{(L,L)})$ в $\mathfrak{g}$ окажется аффинным подпространством в $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ размерности $\mathrm{def}_G(X)$ (лемма 6.8). Обозначим это подпространство через $\mathfrak{a}_{G,X}^{(Y)}$. Группа $W_{G,X}^{(Y)} = N_0/L$ линейно действует на пространстве $\mathfrak{a}_{G,X}^{(Y)}$. Окажется (лемма 5.12), что морфизм $C_{G,X} \to \mathfrak{g}//G$ может быть разложен в композицию некоторого доминантного конечного морфизма $C_{G,X} \to \mathfrak{a}_{G,X}^{(Y)}/W_{G,X}^{(Y)}$ и морфизма $\mathfrak{a}_{G,X}^{(Y)}/W_{G,X}^{(Y)} \to \mathfrak{g}//G$, соответствующего ограничению на $\mathfrak{a}_{G,X}^{(Y)}$ элементов из $K[\mathfrak{g}]^G$.

Теперь мы готовы сформулировать теорему, описывающую строение многообразия $\operatorname{im}\widetilde{\psi}_{G,X}$:

Теорема 1.3. *Существует $W_{G,X}^{(Y)}$-многообразие Z и этальный $W_{G,X}^{(Y)}$-эквивариантный морфизм $Z \to \mathfrak{a}_{G,X}^{(Y)}$, для которых $\mathfrak{a}_{G,X}^{(Y)}/W_{G,X}^{(Y)}$-схемы $\operatorname{im}\widetilde{\psi}_{G,X}$ и $Z/W_{G,X}^{(Y)}$ изоморфны.*

Это дает, в частности, частичное описание особенностей многообразия $\operatorname{im}\widetilde{\psi}_{G,X}$. В качестве Z будет взято многообразие $\operatorname{im}\widetilde{\psi}_{T_0,R}$, где T_0 — тор размерности $\mathrm{def}_G(X)$, а R — некоторое аффинное неприводимое нормальное гамильтоново T_0-многообразие, строящееся по X.

При наложении дополнительных ограничений на действие $G : X$ можно сказать больше. Дополнительные ограничения состоят в наличии на многообразии X "хорошего" "умножения на константы". Формально это можно определить следующим образом.

Определение 1.4. Гамильтоново G-многообразие X, снабженное действием группы K^*, перестановочным с действием группы G и удовлетворяющим условиям

(Con1) Морфизм $K^* \times X \to X, (t,x) \mapsto tx$, продолжается до морфизма $K \times X \to X$.

(Con2) Существует положительное целое число k, для которого элемент $\mu_{G,X}(tx) \in \mathfrak{g}$ сопряжен (относительно G) с $t^k \mu_{G,X}(x)$ для всех $t \in K^*, x \in X$.

будем называть *коническим степени k*.

Скажем, кокасательные расслоения и симплектические векторные пространства с естественными действиями группы K^* на них являются коническими (см. пункт 6.5).

Теорема 1.5. *Пусть X — коническое гамильтоново G-многообразие. Тогда морфизм $C_{G,X} \to \mathfrak{a}_{G,X}^{(Y)}/W_{G,X}^{(Y)}$ является изоморфизмом.*

Надо отметить, что, в отличие от случая кокасательных расслоений, группа $W_{G,X}^{(Y)}$ может не порождаться отражениями даже в случае, когда X — гладкое симплектическое коническое многообразие. Пример приведен в пункте 6.6.

1.2. **Структура работы.** Работа разделена на разделы, каждый раздел имеет несколько пунктов. В начале каждого раздела описывается его содержание.

Разделы 2 и 3 посвящены определению пуассоновых многообразий и гамильтоновых действий на них. Поскольку все известные автору источники рассматривают лишь случай гладких симплектических многообразий, изложение здесь весьма подробно.

Разделы 4 и 5 составляют техническое ядро работы. Грубо говоря, основная идея состоит в том, чтобы построить такое аффинное гамильтоново T_0-многообразие R для тора T_0 с $\underline{\mathrm{def}}_{T_0}(R) = \underline{\mathrm{def}}_G(X)$, что морфизм $\widetilde{\psi}_{T_0,R}//T_0$ будет "близким" к $\widetilde{\psi}_{G,X}//G$. Это делается в разделе 5. Результаты раздела 4 служит базой для этой конструкции.

В разделе 6 доказываются наши основные результаты.

Работа имеет приложение, призванное напомнить некоторые более или менее стандартные результаты и фиксировать неоднозначности в выборе знаков.

В конце работы мы приводим указатель наиболее часто встречающихся обозначений.

2. Пуассоновы многообразия

В пункте 1 мы определим пуассоновы (не обязательно гладкие) многообразия. В пункте 2 мы определим бивектор Пуассона и изучим его свойства. В пункте 3 вводятся основные примеры пуассоновых многообразий. Основным результатом этого раздела является существование естественной стратификации пуассонова многообразия на гладкие пуассоновы подмногообразия, на которых бивектор Пуассона имеет постоянный ранг. Это утверждение доказывается в пункте 4. Большая часть материала этого раздела хорошо известна в случае гладких симплектических многообразий.

2.1. **Основное определение.** Коммутативная ассоциативная алгебра A с единицей называется *пуассоновой*, если на ней задана кососимметрическая скобка $\{\cdot,\cdot\}: A\otimes A \to A$, удовлетворяющая тождествам Лейбница и Якоби, т.е.

$$\{f, gh\} = \{f,g\}h + \{f,h\}g, \forall f,g,h \in A, \tag{2.1}$$

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0, \forall f,g,h \in A. \tag{2.2}$$

Таким образом, отображение $f \mapsto \{f,g\}$ является дифференцированием для всех $g \in A$.

Естественным образом определяется пуассонов гомоморфизм алгебр Пуассона. Идеал $I \subset A$ называется пуассоновым, если $\{A, I\} \subset I$. Для такого I на алгебре A/I вводится единственная скобка Пуассона, для которой проекция $A \to A/I$ является пуассоновым гомоморфизмом.

Предложение 2.1. *Пусть $A \subset B$ — алгебраическое расширение алгебр без делителей нуля. Предположим, что на A задана скобка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_A$, а на B — скобка $\{\cdot,\cdot\}_B$ (т.е. билинейная кососимметрическая операция, удовлетворяющая тождеству Лейбница), для которой*

$$\{f,g\}_B = \{f,g\}_A, \forall f,g \in A. \tag{2.3}$$

Тогда $\{\cdot,\cdot\}_B$ является скобкой Пуассона. Если скобки $\{\cdot,\cdot\}^1_B, \{\cdot,\cdot\}^2_B$ на B удовлетворяют (2.3), то они равны.

Доказательство. Для $f,g \in A$ дифференцирования $\{f,\cdot\}, \{g,\cdot\}, \{\{f,g\}_A,\cdot\}$ однозначно поднимаются до дифференцирований алгебры B (из предложения 7.2). Отсюда следует, что $\{f,\cdot\}^1_B = \{f,\cdot\}^2_B$ для $f \in A$ и что

$$\{\{f,g\},\cdot\}_B = \{f,\{g,\cdot\}\}_B - \{g,\{f,\cdot\}\}_B \tag{2.4}$$

для $f,g \in A$. Повторное применение предложения 7.2 к дифференцированиям $\{h,\cdot\}^1_B$, $\{h,\cdot\}^2_B, h \in B$, алгебры A со значениями в B доказывает, что $\{\cdot,\cdot\}^1_B = \{\cdot,\cdot\}^2_B$. Дифференцирования $\{\{f,\cdot\}_B, g\}_B$ и $\{f,\{\cdot,g\}_B\}_B - \{\cdot,\{f,g\}_B\}_B$ совпадают на A по (2.4), и, таким образом, и на B. Аналогично, можем теперь получить, что равенство (2.4) верно для всех $f,g \in B$. Иными словами, $\{\cdot,\cdot\}_B$ является скобкой Пуассона. □

Некоторые свойства алгебр Пуассона изучались в [8], а именно

Предложение 2.2. *Пусть A — пуассонова алгебра. Тогда*

1. *Для мультипликативной системы $S \subset A$ существует единственная скобка Пуассона на алгебре A_S, для которой канонический гомоморфизм $A \to A_S$ является пуассоновым.*
2. *Минимальный простой идеал алгебры A является пуассоновым.*

3. *Радикал алгебры A является пуассоновым идеалом.*

Доказательство. Это лемма 1.3 из [8]. Требуемые утверждения также несложно следуют из леммы 7.1. $\square$

Предложение 2.3. *Пусть A — целая алгебра конечного типа. Тогда целое замыкание $\overline{A}$ алгебры A в поле частных* $\mathrm{Quot}(A)$ *замкнуто относительно скобки Пуассона на* $\mathrm{Quot}(A)$.

Доказательство. Это следует из результатов работы [9], утверждающих, что любое дифференцирование алгебры A (продолженное до дифференцирования поля $\mathrm{Quot}(A)$) оставляет на месте $\overline{A}$. Все предложение доказано в [8]. $\square$

Теперь дадим основное определение этого раздела.

Определение 2.4. Многообразие X называется *пуассоновым*, если для любого открытого подмножества $U \subset X$ алгебра $K[U]$ снабжена скобкой Пуассона, и гомоморфизмы ограничения являются гомоморфизмами алгебр Пуассона. Подмногообразие $Y \subset X$ называется пуассоновым, если пучок его идеалов является пучком пуассоновых идеалов. Морфизм пуассоновых многообразий называется пуассоновым, если соответствующие гомоморфизмы алгебр сечений структурного пучка являются пуассоновыми.

Отметим, что пуассоново подмногообразие само естественным образом является пуассоновым многообразием.

В случае, когда многообразие X квазиаффинно, для того, чтобы задать пуассонову структуру на X, достаточно задать скобку Пуассона на $K[X]$. Это следует из пункта 1 предложения 2.2. Предложения 2.2 и 2.3 могут быть переформулированы на геометрическом языке следующим образом.

Предложение 2.5. *Пусть X — пуассоново многообразие. Тогда*

1. *Любое открытое подмногообразие $Y \subset X$ является пуассоновым подмногообразием.*
2. *Любая неприводимая компонента пуассонова многообразия является пуассоновым подмногообразием.*
3. *Пусть многообразие X неприводимо. Нормализация $\widetilde{X}$ многообразия X снабжается единственной пуассоновой структурой, для которой канонический морфизм $\pi : \widetilde{X} \to X$ является пуассоновым.*

2.2. **Бивектор Пуассона.** Задать кососимметрическую билинейную операцию на X, удовлетворяющую тождеству (2.1), это все равно, что задать глобальное сечение P внешнего квадрата пучка векторных полей $\mathcal{V}ect$ (по поводу определения последнего см. пункт 2 приложения). В случае, когда многообразие X гладко, мы получаем регулярный бивектор в обычном смысле. Если скобка удовлетворяет (2.2), то соответствующий бивектор называется *бивектором Пуассона.* Если P — бивектор Пуассона, то скобка задается равенством

$$\{f, g\} = P(df \wedge dg), f, g \in K(X). \tag{2.5}$$

Пусть $x \in X^{reg}$. По бивектору P_x мы можем построить линейное отображение $v_x : T_x^*X \to T_xX$, определенное формулой (7.1). Пусть f — рациональная функция на X^{reg}. Векторы $v_x(df)$ составляют векторное поле, определенное в точках определения функции f. Это векторное поле называется *косым градиентом* функции f, мы будем обозначать его через $v(f)$. Если P — бивектор Пуассона, то из тождества Якоби для скобки следует, что $L_{v(f)}P = 0$, где L обозначает производную Ли.

Положим

$$T^P_x X = \operatorname{im} v_x. \tag{2.6}$$

Имеем $P_x \in \bigwedge^2 T^P_x X$. Бивектор P_x индуцирует на $T^P_x X$ билинейную кососимметрическую невырожденную форму ω_x по формуле (7.2).

Пусть x — точка из X^{reg}. Ранг бивектора P_x называется рангом бивектора P в точке x. Если для всех $x \in X$ ранг P в x не зависит от x, то говорят, что бивектор P имеет постоянный ранг. На множестве $X^{max} \subset X^{reg}$, состоящем из точек x, для которых $\operatorname{rk} P_x = \max_{y \in X^{reg}} \operatorname{rk} P_y$, пространства $T^P_x X$ составляют локально тривиальное векторное расслоение, которое мы будем обозначать через $T^P X$. Имеем также сечение ω пучка $\bigwedge^2 T^{P*} X$ над X^{max}, равное ω_x в точке x, которое мы в дальнейшем будем иногда называть 2-формой.

Для любой регулярной функции $f \in K[U]$, где U — открытое подмножество в X^{max}, и пуассонова бивектора P имеет место равенство $L_{v(f)} P = 0$, и, значит, производная Ли $L_{v(f)}$ действует на линейных пространствах $\Gamma(U, T^P X), \Gamma(U, \bigwedge^2 T^{P*} X)$. Отметим, что $L_{v(f)}\omega = 0$. Отсюда следует, что для любого открытого подмножества $U \subset X^{max}$ и любых сечений $\xi, \eta \in \Gamma(U, T^P X)$ верно равенство

$$L_{v(f)}\omega(\xi, \eta) = \omega(L_{v(f)}\xi, \eta) + \omega(\xi, L_{v(f)}\eta). \tag{2.7}$$

Теперь получим критерий того, что бивектор P является пуассоновым. Этот критерий будет использован в разделе 4.

Предложение 2.6. *Пусть X — гладкое многообразие, а P — бивектор на X постоянного ранга. Тогда следующие условия эквивалентны*

1. *Бивектор P является пуассоновым.*
2. *Распределение $T^P X$ инволютивно (см. пункт 4 приложения), а форма ω удовлетворяет равенству*

$$\omega([\xi, \eta], \zeta) + \omega([\eta, \zeta], \xi) + \omega([\zeta, \xi], \eta) = L_\xi \omega(\eta, \zeta) + L_\eta \omega(\zeta, \xi) + L_\zeta \omega(\xi, \eta). \tag{2.8}$$

для рациональных сечений ξ, η, ζ расслоения $T^P X$.

Заметим, что по $T^P X$ и ω бивектор P восстанавливается однозначно.

Доказательство. Пусть P — бивектор Пуассона. Из тождества Якоби для скобки следует, что $v(\{f, g\}) = [v(f), v(g)]$ для всех рациональных функций $f, g \in K(X)$. Отсюда следует инволютивность распределения $T^P X$. Выполнение равенства (2.8) в точке $x \in X$ зависит лишь от значений ξ_x, η_x, ζ_x. Поэтому можем положить $\xi = v(f), \eta = v(g), \zeta = v(h)$. Равенство (2.8) следует из равенства (2.7), равенств $v(\{f, g\}) = [v(f), v(g)], \{f, g\} = \omega(v(f), v(g))$ для рациональных функций f, g и тождества Якоби для скобки.

Обратно, пусть распределение $T^P X$ интегрируемо и выполняется (2.8). Распределение $T^P X$ устойчиво относительно производных Ли $L_{v(f)}, f \in K(X)$, в силу инволютивности. Из определения формы ω для любых $f, g, h \in K(X)$ имеем равенство

$$\begin{aligned} &L_{v(f)}\omega(v(g), v(h)) = L_{v(f)} L_{v(g)} h = L_{[v(f), v(g)]} h + L_{v(g)} L_{v(f)} h = \\ &\omega([v(f), v(g)], v(h)) + L_{v(g)}\omega(v(f), v(h)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что обе части равенства (2.8) обращаются в 0 при $\xi = v(f), \eta = v(g), \zeta = v(h)$ и что $L_{v(h)}\omega(v(f), v(g)) = \omega(v(h), [v(f), v(g)])$. Из последнего равенства получаем, что $v(\omega(v(f), v(g))) = [v(f), v(g)]$. Подставляя три таких равенства в левую часть (2.8) убеждаемся, что скобка $\{f, g\} = \omega(v(f), v(g))$ удовлетворяет тождеству Якоби. Но это и есть требуемое. $\square$

Определение 2.7. Пуассоново многообразие X называется *симплектическим*, если оно гладко, и в каждой точке x из компоненты $X_0 \subset X$ имеет место равенство $\mathrm{rk}_x P = \dim X_0$.

Определение 2.8. Говорят, что неприводимое пуассоново многообразие X *симплектично в общей точке*, если X^{max} — симплектическое многообразие.

Если многообразие X симплектическое (соотв. симплектическое в общей точке), то ω является обыкновенной симплектической формой на X (соотв. на X^{max}).

2.3. **Примеры.** Приведем теперь некоторые примеры и конструкции пуассоновых многообразий, важные для нас в дальнейшем:

Пример 2.9. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебраическая алгебра Ли над K. На алгебре $K[\mathfrak{g}^*] \cong S(\mathfrak{g})$ вводится единственная скобка Пуассона, для которой $\{\xi,\eta\} = [\xi,\eta]$ при всех $\xi,\eta \in \mathfrak{g}$. Таким образом, $\mathfrak{g}^*$ становится пуассоновым многообразием. Бивектор Пуассона P задается равенством $P_\alpha(\xi\wedge\eta) = \langle\alpha,[\xi,\eta]\rangle, \alpha \in \mathfrak{g}^*$. Отсюда следует, что $T_x^P = \mathfrak{g}_* x$. Локально-замкнутое подмногообразие $X \subset \mathfrak{g}^*$ является пуассоновым тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно действия группы внутренних автоморфизмов $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$. В частности, коприсоединенные орбиты O группы $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ являются пуассоновыми подмногообразиями в $\mathfrak{g}^*$. Эти многообразия симплектические, симплектическая форма на них называется *формой Костанта-Кириллова.* В явном виде имеем $\omega_\alpha(\xi_*,\eta_*) = \alpha([\xi,\eta]), \alpha \in O, \xi,\eta \in \mathfrak{g}$.

Пример 2.10. Пусть Y — алгебраическое многообразие. Пусть $\mathcal{V}ect$ — пучок векторных полей на нем (см. п 7.2). Линейное расслоение $T^*Y = \mathcal{S}pec(S_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{V}ect))$ называется *кокасательным расслоением* многообразия Y. Кокасательное расслоение локально тривиально тогда и только тогда, когда многообразие Y гладко. Введем пуассонову структуру на $X = T^*Y$. Это достаточно сделать локально и проверить, что полученные структуры согласованы. Поэтому можем считать, что $Y = \mathrm{Spec}(A)$ — аффинное многообразие. В этом случае $K[Y] = S_A(D)$, где $D = \mathrm{Der}(A,A)$ — модуль дифференцирований алгебры A. На $S_A(D)$ существует единственная скобка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$, для которой

$$\begin{gathered}\{f_1,f_2\} = 0, \{f_1,d_1\} = d_1(f_1), \{d_1,d_2\} = [d_1,d_2],\\ f_1,f_2 \in A, d_1,d_2 \in D.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Единственность следует из того, что A и D порождают $S_A(D)$. Поясним, как доказывается существование. Сначала, воспользовавшись построением тензорной алгебры, надо доказать, что любые элементы $x \in D, a \in A$ определяют дифференцирования этой алгебры (коммутирование с этими элементами). Затем, рассмотрев $S_A(D)$, как фактор тензорной алгебры, можно показать, что a,x определяют дифференцирование d_a,d_x алгебры $S_A(D)$. Затем, использовав те же соображения, надо, воспользовавшись правилом Лейбница, построить дифференцирование d_f алгебры $S_A(D)$, соответствующее элементу $f \in S_A(D)$. Скобка $\{g,f\} = d_f(g)$ и будет требуемой.

Согласованность построенных скобок следует из единственности.

В случае, когда Y — гладкое многообразие, построенная пуассонова структура совпадает со стандартной симплектической структурой на T^*Y (см. [11], гл. 2, §1, п.4).

Пример 2.11. Пусть X,Y — пуассоновы многообразия. Прямое произведение $X\times Y$ естественным образом снабжается структурой пуассонова многообразия.

Пример 2.12. Пусть X — пуассоново многообразие, Y — нормальное неприводимое многообразие и $\varphi : Y \to X$ — морфизм, этальный на открытом подмногообразии $Y^0 \subset Y^{reg}$, дополнение к которому имеет коразмерность не меньше 2. Покажем, что Y

снабжается единственной пуассоновой структурой, для которой φ является морфизмом пуассоновых многообразий. Пусть P_X — бивектор Пуассона на X^{reg}. Поскольку касательное расслоение на Y^0 является обратным образом касательного расслоения на X^{reg}, то на Y^0 существует единственный регулярный бивектор P_Y, для которого $d\varphi P_Y = P_X$. Он задает на $K(Y)$ скобку, которая на $K(X)$ совпадает с заданной бивектором P_X, в частности, по предложению 2.1, бивектор P_Y является пуассоновым. Таким образом, Y^0 становится многообразием Пуассона. Поскольку многообразие Y нормально, для любого открытого подмножества $U \subset Y$ выполняется $K[U] = K[U \cap Y^0]$. Это позволяет определить пуассонову структуру на всем Y. Понятно, что при этом φ является морфизмом пуассоновых многообразий. Единственность такой пуассоновой структуры очевидна.

2.4. **Стратификация пуассонова многообразия.** Основной целью этого пункта является доказательство следующего предложения

Предложение 2.13. *Пусть X — пуассоново многообразие. Существует единственное представление X в виде непересекающегося объединения неприводимых локально-замкнутых подмногообразий X_i, обладающих следующими свойствами:*

(a) $\overline{X_i}$ — *пуассоново подмногообразие в X.*
(b) $X_i = \overline{X_i}^{max}$.

Доказательство. Единственность такой стратификации, если она существует, очевидна. Осталось доказать существование. Вопрос, очевидно, является локальным, поэтому достаточно рассмотреть случай аффинного многообразия X. Доказательство теперь осуществляется в несколько шагов.

Шаг1. Докажем следующую лемму

Лемма 2.14. *Пусть X — пуассоново многообразие. Тогда подмногообразие $X^{sing} = X \setminus X^{reg}$ является пуассоновым подмногообразием в X.*

Доказательство леммы. Достаточно доказать, что любое дифференцирование D алгебры $K[X]$, сохраняет такой идеал I, что $V(I) = X^{sing}$ (поскольку отображение $g \mapsto \{f, g\}$ является дифференцированием). Действительно, в этом случае D сохраняет радикал $\sqrt{I}$ идеала I (это следует из леммы 7.1).

Итак, мы должны доказать, что $DI \subset I$ для такого идеала I, что X^{sing} является подмногообразием нулей этого идеала. Пусть X — подмногообразие коразмерности m в аффинном пространстве $\mathbb{A}^r = \mathrm{Spec}(K[x_1, \dots, x_r])$, заданное многочленами $f_1, \dots, f_n$. Положим

$$J^{j_1,\dots,j_m}_{i_1,\dots,i_m} = \det\left(\frac{\partial f_{i_k}}{\partial x_{j_l}}\right)_{j,k=\overline{1,m}}, 1 \leqslant i_1, \dots, i_m \leqslant n, 1 \leqslant j_1 \dots \leqslant j_m \leqslant r.$$

Как известно, см., например, [10], п.16.6, X^{sing} является подмногообразием нулей идеала $I \subset K[X]$, порожденного многочленами $J^{j_1,\dots,j_m}_{i_1,\dots,i_m}$. Покажем, что $DI \subset I$. Обозначим через I_0 (соотв., I_1) идеал в $K[x_1, \dots, x_r]$, порожденный $f_1, \dots, f_n$ (соотв., $f_1, \dots, f_n$, и всеми $J^{j_1,\dots,j_m}_{i_1,\dots,i_m}$). Мы можем рассматривать D, как дифференцирование алгебры $K[x_1, \dots, x_r]$, переводящее I_0 в себя. Нам будет достаточно показать, что $DJ^{1,\dots,m}_{1,\dots,m} \subset I_1$.

Пусть $D = \sum_{i=1}^r g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Обозначим через f строку $(f_1, \dots, f_n)$. Через $Df, \frac{\partial f}{\partial x_j}$ будем обозначать строки, полученные из f соответствующими покомпонентными операциями. Поскольку $DI_0 \subset I_0$, существует $n \times n$-матрица G с коэффициентами в $K[x_1, \dots x_r]$, для которой $Df = fG$.

Отметим, что

$$D\frac{\partial f}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j}G+f\frac{\partial G}{\partial x_j}-\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial g_k}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k} \tag{2.10}$$

Пусть A — $n\times n$-матрица с коэффициентами в $K[x_1,\dots,x_r]$. Обозначим через $J(A,k), k=\overline{1,r}$, определитель, в котором все строки кроме k-ой совпадают с соответствующими строками минора $J^{1,\dots,m}_{1,\dots,m}$, а k-ая равна строке, полученной из $\frac{\partial f}{\partial x_k}A$ взятием элементов, стоящих на местах $1,\dots,m$. Согласно правилу Лейбница, имеет место равенство (во всех слагаемых в правой части фигурируют первые m элементов строки $\frac{\partial f}{\partial x_i}$)

$$DJ^{1,\dots,m}_{1,\dots,m}=\sum_{i=1}^{m}\det\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \dots\\ D\frac{\partial f}{\partial x_i}\\ \dots\\ \frac{\partial f}{\partial x_m}\end{pmatrix}.$$

Используя (2.10) получаем, что достаточно доказать, что $\sum_{k=1}^{r}J(A,k)$ содержится в I_1 для любой матрицы A. Поскольку многочлен $J(A,k)\in K[x_1,\dots,x_r]$ линеен по A, это достаточно сделать для матрицы A, у которой единственный ненулевой элемент стоит в позиции (l,j) и равен 1. Но в этом случае многочлен $\sum_{k=1}^{r}J(A,k)$ равен (с точностью до знака) $J^{1,\dots,m}_{1,\dots,l-1,j,l+1,\dots,m}$. Это следует из правила вычисления определителя разложением по столбцу.

Таким образом, $DJ^{1,\dots,m}_{1,\dots,m}\in I_1$. Что и требовалось. □

Шаг 2. Пусть теперь X — гладкое неприводимое аффинное многообразие, на котором максимальный ранг бивектора P_x равен $2k$. Покажем, что подмногообразие $X\setminus X^{max}$ является пуассоновым. Для этого можем считать (перейдя, если надо, к покрытию открытыми подмножествами), что касательное расслоение TX тривиально. Выберем базис $e_1,\dots,e_n$ в пространстве сечений расслоения TX. Для всех функций f имеет место равенство $L_{v(f)}P^{\wedge k}=0$. Подставляя в последнее равенство $P=\sum_{i,j}P_{ij}e_i\wedge e_j$, мы видим, что дифференцирование $v(f)$ оставляет на месте идеалы, порожденные минорами порядка $2k$ матрицы (P_{ij}). Это дает требуемое.

Шаг 3. Завершим доказательство предложения. Обозначим через X^0 — открытое подмножество в некоторой компоненте многообразия X^{reg}, на котором P имеет максимальный ранг. Из доказанного на двух предыдущих шагах следует, что $X\setminus X^0$ является пуассоновым подмногообразием в X. Многообразие X^0 становится одним из стратов. Теперь остается лишь перейти от X к $X\setminus X^0$ и применить соображения индукции. □

3. Гамильтоновы действия

В первом пункте мы определим гамильтоновы действия редуктивных групп на пуассоновых многообразиях и изучим их простейшие свойства. В пункте 2 мы приведем примеры гамильтоновых многообразий. Наконец, в пункте 3 мы, воспользовавшись гамильтоновыми действиями тора, докажем одно обобщение теоремы Зарисского-Нагаты о чистоте ветвления.

В этом разделе X — пуассоново многообразие (не обязательно гладкое или неприводимое), а G — редуктивная алгебраическая группа, действующая на X пуассоновыми автоморфизмами.

3.1. **Основные определения и некоторые свойства.** Предположим, что задано линейное отображение $\xi \mapsto H_\xi$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в $K[X]$, удовлетворяющее следующим двум свойствам:

(H1) Для любой функции $f \in K(X)$ и любого элемента $\xi \in \mathfrak{g}$ имеет место равенство $L_{\xi_*} f = \{H_\xi, f\}$.

(H2) Отображение $\xi \mapsto H_\xi$ является G-эквивариантным (действие $G : \mathfrak{g}$ берется присоединенное).

Определение 3.1. Действие $G : X$ вместе с отображением $\xi \mapsto H_\xi$, удовлетворяющим условиям (H1),(H2) называется *гамильтоновым.* Мы еще будем говорить в этой ситуации, что X — гамильтоново G-многообразие. Функции H_ξ называются *гамильтонианами действия.* Отображение $\mu_{G,X} : X \to \mathfrak{g}^*$, определенное по правилу $\langle \mu_{G,X}(x), \xi \rangle = H_\xi(x)$ для всех $x \in X, \xi \in \mathfrak{g}$ называется *отображением моментов.*

Поскольку $\{H_\xi, H_\eta\} = L_{\xi_*} H_\eta = H_{[\xi,\eta]}$, отображение моментов является морфизмом пуассоновых многообразий.

В случае, когда X является является гладким симплектическим многообразием, данное определение совпадает с классическим, см., например, [11], гл.2, §2.

В дальнейшем мы фиксируем инвариантную билинейную симметрическую форму $(\cdot,\cdot)$ на $\mathfrak{g}$, и с ее помощью отождествим $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$. Отображение моментов будем рассматривать, как принимающее значения в $\mathfrak{g}$.

Наряду с морфизмом $\mu_{G,X}$ мы будем рассматривать также морфизмы $\psi_{G,X} : X \to \mathfrak{g}/\!/G, \widetilde{\psi}_{G,X} : X \to C_{G,X}$, определенные во введении.

Замечание 3.2. Если H — нормальная подгруппа в G и X — гамильтоново G/H-многообразие, то мы можем естественным образом рассматривать X как гамильтоново G-многообразие, считая, что $\mu_{G,X} = \mu_{G/H,X}$, отождествив $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ с $\mathfrak{h}^\perp \subset \mathfrak{g}$. Обратно, если X — гамильтоново G-многообразие, на котором нормальная подгруппа $H \subset G$ действует тривиально, то мы можем рассмотреть X как гамильтоново G/H-многообразие, положив $\mu_{G/H,X} = \pi \circ \mu_{G,X}$, где $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ есть каноническая проекция. При этом часть информации об отображении моментов может потеряться (ср. замечание 3.8). Отметим, что любой слой морфизма $\psi_{G,X}$ содержится в слое морфизма $\psi_{G/H,X}$.

Определение 3.3. Пусть X_1, X_2 — гамильтоновы G-многообразия, $\varphi : X_1 \to X_2$ — G-эквивариантный пуассонов морфизм. Мы будем называть морфизм φ *гамильтоновым*, если$\mu_{G,X_1} = \mu_{G,X_2} \circ \varphi$.

Изучим поведение дифференциала морфизма $\mu_{G,X}$ в точках из X^{max}.

Предложение 3.4. *Пусть X — гамильтоново G-многообразие и $x \in X^{max}$. Тогда для $v \in T_x^P X, \xi \in \mathfrak{g}$ имеет место равенство*

$$\langle d_x \mu_{G,X}(v), \xi \rangle = \omega_x(\xi_* x, v). \tag{3.1}$$

В частности, $d_x \mu_{G,X}(T_x^P X) = \mathfrak{g}_x^\perp$.

Доказательство. Для доказательства равенства (3.1) возьмем росток $f \in O_{X,x}$, для которого $v = v(f)_x$ и заметим, что $\langle d_x \mu_{G,X}(v), \xi \rangle = -L_v H_\xi(x) = P_x(dH_\xi \wedge df) = \omega_x(\xi_* x, v)$. Второе утверждение непосредственно следует из равенства (3.1) и невырожденности формы ω_x на $T_x^P X$. □

Во введении были определены ранг, верхний и нижний дефекты гамильтонова G-многообразия X. Следующие свойства ранга и дефектов непосредственно следуют из определения

Лемма 3.5. 1. *Пусть группа G транзитивно действует на множестве компонент многообразия X и X_0 — одна из компонент. Тогда* $\underline{\operatorname{def}}_G(X) = \underline{\operatorname{def}}_{G^\circ}(X_0)$, $\overline{\operatorname{def}}_G(X) = \overline{\operatorname{def}}_{G^\circ}(X_0)$, $\operatorname{rk}_G(X) = \operatorname{rk}_{G^\circ}(X_0)$.

2. *Пусть X_1, X_2 — такие гамильтоновы G-многообразия, что группа G переставляет транзитивно компоненты многообразий X_1, X_2. Пусть $\varphi : X_1 \to X_2$ — доминантный, конечный в общей точке гамильтонов морфизм. Тогда* $\underline{\operatorname{def}}_G(X_1) = \underline{\operatorname{def}}_G(X_2)$, $\overline{\operatorname{def}}_G(X_1) = \overline{\operatorname{def}}_G(X_2)$, $\operatorname{rk}_G(X_1) = \operatorname{rk}_G(X_2)$.

Следующее предложение устанавливает основное свойство верхнего и нижнего дефектов

Предложение 3.6. *Имеют место неравенства*

$$\underline{\operatorname{def}}_G(X) \leqslant \overline{\operatorname{def}}_G(X), m_G(X) \leqslant \dim \overline{\mu_{G,X}(X)},$$

одновременно обращающиеся в равенство. В случае, когда многообразие X симплектично в общей точке, имеет место равенство.

Доказательство. Любой слой морфизма $\pi_{G,\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}//G$ содержит конечное число орбит. То же, стало быть, верно и для морфизма $\pi_{G,\overline{\operatorname{im}\mu_{G,X}}} : \overline{\operatorname{im}\mu_{G,X}} \to \overline{\operatorname{im}\psi_{G,X}}$. Значит, все слои морфизма $\pi_{G,\overline{\operatorname{im}\mu_{G,X}}}$ имеют одинаковую размерность, равную $\operatorname{rk}_G(X) = m_G(X) - \underline{\operatorname{def}}_G(X)$. Поэтому неравенства в условии эквивалентны и одновременно обращаются в равенства.

Докажем, что $m_G(X) \leqslant \dim \overline{\operatorname{im}\mu_{G,X}}$, и что в симплектическом случае имеет место равенство. Пусть $x \in X^{max}$. Достаточно показать, что образ пространства $T_x^P X$ при отображении $d_x\mu_{G,X}$ имеет размерность $m_G(X)$. Но это следует из предложения 3.4. □

Замечание 3.7. В случае, когда X — симплектическое многообразие, наше определение дефекта совпадает с данным в [11], п.2.5. Дефект определен там как размерность ограничения симплектической формы на касательное пространство к орбите общего положения. Совпадение следует, например, из предыдущего предложения и предложения 4 из [11], гл.2, §2.

Замечание 3.8. Приведем пример, когда неравенства предыдущего предложения являются строгими. Пусть X — аффинное многообразие, а скобка Пуассона на X нулевая. Пусть на X тривиально действует тор $(K^*)^n$. В этом случае в качестве гамильтонианов могут быть выбраны произвольные функции, и отображение моментов может быть произвольным отображением $X \to K^n$.

Следствие 3.9. *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\underline{\operatorname{def}}_G(X) = \overline{\operatorname{def}}_G(X) = \operatorname{rk} G$.
2. $m_G(X) = \dim G$.

Доказательство. Импликация $(1) \Rightarrow (2)$. По предложению 3.6 $\dim \overline{\mu_{G,X}(X)}//G = \operatorname{rk} G$. Поскольку общий слой морфизма факторизации содержит плотную орбиту, то $\overline{\mu_{G,X}(X)} = \mathfrak{g}$. Но $\underline{\operatorname{def}}_G(X) = \overline{\operatorname{def}}_G(X)$. Из предложения 3.6 теперь следует, что $m_G(X) = \dim G$.

Импликация $(2) \Rightarrow (1)$. Доказательство аналогично. □

3.2. **Примеры.** Приведем некоторые примеры гамильтоновых действий

Пример 3.10. Пусть X — локально замкнутое G-инвариантное подмножество в $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$. X является пуассоновым многообразием (пример 2.9). Положим $H_\xi = \xi \in K[X]$. Тривиально проверяется, что пара $(X, (H_\xi))$ удовлетворяет условиям (H1),(H2), т.е. X является гамильтоновым G-многообразием. Отображение моментов есть ни что иное, как вложение X в $\mathfrak{g}$.

Пример 3.11. Пусть Y — алгебраическое G-многообразие и $X = T^*Y$ (см. пример 2.10). Векторное поле ξ_* на Y определяет функцию H_ξ в $K[X]$ (спаривание с векторным полем ξ_*). Имеем естественное действие группы G на X. Пара $X, (H_\xi)$ очевидным образом удовлетворяет условию (H2). То, что она удовлетворяет также (H1) следует из построения пуассоновой структуры на T^*Y и того, что для любого открытого подмножества $U \subset X$ элемент $\xi \in \mathfrak{g}$ действует на $\mathrm{Der}(K[U], K[U])$, как коммутирование с ξ_*. В случае, когда многообразие Y гладко, построенная гамильтонова структура совпадает с той, которая приводится в [11], гл.2, §2, пример 1.

Пример 3.12. Пусть X — гамильтоново G-многообразие, $\widetilde{X}$ — его нормализация, $\varphi : \widetilde{X} \to X$ — канонический морфизм. На $\widetilde{X}$ существует единственная структура гамильтонова G-многообразия, для которой φ является гамильтоновым морфизмом.

Пример 3.13. Пусть X — гамильтоново G-многообразие, Y — пуассоново подмногообразие в X. Поскольку пучок идеалов многообразия Y устойчив относительно взятия скобки с $H_\xi, \xi \in \mathfrak{g}$, то $G^\circ Y = Y$. В случае, когда многообразие Y инвариантно относительно действия всей группы G, пара $(Y, (H_\xi|_Y))$ удовлетворяет условиям (H1),(H2). Отображение моментов $\mu_{G,Y}$ является ограничением $\mu_{G,X}$ на Y. Таким образом, вложение $Y \hookrightarrow X$ является гамильтоновым.

Пример 3.14. Пусть X_1, X_2 — пуассоновы многообразия, на которых гамильтоново действуют группы G_1, G_2, соответственно. Тогда действие $G_1 \times G_2 : X_1 \times X_2$ является гамильтоновым. Отображение моментов задается формулой $\mu_{G_1\times G_2, X_1\times X_2}(x_1, x_2) = \mu_{G_1,X_1}(x_1) + \mu_{G_2,X_2}(x_2)$ для $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.

Пример 3.15. Предположим, что X — гамильтоново G-многообразие, Y — неприводимое нормальное G-многообразие и $\varphi : Y \to X$ — G-эквивариантный морфизм, удовлетворяющий условию примера 2.12. Тогда Y снабжается пуассоновой структурой. Очевидно, что эта структура G-инвариантна. Пусть H_ξ^X — гамильтонианы для действия $G : X$. Положим $H_\xi^Y = \varphi^*(H_\xi)$. Очевидно, что пара $Y, (H_\xi^Y)$ удовлетворяет условию (H2). С другой стороны, для любого элемента $\xi \in \mathfrak{g}$ имеем дифференцирования $\{H_\xi^Y, \cdot\}, \xi_*$ поля $K(Y)$, совпадающие на $\varphi^*(K(X))$. Расширение полей $\varphi^*(K(X)) \subset K(Y)$ является алгебраическим. Из предложения 7.2 следует, что пара Y, H_ξ^Y удовлетворяет условию (H1). Отображение моментов $\mu_{G,Y}$ является композицией $\mu_{G,X}$ и φ, иными словами, φ является гамильтоновым морфизмом.

Пример 3.16. В частности, пусть η — нильпотентный элемент из $\mathfrak{g}$, и H — подгруппа конечного индекса в G_η. Из того, что все присоединенные орбиты четномерны, следует что алгебра $K[G\eta]$ конечно порождена (см. [7], п. 3.7.). Поэтому и алгебра $K[G/H]$, являющаяся целым замыканием $K[G\eta]$ в $K(G/H)$, такова. Естественный морфизм $\varphi : \mathrm{Spec}(K[G/H]) \to \overline{G\eta}$ удовлетворяет условиям примера 3.15. Таким образом, $X = \mathrm{Spec}(K[G/H])$ снабжается структурой гамильтонова G-многообразия. Имеет место равенство $\mu_{G,X} = \varphi$.

Пример 3.17. Частным случаем предыдущего примера является тавтологическое линейное действие группы $G = (V)$, где V — симплектическое векторное пространство. В этом случае в качестве η можно взять старший вектор представления $G : \mathfrak{g}$. Пуассонова структура на V, полученная таким образом, совпадает со стандартной структурой на симплектическом векторном пространстве. Отображение моментов может быть задано по формуле (см. [11], гл.2, п.2.1, пример 2) $\langle \mu_{G,V}(v), \xi \rangle = \frac{1}{2}\omega(\xi v, v)$. Здесь $\xi \in \mathfrak{g}, v \in V$, а ω — билинейная невырожденная кососимметрическая форма на V, участвующая в определении группы (V).

Пример 3.18. Пусть X — гамильтоново G-многообразие с гамильтонианами $H_\xi, \xi \in \mathfrak{g}$, а H — редуктивная подгруппа в G. Тогда H-многообразие X и отображение $\mathfrak{h} \to K[X], \xi \mapsto H_\xi$, удовлетворяет условиям (H1),(H2), т.е. действие $H : X$ является гамильтоновым. Ограничение формы $(\cdot,\cdot)$ на касательную алгебру $\mathfrak{h}$ группы H является невырожденным и $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp = \mathfrak{g}$. Отображение моментов задается по формуле $\mu_{H,X} = \pi \circ \mu_{G,X}$, где π — ортогональная проекция с $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}$. В частности, любое линейное действие редуктивной группы G на симплектическом G-модуле является гамильтоновым.

Пример 3.19. Пусть X — аффинное гамильтоново G-многообразие, а редуктивная группа H действует на X гамильтоновыми автоморфизмами. Тогда фактор $X//H$ наделяется единственной структурой гамильтонова G-многообразия, для которой морфизм $\pi_{H,X}$ является гамильтоновым.

3.3. **Приложение: теорема Зарисского-Нагаты о чистоте ветвления.** Следующее предложение является обобщением известной теоремы Зарисского-Нагаты о чистоте ветвления (см., например, [12], гл.4, п.1.3). Впрочем, это обобщение несложным образом может быть выведено и из самой теоремы.

Предложение 3.20. *Пусть X, Y — неприводимые алгебраические многообразия одинаковой размерности, причем многообразие Y нормально, а многообразие X гладко. Пусть $\varphi : Y \to X$ — доминатный морфизм. Тогда дополнение в Y к открытому подмножеству $Y^0 \subset Y$ точек этальности морфизма φ является подмногообразием чистой коразмерности 1.*

Доказательство. Доказательство от противного. Выбросив компоненты многообразия $Y \setminus Y^0$, которые имеют коразмерность 1, можем считать, что $\operatorname{codim}_Y Y \setminus Y^0 \geqslant 2$. Далее, у всякой точки $x \in X$ есть окрестность, допускающая этальный морфизм в аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ (см. [12], гл.3, п.6.1.). Поэтому можем считать, что $X = \mathbb{A}^n$. Пусть $T = (K^*)^n$. Тогда действие $T : T^*T \cong T \times \mathbb{A}^n$, где действие $T : \mathbb{A}^n$ тривиально, является гамильтоновым (пример 3.11). Рассмотрим действие $T : T \times Y$ и T-эквивариантный морфизм $\Phi : T \times Y \to T \times \mathbb{A}^n$, для которого $\Phi(1, y) = (1, \varphi(y))$. Этот морфизм удовлетворяет условию примера 3.15, поэтому действие $T : T \times Y$ является гамильтоновым. Многообразие Y не может быть гладким, иначе подмногообразие точек неэтальности морфизма φ было бы дивизором. Из леммы 2.14 следует, что $T \times Y^{sing} = (T \times Y)^{sing}$ является пуассоновым подмногообразием в $T \times Y$. Действие $T : Z = T \times Y^{sing}$ является гамильтоновым (пример 3.13). Однако $\overline{\operatorname{def}}_T(Z) \leqslant \dim Z//T = \dim Y^{sing} < \dim Y = \dim T = \underline{\operatorname{def}}_T(Z)$. Противоречие с предложением 3.6. $\square$

4. Локальная структура гамильтоновых действий

Основная цель этого раздела состоит в частичном описании действия на некотором открытом насыщенном подмножестве неприводимого нормального аффинного гамильтонова многообразия (п.4.2).

Ниже, если не оговорено противное, через G обозначена редуктивная группа, а через X неприводимое нормальное аффинное гамильтоново G-многообразие.

Пункт 1 посвящен редуцированным гамильтоновым действиям. Именно, пусть L — подгруппа Леви в G°, $\mathfrak{l}$ — касательная алгебра группы L, $N = N_G(L)$. Мы определим некоторое главное открытое подмножество $\mathfrak{l}_{reg}$ в $\mathfrak{l}$, состоящее из "регулярных" элементов (см. определение 4.1 ниже). Положим $\widetilde{Y} = \mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{l}_{reg})$. Мы покажем, что многообразие $\widetilde{Y}$ является нормальным и снабдим его структурой гамильтонова N-многообразия с отображением моментов $\mu_{N,Y} = \mu_{G,X}|_{\widetilde{Y}}$. Получившееся гамильтоново N-многообразие мы назовем *редуцированным* и обозначим через $\mathrm{Red}_G^N(X)$. Имеется естественный морфизм $G*_N(\mathrm{Red}_G^N(X)) \to X, [g,y]\mapsto gy, g\in G, y\in \mathrm{Red}_G^N(X)$. Оказывается, что верна теорема о локальном сечении: это отображение является этальным морфизмом (под локальным сечением в этом случае надо понимать подмногообразие $\mathrm{Red}_G^N(X)\subset X$). Первоначальный вариант этой теоремы был доказан Гийеминым и Стернбергом в [13] для действий компактных групп на гладких вещественных многообразий. Кноп в [3] доказал подобную теорему для случая действий редуктивных групп на гладких симплектических алгебраических многообразиях. Последний вариант служит отправной точкой для нашей конструкции.

Основное применение теорема о локальном сечении находит в пункте 4.2. Здесь мы дадим частичное описание действия группы G на некотором насыщенном открытом подмножестве в X. Напомним, что насыщенным в аффинном G-многообразии Z называется подмножество $Z_0\subset Z$, которое является объединением слоев морфизма факторизации. Из свойства замкнутости образа замкнутого инвариантного подмногообразия при морфизме факторизации следует, что открытые насыщенные подмножества, суть в точности прообразы открытых подмножеств в факторе.

Опишем, какое открытое подмножество исследуется. Пусть L — главная изотропная подгруппа (т.е. стабилизатор точки замкнутой орбиты общего положения) для действия $G^\circ:\overline{\mathrm{im}\,\mu_{G,X}}$, $N=N_G(L)$. Обозначим через Y некоторую неприводимую компоненту многообразия $\mathrm{Red}_G^N(X)$, а через N_0 — стабилизатор этой компоненты при действии $N:\mathrm{Red}_G^N(X)$. Во-первых, мы покажем, что отображение $G*_N\mathrm{Red}_G^N(X)\to X$ является открытым вложением с насыщенным образом. Отсюда, в частности, будет следовать, что группа N транзитивно переставляет компоненты многообразия $\mathrm{Red}_G^N(X)$. Достаточно, таким образом, дать описание действия $N_0:Y$. Это действие удовлетворяет следующему условию:

(Nilp) Для любой точки $y\in Y$ полупростая часть элемента $\mu_{N_0,Y}(y)$ является центральным элементом алгебры $\mathfrak{l}$.

В теореме 4.5 мы дадим частичное описание структуры гамильтоновых действий $L:Y$, удовлетворяющих условию (Nilp). Далее в пункте 2 будут приведены некоторые следствия этой теоремы.

4.1. **Редуцированные гамильтоновы многообразия.** В этом пункте X — квазипроективное неприводимое нормальное гамильтоново G-многообразие.

Пусть $\mathfrak{l}$ — подалгебра Леви в $\mathfrak{g}$.

Определение 4.1. Элемент $\xi\in\mathfrak{l}$ называется *регулярным*, если $\mathfrak{g}_{\xi_s}\subset\mathfrak{l}$ (здесь и ниже для элемента $\xi\in\mathfrak{g}$ через ξ_s обоначена полупростая часть элемента ξ). Подмножество регулярных в $\mathfrak{l}$ элементов мы обозначим через $\mathfrak{l}_{reg}$.

Очевидно, что $\mathfrak{l}_{reg}$ является открытым непустым подмногообразием в $\mathfrak{l}$. Подмногообразие $\mathfrak{l}_{reg}\subset\mathfrak{l}$ допускает другое описание. Именно, рассмотрим картановскую подалгебру $\mathfrak{t}\subset\mathfrak{l}$ и системы корней $\Delta(\mathfrak{g}),\Delta(\mathfrak{l})$ алгебр Ли $\mathfrak{g},\mathfrak{l}$, связанные с выбором $\mathfrak{t}$. Подмножество $\mathfrak{l}_{reg}\subset\mathfrak{l}$ состоит в точности из тех элементов $\xi\in\mathfrak{l}$, для которых полупростая часть ξ_s сопряжена относительно группы $N_G(\mathfrak{l})$ элементу из $\mathfrak{t}$, который не аннулируется корнями из $\Delta(\mathfrak{g})\setminus\Delta(\mathfrak{l})$. Из этого определения и теоремы Шевалле об ограничении инвариантов для присоединенного представления понятно, что подмножество $\mathfrak{l}_{reg}\subset\mathfrak{l}$ не пусто и задается необращением в 0 некоторого элемента из $K[\mathfrak{l}]^{N_G(\mathfrak{l})}$.

В сделанных обозначениях положим $N=N_G(\mathfrak{l}),\widetilde{Y}=\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{l}_{reg})$. Поскольку $\mathfrak{l}_{reg}$ является главным открытым подмножеством в $\mathfrak{l}$, то $\widetilde{Y}$ является главным открытым подмножеством в $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{l})$. В частности, если многообразие X аффинно, то и многообразие $\widetilde{Y}$ таково.

Мы хотим наделить действие $N : \widetilde{Y}$ естественной гамильтоновой структурой.

Пусть $y \in \widetilde{Y}$. Отображение $d_y\mu_{G,X}$ отождествляет $\mathfrak{l}_*^\perp y$ с $\mathfrak{l}_*^\perp \mu_{G,X}(y)$. Подпространство $V = \mathfrak{l}_*^\perp \mu_{G,X}(y) \subset \mathfrak{g}_*\mu_{G,X}(y)$ невырождено относительно формы Костанта-Кириллова (см. определение в примере 3.10) на орбите $G\mu_{G,X}(y)$. Это следует из ортогональности дополнительных подпространств $V, \mathfrak{l}_*\mu_{G,X}(y) \subset \mathfrak{g}_*\mu_{G,X}(y)$. Ограничение ω этой формы на V индуцирует бивектор, который мы обозначим через $P^{\mu_{G,X}}$.

Из отождествления $\mathfrak{l}_*^\perp y$ с V мы имеем бивектор $\widetilde{P}_y^{\mu_{G,X}} \in \bigwedge^2 \mathfrak{l}_*^\perp y$. Для $n \in N$ имеем линейный изоморфизм $n_* : \mathfrak{l}_*^\perp y \to \mathfrak{l}_*^\perp(ny)$. При этом изоморфизме $\widetilde{P}_y^{\mu_{G,X}}$ переходит в $\widetilde{P}_{ny}^{\mu_{G,X}}$. Это следует из эквивариантности отображения моментов и определения бивектора $\widetilde{P}_y^{\mu_{G,X}}$.

Имеет место следующий вариант теоремы Гийемина-Стернберга о локальном сечении.

Предложение 4.2. 1. *Морфизм $\varphi : G*_N\widetilde{Y} \to X$ является этальным. В частности, схема $\widetilde{Y}$ является нормальным многообразием (возможно, несвязным).*

2. *Пусть $y \in \widetilde{Y}$. Для двух рациональных функций $f, g \in K(X)$, определенных в точке y положим*

$$\{f,g\}^{\widetilde{Y}}(y) = \{f,g\}(y) - \widetilde{P}_y^{\mu_{G,X}}(df \wedge dg). \tag{4.1}$$

$\{f,g\}^{\widetilde{Y}}$ является рациональной функцией на $\widetilde{Y}$, зависящей только от ограничений функций f, g на $\widetilde{Y}$. Далее, $\{\cdot,\cdot\}^{\widetilde{Y}}$ является N-инвариантной скобкой Пуассона на $\widetilde{Y}$. Действие группы N на $\widetilde{Y}$ является гамильтоновым с отображением моментов $\mu_{N,\widetilde{Y}} = \mu_{G,X}|_{\widetilde{Y}}$.

3. *Пусть многообразие X аффинно. Тогда $\operatorname{im}\varphi$ является насыщенным (см. введение к разделу) открытым подмножеством.*

Доказательство. Пункт 1. Все компоненты подсхемы $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{l}) \subset X$ имеют размерность не менее $\dim X - \dim\mathfrak{g} + \dim\mathfrak{l}$, поскольку данная подсхема задаются обращением в 0 полиномов в количестве $\dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{l}$. Поэтому все компоненты схемы $G *_N \widetilde{Y}$ имеют размерность не менее $\dim X$. Теперь, поскольку многообразие X является нормальным, достаточно показать, что морфизм φ является неразветвленным, иными словами, что для любой точки $y \in \widetilde{Y}$ линейное отображение $d_y\varphi : T_y(G *_N \widetilde{Y}) \to T_{\varphi(y)}X$ инъективно (см. [14], гл.1, т.3.20).

Имеем изоморфизм $T_y(G*_N\widetilde{Y}) \cong T_y\widetilde{Y} \oplus \mathfrak{l}_*^\perp y$. Ограничение φ на $\widetilde{Y}$ является вложением $\widetilde{Y} \hookrightarrow X$, поэтому $d_y\varphi|_{T_y\widetilde{Y}}$ является вложением. Теперь осталось доказать, что если $\xi_*y \in T_y\widetilde{Y}$ для какого-то элемента $\xi \in \mathfrak{g}$, то $\xi \in \mathfrak{l}$. Рассмотрим пространство $T_y^P X$ и форму ω_y на нем, определенные в пункте 2.2. Для всех $\eta \in \mathfrak{l}^\perp$ имеем

$$\omega_y(\xi_*y, \eta_*y) = \partial_{\xi_*y} H_\eta(y) = 0, \tag{4.2}$$

т.к. $\widetilde{Y}$ является открытой подсхемой в подсхеме $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{l}) \subset X$, а пучок идеалов последней порождается гамильтонианами H_η с $\eta \in \mathfrak{l}^\perp$.

С другой стороны,

$$\omega_y(\xi_*y, \eta_*y) = \{H_\xi, H_\eta\}(y) = H_{[\xi,\eta]}(y) = ([\mu_{G,X}(y), \xi], \eta]). \tag{4.3}$$

Поскольку равенство (4.3) имеет место для всех $\eta \in \mathfrak{l}^\perp$, то из (4.2) заключаем, что $[\xi, \mu_{G,X}(y)] \in \mathfrak{l}$. Поэтому $\mu_{G,X}(y)$ централизует ортогональную проекцию ξ на $\mathfrak{l}^\perp$. Но $\mu_{G,X}(y) \in \mathfrak{l}_{reg}$, поэтому $\xi \in \mathfrak{l}$, что и требовалось.

Итак, морфизм φ является этальным. Значит, схема $G*_N\widetilde{Y}$ является нормальным многообразием. Канонический морфизм $G*_N\widetilde{Y}\to G*_N\widetilde{Y}_{red}$, где $\widetilde{Y}_{red}$ обозначает многообразие, ассоциированное с $\widetilde{Y}$, является изоморфизмом. Отсюда следует, что $\widetilde{Y}=\widetilde{Y}_{red}$. Далее, если $\widetilde{Y}'$ является нормализацией многообразия $\widetilde{Y}$, то $G*_N\widetilde{Y}'$ является нормализацией многообразия $G*_N\widetilde{Y}$. Отсюда следует, что многообразие $\widetilde{Y}$ нормально.

Пункт 2. При доказательстве мы можем перейти к инвариантному открытому подмножеству в X и считать, что многообразие X гладко и бивектор Пуассона на нем имеет постоянный ранг. В этом случае из пункта 1 следует, что многообразие $\widetilde{Y}$ также гладко. Рассмотрим распределение T^PX и 2-форму $\omega\in\Gamma(X,\bigwedge^2(T^PX)^*)$. Согласно предложению 2.6, распределение T^PX инволютивно, а форма ω удовлетворяет тождеству (2.8). Покажем, что в точке $y\in\widetilde{Y}$ пространства $T_y^PX\cap T_y\widetilde{Y}$ и $\mathfrak{l}^\perp_*y$ ортогональны относительно формы ω_y. Для $\xi\in\mathfrak{l}^\perp,\eta\in T_y\widetilde{Y}$ имеет место равенство

$$\omega_y(\xi_*,\eta)=\partial_\eta H_\xi=0.$$

Последнее равенство следует из того, что $H_\xi|_{\widetilde{Y}}=0$. Мы получили требуемую ортогональность.

Из ортогональности подпространств $T_y^PX\cap T_y\widetilde{Y},\mathfrak{l}^\perp_*y\subset T_y^PX$ относительно формы ω_y следует, что бивектор $P_y^{\widetilde{Y}}=P_y-\widetilde{P}_y^{\mu_{G,X}}$ лежит в $\bigwedge^2T_y\widetilde{Y}$, а это и означает, что скобка на $\widetilde{Y}$ определена корректно. Отметим, что $T_y^{P^{\widetilde{Y}}}\widetilde{Y}=T_y^PX\cap T_y\widetilde{Y}$. Из леммы 7.3 следует, что распределение $T^{P^{\widetilde{Y}}}\widetilde{Y}$ инволютивно. Пусть $\omega^{\widetilde{Y}}$ — элемент из $\Gamma(\widetilde{Y},\bigwedge^2(T^{P^{\widetilde{Y}}}\widetilde{Y})^*)$, соответствующий $P^{\widetilde{Y}}$. Из предложения 2.6 следует, что форма ω удовлетворяет тождеству (2.8). Форма $\omega^{\widetilde{Y}}$ является ограничением ω на $T^{P^{\widetilde{Y}}}\widetilde{Y}$, поэтому также удовлетворяет (2.8). Повторное применение предложения 2.6 доказывает, что $P^{\widetilde{Y}}$ — бивектор Пуассона. При этом для рациональной функции f на X, определенной в точке $y\in\widetilde{Y}$, вектор $v_y(f|_{\widetilde{Y}})$ совпадает с проекцией вектора $v_y(f)$ на $T_y\widetilde{Y}$. Отсюда следует, что $\mu_{G,X}|_{\widetilde{Y}}$ является отображением моментов.

Пункт 3. Точка $x\in X$ принадлежит образу морфизма φ тогда и только тогда, когда элемент $\xi=\mu_{G,X}(x)$ удовлетворяет следующему условию: его полупростая часть ξ_s сопряжена элементу из картановской подалгебры $\mathfrak{t}\subset\mathfrak{l}$, который не аннулируется корнями из $\Delta(\mathfrak{g})\setminus\Delta(\mathfrak{l})$. Дополнение к множеству таких элементов ξ задается обращением в 0 инвариантных многочленов, задающих образ подмножества

$$\bigcup_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g})\setminus\Delta(\mathfrak{l})}\ker\alpha\subset\mathfrak{t}$$

в $\mathfrak{g}/\!/G\cong\mathfrak{t}/\!/W$ (где $W=N_G(\mathfrak{t})/Z_G(\mathfrak{t})$). □

Мы будем обозначать построенное гамильтоново N-многообразие $\widetilde{Y}$ через $\mathrm{Red}_G^N(X)$.

Следствие 4.3. *Пусть многообразие* $\mathrm{Red}_G^N(X)$ *непусто, и* Y *— одна из его компонент. Тогда* $\underline{\mathrm{def}}_L(Y)=\underline{\mathrm{def}}_G(X),\overline{\mathrm{def}}_L(Y)=\overline{\mathrm{def}}_G(X)$.

Доказательство. Из пункта 1 предыдущего предложения следует, что $m_G(X)=\dim G/N+m_L(Y)$. Поскольку $\mathrm{im}\,\mu_{L,Y}\subset\mathfrak{l}_{reg}$ по построению, то $\mathrm{rk}_L(Y)=\mathrm{rk}_G(X)-\dim G/N$, откуда $\underline{\mathrm{def}}_G(X)=\underline{\mathrm{def}}_L(Y)$. Равенство для верхних дефектов следует из того, что подмножество $G\,\mathrm{im}\,\mu_{L,Y}$ плотно в $\mathrm{im}\,\mu_{G,X}$. Плотность следует из пунктов 1 и 2 предложения 4.2. □

4.2. **Структура гамильтоновых действий на подходящих открытых подмножествах.** В этом пункте X является неприводимым нормальным аффинным гамильтоновым G-многообразием.

Целью этого пункта является описание действия группы G на определенном открытом насыщенном подмножестве в X.

Многообразие $\overline{\operatorname{im}\mu_{G,X}}$ неприводимо. Обозначим через L главную изотропную подгруппу для действия $G^\circ : \overline{\operatorname{im}\mu_{G,X}}$. Напомним, что главной изотропной подгруппой называется стабилизатор замкнутой орбиты, лежащей в общем слое морфизма факторизации. Через $\mathfrak{l}$ обозначим касательную алгебру группы L. Она определена однозначно с точностью до сопряжения группой G°. Нашей целью является описание действия группы G на открытом насыщенном подмножестве $G\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{l}_{reg})$ (открытость и насыщенность следуют из пункта 3 предложения 4.2).

Положим $N = N_G(L)$ и рассмотрим гамильтоново N-многообразие $\operatorname{Red}_G^N(X)$. Это многообразие непусто по определению группы N. Из определения группы L следует, что гамильтоново N-многообразие $\operatorname{Red}_G^N(X)$ удовлетворяет условию (Nilp) (см. введение к разделу).

Более того, имеет место следующее усиление пункта 1 предложения 4.2.

Предложение 4.4. *Естественный морфизм $G*_N \operatorname{Red}_G^N(X) \to X$ является открытым вложением с насыщенным образом. В частности, группа N транзитивно переставляет компоненты многообразия $\operatorname{Red}_G^N(X)$.*

Доказательство. Поскольку данный морфизм этален, достаточно доказать, что он инъективен. Пусть точки $y_1, y_2 \in \operatorname{Red}_G^N(X), g_1, g_2 \in G$ таковы, что $g_1y_1 = g_2y_2$. Можно считать, что $g_1 = 1$. В этом случае надо доказать, что $g_2 \in N_G(\mathfrak{l})$. Но $\mu_{G,X}(y_1)_s = \operatorname{Ad}(g_2)\mu_{G,X}(y_2)_s$. Централизатором элемента $\mu_{G,X}(y_i)_s$ в $\mathfrak{g}$ является $\mathfrak{l}$. Поэтому $\operatorname{Ad}(g_2)\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$. Второе утверждение следует теперь из неприводимости многообразия $G*_N \operatorname{Red}_G^N(X)$. $\square$

Пусть Y — некоторая неприводимая компонента многообразия $\operatorname{Red}_G^N(X)$ и N_0 — стабилизатор Y при действии группы N.

Для описания действия $G : G *_{N_0} Y \cong G *_N \operatorname{Red}_G^N(X)$ достаточно описать действие $N_0 : Y$. Мы опишем действие связной компоненты L группы N. При этом мы для удобства формулировки перейдем к некоторому накрытию группы L. Именно, любая редуктивная группа L допускает накрытие $\widetilde{L}$, для которого $\widetilde{L} \cong Z(\widetilde{L})^\circ \times (\widetilde{L}, \widetilde{L})$.

Теорема 4.5. *Предположим, что L — связная редуктивная группа, для которой $L = Z(L)^\circ \times (L, L)$. Пусть Y — неприводимое аффинное нормальное гамильтоново L-многообразие, удовлетворяющее условию (Nilp). Существуют нильпотентный элемент $\eta \in \mathfrak{l}$, $L/(L, L)$-многообразие Y_0 и конечная группа Γ, действующая L-автоморфизмами на многообразии $Y_0 \times \overline{O}$, где $\overline{O} = \operatorname{Spec}(K[L/(L_\eta)^\circ])$, для которых имеет место изоморфизм L-многообразий $(Y_0 \times \overline{O})/\Gamma \cong Y$. При этом $\operatorname{rk}_L(Y) = m_{(L,L)}(Y)$, $Y^{(L,L)} = \mu_{L,Y}^{-1}(\mathfrak{z}(\mathfrak{l}))$.*

Доказательство. Доказательство теоремы мы проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Заметим, что в $\overline{\operatorname{im}\mu_{(L,L),Y}}$ существует плотная L-орбита. Действительно, многообразие $\overline{\operatorname{im}\mu_{(L,L),Y}}$ неприводимо и состоит из нильпотентных элементов, откуда следует, что количество L-орбит в нем конечно. Обозначим через η элемент открытой орбиты.

Шаг 2. Докажем, что для точки $x \in Y$ с $\mu_{(L,L),Y}(x) = \eta$ отображение $(L, L)x \to L\eta$ является накрытием. Из выбора элемента η следует, что $\overline{\operatorname{im}\mu_{(L,L),Y}} = \overline{L\eta}$. Из предложения 3.6 заключаем, что $\dim(L, L)x = \dim L\eta$. А это и есть требуемое. Отсюда следует, что $\operatorname{rk}_L(Y) = m_{(L,L)}(Y)$.

Шаг 3. Докажем, что для точки $x \in Y$ с $\mu_{(L,L),Y}(x) = \eta$ морфизм $\overline{(L, L)x} \to \overline{L\eta}$ является конечным. Отсюда, в частности, будет следовать, что замкнутая орбита в

$\overline{(L,L)x}$ будет одноточечной. Значит, все замкнутые орбиты для действия $(L,L) : Y$ являются одноточечными, коль скоро замкнутые орбиты общего положения таковы. При доказательстве можем считать, что группа L полупроста.

Положим $A = K[\overline{Lx}], B = K[\overline{L\eta}]$. Доминантный морфизм аффинных многообразий $\overline{Lx} \to \overline{L\eta}$ индуцирует мономорфизм алгебр функций $B \hookrightarrow A$. Соответствующее расширение полей частных $\mathrm{Quot}(B) \subset \mathrm{Quot}(A)$ конечно, его степень равна $\#(L_\eta/L_x)$. Обозначим через $\overline{A}, \overline{B}$ целые замыкания алгебр A и B в $\mathrm{Quot}(A)$. Поскольку алгебры $\overline{A}, \overline{B}$ целозамкнуты в $\mathrm{Quot}(A)$, $\mathrm{Quot}(\overline{A}) = \mathrm{Quot}(\overline{B}) = \mathrm{Quot}(A)$. Кроме того, расширения алгебр $A \subset \overline{A}, B \subset \overline{B}$ конечны, и $\overline{A}, \overline{B}$ устойчивы при действии группы L на $\mathrm{Quot}(A)$. Положим $Z_1 = \mathrm{Spec}(\overline{A}), Z_2 = \mathrm{Spec}(\overline{B})$. Это нормальные L-многообразия. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\psi_1"] & Z_2 \arrow[d, "\psi_2"] \\
\overline{Lx} \arrow[r, "\varphi_2"] & \overline{L\eta}
\end{tikzcd}$$

Здесь морфизмы ψ_1, ψ_2 являются конечными, а морфизмы ψ_1, φ_1 бирациональными. Заметим, что и Z_1, и Z_2 содержат открытую орбиту, изоморфную Lx, и морфизм φ_1 осуществляет изоморфизм этих орбит, ибо является бирациональным. Заметим, далее, что L-многообразие $\overline{L\eta}$ содержит лишь конечное число орбит (ибо все они нильпотентны), и, кроме того, размерности всех этих орбит четны (как размерности любых коприсоединенных орбит). Из конечности морфизма ψ_2 теперь следует, что $\mathrm{codim}_{Z_2}(Z_2 \setminus Lx) \geqslant 2$. Из следующей леммы следует, что φ_1 есть изоморфизм, что немедленно дает требуемое.

Лемма 4.6. *Пусть X, Y — неприводимые алгебраические многообразия, причем многообразие Y нормально. Пусть φ — аффинный бирациональный морфизм из X в Y, образ которого содержит открытое подмножество $Y^0 \subset Y$, дополнение к которому имеет коразмерность не меньше 2. Тогда φ является изоморфизмом.*

Доказательство леммы. Доказательство легко сводится к случаю, когда X, Y аффинны. В этом случае лемма доказана, например, в [15], п.3.4. □

Шаг 4. Покажем, что морфизм $L *_{L_\eta} \mu_{(L,L),Y}^{-1}(\eta) \to Y$ является открытым вложением. Его образ совпадает с $\mu_{(L,L),Y}^{-1}(L\eta)$. Последнее подмножество открыто, как прообраз открытого в $\overline{L\eta}$. Далее, морфизм является инъективным. Действительно, из равенства $l_1y_1 = l_2y_2, l_i \in L, y_i \in \mu_{(L,L),Y}^{-1}(\eta)$ следует, что элементы $\mathrm{Ad}(l_i)\mu_{(L,L),Y}(y_i)$ совпадают для $i = 1,2$, откуда $l_1l_2^{-1} \in L_\eta$, что и означает инъективность. Для доказательства того, что рассматриваемый морфизм является открытым вложением, достаточно применить основную теорему Зарисского для квазиконечных морфизмов. В частности, подсхема $\mu_{(L,L),Y}^{-1}(\eta) \subset Y$ нормальна (ср. доказательства пункта 1 предложения 4.2), а группа L_η транзитивно переставляет компоненты многообразия $\mu_{(L,L),Y}^{-1}(\eta) \subset Y$ (ср. доказательство предложения 4.4).

Шаг 5. Выберем некоторую компоненту Y_0 многообразия $\mu_{(L,L),Y}^{-1}(\eta)$, обозначим через H ее стабилизатор в группе L_η, и положим $\Gamma = H/H^\circ$. Из доказанного на шаге 4 следует, что морфизм $L *_H Y_0 \to Y$ является открытым вложением, а его образ совпадает с $\mu_{(L,L),Y}^{-1}(L\eta)$. Группа $Z(L)^\circ \cong L/(L,L)$ естественным образом действует на Y_0. Группа Γ действует на $L *_{H^\circ} Y_0$ по правилу $\gamma.[g,x] = [g\widetilde{\gamma}^{-1}, \widetilde{\gamma}x]$, где $\widetilde{\gamma}$ — элемент из

H, который отображается в γ при каноническом эпиморфизме $H \to \Gamma$. Это свободное действие L-автоморфизмами.

Шаг 6. Рассмотрим морфизм $(L,L)\times Y_0 \to L *_{H^\circ} Y_0, (g,x)\mapsto [g,x]$. Поскольку группа $(L_\eta)^\circ \cap (L,L) = H^\circ \cap (L,L)$ действует тривиально на Y_0 (по доказанному на шаге 2), этот морфизм пропускается через морфизм $\rho : (L,L)/(H^\circ \cap (L,L)) \times Y_0 \to L *_{H^\circ} Y_0$. Непосредственно проверяется, что ρ — изоморфизм. Поскольку $Z(L)^\circ \subset H^\circ$, имеем изоморфизм $L/H^\circ \times Y_0 \cong L *_{H^\circ} Y_0$. Это изоморфизм L-многообразий (мы рассматриваем $L/(L,L)$-многообразие Y_0, как L-многообразие).

Шаг 7. Многообразия $\overline{O}$ и Y_0 нормальны. L/H° является открытой орбитой в $\overline{O}$, дополнение к которой имеет коразмерность не меньше 2. Вложение $(L/H^\circ \times Y_0)/\Gamma \hookrightarrow Y$ продолжается, таким образом, до морфизма $(\overline{O}\times Y_0)/\Gamma \to Y$. Это бирациональный аффинный морфизм из нормального многообразия в нормальное, образ которого содержит $\mu^{-1}_{(L,L),Y}(L\eta)$. Нашей целью является доказательство того, что этот морфизм является изоморфизмом. Согласно лемме 4.6, для этого достаточно доказать, что коразмерность дополнения к $\mu^{-1}_{(L,L),Y}(L\eta)$ в Y не меньше 2. При доказательстве можно считать, что группа L полупроста.

Шаг 8. Покажем сначала, что $\mu^{-1}_{L,Y}(0) = Y^L$. Пусть $y \in \mu^{-1}_{L,Y}(0)$. Покажем сперва, что подпространство $\mathfrak{l}_y^\perp \subset \mathfrak{l}$ состоит из нильпотентных элементов. Пусть $\xi \in \mathfrak{l}_y^\perp$. Обозначим через Y_1 страт многообразия Y (см. предложение 2.13), содержащий y. Таким образом, $y \in Y_1^{max}$. Согласно предложению 3.4,

$$d_y\mu_{L,Y_1}(T_y^P Y_1) = \mathfrak{l}_y^\perp. \tag{4.4}$$

Но многообразие Y_1 удовлетворяет условию (Nilp), поэтому $\operatorname{im}\mu_{L,Y_1}$ состоит из нильпотентных элементов. Подмногообразие нильпотентных элементов $\mathcal{N}$ в $\mathfrak{l}$ является конусом. Поэтому из $\operatorname{im}\mu_{L,Y_1} \subset \mathcal{N}$ следует, что $\operatorname{im} d_y\mu_{L,Y_1} \subset \mathcal{N}$, ибо μ_{L,Y_1} индуцирует однородный морфизм касательных конусов $T_yY_1 \to \mathcal{N}$. Применяя (4.4), видим, что $\mathfrak{l}_y^\perp \subset \mathcal{N}$. Воспользовавшись теоремой 1 из [16], глава 7, §10, получаем, что $\mathfrak{l}_y$ является параболической подалгеброй в $\mathfrak{l}$. Но однородное пространство L/L_y является квазиаффинным, откуда $\mathfrak{l}_y = \mathfrak{l}$. Что и требовалось.

Шаг 9. Обозначим через Z неприводимую компоненту многообразия $Y \setminus \mu^{-1}_{(L,L),Y}(\eta)$. Для доказательства теоремы нам осталось доказать (шаг 7), что $\operatorname{codim}_Y Z \geqslant 2$. Подмногообразие $Z \subset Y$ является L-инвариантным. Обозначим через η_1 элемент из открытой орбиты в $\overline{\mu_{L,Y}(Z)}$. Пересечение $Z \cap Y^L$ непусто, ибо подмногообразие $Z \subset Y$ замкнуто, а любая замкнутая орбита одноточечна (шаг 3). Отсюда следует, что $0 \in \mu_{L,Y}(Z)$. Поскольку размерность любого слоя морфизма алгебраических многообразий не меньше размерности общего, то

$$\dim Z \cap \mu^{-1}_{L,Y}(0) \geqslant \dim Z \cap \mu^{-1}_{L,Y}(\eta_1) = \dim Z - \dim L\eta_1. \tag{4.5}$$

С другой стороны,

$$\dim Z \cap \mu^{-1}_{L,Y}(0) \leqslant \dim \mu^{-1}_{L,Y}(0) = \dim Y^L, \tag{4.6}$$

по шагу 8. Но, по доказанному на шаге 3,

$$\dim Y^L = \dim Y/\!/L \leqslant \dim Y - m_L(Y) = \dim Y - \dim L\eta. \tag{4.7}$$

Из (4.5),(4.6),(4.7) следует, что $\dim Z - \dim L\eta_1 \leqslant \dim Y - \dim L\eta$. Поскольку размерности всех присоединенных орбит четны и $\dim L\eta > \dim L\eta_1$ из определения Z, мы получаем, что $\dim Z \leqslant \dim Y - 2$, что и требовалось. $\square$

Вернемся теперь к соглашениям, введенным в начале пункта. Снабдим пуассоново многообразие $Y/\!/(L,L)$ структурой гамильтонова $N_0/(L,L)$-многообразия. Согласно примеру 3.19, многообразие $Y//(L,L)$ является $Z(L)^\circ$-гамильтоновым. Поскольку имеется накрытие $Z(L)^\circ \to L/(L,L)$, многообразие $Y//(L,L)$ становится $L/(L,L)$-гамильтоновым. Соответствующее отображение моментов $N_0/(L,L)$-эквивариантно, поэтому $Y//(L,L)$ с заданными гамильтонианами является $N_0/(L,L)$-гамильтоновым.

Из теоремы 4.5 следует, что морфизм $\pi_{(L,L)} : Y^{(L,L)} \to Y//(L,L)$ биективен, и, стало быть, по лемме 4.6, является изоморфизмом. Этот изоморфизм $N_0/(L,L)$-эквивариантен. С его помощью мы можем перенести гамильтонову структуру с $Y//(L,L)$ на $Y^{(L,L)}$. Из конструкции следует, что $\mu_{N_0/(L,L),Y^{(L,L)}} = \mu_{N_0,Y}|_{Y^{(L,L)}}$.

Сравним теперь дефекты полученных гамильтоновых многообразий.

Предложение 4.7. $\underline{\mathrm{def}}_L(Y) = \underline{\mathrm{def}}_{L/(L,L)}(Y^{(L,L)})$, $\overline{\mathrm{def}}_L(Y) = \overline{\mathrm{def}}_{L/(L,L)}(Y^{(L,L)})$.

Доказательство. При доказательстве можно считать, что группа L удовлетворяет условиям теоремы 4.5, иначе перейдем к накрытию. Равенство верхних дефектов следует из того, что $\psi_{L,Y} = \psi_{L/(L,L),Y//(L,L)} \circ \pi_{(L,L),Y}$. С другой стороны, $\underline{\mathrm{def}}_L(Y) = m_L(Y) - \mathrm{rk}_L(Y) = m_L(Y) - m_{(L,L)}(Y)$, $\mathrm{def}_{L/(L,L)}(Y^{(L,L)}) = m_L(Y//(L,L))$. Теперь требуемое равенство следует непосредственно из теоремы 4.5. $\square$

Замечание 4.8. В теореме 1 можно ввести естественную гамильтонову структуру на Y_0, для которой группа Γ будет действовать гамильтоновыми автоморфизмами на $Y_0 \times \overline{O}$, и показать, что изоморфизм в условии теоремы является гамильтоновым.

5. (P,P)-редукция

Пусть X — неприводимое нормальное аффинное гамильтоново G-многообразие. Обозначим через L главную изотропную подгруппу для действия $G^\circ : \overline{\mathrm{im}\,\mu_{G,X}}$, через N — нормализатор L в G. Фиксируем компоненту Y многообразия $\mathrm{Red}_G^N(X)$ и обозначим через N_0 её стабилизатор в N. Положим $T_0 = L/(L,L)$.

Основным средством исследования многообразия $C_{G,X}$ и морфизма $\widetilde{\psi}_{G,X}//G$ будет сведение к гамильтоновым действиям тора. Именно, нашей целью является построение гамильтонова T_0-многообразия R, обладающего следующими свойствами:

1) $\underline{\mathrm{def}}_{T_0}(R) = \underline{\mathrm{def}}_G(X), \overline{\mathrm{def}}_{T_0}(R) = \overline{\mathrm{def}}_G(X)$.

2) Существует действие группы N_0/L на $R//T_0$, для которого морфизм $\psi_{T_0,R}//T_0$ является N_0/L-эквивариантным, а фактор $X//G$ отождествляется с $(R//T_0)/(N_0/L)$, так чтобы $C_{G,X} \cong C_{T_0,R}//(N_0/L)$.

Гамильтоново T_0-многообразие $Y^{(L,L)}$ почти обладает этими свойствами, только фактор $Y^{(L,L)}//(N_0/L)$ является не всем $X//G$, а лишь открытым подмножеством. Этот раздел посвящен построению по $Y^{(L,L)}$ и некоторой параболической подгруппе $P \subset G$ нужного многообразия R. Это многообразие мы будем называть (P,P)-редукцией. Такое название взято из-за того, что наша конструкция является, в некотором роде, правильным аналогом редукции Марсдена-Вейнстейна (см. [17]) для действия $(P,P) : X$.

В пункте 1 мы напомним нужные нам свойства инвариантов группы (P,P) на аффинном G-многообразии.

В пункте 2 мы приведем конструкцию (P,P)-редукции. Для начала нам потребуется выбрать "подходящую" для L подгруппу P. Затем мы доказываем основное свойство сделанного выбора (лемма 5.3). Далее, для компоненты Z подмногообразия $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{r}) \subset X$, где $\mathfrak{r} = [\mathfrak{p},\mathfrak{p}]^\perp$ — радикал алгебры $\mathfrak{p}$, мы строим алгебру A_Z, порожденную ограничениями функций из $K[X]^{(P,P)}$ и гамильтонианов $H_\xi, \xi \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$, на Z, и вводим на $\mathrm{Spec}(A_Z)$ естественную структуру гамильтонова T_0-многообразия. В качестве (P,P)-редукции мы возьмем нормализацию R многообразия $\mathrm{Spec}(A_Z)$ для $Z = \overline{P_u Y^{(L,L)}}$.

В пункте 3 мы докажем некоторые свойства гамильтонова действия $T_0 : R$. Нашей целью является проверка свойств 1) (следствие 5.9) и 2) (лемма 5.12).

5.1. (P, P)**-инварианты.** В этом пункте мы считаем, что X — аффинное G-многообразие, а G — связная группа.

Для любой параболической подгруппы $P \subset G$ алгебра $K[G]^{P_u}$ (где, напомним, P_u есть унипотентный радикал группы P) конечно порождена ([18]). Для краткости положим $P_0 = (P, P)$. Заметим, что $P_u \subset P_0$. Действительно, найдется элемент h, лежащий в центре некоторой подалгебры Леви в $\mathfrak{p}$, для которого $[h, \mathfrak{p}_u] = \mathfrak{p}_u$. Поэтому алгебра $K[G]^{P_0} = (K[G]^{P_u})^{P_0/P_u}$ также является конечно порожденной. Положим $\overline{G/P_0} = \mathrm{Spec}(K[G]^{P_0})$. Имеем открытое вложение однородного пространства G/P_0 в $\overline{G/P_0}$.

Имеет место изоморфизм $(K[G/P_0] \otimes K[X])^G \cong K[X]^{P_0}$, который получается ограничением функции из левой части на $\{eP_0\} \times X$ (см. [19]). Отсюда следует, что алгебра $K[X]^{P_0}$ конечно порождена.

Обозначим через L некоторую подгруппу Леви в P. Подалгебра $K[X]^{P_0} \subset K[X]$ инвариантна относительно действия группы L, при этом $(K[X]^{P_0})^L = K[X]^P = K[X]^G$. Имеем действие группы L на $X/\!/P_0$, ограничение которого на (L, L) тривиально.

Положим $X/\!/P_0 = \mathrm{Spec}(K[X]^{P_0})$ и обозначим через $\pi_{P_0,X}$ соответствующий морфизм факторизации $X \to X/\!/P_0$. Отметим, что морфизм $\pi_{P_0,X}$ доминантен, но, вообще говоря, не сюръективен. Кроме того, он P_0-инвариантен и L-эквивариантен.

Морфизм $\pi_{P_0,X}$ является композицией вложения $X = \{eP_0\} \times X \hookrightarrow \overline{G/P_0} \times X$ и морфизма факторизации $\pi_{G,\overline{G/P_0} \times X}$ (через e обозначен единичный элемент группы G). Отсюда, в частности, следует, что если X^0 — открытое аффинное G-насыщенное подмножество в X, то $X^0/\!/P_0$ отождествляется с открытым аффинным подмножеством в $X/\!/P_0$, при этом $\pi_{P_0,X^0} = \pi_{P_0,X}|_{X^0}$.

Замечание 5.1. На $\overline{G/P_0}$ группа L действует как умножениями слева (ограничением действия $G : \overline{G/P_0}$), так и справа (из действия $L : G/P_0$ умножениями справа). Если не оговорено противное, то рассматривается первое действие. Отметим, однако, что L-орбита точки eP_0 для обоих действий одна и та же.

В пункте 2 нам потребуется знать, когда для однопараметрической группы $\tau : K^* \to Z(L)$ существует предел $\lim_{t\to 0} \tau(t)eP_0$ на многообразии $\overline{G/P_0}$.

Фиксируем картановскую подалгебру $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{l}$ и систему корней Δ алгебры $\mathfrak{g}$. Систему простых корней $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \Delta$ будем называть *согласованной* с параболической подгруппой P, если корневые подпространства в подалгебре $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ суть те и только те, которые соответствуют положительным корням и линейным комбинациям корней $-\alpha_1, \dots, -\alpha_l, l = \mathrm{rk}\, \mathfrak{p}_0/\mathfrak{p}_u$. Набор $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ является системой простых корней в $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$. Через $\pi_1, \dots, \pi_r$ мы обозначаем систему фундаментальных весов.

Лемма 5.2. *Пусть $\xi = \frac{d}{dt}\tau(t)|_{t=0} \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$. Тогда предел $\lim_{t\to 0} \tau(t)P_0$ существует тогда и только тогда, когда ξ лежит в $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ и $\langle \pi_i, \xi \rangle \geqslant 0$ для всех $i > l$.*

Доказательство. Существует накрытие $\widetilde{G} \to G$, где $\widetilde{G}$ — связная алгебраически односвязная группа (под алгебраически односвязной группой мы понимаем прямое произведение тора и односвязной полупростой группы). Пусть $\widetilde{P}, \widetilde{L}$ — параболическая подгруппа и подгруппа Леви в $\widetilde{G}$, лежащие над P и L. Перейдя к некоторому кратному однопараметрической подгруппы τ, можем считать, что τ — однопараметрическая подгруппа в $Z(\widetilde{L})$. Далее, существование исходного предела эквивалентно существованию предела $\lim_{t\to 0} \tau(t)(\widetilde{P}, \widetilde{P})$ в многообразии $\overline{\widetilde{G}/(\widetilde{P}, \widetilde{P})}$. Поэтому мы можем считать, что группа G алгебраически односвязна.

$\tau(t) \in (G, G)$, так как в $G/(G, G)$ существует предел $\lim_{t\to 0} \tau_0(t)$, где τ_0 — проекция однопараметрической подгруппы τ на $G/(G, G)$. Поэтому можем считать, что группа

G полупроста. В этом случае хорошо известна конструкция многообразия $\overline{G/P_0}$, как замыкания орбиты в G-модуле. Именно, пусть V_i — неприводимый G-модуль со старшим весом π_i, и $v_i \in V_i$ — старший вектор, $i = \overline{1,r}$. Положим $v = v_{l+1} + \ldots + v_r \in V_{l+1} \oplus \ldots \oplus V_r$. Имеем отображение $\overline{G/P_0} \to \overline{Gv}, eP_0 \mapsto v$. Известно, что это отображение является изоморфизмом (см. [20], теорема 6). Предел $\lim_{t\to 0} \tau(t)v$ существует тогда и только тогда, когда для всех $i = \overline{l+1, r}$ существует предел $\lim_{t\to 0}\tau(t)v_i$, т.е. когда $\langle \xi, \pi_i\rangle \geqslant 0$ для всех $i > l$. □

5.2. **Конструкция.** В последующих двух пунктах через G обозначена редуктивная группа, через X — неприводимое нормальное аффинное гамильтоново G-многообразие, через L — главная изотропная подгруппа для действия $G^\circ : \overline{\operatorname{im}\mu_{G,X}}$, через Y — неприводимая компонента многообразия $\operatorname{Red}_G^N(X)$, через N_0 — стабилизатор компоненты Y под действием группы $N_G(L)$, через L_0 — связная компонента ядра неэффективности действия $L : Y/\!/(L,L)$. Обозначения $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}_0$ используются для алгебр Ли соответствующих групп. Положим $T_0 = L/(L,L)$. Алгебра $\mathfrak{t}_0$ группы T_0 отождествляется с $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$.

Для построения P_0-редукции мы должны выбрать некоторую подходящую параболическую подгруппу $P \subset G$. Мы фиксируем картановскую подалгебру $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{l}$ и соответствующую систему корней Δ алгебры $\mathfrak{g}$.

Конструкция-определение подходящей подгруппы. Вложим T_0-многообразие $Y^{(L,L)}$ в некоторый T_0-модуль V. Рассмотрим точку $y_0 \in Y^{(L,L)}$ с $(L_{y_0})^\circ = L_0$. Её носитель (т.е. выпуклая оболочка T_0-весов точки $y_0 \in V$) имеет размерность $\operatorname{rk} L - \operatorname{rk} L_0 = \operatorname{def}_G(X)$ (последнее равенство следует из следствия 4.7). Этот носитель содержится в объединении стенок камер Вейля алгебры $\mathfrak{g}$. Выберем максимальную (по включению) из этих стенок. Пусть ζ — точка из носителя, которая лежит во внутренности выбранной стенки. Обозначим через $\mathfrak{q}$ параболическую подалгебру в $\mathfrak{g}$, соответствующую корневой подсистеме в Δ, состоящей из всех корней α с $\langle \alpha^\vee, \zeta\rangle \leqslant 0$ (здесь, как обычно, $\alpha^\vee$ — двойственный корень). Отметим, что $\mathfrak{l}$ отождествляется с подалгеброй Леви в $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_u$, и

(*) из равенства $\langle \alpha^\vee, \zeta\rangle = 0$ для некоторого корня α следует, что $\alpha^\vee \in \mathfrak{l}_0$.

Действительно, если $\alpha^\vee \notin \mathfrak{l}_0$, то $\alpha^\vee y_0 \neq 0$. Это значит, что носитель точки y_0 не лежит в $\ker \alpha^\vee$, откуда, по выбору ζ, $\langle \alpha^\vee, \zeta\rangle \neq 0$.

Выберем параболическую подалгебру $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{q}/\mathfrak{q}_u$ с подалгеброй Леви $\mathfrak{l}$ и обозначим через $\mathfrak{p}$ прообраз $\mathfrak{p}_0$ в $\mathfrak{q}$ при проекции $\mathfrak{q} \to \mathfrak{q}/\mathfrak{q}_u$. Пусть P, Q — параболические подгруппы в G, соответствующие подалгебрам $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$. Параболическую подгруппу $P \subset G$ будем называть *подходящей* для Y. Отметим, что P зависит от выбора T_0-модуля V, точки y_0, веса ζ и подалгебры $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{q}/\mathfrak{q}_u$.

Напомним, что для параболической подгруппы $P \subset G$ обозначение P_0 используется для её коммутанта.

Основным свойством подходящих подгрупп является следующая

Лемма 5.3. *Пусть P — подходящая для Y параболическая подгруппа. Тогда ограничение морфизма $\pi_{P_0,X}$ на $Y^{(L,L)}$ конечно в общей точке, причем для некоторого открытого подмножества $Y^1 \subset Y^{(L,L)}$ выполняется следующее условие: если $y_1 \neq y_2 \in Y^1$ и $\pi_{P_0,X}(y_1) = \pi_{P_0,X}(y_2)$, то найдется элемент $g \in (N_0 \cap G^\circ) \setminus L$, для которого $y_1 = gy_2$.*

Доказательство. В условии леммы при замене G на G° ничего не изменится. Поэтому считаем группу G связной. Подмножество $G*_{N_0}Y$ аффинно, открыто и насыщенно в X, поэтому можем считать, что $X = G*_{N_0}Y$. В этом случае $X \times \overline{G/P_0} = (G*_{N_0}Y)\times\overline{G/P_0} \cong G*_{N_0}(Y \times \overline{G/P_0})$ (последний изоморфизм задается так: $([g,y],z) \mapsto [g,(y,g^{-1}z)], g \in G, y \in Y, z \in \overline{G/P_0}$). Морфизм факторизации по N_0 есть композиция морфизмов факторизации по L и по N_0/L. Поэтому достаточно доказать, что ограничение морфизма

$\pi_{L,Y\times\overline{G/P_0}}$ на $Y^{(L,L)}\times\{eP_0\}$ инъективно на некотором открытом подмножестве. Поскольку $Y^{(L,L)}\subset Y$ является замкнутым L-инвариантным подмножеством, мы можем доказывать аналогичное утверждение для морфизма $\pi_{L,Y^{(L,L)}\times\overline{G/P_0}}$.

Пусть Q, y_0, ζ те же, что использовались при построении подходящей подгруппы P выше. Существует G-эквивариантный морфизм $\overline{G/P_0}\to\overline{G/Q_0}$, совпадающий на G/P_0 с естественной проекцией $G/P_0\to G/Q_0$. Поэтому достаточно доказать, что ограничение морфизма $\pi_{L,Y^{(L,L)}\times\overline{G/Q_0}}$ на $Y\times\{eQ_0\}$ инъективно в общей точке. Нам теперь достаточно доказать, что:

1) $\dim L(y_0,eQ_0)=m_L(\overline{L(Y^{(L,L)}\times eQ_0)})$.

2) Орбита $L(y_0,eQ_0)$ замкнута.

Положим $\widetilde{L}=Z_G(\zeta)$. Это подгруппа Леви в Q, содержащая L. По свойству (*) (см. конструкцию-определение подходящей подгруппы) имеет место включение $L\cap(\widetilde{L},\widetilde{L})\subset L_0$. Поэтому группа $L\cap(\widetilde{L},\widetilde{L})$ действует тривиально на $L(Y\times\{eQ\})$, и $m_L(\overline{L(Y^{(L,L)}\times eQ_0)})\leqslant\dim L/(L\cap(\widetilde{L},\widetilde{L}))$. С другой стороны, $\dim L(eQ_0)=\dim Q/Q_0=\dim\widetilde{L}/(\widetilde{L},\widetilde{L})=\dim L/(L\cap(\widetilde{L},\widetilde{L}))$.

Докажем утверждение 2. Поскольку группа $L\cap(\widetilde{L},\widetilde{L})$ тривиально действует на $\overline{L(y_0,eQ_0)}$, а $L=Z(\widetilde{L})(L\cap(\widetilde{L},\widetilde{L}))$, нам осталось доказать замкнутость $Z(\widetilde{L})$-орбиты. Для этого, по критерию Гильберта-Мамфорда, достаточно показать, что для нетривиальной однопараметрической подгруппы $\tau: K^*\to Z(\widetilde{L})$ не существует одного из пределов $\lim_{t\to0}\tau(t)y_0\in Y^{(L,L)}$, $\lim_{t\to0}\tau(t)Q_0\in\overline{G/Q_0}$.

Выберем систему простых корней $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ согласованную с Q (см. пункт 1). Пусть $l=\mathrm{rk}[\widetilde{\mathfrak{l}},\widetilde{\mathfrak{l}}]$. Из построения группы Q следует, что $\langle\zeta,\alpha_i^\vee\rangle$ равно 0 при $i\leqslant l$ и меньше 0 при $i>l$ или, что эквивалентно, $\zeta=\sum_{i>l}a_i\pi_i$ с $a_i<0$. Иными словами, для любого элемента $\xi\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap\mathfrak{t}$ из неравенств

$$\langle\pi_i,\xi\rangle\geqslant0 \text{ при } i>l \tag{5.1}$$

и $\langle\xi,\zeta\rangle\geqslant0$ следует $\xi\in[\widetilde{\mathfrak{l}},\widetilde{\mathfrak{l}}]$.

Из леммы 5.2 следует, что касательный вектор $\xi=\frac{d}{dt}|_{t=0}\tau$ лежит в $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ и удовлетворяет неравенствам (5.1), если для однопараметрической подгруппы τ существует предел $\lim_{t\to0}tQ_0$. Из существования предела $\lim_{t\to0}ty_0$ следует, что $\langle\xi,\zeta\rangle\geqslant0$, ибо ζ содержится в носителе точки y_0. Поэтому $\xi\in[\widetilde{\mathfrak{l}},\widetilde{\mathfrak{l}}]$. По определению, $\xi\in\mathfrak{z}(\widetilde{\mathfrak{l}})$. Отсюда следует, что $\xi=0$. Замкнутость орбиты доказана. □

Лемма 5.4. *Пусть $\mathfrak{p}$ — параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}$ с подалгеброй Леви $\mathfrak{l}$, а $\mathfrak{r}=\mathfrak{z}(\mathfrak{l})+\mathfrak{p}_u$ — её радикал. Тогда многообразие $\overline{P_uY^{(L,L)}}$ является неприводимой компонентой в $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{r})$.*

Доказательство. Положим $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})_{reg}=\mathfrak{z}(\mathfrak{l})\cap\mathfrak{l}_{reg}$. Множество $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{z}(\mathfrak{l})_{reg}+\mathfrak{p}_u)$ является открытым подмногообразием в $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{r})$. Имеем равенство $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\xi)\cap\mathfrak{p}_u=\{0\}$ для всех $\xi\in\mathfrak{z}(\mathfrak{l})_{reg}$. Поэтому $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})_{reg}+\mathfrak{p}_u=P_u\mathfrak{z}(\mathfrak{l})_{reg}$, и действие $P_u:\mathfrak{z}(\mathfrak{l})_{reg}+\mathfrak{p}_u$ свободно. Поэтому морфизм $P_u\times\mathfrak{z}(\mathfrak{l})_{reg}\to\mathfrak{z}(\mathfrak{l})_{reg}+\mathfrak{p}_u,(g,y)\mapsto gy$, является изоморфизмом. Отсюда выводим, что аналогичный морфизм $P_u\times\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{z}(\mathfrak{l})_{reg})\to\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{z}(\mathfrak{l})_{reg}+\mathfrak{p}_u)$ также изоморфизм. Из теоремы 4.5 следует, что $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{z}(\mathfrak{l})^{reg})=\mathrm{Red}_G^N(X)^{(L,L)}$. Подмногообразие $Y^{(L,L)}$ является неприводимой компонентой в $\mathrm{Red}_G^N(X)^{(L,L)}$. Стало быть, подмножество $P_uY^{(L,L)}\subset X$ является открытым в некоторой компоненте многообразия $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{r})$. □

Зафиксируем теперь подходящую для Y параболическую подгруппу P.

Обозначим через A подалгебру в $K[X]$, порожденную $K[X]^{P_0}$ и $\{H_\xi,\xi\in\mathfrak{z}(\mathfrak{l})\}$. Это T_0-инвариантная подалгебра в $K[X]^{(L,L)}$. Обозначим через $\widetilde{\pi}_{P_0,X}$ морфизм $X\to\mathrm{Spec}(A)$, индуцированный вложением $A \hookrightarrow K[X]$. Пусть Z — неприводимая компонента в $\mu_{G,X}^{-1}(\mathfrak{r})$, где $\mathfrak{r}$ — радикал в $\mathfrak{p}$, а I_Z — идеал всех функций из $K[X]$, обращающихся в 0 на Z. Отметим, что I_Z — L-инвариантный идеал в $K[X]$. Рассмотрим алгебру $A_Z = A/(A \cap I_Z)$. Это подалгебра в $K[Z]$, состоящая из ограничений функций из A на Z. Имеем естественное действие группы T_0 на A_Z.

Лемма 5.5. 1. *Для любых $f, g \in A$ ограничение скобки $\{f, g\}$ на Z зависит лишь от ограничений f, g на Z и содержится в A_Z. Таким образом, алгебра A_Z становится пуассоновой.*

2. *Действие $T_0 : \mathrm{Spec}(A_Z)$ является гамильтоновым с гамильтонианами $H_\xi|_Z, \xi \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) \cong \mathfrak{t}_0$.*

Доказательство. Покажем прежде всего, что $\{A, I_Z\} \subset I_Z$. Заметим, что $\mathfrak{r}^\perp = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Идеал I_Z, таким образом, является минимальным простым идеалом идеала $I \subset K[X]$, порожденного гамильтонианами H_ξ с $\xi \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Из леммы 7.1, примененной к алгебре $K[X]/I$, следует, что достаточно доказать, что $\{f, I\} \subset I$ для всех $f \in A$. Это достаточно проверить для образующих, т.е. для $f = H_\xi, \xi \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$, и $f \in K[X]^{P_0}$. Если $\eta \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$, то $\{H_\xi, H_\eta\} = H_{[\xi,\eta]} \in I$ и $\{f, H_\eta\} = -\eta_* f = 0$ для $f \in K[X]^{P_0}$. Таким образом, $\{f, I\} \subset I$.

Отметим, что алгебра A замкнута относительно скобки Пуассона. Действительно, достаточно проверить, что скобки образующих снова лежат в A. Это следует из того, что $\{f, g\}, \{H_\xi, f\} \in K[X]^{P_0}, \{H_\xi, H_\eta\} = 0$ для $f, g \in K[X]^{P_0}, \xi, \eta \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$. Таким образом, для $f, g \in A$ ограничение $\{f, g\}$ на Z содержится в A_Z. Этим доказано первое утверждение.

Утверждение 2 теперь проверяется непосредственно. □

Все сказанное в лемме 5.5 применимо к $Z = \overline{P_u Y^{(L,L)}}$ по лемме 5.4. Поэтому можем дать основное определение этого раздела.

Определение 5.6. P_0-редукцией многообразия X называется гамильтоново T_0-многообразие, являющееся нормализацией гамильтонова T_0-многообразия $\mathrm{Spec}(A_{\overline{P_u Y^{(L,L)}}})$.

Ниже через R обозначено гамильтоново T_0-многообразие, являющееся P_0-редукцией многообразия X, а через Z — подмногообразие $\overline{P_u Y^{(L,L)}} \subset X$.

Сделаем несколько замечаний по поводу морфизмов между нашими объектами. Во-первых, имеется естественный доминантный морфизм $\widetilde{\pi}_{P_0,X}|_Z : Z \to \mathrm{Spec}(A_Z)$. Этот морфизм P_0-инвариантен и L-эквивариантен. Ограничение этого морфизма на $Y^{(L,L)}$ доминантно и T_0-эквивариантно. Поскольку многообразие $Y^{(L,L)}$ нормально, последний морфизм поднимается до доминантного T_0- эквивариантного морфизма $\widehat{\pi} : Y^{(L,L)} \to R$.

С другой стороны, имеем T_0-эквивариантный морфизм $\nu : R \to X/\!/P_0$, который соответствует композиции гомоморфизмов $K[X]^{P_0} \twoheadrightarrow K[X]^{P_0}/(I_Z \cap K[X]^{P_0}) \hookrightarrow A_Z \hookrightarrow K[R]$.

5.3. **Свойства.**

Лемма 5.7. *Имеет место следующая коммутативная диаграмма*

$$
\begin{tikzcd}
Y^{(L,L)} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\widehat{\pi}"] \arrow[dd, "\pi_{T_0,Y^{(L,L)}}"] & & Z \arrow[r, hook] \arrow[d, "\widetilde{\pi}_{P_0,X}|_Z"] & X \arrow[d, "\pi_{P_0,X}"] \\
& R \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{T_0,R}"] & \operatorname{Spec}(A_Z) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{T_0,\operatorname{Spec}(A_Z)}"] & X/\!/P_0 \arrow[d, "\pi_{T_0,X/\!/P_0}"] \\
Y/\!/L \arrow[r, "\widehat{\pi}/\!/T_0"] \arrow[dd, "\psi_{T_0,Y^{(L,L)}}/\!/T_0"] & R/\!/T_0 \arrow[r] \arrow[ddl, "\psi_{T_0,R}/\!/T_0"] & \operatorname{Spec}(A_Z)/\!/T_0 \arrow[r] \arrow[ddll, "\psi_{T_0,\operatorname{Spec}(A_Z)}/\!/T_0"] & X/\!/G^\circ \arrow[d, "\pi_{G/G^\circ,X/\!/G^\circ}"] \\
& & & X/\!/G \arrow[d, "\psi_{G,X}/\!/G"] \\
\mathfrak{t}_0 \arrow[rrr, "\pi_{G,\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{l})}"] & & & \mathfrak{g}/\!/G
\end{tikzcd}
\tag{5.2}
$$

Доказательство. Коммутативность участка диаграммы внутри прямоугольника с вершинами $Y^{(L,L)}, Y/\!/(L,L), X, X/\!/G^\circ \cong (X/\!/P_0)/\!/T_0$ следует непосредственно из определений многообразий $Y^{(L,L)}, \operatorname{Spec}(A_Z), R, X/\!/P_0$ и действий тора T_0 на них.

Коммутативность участка диаграммы внутри треугольника с вершинами $Y/\!/(L,L)$, $\mathfrak{t}_0, \operatorname{Spec}(A_Z)/\!/T_0$ следует из конструкций гамильтоновых действий группы T_0 на многообразиях $Y^{(L,L)}, \operatorname{Spec}(A_Z), R$ (пп. 4.2, 5.2).

Остается доказать, что участок с вершинами $\operatorname{Spec}(A_Z)/\!/T_0, \mathfrak{t}_0, X/\!/G^\circ, \mathfrak{g}/\!/G$ коммутативен. Поскольку морфизмы $Y \to \operatorname{Spec}(A_Z)/\!/T_0$ и $X \to X/\!/G^\circ$ доминантны, то воспользовавшись уже доказанным, можем свести вопрос о коммутативности данного участка к коммутативности участка с вершинами $Y^{(L,L)}, X, \mathfrak{t}_0, \mathfrak{g}/\!/G$. Коммутативность данного участка следует из того, что $\mu_{G,X}(Y^{(L,L)}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$. $\square$

В дальнейшем, если не указано противное, все морфизмы между объектами диаграммы (5.2) суть морфизмы диаграммы (5.2).

Лемма 5.8. *Морфизм $\widehat{\pi} : Y^{(L,L)} \to R$ является бирациональным.*

Доказательство. Морфизм $\widehat{\pi}$ доминантен, поэтому остается доказать, что он инъективен в общей точке. Для этого заметим, что $\pi_{P_0,X}|_{Y^{(L,L)}} = \nu \circ \widehat{\pi}$. Из леммы 5.3 следует, что найдется открытое множество $Y^1 \subset Y^{(L,L)}$, для которого из равенства $\widehat{\pi}(y_1) = \widehat{\pi}(y_2)$ при $y_1 \neq y_2 \in Y^1$ следует, что $y_1 = gy_2$ для некоторого $g \in (N_0 \cap G^\circ) \setminus L$. Но из того, что $\widehat{\pi}(y_1) = \widehat{\pi}(y_2)$ следует, что $\mu_{G,X}(y_1) = \mu_{G,X}(y_2)$. Централизатор в G° элемента $\mu_{G,X}(y_1)$ совпадает с L, ибо этот элемент лежит в $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}) \cap \mathfrak{l}_{reg}$. Отсюда $g \in L$. Противоречие. $\square$

Следствие 5.9. $\underline{\operatorname{def}}_{T_0}(R) = \underline{\operatorname{def}}_G(X), \overline{\operatorname{def}}_{T_0}(R) = \overline{\operatorname{def}}_G(X)$.

Доказательство. По лемме 5.8 $\underline{\operatorname{def}}_{T_0}(R) = \underline{\operatorname{def}}_{T_0}(Y^{(L,L)})$, $\overline{\operatorname{def}}_{T_0}(R) = \overline{\operatorname{def}}_{T_0}(Y^{(L,L)})$. Теперь остается применить следствия 4.3, 4.7. $\square$

Поскольку морфизм $\widehat{\pi}$ доминантен, мы можем отождествить $K[R]$ с $\widehat{\pi}^*(K[R]) \subset K[Y]^{(L,L)}$.

Лемма 5.10. *Подалгебра $K[R] \subset K[Y]^{(L,L)}$ является целым замыканием подалгебры $\pi_{P_0,X}|_Y^*(K[X]^{P_0})$.*

Доказательство. Из нормальности многообразия R и бирациональности морфизма $\widehat{\pi}$ (лемма 5.8) следует, что достаточно доказать конечность морфизма $\nu : R \to X/\!/P_0$. Морфизмы $R \to \operatorname{Spec}(A_Z)$ и $\mathfrak{t}_0 \to \mathfrak{g}/\!/G$ из диаграммы (5.2) конечны (первый как морфизм нормализации, а второй из существования естественного изоморфизма $\mathfrak{t}/\!/N_G(\mathfrak{t}) \cong \mathfrak{g}/\!/G$). Поэтому вопрос о конечности морфизма ν сводится к вопросу о конечности морфизма $\operatorname{Spec}(A_Z) \to X/\!/P_0 \times_{\mathfrak{g}/\!/G} \mathfrak{t}_0$. Но этот морфизм является замкнутым вложением по построению алгебры A_Z. $\square$

Напомним, что $Y^{(L,L)}$ — гамильтоново $N_0/(L,L)$-многообразием. Поэтому морфизм $Y/\!/L \to \mathfrak{t}_0$ является N_0/L- эквивариантным. Далее, морфизм $Y/\!/L \to X/\!/G$ является композицией морфизма $\pi_{N_0/L,Y/\!/L}$ и открытого вложения $Y/\!/N_0 \hookrightarrow X/\!/G$.

Лемма 5.11. *Подалгебра $K[R]^{T_0} \subset K[Y]^L$ устойчива относительно действия группы N_0/L. Морфизм $\psi_{T_0,R}/\!/T_0$ является N_0/L- эквивариантным, а морфизм $R/\!/T_0 \to X/\!/G$ — факторизацией по действию группы N_0/L.*

Доказательство. Подалгебра $K[X]^G$ вкладывается в $K[Y]^{N_0}$ посредством гомоморфизма ограничения на Y. Покажем, что подалгебра $K[R]^{T_0} \subset K[Y]^L$ является целым замыканием $K[X]^G$ в $K[Y]^L$. Действительно, подалгебра $K[R]$ является целым замыканием подалгебры $\pi_{P_0,X}|_Y^*(K[X]^{P_0})$ в $K[Y]^{(L,L)}$ (лемма 5.10). При факторизации по T_0 свойство быть целым замыканием не нарушится. Поэтому подалгебра $K[R]^{T_0}$ является целым замыканием подалгебры, состоящей из ограничений элементов из $K[X]^{G^\circ}$ на Y, в $K[Y]^L$. Требуемое утверждение теперь следует из того, что алгебра $K[X]^{G^\circ}$ цела над $K[X]^G$. Поскольку подалгебра $K[X]^G \subset K[Y]^L$ устойчива относительно N_0/L, то её целое замыкание $K[R]^{T_0}$ также устойчиво относительно N_0/L, и подалгебра его N_0/L-инвариантов совпадает с $K[X]^G$ (ибо $\operatorname{Quot}(K[Y]^{N_0}) = \operatorname{Quot}(K[X]^G)$). Поскольку морфизм $\widehat{\pi}$ доминантен, а морфизмы $\widehat{\pi}$ и $\psi_{T_0,Y^{(L,L)}}/\!/T_0 = \psi_{T_0,R}/\!/T_0 \circ \widehat{\pi}$ являются N_0/L-эквивариантными, то и морфизм $\psi_{T_0,R}/\!/T_0$ эквивариантен относительно N_0/L. $\square$

Лемма 5.12. *Существуют изоморфизм $C_{G,X} \cong C_{T_0,R}/\!/(N_0/L)$ и доминантный морфизм $\tau : C_{G,X} \to \overline{\operatorname{im}\mu_{T_0,Y^{(L,L)}}}/N_0$, для которых коммутативна следующая диаграмма (с морфизмом $\overline{\operatorname{im}\mu_{T_0,Y^{(L,L)}}}/N_0 \to \mathfrak{g}/\!/G$, соответствующим ограничению функций).*

$$
\begin{tikzcd}
R/\!/T_0 \arrow[r] \arrow[d] & C_{T_0,R} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\operatorname{im}\mu_{T_0,Y^{(L,L)}}} \arrow[d] \\
X/\!/G \arrow[r] \arrow[drr] & C_{G,X} \arrow[r] & \overline{\operatorname{im}\mu_{T_0,Y^{(L,L)}}}/N_0 \arrow[d] \\
& & \mathfrak{g}/\!/G
\end{tikzcd}
\tag{5.3}
$$

Доказательство. Вложим $K[X]^G$ в $K[R]^{T_0}$, как алгебру N_0/L-инвариантов. Подалгебра $K[C_{R,T_0}] \subset K[R]^{T_0}$ будет целым замыканием подалгебры $\psi_{G,X}^*(K[\mathfrak{g}]^G)$, т.к. подалгебра $\psi_{T_0,R}^*(K[\mathfrak{t}_0]) \subset K[R]^{T_0}$ цела над $\psi_{G,X}^*(K[\mathfrak{g}]^G)$. Отсюда следует, что $K[C_{T_0,R}]$ является целым замыканием подалгебры $K[C_{G,X}] \subset K[R]^{T_0}$. Аналогично доказательству леммы 5.11, получаем, что $K[C_{G,X}] = K[C_{T_0,R}]^{N_0/L}$. Гомоморфизм $\psi_{T_0,R}^*$ вкладывает алгебру $K[\overline{\operatorname{im}\mu_{T_0,Y^{(L,L)}}}]$ в $K[C_{T_0,R}]$. Это вложение N_0/L-эквивариантно. Поэтому имеем вложение $K[\overline{\operatorname{im}\mu_{T_0,Y^{(L,L)}}}]^{N_0}$ в $K[C_{G,X}]$. Из построения следует коммутативность двух верхних квадратов диаграммы.

Остается доказать, что участок диаграммы (5.3) с вершинами $X//G, \overline{\operatorname{im}\mu_{T_0,Y^{(L,L)}}}, \mathfrak{g}//G$ коммутативен. Поскольку морфизмы $R//T_0 \to X//G, \overline{\operatorname{im}\mu_{T_0,Y^{(L,L)}}} \to \overline{\operatorname{im}\mu_{T_0,Y^{(L,L)}}}/N_0$ доминантны, доказательство коммутативности данного участка сводится к доказательству коммутативности участка с вершинами $R//T_0, X//G$, $\overline{\operatorname{im}\mu_{T_0,Y^{(L,L)}}}, \mathfrak{g}//G$. Но это непосредственно следует из диаграммы (5.2). □

6. Доказательства основных теорем

Этот раздел посвящен доказательству трех основных теорем, сформулированных во введении.

В первом пункте мы докажем важные вспомогательные утверждения для действия тора. В пункте 3 мы выведем некоторые следствия из теоремы 1.2. В пункте 6 мы приведем пример гладкого конического многообразия, для которого многообразие $C_{G,X}$ не является гладким. Остальные три пункта содержат доказательства наших теорем.

6.1. **Вспомогательные утверждения для действий тора.** В этом пункте через T обозначен алгебраический тор.

Предложение 6.1. *Пусть X — гладкое гамильтоново T-многообразие, на котором T действует локально эффективно. Тогда для всех $\eta \in \mathfrak{t}$ любая компонента многообразия $\mu_{T,X}^{-1}(\eta)$ содержит точку x, для которой линейное отображение $d_x\mu_{T,X}$ сюръективно.*

Доказательство. Шаг 1. Нам потребуется следующая лемма

Лемма 6.2. *Пусть T — алгебраический тор, локально-эффективно действующий на аффинном многообразии X, а Z — неприводимая компонента слоя морфизма факторизации. Тогда действие $T : Z$ локально эффективно.*

Доказательство. От противного, пусть нетривиальный подтор $T_0 \subset T$ действует на Z тривиально. Выберем точку $z \in Z$, не содержащуюся ни в какой другой компоненте слоя $\pi_{T,X}^{-1}(y), y = \pi_{T,X}(z)$. Отметим, что

$$\pi_{T_0,X}^{-1}(\pi_{T_0,X}(z)) \subset \pi_{T,X}^{-1}(y). \tag{6.1}$$

С другой стороны, поскольку действие $T_0 : Z$ тривиально,

$$\pi_{T_0,X}^{-1}(\pi_{T_0,X}(z)) \cap Z = \{z\}. \tag{6.2}$$

Из (6.1), (6.2) и выбора точки z получаем, что $\pi_{T_0,X}^{-1}(\pi_{T_0,X}(z)) = \{z\}$. Раз некоторый слой морфизма факторизации состоит из одной точки, то то же верно для общего слоя. Но последнее возможно лишь в том случае, когда действие $T_0 : X$ тривиально. Противоречие □

Шаг 2. Рассмотрим теперь точку x, лежащую в единственной компоненте Y многообразия $\mu_{T,X}^{-1}(\eta)$. Существует T-инвариантная открытая аффинная окрестность точки x в многообразии X (как и в любом нормальном T-многообразии, см. [21]). Поэтому мы можем считать, что многообразие X аффинно.

Из выбора x следует, что все компоненты многообразия $\pi_{T,X}^{-1}(\pi_{T,X}(x))$, содержащие x, содержатся в Y. Из леммы 6.2 следует теперь, что Y содержит точку x_1 с $\dim Tx_1 = \dim T$.

Пусть X' — страт (см. предложение 2.13) многообразия X, содержащий x_1. Согласно примеру 3.13, многообразие X' является T-инвариантным, а действие $T : X'$ гамильтоново с отображением моментов $\mu_{T,X'} = \mu_{T,X}|_X$. Из предложения 3.4 и равенства $\dim Tx_1 = \dim T$ следует, что в точке x_1 отображение $\mu_{T,X'} = \mu_{T,X}|_{X'}$, а значит и $\mu_{T,X}$, является субмерсией. □

Далее, докажем следующую несложную лемму

Лемма 6.3. *Пусть X — неприводимое аффинное пуассоново многообразие с локально эффективным гамильтоновым действием тора T, а X_1 — гамильтоново подмногообразие в X. Обозначим через T_1 — компоненту единицы ядра неэффективности действия $T : X_1$. Тогда $\dim X_1 - \operatorname{def}_T X_1 \leqslant (\dim X - \dim T) - (\dim X/\!/T_1 - \dim X_1)$. В частности, $\dim X_1 - \operatorname{def}_T X_1 \leqslant \dim X - \operatorname{def}_T X$.*

Доказательство. Имеем следующие неравенства $\dim X_1 - \operatorname{def}_T X_1 = \dim X_1 - \dim T + \dim T_1 = \dim X - \dim T - (\dim X - \dim T_1 - \dim X_1) \leqslant \dim X - \dim T - (\dim X/\!/T_1 - \dim X_1)$. Поскольку $\dim X_1 = \dim X_1/\!/T_1 \leqslant \dim X/\!/T_1$, получаем оставшееся утверждение. □

6.2. **Доказательство теоремы 1.2.** Перейдя к нормализации многообразия X, можем считать, что оно нормально.

Применение леммы 5.12 и следствия 5.9 сводят доказательство к случаю, когда группа G является тором. В этом случае все будет следовать из следующего предложения (поскольку морфизм $\pi_{T_0,R}$ сюръективен).

Предложение 6.4. *Пусть T — тор, а X — (не обязательно аффинное) неприводимое гамильтоново T-многообразие. Тогда слои морфизма $\mu_{T,X}$ имеют размерность не больше $\dim X - \underline{\operatorname{def}}_T(X)$.*

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по $\dim X$. Случай $\dim X = 0$ очевиден.

Пусть T_0 — связная компонента ядра неэффективности для действия $T : X$. Пользуясь замечанием 3.2, можем, перейдя от действия $T : X$ к действию $T/T_0 : X$, считать, что наше действие локально эффективно. Выберем $\alpha \in \mathfrak{t}$ и докажем, что $\dim \mu_{T,X}^{-1}(\alpha) \leqslant \dim X - \dim T$. Перейдя к нормализации многообразия X, можем считать, что X нормально. Выбрав точку на некоторой компоненте многообразия $\mu_{T,X}^{-1}(\alpha)$, можем заменить X на её аффинную инвариантную окрестность и считать X аффинным.

Пусть теперь $X = X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_k$ — стратификация, которую дает предложение 2.13, где X_0 — открытый страт. По предположению индукции $\dim \mu_{G,X}^{-1}(\alpha) \cap X_i \leqslant \dim X_i - m_T(X_i)$ для всех $\alpha \in \mathfrak{t}$ и $i > 0$. Разность $\dim X_i - m_T(X_i)$ не превосходит $\dim X - \dim T$ по лемме 6.3. Поэтому остается показать, что $\dim \mu_{T,X_0}^{-1}(\alpha) \leqslant \dim X - \dim T$. Из предложения 6.1 следует, что для любого $\alpha \in \mathfrak{t}$ и любой компоненты Z многообразия $\mu_{T,X_0}^{-1}(\alpha)$ найдется точка $z \in Z$, в которой μ_{T,X_0} является субмерсией. Отсюда $\dim Z = \dim X - \dim T$. □

6.3. **Следствия из теоремы 1.2.** Начиная с этого места мы будем считать, что гамильтоново G-многообразие X нормально и удовлетворяет условию (EqDef), т.е. что $\underline{\operatorname{def}}_G(X) = \overline{\operatorname{def}}_G(X) = \dim C_{G,X}$. Это так, если многообразие X симплектично в общей точке, или если $m_G(X) = \dim G$.

Следствие 6.5. *Морфизм $\psi_{G,X}/\!/G$ равноразмерен. Если многообразие X нормально, то морфизм $\widetilde{\psi}_{G,X}/\!/G$ открыт. В частности, подмножество $\operatorname{im}\widetilde{\psi}_{G,X} \subset C_{G,X}$ открыто.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго заметим, что многообразие $C_{G,X}$ в данном случае нормально. Теперь требуемое следует из общего результата об открытости равноразмерного морфизма в нормальное многообразие (см. [22]). Последнее утверждение следствия следует из сюръективности морфизма $\pi_{G,X}$. □

Предположим теперь дополнительно, что многообразие X симплектично в общей точке.

Предложение 6.6. 1. *Образ вложения* $\widetilde{\psi}^*_{G,X}: K(C_{G,X}) \to K(X)$ *совпадает с центром* $\mathfrak{z}(K(X)^G)$ *пуассонова поля* $K(X)^G$.

2. *При отождествлении* $K(C_{G,X}) \cong \mathfrak{z}(K(X)^G)$ *посредством указанного вложения* $K[\operatorname{im}\widetilde{\psi}_{G,X}] = K[X] \cap \mathfrak{z}(K(X)^G)$.

Доказательство. Для упрощения обозначений отождествим $K(C_{G,X})$ с $\widetilde{\psi}^*_{G,X}(K(C_{G,X}))$.

Из определения $C_{G,X}$ следует, что $K(C_{G,X}) \subset K(X)^G$ и что $K(C_{G,X})$ содержит подполе, порожденное функциями из $\psi^*_{G,X}(K[\mathfrak{g}]^G)$, и алгебраично над ним. Поскольку $\{H_\xi, f\} = L_{\xi_*}f = 0$ для всех $\xi \in \mathfrak{g}, f \in K(X)^G$, то $\psi^*_{G,X}(K[\mathfrak{g}]^G) \subset \mathfrak{z}(K(X)^G)$. Из предложения 2.1 следует, что $K(C_{G,X}) \subset \mathfrak{z}(K(X))^G$.

Покажем теперь, что $\operatorname{tr.deg} K(C_{G,X}) = \operatorname{tr.deg}\mathfrak{z}(K(X)^G)$. Отметим, что для $x \in X$ имеет место включение $\{d_x f | f \in K(X)^G\} \subset (\mathfrak{g}_* x)^0$ (верхний индекс 0 обозначает аннулятор), которое обращается в равенство для x общего положения. Отсюда вытекает, что $\{v(f) | f \in \mathfrak{z}(K(X)^G)\} \subset \mathfrak{g}_* x \cap (\mathfrak{g}_* x)^\perp$ для x общего положения. Но, согласно замечанию 3.7, $\dim \mathfrak{g}_* x \cap (\mathfrak{g}_* x)^\perp = \operatorname{def}_G(X) = \operatorname{tr.deg} K(C_{G,X})$. Равенство $\operatorname{tr.deg} K(C_{G,X}) = \operatorname{tr.deg}\mathfrak{z}(K(X)^G)$ следует теперь из включения $K(C_{G,X}) \subset \mathfrak{z}(K(X)^G)$.

Для доказательства утверждения пункта 1 осталось доказать, что подполе $K(C_{G,X})$ алгебраически замкнуто в $K(X)^G$. Пусть $f \in K(X)^G$ — алгебраический над $K(C_{G,X})$ элемент. Заменив f на fg для подходящего элемента $g \in K[C_{G,X}]$, можем считать, что f цел над $K[C_{G,X}]$. Поскольку многообразие X нормально, то подалгебра $K[X]^G$ целозамкнута в $K(X)^G$. Из определения $C_{G,X}$ следует, что то же верно для подалгебры $K[C_{G,X}] \subset K(X)^G$. Значит, $f \in K(C_{G,X})$.

Перейдем к пункту 2. Очевидно, что $K[\operatorname{im}\widetilde{\psi}_{G,X}] \subset K[X]$. Остается доказать включение $K(C_{G,X}) \cap K[X] \subset K[\operatorname{im}\widetilde{\psi}_{G,X}]$. Это следует из того, что дивизор полюсов элемента $f \in K(C_{G,X})$ как рациональной функции на X является прообразом при отображении $\widetilde{\psi}_{G,X}$ дивизора полюсов f как рациональной функции на $C_{G,X}$. $\square$

Рассмотрим теперь один частный случай. Можно показать, ср. [11], гл.2, §3, предложение 5, что следующие условия эквивалентны:

(a) $\dim X = m_G(X) + \operatorname{def}_G(X)$.

(b) Поле $K(X)^G$ коммутативно относительно скобки Пуассона.

Гамильтоново G-многообразие X удовлетворяющее условиям (a),(b) называется *коизотропным.*

Следствие 6.7. *Если многообразие X коизотропно, то морфизм $X \to \operatorname{im}\widetilde{\psi}_{G,X}$ является морфизмом факторизации.*

6.4. **Доказательство теоремы 1.3.** Пусть Y, N_0, R, T_0, L_0 обозначают то же, что в пунктах 5.2,5.3. Из следствия 5.9 следует, что гамильтоново T_0-многообразие R удовлетворяет условию (EqDef), и его дефект равен $\operatorname{def}_G(X)$.

Напомним, что мы определяли $\mathfrak{a}^{(Y)}_{G,X}$ как $\overline{\mu_{G,X}(Y^{(L,L)})}$. Согласно коммутативной диаграмме (5.2), $\mathfrak{a}^{(Y)}_{G,X} = \overline{\operatorname{im}\mu_{T_0,Y^{(L,L)}}} = \overline{\operatorname{im}\mu_{T_0,R}}$.

Лемма 6.8. $\mathfrak{a}^{(Y)}_{G,X}$ *является аффинным подпространством в* $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ *размерности* $\operatorname{def}_G(X)$, *пересекающимся с* $\mathfrak{l}_0$ *в одной точке.*

Доказательство. Утверждение о размерности следует из определения многообразия $\mathfrak{a}^{(Y)}_{G,X}$.

Обозначим через Y^1 открытое подмножество в $Y//(L,L)$, состоящее из точек, связная компонента стабилизатора которых при действии группы L равна L_0. Мы можем рассмотреть $Y//(L,L)$ как гамильтоново L-многообразие. Для любой точки $\zeta \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) \cap \mathfrak{l}_0$ гамильтониан H_ζ принадлежит центру алгебры $K[Y^{(L,L)}]$, и поэтому подмногообразие $\mu_{L_0,Y^1}^{-1}(\zeta) \subset Y^1$ является гамильтоновым с локально эффективным действием группы L/L_0. Поэтому $\dim \overline{\mu_{L,Y//(L,L)}(\mu_{L_0,Y^1}^{-1}(\zeta))} = \mathrm{def}_G(X)$. Из того, что $\dim \overline{\mathrm{im}\,\mu_{L,Y//(L,L)}} = \mathrm{def}_G(X)$ следует, что множество $\mathrm{im}\,\mu_{L_0,Y^1}$ конечно. Из неприводимости многообразия Y^1 следует, что это множество состоит из одной N_0-неподвижной точки, которую мы обозначим через ξ. Таким образом, $\mathrm{im}\,\mu_{T_0,Y^1}$ содержится в аффинном пространстве $\xi + \mathfrak{l}_0^\perp$. Из соображений размерности $\mathfrak{a}_{G,X}^{(Y)} = \overline{\mathrm{im}\,\mu_{T_0,Y^{(L,L)}}} = \xi + \mathfrak{l}_0^\perp$. □

Поскольку $Y^{(L,L)}$ является гамильтоновым $N_0/(L,L)$-многообразием, подпространство $\mathfrak{a}_{G,X}^{(Y)}$ является N_0/L-инвариантным. Мы обозначаем группу N_0/L через $W_{G,X}^{(Y)}$. Она действует линейно на $\mathfrak{a}_{G,X}^{(Y)}$, если в качестве нуля взять единственную точку из $\mathfrak{a}_{G,X}^{(Y)} \cap \mathfrak{l}_0^\perp$. Положим $T_1 = L/L_0$. Иными словами, тор T_1 — это фактор T_0 по связной компоненте ядра неэффективности действия $T_0 : R$. Пространство $\mathfrak{a}_{G,X}^{(Y)}$ отождествляется с $\mathfrak{t}_1$, при этом морфизм $\psi_{T_0,R}$ становится композицией $\psi_{T_1,R}$ и вложения $\mathfrak{a}_{G,X}^{(Y)} \hookrightarrow \mathfrak{t}_0$. Действие $T_1 : R$ локально эффективно.

Из коммутативной диаграммы (5.3) имеем изоморфизм $\widetilde{\psi}_{T_1,R}(R)/W_{G,X}^{(Y)} \cong \widetilde{\psi}_{G,X}(X)$ схем над $\mathfrak{a}_{G,X}^{(Y)}/W_{G,X}^{(Y)}$. Для доказательства теоремы осталось показать, что морфизм $\tau : \widetilde{\psi}_{T_1,R}(R) \to \mathfrak{t}_1$ является этальным. Ввиду предложения 3.20, для этого достаточно доказать, что подмногообразие точек его неэтальности имеет коразмерность не меньше 2. Подмножество $\widetilde{\psi}_{T_1,R}(R^{reg}) \subset C_{T_1,R}$ открыто, ибо морфизм $\widetilde{\psi}_{T_1,R}$ равноразмерен (ср. доказательство следствия 6.5). Покажем, что в любой точке y из открытого подмножества $\psi_{T_1,R}(R^{reg}) \cap C_{T_1,R}^{reg} \subset C_{T_1,R}$ морфизм τ является этальным, т.е. что $d_y\tau$ является сюръективным отображением. Это непосредственное следствие предложения 6.1 и равенства $\mu_{T_1,R} = \tau \circ \widetilde{\psi}_{T_1,R}$. Осталось заметить, что дополнение к $\widetilde{\psi}_{T_1,R}(R^{reg}) \cap C_{T_1,R}^{reg}$ в $\mathrm{im}\,\widetilde{\psi}_{T_1,R}$ имеет коразмерность не меньше 2. Действительно, дополнение к $\widetilde{\psi}_{T_1,R}(R)^{reg}$ в $\mathrm{im}\,\widetilde{\psi}_{T_1,R}$ имеет коразмерность не меньше 2 из нормальности многообразия $C_{T_1,R}$, дополнение к $\widetilde{\psi}_{T_1,R}(R^{reg})$ — из нормальности X и равноразмерности морфизма $\widetilde{\psi}_{T_1,R}$ (предложение 6.4). Таким образом, теорема 1.3 доказана.

6.5. **Конические гамильтоновы многообразия.** В этом пункте мы приведем примеры конических гамильтоновых многообразий (см. определение 1.4) и докажем теорему 1.5.

Пример 6.9. Пусть H — редуктивная алгебраическая группа, а $\mathfrak{h}$ — ее алгебра Ли. Группа K^* действует на $\mathfrak{h}$ обычным образом, т.е. $(t,x) \mapsto tx, t \in K^*, x \in \mathfrak{h}$. Через X обозначим некоторый замкнутый H-инвариантный конус (т.е. K^*-инвариантное подмножество). Для любой редуктивной подгруппы $G \subset H$ гамильтоново G-многообразие X с действием группы K^*, индуцированном с $\mathfrak{h}$, является коническим степени 1.

Пример 6.10. Пусть $G : V$ — линейное гамильтоново действие. Тогда действие $K^* : V$ по правилу $(t,v) \mapsto tv$ наделяет V структурой конического гамильтонова G-многообразия степени 2.

Пример 6.11. Пусть Y — неприводимое аффинное G-многообразие и $X = T^*Y$ (см. примеры 2.10,3.11). X является векторным расслоением над Y, поэтому можем рассмотреть действие $K^* : X$ послойным умножением на константы. Гамильтоново G-многообразие X с таким действием группы K^* является коническим степени 1.

Пример 6.12. Если X — коническое гамильтоново G-многообразие, то любое G-инвариантное объединение компонент многообразия X также является коническим.

Пример 6.13. Пусть X — коническое гамильтоново G-многообразие. Действие $K^* : X$ поднимается до действия на нормализации $\widetilde{X}$ многообразия X. Многообразие $\widetilde{X}$ с этим действием становится коническим.

Замечание 6.14. Во всех приведенных примерах имеет место равенство $\mu_{G,X}(t.x) = t^k\mu_{G,X}(x), x \in X, t \in K^*$. Можно, однако, построить примеры конических гамильтоновых многообразий, для которых это равенство верно не будет. Например, таковыми являются модельные многообразия, построенные в работе [23].

Теперь докажем основное свойство конических гамильтоновых многообразий.

Предложение 6.15. *Пусть X — неприводимое нормальное аффинное коническое многообразие, удовлетворяющее условию (EqDef). Тогда морфизм $\widetilde{\psi}_{G,X}$ сюръективен.*

Доказательство. Подалгебра $\psi_{G,X}^*(K[\mathfrak{g}]^G) \subset K[X]^G$ является K^*-инвариантной из условия (Con2). Поэтому таково же ее целое замыкание в $K[X]^G$, т.е. $K[C_{G,X}]$. Таким образом, имеем действие $K^* : C_{G,X}$, для которого конечный морфизм $\tau : C_{G,X} \to \mathfrak{g}/\!/G$ является эквивариантным. Для любого элемента $\xi \in \mathfrak{g}/\!/G$ предел $\lim_{t\to 0} t.\xi$ существует и равен 0. Поэтому для любого $\xi \in C_{G,X}$ предел $\lim_{t\to 0} t.\xi$ также существует и лежит в $\tau^{-1}(0)$. Поскольку многообразие $C_{G,X}$ неприводимо, множество $\tau^{-1}(0)$ состоит из одной точки, которую мы также обозначим через 0.

Рассмотрим точку $x \in X$. Из условия (Con1) следует, что существует предел $y = \lim_{t\to 0} tx$. Из условия (Con2) следует, что $\psi_{G,X}(y) = 0$, а значит $\widetilde{\psi}_{G,X}(y) = 0$. Кроме того, множество $\operatorname{im}\widetilde{\psi}_{G,X} = \operatorname{im}\widetilde{\psi}_{G,X}/\!/G$ является K^*-инвариантным. Сюръективность морфизма $\widetilde{\psi}_{G,X}$ следует теперь из того, что $\widetilde{\psi}_{G,X}(X)$ является открытым подмножеством в $C_{G,X}$ (следствие 6.5). □

Предложения 6.6, 6.15 немедленно дают следующее

Следствие 6.16. *Для конического гамильтонова G-многообразия X симплектичного в общей точке имеет место равенство $\mathfrak{z}(K(X)^G) \cap K[X] = K[C_{G,X}]$.*

Кроме того, для конических G-многообразий образ $\psi_{G,X}(X)$ содержит 0. Отсюда следует, что $\mathfrak{a}_{G,X}^{(Y)}$ является векторным подпространством в $\mathfrak{g}$.

Доказательство теоремы 1.5. Мы сохраняем обозначения, использованные в предыдущем пункте.

Морфизм $R/\!/T_0 \to C_{G,X}$ из диаграммы (5.3) сюръективен, поскольку сюръективен морфизм $\widetilde{\psi}_{G,X}/\!/G$. Поэтому морфизм $\widetilde{\psi}_{R,T_0}/\!/T_0 : R/\!/T_0 \to C_{T_0,R}$ также сюръективен (поскольку $W_{G,X}^{(Y)}$-эквивариантен). Отсюда следует, что морфизм $C_{T_0,R} \to \mathfrak{a}_{G,X}^{(Y)}$ этален (см. предыдущий пункт). Поскольку этот морфизм конечен, то он является изоморфизмом. Требуемое теперь следует из диаграммы (5.3). □

6.6. **Пример, когда группа $W_{G,X}^{(Y)}$ не порождена отражениями.** Ниже построен пример гладкого симплектического конического аффинного гамильтонова G-многообразия, для которого группа $W_{G,X}^{(Y)}$ не порождена отражениями.

Пусть $G_0 = \mathrm{SL}(2)\times\mathrm{SL}(2)$, V_1, V_2 — двумерные неприводимые модули над первым множителем, V_1', V_2' — над вторым. Пусть γ_V — линейный оператор на $V = V_1\oplus V_2\oplus V_1'\oplus V_2'$, $\gamma_V(v_1, v_2, v_1', v_2') = (v_1, -v_2, v_1', -v_2'), v_i \in V_i, v_i' \in V_i'$. Положим $G = K^* \times G_0, \widetilde{X} = T^*K^* \times V$. Легко видеть, что $\widetilde{X}$ является коизотропным коническим гамильтоновым G-многообразием (если оба сомножителя рассматривать, как многообразия степени 2, то действие группы K^* берется диагональным). Имеем инволюцию γ_T многообразия T^*K^*, индуцированную умножением на -1 на K^*. Рассмотрим инволюцию γ многообразия $\widetilde{X}$, заданную по формуле $\gamma(x,y) = (\gamma_T x, \gamma_V y), x \in T^*K^*, y \in V$. Эта инволюция является гамильтоновым морфизмом, перестановочным с действием группы K^*. Поскольку она не имеет неподвижных точек, то многообразие $X = \widetilde{X}/\mathbb{Z}_2$ (неединичный элемент группы $\mathbb{Z}_2$ действует как γ) является гладким. Таким образом, имеем гладкое симплектическое гамильтоново коническое многообразие X. Если отождествить $\widetilde{X}//G$ с векторным пространством K^3, то неединичный элемент из $\mathbb{Z}_2$, будет действовать на нем умножением на матрицу $diag(1,-1,-1)$. Отсюда следует, что $X//G \cong (\widetilde{X}//G)/\mathbb{Z}_2$ не является гладким многообразием. То, что группа $W_{G,X}^{(Y)}$ не порождается отражениями теперь следует из следствия 6.7 и теоремы 1.5.

7. Приложение

Это приложение призвано напомнить некоторые стандартные факты и зафиксировать выбор знаков.

7.1. **Бивекторы и 2-формы.** Пусть V — конечномерное векторное пространство. Пусть P — бивектор из $\bigwedge^2 V$. Бивектор P задает отображение $v : V^* \to V$ по формуле

$$\langle \alpha, v(\beta)\rangle = \langle P, \alpha\wedge\beta\rangle, \alpha, \beta \in V^*. \tag{7.1}$$

Если P — невырожденный бивектор, то v является изоморфизмом. В общем случае P лежит в $\bigwedge^2 v(V^*)$ и является в этом пространстве невырожденным бивектором. Отображение $v : V^* \to V$ задается как композиция канонической сюръекции $V^* \to v(V^*)^*$, изоморфизма $v(V^*)^* \to v(V^*)$, задаваемого невырожденным бивектором $P \in \bigwedge^2 v(V^*)$, и вложения $v(V^*) \hookrightarrow V$.

Можем определить невырожденную кососимметрическую форму ω_P на $v(V^*)$, задающуюся по формуле

$$\omega_P(v(\alpha), v(\beta)) = \langle P, \alpha\wedge\beta\rangle = \langle \alpha, v(\beta)\rangle \tag{7.2}$$

Пусть теперь задана невырожденная кососимметрическая билинейная форма ω на подпространстве $U \subset V$. Мы можем рассмотреть ω как невырожденный бивектор из $\bigwedge^2 U^*$ и построить бивектор $P_\omega \in \bigwedge^2 U$ по формуле (7.2). Вкладывая $\bigwedge^2 U$ в $\bigwedge^2 V$, получаем бивектор в $\bigwedge^2 V$ с $v(V^*) = U$. Отображения $P \mapsto \omega_P$, $\omega \mapsto P_\omega$ являются взаимно-обратными.

7.2. **Пучок векторных полей.** Пусть A — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей. Напомним, что K-линейное отображение $D : A \to A$ называется дифференцированием алгебры A, если $D(ab) = bDa + aDb$. Множество всех дифференцирований алгебры A мы обозначаем через $\mathrm{Der}(A, A)$. Оно обладает естественной структурой A-модуля и структурой K-алгебры Ли со скобкой $[D_1, D_2] = D_2D_1 - D_1D_2$.

Пусть теперь S — мультипликативная система в алгебре A и D — дифференцирование алгебры A. Для алгебры частных A_S имеем корректно определенное дифференцирование $D_S : A_S \to A_S$, задаваемое формулой

$$D_S\frac{a}{s} = \frac{sDa - aDs}{s^2}, a \in A, s \in S.$$

При этом, если $\varphi : A \to A_S$ — канонический гомоморфизм, то $\varphi(Da) = D_S\varphi(a)$ для всех $a \in A$.

Лемма 7.1. *Любой минимальный простой идеал и радикал алгебры A устойчивы относительно всех дифференцирований.*

Доказательство теоремы 1.5. Радикал является пересечением минимальных простых идеалов $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ алгебры A. Поэтому достаточно показать, что дифференцирование D оставляет на месте минимальный простой идеал $\mathfrak{p}$. Поскольку $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, то достаточно доказать, что $D_\mathfrak{p}(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Кольцо $A_\mathfrak{p}$ является локальным артиновым кольцом, поэтому любой элемент из $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ нильпотентен. Пусть $x \in \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}, x^n = 0, x^{n-1} \neq 0$. Тогда $nx^{n-1}Dx = D(x^n) = 0$. Отсюда следует, что $D_\mathfrak{p}x$ является делителем нуля в $A_\mathfrak{p}$, и, стало быть, содержится в $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. $\square$

Пусть теперь X — алгебраическое многообразие. Каждому открытому подмножеству $U \subset X$ сопоставим $K[U]$-модуль $\mathcal{V}ect(U) = \mathrm{Der}(K[U], K[U])$. Из сказанного выше следует, что $\mathcal{V}ect$ является пучком, который мы назовем *пучком векторных полей* многообразия X. Это пучок алгебр Ли. Векторное поле ξ на $U \subset X$ действует на регулярных на U функциях, формах и т.д. посредством производной Ли L_ξ. При этом мы считаем, что $L_\xi f = -\xi f$, где $f \in K[U]$, а в правой части ξ рассматривается, как дифференцирование алгебры $K[U]$. Отображение $\xi \mapsto L_\xi$ является гомоморфизмом из $\mathcal{V}ect(U)$ в $\mathfrak{gl}(K[U])$.

Наконец, пусть G — редуктивная алгебраическая группа, действующая на многообразии X. Этому действию сопоставляется гомоморфизм алгебр Ли $\xi \mapsto \xi_*$ из касательной алгебры $\mathfrak{g}$ группы G в $\mathcal{V}ect(X)$. Глобальное векторное поле ξ_* будем называть полем скоростей. Через $\mathfrak{g}_*x$ мы будем обозначать подпространство в T_xX, порожденное векторами $\xi_*x, \xi \in \mathfrak{g}$.

7.3. **Подъем дифференцирований.**

Предложение 7.2. *Пусть $A \subset B$ — алгебраическое расширение алгебр без делителей нуля. Тогда если $d_1, d_2 \in \mathrm{Der}(B, B)$ таковы, что $d_1|_A = d_2|A$, то $d_1 = d_2$. Более того, если A, B являются полями, то для любого дифференцирования d поля A со значениями в B найдется дифференцирование d_1 поля B, для которого $d_1|_A = d$.*

Доказательство. Любое дифференцирование алгебры однозначно продолжается до дифференцирования поля частных, поэтому везде можем считать, что A, B — поля. В этом случае утверждение хорошо известно, см., скажем [24], гл.10. $\square$

7.4. **Инволютивные распределения.** Пусть X — гладкое алгебраическое многообразие, и V — локально тривиальное в этальной топологии подрасслоение в касательном расслоении TX. Подрасслоение V будем называть *распределением* на X. Распределение V будем называть *инволютивным*, если для двух сечений ξ, η расслоения V над любой этальной окрестностью в X коммутатор $[\xi, \eta]$ также является сечением расслоения V.

Отметим, что если V — распределение на X и $\varphi : Y \to X$ — этальный морфизм алгебраических многообразий, то распределения V на X и φ^*V на Y одновременно инволютивны или не инволютивны.

Пусть теперь $H \subset G$ — алгебраические группы и X — квазипроективное гладкое H-многообразие. Существует однородное расслоение $G *_H X$ (см. [7], п. 4.8). Пусть V — H-инвариантное распределение на X, для которого $\mathfrak{h}_*x \subset V_x$ при всех $x \in X$. Можем рассмотреть G-инвариантное распределение $\widetilde{V}$ на $G *_H X$, заданное равенством $\widetilde{V}_{[e,x]} = V_x + \mathfrak{g}_*x, x \in X$. Обратно, если есть G-инвариантное распределение $\widetilde{V}$ на $G *_H X$, для которого $\mathfrak{g}_*x \subset \widetilde{V}_x$ для всех $x \in X$, то мы можем определить распределение V на X равенством $V_x = \widetilde{V}_{[e,x]} \cap T_{[e,x]}X$. Это будет H-инвариантное распределение на X со свойством $\mathfrak{h}_*x \subset V_x$ для всех $x \in X$. Очевидно, что соответствия $V \mapsto \widetilde{V}, \widetilde{V} \mapsto V$ взаимно обратны.

Лемма 7.3. *Инволютивность распределений V и $\widetilde{V}$ эквивалентна.*

Доказательство. Существует такое квазисечение (см. [7], §2) Y для действия $H : G$ правыми сдвигами, что морфизм $Y \to G/H$ этален. Рассмотрим этальный морфизм $\varphi : X \times Y \to G *_H X, (x, y) \mapsto [y, x]$. Распределение $\varphi^*\widetilde{V}$ есть ни что иное, как $V \otimes TY \subset TX \otimes TY = T(X \times Y)$. Отсюда следует требуемое. □

Указатель обозначений

Ниже приводятся некоторые употребляемые в тексте обозначения. Они даются в алфавитном порядке, латинские буквы предшествуют греческим.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	спаривание элементов двух сопряженных векторных пространств.
$\#S$	мощность множества S.
∂_v	операция взятия производной по направлению, определенному касательным вектором v.
G°	связная компонента единицы алгебраической группы G.
(G, G) (соотв. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$)	коммутант группы G (соотв. алгебры Ли $\mathfrak{g}$).
$G *_H X$	однородное расслоение над однородным пространством G/H со слоем X.
G_u (соотв. $\mathfrak{g}_u$)	унипотентный радикал алгебраической группы G (соотв. алгебраической алгебры Ли $\mathfrak{g}$).
G_x	стабилизатор точки x при действии группы G.
$\mathfrak{g}_x$	аннулятор вектора x в модуле над алгеброй Ли $\mathfrak{g}$.
$[g, x]$	класс пары $(g, x), g \in G, x \in X$ в однородном расслоении $G *_H X$.
$f\|_Y$	ограничение отображения f на подмножество Y.
$\operatorname{im} f$	образ отображения f.
L_ξ	производная Ли по направлению векторного поля ξ.
$m_G(X)$	максимальная размерность орбиты для действия алгебраической группы G на алгебраическом многообразии X.
$N_G(H)$ (соотв. $N_G(\mathfrak{h})$)	нормализатор подгруппы H (соотв. подалгебры $\mathfrak{h}$ в касательной алгебре группы G) в группе G.
$S_A(D)$	симметрическая алгебра A-модуля D.
$\operatorname{Spec}(A)$	аффинная схема, соответствующая алгебре A.
$U^\perp$	ортогональное дополнение к подпространству U в некотором векторном пространстве V с фиксированной невырожденной билинейной формой.
$v(f)$	косой градиент рациональной функции f на пуассоновом многообразии.
$\overline{X}$	замыкание подмножества алгебраического многообразия в топологии Зарисского.
X^G	множество неподвижных точек для действия $G : X$.
$X//G$	категорный фактор алгебраического многообразия X при действии редуктивной группы G.
X^{max}	открытое подмножество гладких точек x пуассонова многообразия X, в которых ранг бивектора Пуассона принимает наибольшее значение среди всех гладких точек.

X^{reg}	подмножество гладких точек алгебраического многообразия X.
$Z(G)$ (соотв. $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$)	центр алгебраической группы G (соотв. алгебры Ли $\mathfrak{g}$).
$\Gamma(X,V)$	пространство сечений векторного расслоения V над X.
$\pi_{G,X}$	морфизм факторизации $X \to X//G$ для действия $G:X$.
φ^*	обратный гомоморфизм алгебр регулярных функций, соответствующий морфизму φ алгебраических многообразий.
$\varphi//G$	Морфизм между факторами $X//G, Y//G$ индуцированный G-эквивариантным морфизмом $\varphi : X \to Y$.

Если не оговорено противное, то для алгебраической группы, обозначенной прописной латинской буквой, ее касательная алгебра обозначается строчной готической буквой.

Литература

[1] F. Kirwan, *Convexity properties of the moment mapping III.* Invent. Math. 77(1984), 547-552.
[2] F. Knop, *Weylgruppe und Momentabbildung.* Invent. Math. 1990. V. 99. p. 1-23.
[3] F. Knop, *Weyl groups of Hamiltonian manifolds, I.* Preprint (1997). arXiv.math.dg-ga/9712010.
[4] F. Knop, *The assymptotic behaviour of invariant collective motion.* Invent. Math. 1994. V.114. p. 309-328.
[5] D.A. Timashev, *Equivariant symplectic geometry of cotangent bundles II.* Preprint (2004), arXiv:math.AG/0502284.
[6] F. Knop, *Invariant functions on symplectic representations.* Preprint (2005), arXiv:math.AG/0506171.
[7] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов, *Теория инвариантов.* Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр., т. 55. М.: ВИНИТИ, 1989, 137-309.
[8] D. Kaledin *Normalization of a Poisson algebra is Poisson.* Preprint (2003), arXiv:math.AC/0310173.
[9] A. Seidenberg, *Derivations and integral closure.* Pacific J. Math, 16(1966), 167-173.
[10] D.Eisenbud, *Commutative algebra with a view towards algebraic geometry.* GTM 150, Springer Verlag, 1995.
[11] Э.Б. Винберг, *Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия*, Успехи мат. наук, 56 (2001), N1, 3-62.
[12] В.И. Данилов, *Алгебраические многообразия и схемы.* Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр., т. 23. М.: ВИНИТИ, 1989.
[13] V. Guillemin, Sh. Sternberg, *Symplectic techniques in physics.* Cambridge University Press, 1984.
[14] J. Milne, *Etale cohomolgy.* Princeton Math. Series, 33. 1980.
[15] Х. Крафт, *Геометрические методы в теории инвариантов.* М.:Мир, 1987, 312с.
[16] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* гл. 7,8. М.: Мир, 1978.
[17] J. Marsden, A. Weinstein, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry.* Rep. Math. Phys. 5(1974), p. 121-130.
[18] F. Grosshans, *The invariants of unipotent radicals of parabolic groups.* Invent. Math. 73(1983), 1-9.
[19] В.Л. Попов, *Стягивание действий редуктивных алгебраических групп.* Мат. сб., 130(1986), N3, с. 310-334.
[20] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов, *Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий.* Известия АН СССР, сер. мат., 36(1972), с. 749-764.
[21] H. Sumihiro, *Equivariant completion.* J. Math. Kyoto Univ., v. 14 (1974), N1.
[22] C. Chevalley, *Foundaments de la géométrie algébrique.* Paris, 1958.
[23] И.В. Лосев, *Симплектические слайсы для редуктивных групп.* Препринт.
[24] С. Ленг, *Алгебра.* М., Мир, 1968.